

OPERAČNÁ ANALÝZA

ČASŤ I

Henrieta HRABLIK-CHOVANOVÁ
Peter SAKÁL

2011



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Materiálovotechnologická fakulta so sídlom v Trnave

© Ing. Henrieta Hrablík-Chovanová, PhD., prof. Ing. Peter Sakál, CSc.

Recenzenti : doc. Ing. Vladimír Jerz, CSc.
doc. Ing. Rudolf Rybanský, CSc.

Jazyková korektúra : Mgr. Valéria Krahulcová

Schválila Vedecká rada Materiálovotechnologickej fakulty STU ako vysokoškolské skriptá dňa 15. decembra 2010 pre všetky študijné programy Materiálovotechnologickej fakulty STU v Trnave

ISBN 978-80-8096-151-0
EAN 9788080961510

PREDSLOV

Skriptá Operačná analýza časť I. sú určené pre potreby predmetu **OPERAČNÁ ANALÝZA** a majú ambíciu uviesť študentov do problematiky ekonomického modelovania a tvorby ekonomických analýz na základe využitia ekonomicko-matematických metód.

Cieľom predmetu OPERAČNÁ ANALÝZA je poskytnúť študentom prvého inžinierskeho ročníka na STU Bratislava Materiálovotechnologickej fakulty so sídlom v Trnave základné informácie o matematickom modelovaní ekonomických problémov, umožniť im orientáciu v zložitých problémoch ekonomického života, ktoré je možné riešiť pomocou metód a modelov operačnej analýzy, a tým prispieť k formovaniu ich moderného ekonomického myslenia a správneho rozhodovania sa. Predpokladom pre predmet operačná analýza je základná znalosť matematiky a informatiky a študent by mal tiež ovládať základy štatistiky, ekonomiky a manažmentu podniku.

Študenti po ukončení predmetu by mali získať zručnosti:

- v ovládaní pojmového aparátu ekonomicko-matematického modelovania,
- v analýze základných súvislostí medzi ekonomickými javmi a procesmi,
- v tvorbe ekonomických modelov a ich interpretácií,
- v ovládaní ekonomicko-matematických metód využívaných pri ekonomických analýzach,
- v oblasti rozhodovania manažmentu pri riešení zložitých ekonomických problémov.

Študijný materiál je spracovaný pre potreby samoštúdia teoretických poznatkov a vedomostí študentov a získanie základných informácií a pojmového aparátu z predmetu operačná analýza. Súčasťou každej kapitoly sú aj vypočítané vzorové príklady a v závere kapitol sú úlohy a príklady na samotné samoštúdium. Celý študijný materiál pozostáva z piatich obsiahlych kapitol.

Prvá kapitola je úvodom do predmetu operačná analýza. Stručne sú charakterizované jednotlivé vývojové etapy operačnej analýzy, kvantifikované kvantitatívne metódy, opísané charakteristické črty predmetu a implementačný model (proces prijímania rozhodnutia).

Druhá kapitola je venovaná štruktúrnej analýze (štruktúrnym modelom). V kapitole sú stručne vysvetlené základné zásady zostrojenia štruktúrnych modelov, klasifikácia štruktúrnych modelov, konštrukcia základného a rozšíreného Leontjeovho štruktúrneho modelu, zostavenie a riešenie úloh pomocou štruktúrneho modelu operatívneho plánu.

Tretia kapitola je venovaná problému lineárneho programovania. Zaoberá sa základnou charakteristikou matematického a lineárneho programovania, klasifikáciou úloh matematického programovania, klasifikáciou súvislostí maticovo-vektorového zápisu modelov matematického programovania a lineárnych optimalizačných modelov a klasickými aplikáciami lineárneho optimalizačného modelu v riešených príkladoch. V závere kapitoly sú zaradené riešené príklady a úlohy/otázky na samostatné riešenie.

Náplňou **štvrtej kapitoly** je charakteristika a teoretické východiská distribučných problémov. V kapitole sú charakterizované jednotlivé metódy na riešenie dopravných úloh, metódy na nájdenie východiskového (vyhovujúceho) riešenia a metóda na nájdenie optimálneho riešenia dopravnej úlohy. Stručne je opísaná aj teória priradovacieho/pridelovacieho problému a jeho riešenie pomocou Maďarskej metódy.

Posledná, **piata kapitola** sa venuje sieťovej analýze, konkrétne klasifikácii a charakteristike sieťových grafov, časovej analýze sieťových grafov hranovo a uzlovo definovaných metódami CPM, PERT, MPM, a GERT a v stručnosti je charakterizovaná aj zdrojová a nákladová analýza sieťového grafu.

Skriptá Operačná analýza časť I. je prvou časťou komplexného spracovania témy operačnej analýzy, ktorá je na MTF súčasťou predmetu OPERAČNÁ ANALÝZA. Obsahom skript sú aj prevzaté kapitoly z monografií (Sakál, 2003): 3.7.1, 3.7.2, 3.9, 3.10 a 3.11 a (Sakál, 2006): 4.1, 5.2 a 5.3, za čo autorom ďakujeme. Kapitola 5. Sieťová analýza bola spracovaná v rámci projektu VEGA 1/0491/09: *Kontrola vyspelosti procesov projektového manažmentu ako nástroj zvyšovania konkurencieschopnosti strojárskych priemyselných podnikov*.

Následne budú spracované skriptá Operačná analýza časť II., v ktorých budú obsiahnuté oblasti operačnej analýzy, ako sú sekvenčné modely, modely obnovy a modely hromadnej obsluhy, modely zásob, viackriteriálna optimalizácia s využitím softvérového nástroja Expert Choice a programové prostriedky na podporu operačnej analýzy. Skriptá Operačná analýza II. budú spracované s podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja na základe zmluvy č. LPP - 0384-09., *Koncept HCS modelu 3E vs koncept Corporate Social Responsibility (CSR)*“.

1. ÚVOD DO OPERAČNEJ ANALÝZY

Prvé jednoduché úlohy operačnej analýzy sa „riešili“ už v dobe priemyselnej revolúcie. Historickým prelomom vo vývoji vedeckých metód riadenia sa stala 2 svetová vojna. Na analýzu zložitých vojenských operácií sa začala používať nová vedná disciplína, ktorá dostala názov **operačný výskum (Operations Research)**. Táto disciplína sa zaoberala vedeckou analýzou zložitých vojenských operácií a vypracovaním vhodných odporúčení na ich efektívne riešenie. Po 2. svetovej vojne sa ukázalo, že sa tieto metódy dajú aplikovať aj na riadenie veľkých priemyselných komplexov, a preto sa operačný výskum začal využívať aj v ekonomike.

Operačný výskum prekonal doteraz niekoľko vývojových etáp (Ivaničová, 2002):

1. **etapa**- predstavuje ju obdobie 2.s.v., v ktorej išlo predovšetkým o vojenské aplikácie,
2. **etapa**- etapa po vojne, ťažisko aplikácií sa presúva na problémy manažmentu podnikov, najmä priemyselných,
3. **etapa**- nemožno ju časovo jednoznačne vymedziť (približne ide o šesťdesiate a sedemdesiate roky 20. storočia), ďalej rozširuje oblasť skúmania a aplikácie na iné typy činností, ako sú napr. doprava, štátna správa, zdravotníctvo, výskum, školstvo, šport a iné. Zároveň sa rozlišujú tendencie v oblasti skúmania a riadenia globálnych procesov, napr. fungovanie podnikov ako celkov. Tým sa však prekračuje rámec klasického operačného výskumu. Používajú sa aj iné vedné disciplíny zamerané na modelovanie v ekonómii, ako je ekonometria a matematická ekonómia.

V súčasnosti sa ako operačný výskum označuje disciplína zameraná na riešenie problémov manažmentu pomocou matematických modelov a metód. V USA sa často nazýva priamo ako „veda o manažmente“ (management science). V nemecky hovoriacich krajinách sa používanie týchto modelov a metód uvádza pod názvom podnikový výskum, optimálne (matematické) plánovanie alebo použitie matematických metód na prípravu optimálnych rozhodnutí. (Ivaničová, 2002)

Ďalej budeme pojmom operačný výskum (operačná analýza) rozumieť takú vednú disciplínu, ktorej **predmetom skúmania je štúdium a analýza operácií a procesov, ktoré prebiehajú alebo sú plánované v určitej organizačnej jednotke (podnik, závod, dielňa,...), pričom**

štúdium a analýza týchto operácií sa najčastejšie uskutočňuje pomocou matematického modelovania.

Matematické modelovanie ekonomických javov a procesov je významným nástrojom racionalizácie riadiacej činnosti podnikov. Toto sa umocňuje využívaním výpočtovej techniky a automatizovaných systémov riadenia. Riešenie pomocou matematických modelov dnes zasahuje do rôznych oblastí : plánovanie, ekonomická analýza, prognózovanie, riadenie v najširšom zmysle slova. Problémy riešené v praxi sú rozmanité a pri ich riešení je možné použiť a aplikovať rôznu techniku modelovania i rozličné typy modelov a metód (tab. 2-1) Metódy ekonomickej analýzy.

KLASIFIKÁCIA VYBRANÝCH KVANTITATÍVNYCH METÓD

Tab. 2-1

Kvantitatívne metódy	Klasifikácia
Metódy popisnej štatistiky	Rozdelenie početnosti Histogramy Paretov diagram Grafické metódy Časové rady Diagramy Z a bodové diagramy
Metódy manažérskej štatistiky	Priemery , medián, modus Variabilita- smerodajná odchýlka, variačný koeficient Percentily, koeficient šikmosti Indexy – reťazové a bázičné
Pravdepodobnostné metódy	Rozdelenie pravdepodobnosti Normálne rozdelenie Binomické rozdelenie
Rozhodovanie v podmienkach neurčitosti	Metóda Maximin, Maximax Kritérium minimalizácie strát Rozhodovacie stromy a rozhodovacie siete Stanovenie ceny dokonalej informácie
Analýza rizika	Analýza citlivosti Model očakávanej užitočnosti Teória portfólia Hodnotenie rizikovosti úrokových mier Hedging

Kvantitatívne metódy	Klasifikácia
Modely riadenia zásob	Model veľkosti objednávky Modely s predstihom Metóda ABC riadenia zásob
Modely hromadnej obsluhy	Modely bez čakania Modely s čakaním Jednokanálové modely Viackanálové modely
Modely obnovy	Modely obnovy s jednoduchou reprodukciou Modely obnovy s rozšírenou reprodukciou Model fyzického opotrebenia strojov
Modely údržby	Model kontroly prevádzkyschopnosti zariadenia Model preventívnej výmeny Model skupinovej výmeny
Modely teórie hier	Bayesov princíp Waldovo kritérium Savageovo kritérium Hurwitzovo kritérium
Metódy výskumu trhu	Interval spoľahlivosti Testovanie hypotéz Štatistická inferencia Výberové rozdelenie
Metódy riadenia kvality	Kontrolné diagramy Paretove diagramy Išikawove diagramy
Prognostické metódy	Projektovanie trendov Modely časových radov Jednoduchá a rozšírená regresia Kľzavé priemery
Metódy výberu variantov	Nominálne stupnice Ordinálne stupnice Kardinálne stupnice Metódy stanovenia váh kritérií
Formálno-logické metódy	Rozhodovacie tabuľky Rozhodovacia analýza
Optimalizačné metódy	Lineárne programovanie Dynamické programovanie

Kvantitatívne metódy	Klasifikácia
	Teória optimálnych procesov
Metódy projektového manažmentu	Ganttov diagram Sieťová analýza Metóda PERT
Simulačné metódy	Vývojové diagramy Metóda Monte Carlo Generátory náhodných čísel
Metódy finančného rozhodovania	Metóda čistej súčasnej hodnoty Vnútorné výnosové percento Náklady kapitálu a hodnota podniku Optimalizácia kapitálovej štruktúry
Metódy strategického rozhodovania	SWOT analýza Portfóliové matice – BCG, GE, ABC Matica ziskovosti Porterov hodnotový reťazec

Zdroj: Metódy ekonomickej analýzy

Cieľom štúdia a analýzy je pripraviť vedecky zdôvodnené závery a odporúčenia pre tých zamestnancov organizačných jednotiek, ktorých úlohou je organizovať a riadiť tieto procesy a operácie. Operačná analýza (OA) má tri charakteristické črty:

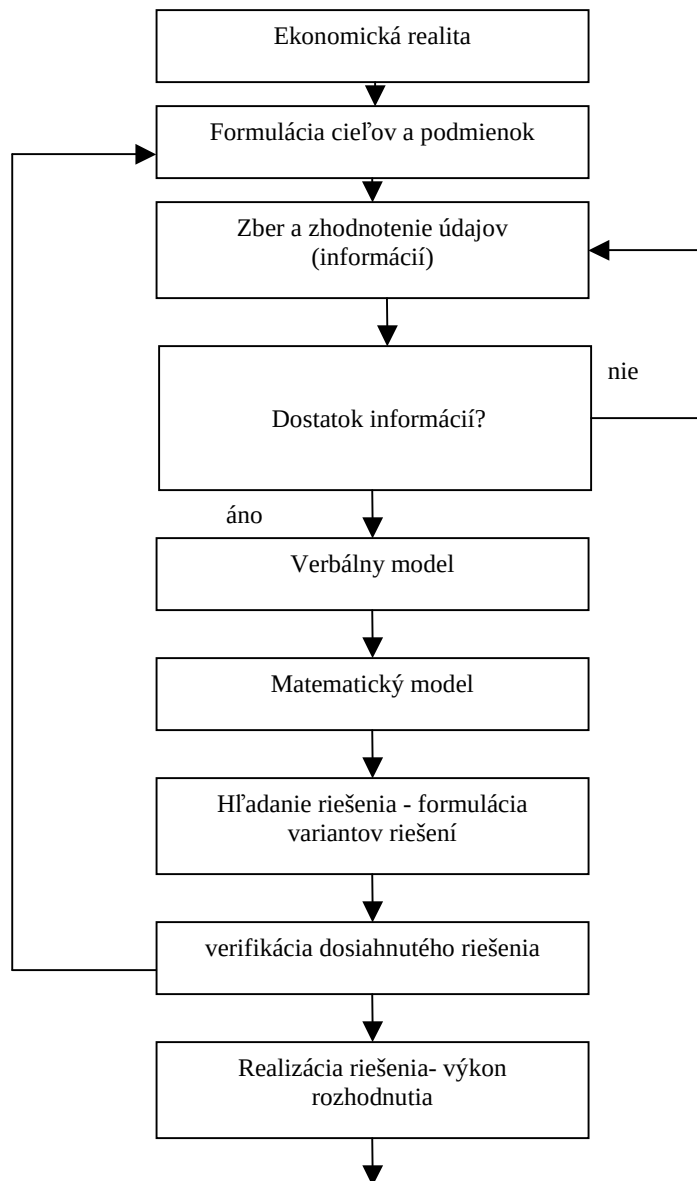
- 1. Systémový prístup** k riešeniu problémov = myslenie a konanie, pri ktorom sa javy chápu komplexne so svojimi vnútornými a vonkajšími súvislosťami.
- 2. Vytváranie vedeckých tímov** na riešenie problémov, v OA sa využívajú poznatky z viacerých vedeckých disciplín.
- 3. Konštrukcia matematických modelov** na riešenie problémov.

Predmetom záujmu v operačnej analýze je riadenie komplexných systémov, kde rozhodovanie vykonáva jednotlivec alebo riadiaci kolektív a kde práve základné metódy operačnej analýzy majú pre kvalifikované rozhodovanie riadiacich subjektov dodávať vedecky zdôvodnené podklady. Preto je v tomto prípade možné rozhodovanie (rozhodovací proces) považovať za nenáhodnú voľbu (nenáhodný výber) jedného z množiny možných riešení na základe nejakého premysleného dôvodu z hľadiska splnenia stanoveného cieľa. (Máca, 2002)

Manažérska prax je založená na neustálom prijímaní rozhodnutí. Pri čoraz väčšom množstve informácií podstatných pre rozhodovanie je riešenie problémov často úlohou pre celý kolektív odborníkov rôznych profesií, a zvyčajne býva kontroverzné. Aby sa predišlo vytvoreniu súboru subjektívnych rozhodnutí na rôznych úrovniach riadenia, je potrebné vykonať kvantitatívne analýzy stavu a priebehu ekonomických procesov ako podklad na objektivizáciu rozhodnutí a ich argumentáciu. (Ivaničová, 2002)

Proces prijatia rozhodnutia prebieha na základe informácií zvyčajne v niekoľkých etapách. Etapy postupu pri aplikácii modelu operačnej analýzy sa nazývajú aj ako implementačný model. Sú to nasledovné etapy (obr. 2-1):

- 1. etapa: formulácia úlohy,** ktorú chceme riešiť (vznik a identifikácia problému, jeho ekonomická formulácia, zostavenie ekonomického modelu, správne formulovaná úloha = 50% riešenia), vymedzenie všetkých skutočností, ktoré majú na splnenie vytýčeného cieľa rozhodujúci význam. Správna formulácia problému predpokladá poznanie všetkých okolností a vplyvov, ktoré s daným problémom súvisia. Obvykle sa skúmaná problematika dotýka celého radu vedných odborov (ekonomiky, technológie,...).
z toho vyplýva, že formulácia problému je závažný proces, ktorý vyžaduje tímovú prácu.
- 2. etapa: analýza a spracovanie údajov potrebných na riešenie úlohy** (treba určiť, aké údaje budú potrebné, v akej forme, odkiaľ sa dajú získať, akú hodnovernosť budú mať a ako sa dané údaje budú spracovávať).
- 3. etapa: zostavenie matematického modelu-** zostavenie modelu riešenej úlohy (pre slovne zostavený systém hľadáme vhodný matematický popis) buď použijeme štandardný model, modifikovaný štandardný model, alebo zostavíme nový model. Pri zostavovaní matematického modelu musíme dbať na to, aby sme matematicky správne popísali všetky dôležité vzťahy a väzby systému. Vynechanie alebo nesprávna formulácia niektorej väzby môže spôsobiť nereálnosť celého modelu, príp. jeho neriešiteľnosť. Na druhej strane, formulácia nepodstatných väzieb môže mať za následok okrem nadmernej veľkosti modelu veľmi neľahkú a komplikovanú interpretáciu výsledkov. V matematických modeloch sa ekonomické veličiny vyjadrujú prostredníctvom premenných, konštánt a parametrov. Vzájomné závislosti medzi týmito veličinami bývajú zvyčajne definované vo forme rovníc, nerovníc a ich sústav. Ciele sa spravidla vyjadrujú pomocou funkcií.



Zdroj: vlastné spracovanie

Obr. 2-1 Proces prijímania rozhodnutia

Klasifikácia štandardných modelov používaných v OA:

a) **podľa povahy použitých matematických prostriedkov:**

- *lineárne*- len lineárne funkcie, používajú sa na modelovanie takej situácie, kde sú medzi veličinami len lineárne závislosti,
- *nelineárne*- vyskytujú sa v nich aj nelineárne funkcie,

b) **podľa vývoja v čase:**

- *statické*- neuvažuje sa závislosť premenných od času,

-*dynamické*- zohľadňuje závislosť premenných na čase,

c) **podľa povahy veličín v modeli:**

- *deterministické*- nevyskytujú sa v nich náhodné veličiny,

- *stochastické*- vyskytujú sa v nich náhodné veličiny,

d) **podľa úrovne rozhodovacieho procesu rozlišujeme:**

- *mikroekonomické*- na úrovni podniku a nižšie (podnikové a vnútro podnikové),

- *makroekonomické*- na úrovni rezortov a národného hospodárstva,

e) **podľa povahy vzťahov medzi subjektmi:**

- *nekonfliktné*- nezohľadňujú vzájomné správanie sa 2 alebo viacerých subjektov,

- *konfliktné*- zachytávajú vzájomné správanie sa 2 alebo viacerých subjektov, zaoberá sa nimi teória hier (štúdium konfliktov),

f) **podľa používaných prostriedkov pri zostavovaní modelov:**

- *analytické (matematické) modely*- pri konštrukcii sa využívajú prostriedky matematickej analýzy,

- *simulačné modely*- využívajú prostriedky teórie pravdepodobnosti matematickej štatistiky a programovania,

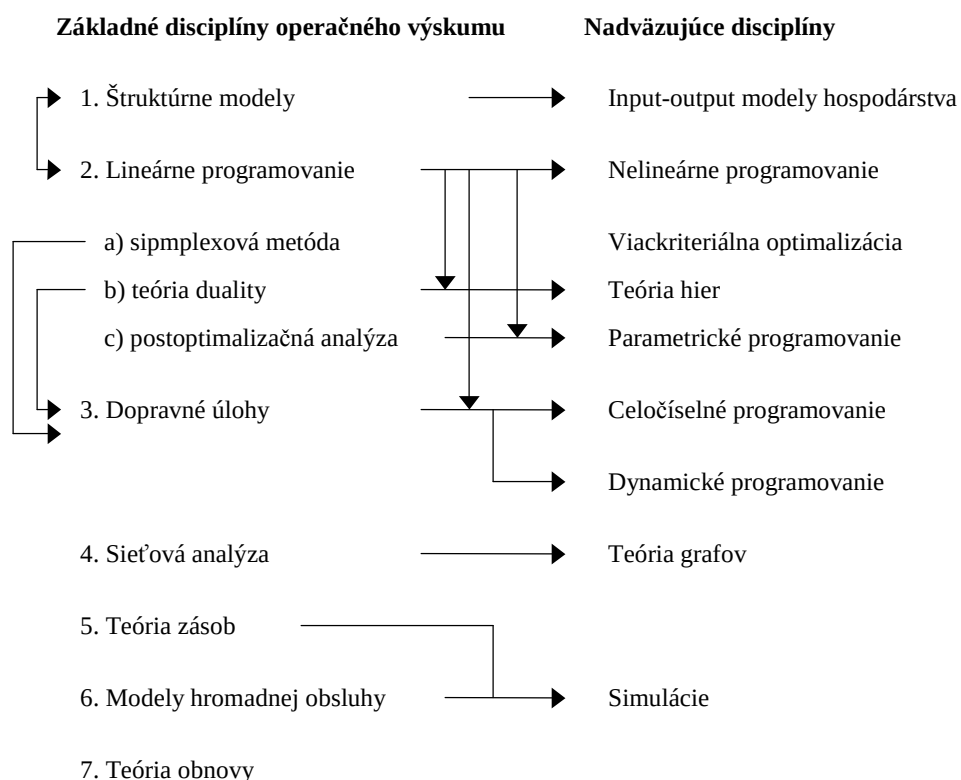
- *heuristické modely*- prevažne modely verbálneho charakteru, pozostávajú z určitých pravidiel, ktoré treba dodržiavať pri riešení určitého problému.

4. **etapa: riešenie zostaveného modelu**, výber vhodnej metódy na riešenie, na **riešenie modelu** sa spravidla využívajú počítače. Iba malé (schematické) modely možno riešiť ručne. Ide o čisto matematickú záležitosť. Problémy, ktoré podnik vie riešiť metódami OA sú napr.: optimalizácia rozvozu tovaru, hľadanie najkratšej cesty medzi dodávateľom a odberateľom, optimalizácia výrobného plánu, výber vhodného pracovníka na pracovisko, využiteľnosť pracovníkov, likvidácia a obnova zastaraných výrobných zariadení, optimalizácia dĺžky výroby výrobkov, atď.
5. **etapa : verifikácia zostaveného modelu na základe výsledkov získaných riešením**. Riešenie, ktoré získame pomocou tohto modelu porovnáme s riešeniami, ktoré boli predtým získané klasickými metódami a zistíme, aký je rozdiel medzi týmito metódami- či je, alebo nie je znesiteľný- či má model význam. Verifikácia dosiahnutého riešenia dáva odpoveď na to, v akej miere model a k nemu priradená úloha zobrazuje skutočnosť, v akej miere

dosiahnuté výsledky vyjadrujú skutočný stav a jeho vývoj. Získané výsledky je potrebné interpretovať na základe poznania charakteru vstupných údajov modelu a na základe charakteru a vlastností samotného systému. Pritom je potrebné pamätať na to, že výsledky z hľadiska ekonomického a organizačného môže správne interpretovať iba človek. Pri tejto činnosti nemôže výpočtová technika človeka v žiadnom prípade nahradiť.

- 6. etapa: aplikácia získaného riešenia (modelu) v praxi-** *riešenie je iba vedecky zdôvodnené odporúčenie pre riadiacich pracovníkov.* Správne vypočítané a interpretované výsledky môžu byť objektívnym podkladom pre správne rozhodnutie o riešení problému. OA nerieši problémy spojené s nesprávnym hospodárením podnikov.

Teória OA je stále otvorenou vednou disciplínou a jej vývoj je spojený so vznikom nových ekonomických problémov, nových rozhodovacích procesov. Základné disciplíny a základné vzťahy medzi nimi sú znázornené na obr. 2-2.



Zdroj: Ivaničová, 2002

Obr. 2-2 Vzťahy medzi základnými disciplínami OA a na ne nadväzujúcich vedných disciplín

2. ŠTRUKTÚRNA ANALÝZA

Ciele:

- aplikácia maticového a vektorového počtu a lineárnej algebry v operačnej analýze,
- klasifikácia štruktúrnych modelov a základné zásady zostrojenia štruktúrnych modelov (ŠM),
- konštrukcia základného a rozšíreného Leontjevho ŠM,
- zostavenie a riešenie úloh pomocou ŠM operatívneho plánu.

Za pôvodcu štruktúrnej analýzy na národnohospodárskej úrovni sa považuje sovietsky vedec Leontjev, ktorý svoj model statickej hospodárskej rovnováhy aplikoval (1929) na hospodársky systém USA a publikoval v roku 1939. Všeobecne pod termínom **štruktúrna analýza** rozumieme kvantitatívne skúmanie vzťahov medzi jednotlivými prvkami hospodárskeho systému na zabezpečovanie proporcionality medzi týmito prvkami systému vo všetkých odvetviach národného hospodárstva. Modely, vyjadrujúce tieto vzájomné vzťahy sa nazývajú štruktúrne modely (Sakál, 2006).

Teoretickým základom ŠM je maticový vektorový počet a lineárna algebra. Využíva sa v plánovacej praxi podnikov na vyjadrenie kvantitatívnych vzťahov medzi jednotlivými prvkami plánovacích vzťahov. Pomocou ŠM zabezpečujeme proporcionality v rozvoji jednotlivých úsekov.

Účelom konštrukcie ŠM aj v trhovom hospodárstve je skvalitnenie techniky plánovania modelovaného hospodárskeho systému a vyriešenie celého radu technicko-ekonomických rozborov a analýz daného hospodárskeho systému. Ide najmä o posúdenie rôznych variantov plánu MTZ alebo zhodnotenie zmien vyvolaných zmenou objemu produkcie niektorého výrobku, resp. výrobného odboru (Sakál, 2006).

Z predchádzajúceho vyplýva, že pod ŠM určitej hospodárskej jednotky rozumieme matematický model, ktorý zobrazuje štruktúru surovinových, materiálových, pracovných, nákladových a iných väzieb medzi jednotlivými zložkami modelovanej jednotky navzájom, resp. medzi zložkami modelovanej jednotky a jej okolím pomocou sústavy rovníc (najčastejšie pomocou lineárnej sústavy rovníc). Pomocou ŠM vyjadrujeme kvantitatívne vzťahy medzi spotrebou a výrobou.

Štruktúrne modely sa konštruujú podľa dvoch základných zásad:

- 1. Zásada linearity:** spočíva v tom, že sa predpokladá lineárny vzťah medzi spotrebou a výrobou. Spotreba je lineárnou funkciou objemu výroby.
- 2. Zásada bilančnej vyrovnanosti:** spočíva v tom, že spotrebovať môžeme toľko, koľko môžeme vyrobiť ($L = P$), spotreba = veľkosti zdrojov.

Klasifikácia štruktúrnych modelov je nasledovná:

a) podľa charakteru väzieb medzi skúmaným systémom a jeho okolím:

- *otvorené ŠM:* zachytávajú vzťah zložiek modelovej jednotky navzájom (väzby existujú vo vnútri systému medzi jednotlivými prvkami) a taktiež väzby modelovej jednotky s okolím,
- *zatvorené ŠM:* zachytávajú vzájomné väzby iba jednotlivých zložiek modelovej jednotky, neexistujú väzby medzi systémom a okolím. Všetky ekonomické väzby medzi jednotlivými odvetviami modelovaného systému hospodárstva sú navzájom závislé. Každé odvetvie v uzavretom modeli systému hospodárstva vystupuje súčasne ako výrobca aj spotrebiteľ. V praxi nie je žiadny reálny systém celkom uzavretý. Napríklad v národnom hospodárstve ako systéme nutne existujú väzby zahraničia prostredníctvom importu a exportu. Formálne však takýto systém možno uzavrieť tým, že k nemu pripojíme ako ďalšie vnútorné odvetvie zahraničný obchod, z ktorého prúdi do ostatných odvetví import a doňho prúdi z ostatných odvetví export;

b) podľa vzťahu prvkov modelu systému k času:

- *statické ŠM:* pri ktorých neuvažujeme s faktorom času,
- *dynamické ŠM:* zohľadňujú závislosť niektorých parametrov od času;

c) z hľadiska konštrukcie:

- *Leontjevove,*
- *Pichlerove,*
- *optimalizačné,*
- *ostatné;*

d) podľa úrovne, na ktorej zostavujeme štruktúrny model:

- *mikroekonomické ŠM (Pichlerove):*
 - na úrovni podniku - podnikové ŠM,
 - na vnútropodnikovej úrovni (na úrovni napr. dielne) - vnútropodnikové ŠM,

- *makroekonomické ŠM:*

- na úrovni rezortu - rezortné ŠM,
- na úrovni regiónov - oblastné ŠM,
- na úrovni národného hospodárstva - národohospodárske ŠM,
- na nadnárodnej úrovni, prípadne medzinárodných zoskupení – ŠM; leontjevovského typu;

- *podľa obsahu modelu (podľa obsahu väzby):*

- ŠM surovinových väzieb,
- ŠM materiálových väzieb,
- ŠM pracovných väzieb,
- ŠM nákladových väzieb;

e) podľa charakteru vstupných údajov:

- a) *deterministické ŠM:* neuvažuje sa s náhodnými veličinami,
- b) *stochastické ŠM:* obsahujú náhodné pravdepodobnostné veličiny;

f) podľa spôsobu tvorby odborov:

- a) ŠM s výrobnými odbormi,
- b) ŠM s organizačnými odbormi.

Ďalej sa budeme zaoberať hlavne ŠM otvorenými, statickými, deterministickými a lineárnymi na mikroekonomickej (podnikovej) úrovni.

2.1 KONŠTRUKCIA LEONTJEVOVHO OTVORENÉHO STATICKÉHO ŠM

ŠM všetkých typov sa tvoria sústavou n lineárne nezávislých rovníc (pri kombinácii s prvkami lineárneho programovania aj sústavou lineárnych nerovníc).

Pri konštrukcii ŠM vychádzame zo šachovnicovej tabuľky (ŠT). Aby sme mohli zostaviť ŠM hospodárskej jednotky, musíme si ju rozložiť na zložky- odbory.

Odbory vystupujú v dvoch funkciách:

1. **dodávateľa:** nachádzajú sa v riadkoch šachovnicovej tabuľky,

2. **spotrebitelia:** nachádzajú sa v stĺpcoch šachovnicovej tabuľky.

Predpokladajme, že modelovanú jednotku rozložíme na n odborov (jednotiek). Symbolom X_i ($i=1,2,...,n$) označíme *celkovú produkciu i-teho odboru za uvažované plánovacie obdobie* (deň, týždeň, mesiac, rok,...), produkcia je vyjadrená vo zvolených jednotkách (g, kg, t).

Ak sú odbory tvorené výrobkami, ktoré vyrába hospodárska jednotka, hovoríme o výrobkovom ŠM. Ak sú odbory tvorené organizačnými jednotkami (dielne, prevádzky, závody), hovoríme o organizačných ŠM.

Ďalšími symbolmi označíme:

- y_i ($i=1,2,...,n$) *odbyt i- teho odboru*, tá časť produkcie i - teho odboru, ktorú tento odbor dodáva na odbyt v uvažovanom plánovacom období,
- x_{ij} ($i,j=1,2,...,n$) *medziodborovú alebo vlastú výrobnú spotrebu*, to je tá časť produkcie i - teho odboru, ktorá sa v uvažovanom období priamo spotrebuje na výrobu v j - tom odbore (priame dodávky z i - teho do j - teho odboru), x_{ij} je lineárnou funkciou X_j :

$$x_{ij} = a_{ij} * X_j, \quad i,j = 1, 2, ..., n, \quad [2.1]$$

kde a_{ij} – konštanta úmernosti (technický koeficient, priama norma spotreby), *určuje mernú spotrebu produkcie i-teho odboru na jednotku produkcie j-teho odboru*, v skutočnosti má len relatívnu stálosť a jej výška závisí od úrovne techniky a technológie príslušného odboru.

Konstruktia ŠM predpokladá, že hodnoty a_{ij} sú známe. Hodnoty a_{ij} možno určiť dvojakým spôsobom:

- *štatisticko- analytický*: je založený na vzťahu:

$$x_{ij} = a_{ij} * X_j \quad \Rightarrow \quad a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad [2.2]$$

technologicko- syntetický: priamo z technologického postupu.

a_{ij} - môžu mať rozmer alebo sú bezrozmerné (fyzické alebo fyzikálne).

Ak sú veličiny x_{ij} a X_j vyjadrené v naturálnych jednotkách, potom koeficient a_{ij} vyjadruje, aké množstvo produkcie i -teho odboru, vyjadrené v naturálnych jednotkách, sa spotrebúva na výrobu jednej jednotky produkcie j -teho odboru, ktorá je vyjadrená v naturálnych jednotkách (napr. koľko kg uhlia sa spotrebuje na výrobu 1kWh elektrickej energie, fyzikálny rozmer technického koeficientu a_{ij} je v tomto prípade kg/kWh).

Absolútna veľkosť technického koeficientu závisí od jednotiek, v akých sa spotrebovávaná produkcia a vyrábaná produkcia merajú. Jeho hodnota je vždy nezáporná, t.j., ak technické koeficienty týkajúce sa naturálne vyjadrenej produkcie budeme označovať a'_{ij} , potom platí

$$a'_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ak spotrebovanú a vyrábanú produkciu vyjadríme v peňažných jednotkách, potom sú technické koeficienty bezrozmerné čísla. Ich veľkosť v tomto prípade závisí nielen od ich technologického vzťahu, ale aj od pomeru ceny spotrebovanej a vyrábanej produkcie.

Zavedieme symboly:

- q_{ij} – produkcia i -teho odboru spotrebovávaného v j -tom odbore vyjadrená vo fyzikálnych jednotkách,
- Q_j – celková produkcia j -teho odboru vyjadrená vo fyzikálnych jednotkách,
- p_i – jednotková cena, cena jednotky produkcie, ktorá je vyrobená v i -tom odbore,
- p_j – jednotková cena, cena jednotky produkcie, ktorá je vyrobená v j -tom odbore,

potom
$$a'_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}, \quad a'_{ij} \geq 0 \quad [2.3]$$

a jej hodnota závisí od hodnoty technologickej úrovne výroby. Na základe predchádzajúcich symbolov môžeme množstvo produkcie i -teho odboru spotrebované v j -tom odbore vyjadriť v peňažných jednotkách nasledovne:

$$x_{ij} = q_{ij} \cdot p_i. \quad [2.4]$$

Potom celková produkcia j -teho odboru vyjadruje v peňažných jednotkách vyjadrená nasledovne:

$$X_j = Q_j \cdot p_j \quad [2.5]$$

a potom:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_i} = \frac{q_{ij} \cdot p_i}{Q_j \cdot p_j} = a'_{ij} \cdot \frac{p_i}{p_j} \Rightarrow a_{ij} = a'_{ij} \cdot \frac{p_i}{p_j} . \quad [2.6]$$

Technické koeficienty odrážajú ako technologické vzťahy, tak aj cenové relácie (závisia od danej technologickej úrovne v danom odbore a od cien). Nadobúdajú tiež iba nezáporné hodnoty a ak nie je výroba stratová, platí pre ne:

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1. \quad [2.7]$$

Šachovnicová tabuľka (ŠT) medziodborových vzťahov pozostáva zo 4 kvadrantov. V nasledujúcej šachovnicovej tabuľke sú uvedené tri kvadranty.

ŠACHOVNICOVÁ TABUĽKA ZÁKLADNÉHO LEONTJEVOVHO ŠM

TAB. 2-2

Odbory		Spotreba v odboch				Odbyť v odboch	Celková produkcia odborov
		1	2	...	n		
Výrobné	1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	y_2	X_2
				I.		II.	IV.
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	y_n	X_n

I. kvadrant- obsahuje vzájomné dodávky medzi odbormi a aj spotrebu vlastnej produkcie,

II. kvadrant – kvadrant odbytu,

IV. kvadrant - celkovej produkcie odborov.

Každý odbor je v ŠT uvedený v riadku aj stĺpci. V riadku je pri každom odbore uvedený, aké množstvo jeho produkcie sa spotrebúva v odboroch zoradených do stĺpcov. Napríklad údaj x_{23} označuje časť objemu produkcie druhého odboru spotrebúvaného v treťom odbore. Podľa tradície sú medziodborové spotreby odlišované dvojíťm indexom, pričom prvý index udáva číslo riadku a druhý index číslo stĺpca, v ktorom je prvok umiestnený.

Na základe ŠT môžeme zostaviť sústavu bilančných rovníc.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + y_1 &= X_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + y_2 &= X_2 \\ &\vdots \\ x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn} + y_n &= X_n \end{aligned} \quad [2.8]$$

Je to sústava n bilančných rovníc, ktorá má $n^2 + 2n$ premenných (má veľmi veľa stupňov voľnosti, musíme znížiť počet stupňov voľnosti). Počet stupňov voľnosti znížime pomocou vzťahu linearity [2.1], ak predpokladáme, že a_{ij} poznáme, potom:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \dots + a_{1n} \cdot X_n + y_1 &= X_1 \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \dots + a_{2n} \cdot X_n + y_2 &= X_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} \cdot X_1 + a_{n2} \cdot X_2 + \dots + a_{nn} \cdot X_n + y_n &= X_n \end{aligned} \quad [2.9]$$

Po znížení stupňov voľnosti je v sústave $2n$ neznámych. Táto sústava vyjadruje základný Leontjevov ŠM, ktorý je statický a otvorený, kde:

- statický – technické koeficienty a_{ij} sa v určitom (plánovanom) období nemenia, sú konštantné,
- otvorený – model je vzhľadom na odbyt otvorený $y_1, \dots, y_n$,
- základný – v modeli nie je zachytený vstup (chýbajú vstupné odbory).

Zápis základného Leontjevovho modelu v maticovom tvare:

$\bar{X}$ - stĺpcový n - rozmerný vektor, ktorý pozostáva z $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad - \text{vektor celkovej produkcie odborov,}$$

$\bar{Y}$ - n –rozmerný stĺpcový vektor, ktorý pozostáva z $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$,

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad - \text{vektor odbytu odborov,}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad - \text{matica technických koeficientov (vždy musí byť štvorcová!).}$$

Potom základný Leontjevov ŠM môžeme napísať v maticovo vektorovom tvare:

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{Y} = \bar{X}, \quad [2.10]$$

pričom platí: $\bar{A}\bar{X} \neq \bar{X}\bar{A}$.

V plánovacej praxi možno na základe základného Leontjevovho ŠM, ktorý je statický a otvorený, riešiť nasledovné úlohy:

- 1. úloha:** Na základe známeho plánu celkovej produkcie jednotlivých odborov možno vypočítať plán odbytu jednotlivých odborov (na základe známeho vektora $\bar{X}$ možno vypočítať neznámy vektor $\bar{Y}$). Aby sme túto úlohu mohli riešiť, musíme si model upraviť nasledovne:

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{X} + \bar{Y} &= \bar{X} \\ \bar{Y} &= \bar{X} - \bar{A}\bar{X} = (\bar{E} - \bar{A})\bar{X} \\ \bar{Y} &= (\bar{E} - \bar{A}) \cdot \bar{X} \end{aligned} \quad . \quad [2.11]$$

kde:

$\bar{E}$ - je jednotková matica n-tého rádu

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice $\bar{E}$ a $\bar{A}$ musia byť **toho istého rádu !**

- 2. úloha:** Na základe známeho plánu odbytu jednotlivých odborov môžeme vypočítať plán celkovej produkcie jednotlivých odborov alebo na základe známeho $\bar{Y}$ môžeme vypočítať $\bar{X}$.

$$\begin{aligned} \bar{Y} &\rightarrow \bar{X} = ? \\ (\bar{E} - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{Y} &= (\bar{E} - \bar{A}) \cdot \bar{X} \\ (\bar{E} - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{Y} &= (\bar{E} - \bar{A})^{-1} \cdot (\bar{E} - \bar{A}) \cdot \bar{X} \\ \bar{X} &= (\bar{E} - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{Y} \\ (\bar{E} - \bar{A})^{-1} &= \bar{B} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} [2.12] \\ [2.13] \end{array}$$

$\bar{B}$ je matica plných alebo komplexných noriem spotreby vlastnej produkcie, je stále štvorcová a je vypočítaná na základe matice $\bar{A}$, a platí nasledovné:

$$\begin{aligned} b_{ij} &\geq a_{ij} \rightarrow \text{priama norma spotreby} \\ &\downarrow \\ &\text{komplexná norma spotreby} \\ b_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

b_{ij} - udáva, koľko produkcie z i-teho odboru sa spotrebuje na výrobu jednej jednotky produkcie j-teho odboru, a to tej jednotky, ktorá je dodaná na odbyt.

Matica $\bar{A}$ je trojuholníková (prvky sa nevyskytujú pod diagonálou matice) vtedy, keď neexistujú spätné väzby medzi odbormi (spätná väzba - určitý odbor sa sám sebe spotrebovávajú). Čím sa $\bar{A}$ zostavuje na nižšej organizačnej úrovni, tým sa viac blíži k trojuholníkovej $\bar{A}$, čím vyššia je organizačná úroveň, tým viac väzieb sa tam nachádza.

3. **úloha:** Ak je známa celková produkcia pre k odborov $k < n$, t.j. $X_1, X_2, \dots, X_k$ a pre ostatných $(n - k)$ odborov sú dané hodnoty $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n$, potom môžeme určiť pre prvých k -odborov hodnoty y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a pre ostatné odbory celkovú produkciu X_i ($i = k+1, k+2, \dots, n$). Sústava je znova sústavou n lineárnych rovníc s n neznámym. Tento typ úlohy, s ktorým sa v praxi často stretávame pri plánovaní výroby, a to hlavne vtedy, ak niektoré odbory predstavujú v danom systéme úzky profil a je nevyhnutné vychádzať pri riešení úloh z obmedzení produkcie danej týmito úzkymi profilmi, **je kombináciou prvých dvoch úloh** (Sakál, 2006).

2.2 ZOSTAVENIE ROZŠÍRENÉHO LEONTJEVOVHO OTVORENÉHO STATICKÉHO ŠM

Rozšírený Leontjevov ŠM sa od základného líši tým, že zobrazuje väzby medzi zložkami modifikovanej jednotky s okolím ako na strane vstupu, tak aj na strane výstupu.

Pojmom *vstupné odbory* budeme označovať to, čo potrebujeme na výrobu (nakupované výrobky, suroviny, materiál, výrobné kapacity; výrobné kapacity: strojný, pracovníci, mzdy...).

Budeme predpokladať, že modelovaná jednotka nakupuje k - druhov surovín, ktoré spotrebováva na výrobu v jednotlivých odboroch. Predchádzajúce symboly, ktoré boli zavedené pri základnom Leontjevovom modeli sú platné aj pri rozšírenom modeli a zavedieme si ďalšie:

- $S_1, S_2, \dots, S_k$ nakupované množstvá surovín,
- s_{ij} – priama spotreba surovín i -teho druhu v j -tom odbore za uvažované obdobie.

Rozšírená šachovnicová tabuľka (tab. 2-3) obsahuje okrem už spomínaných troch kvadrantov aj ďalší: **III kvadrant** - kvadrant vstupných odborov.

Odbory		Spotreba v odboroch				Odbyt v odboroch	Celková produkcia odborov
		1	2	...	n		
Výrobné	1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	Y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	Y_2	X_2
				I.		II.	IV.
	n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	Y_n	X_n
Nevýrobné	1	s_{11}	s_{12}		s_{1n}	surovinový subkvadrant	
	2	s_{21}	s_{22}		s_{2n}		
				III.			
	k	s_{k1}	s_{k2}		s_{kn}		

Napíšeme sústavu bilančných rovníc spotreby nakupovaných surovín:

$$\begin{aligned}
 s_{11} + s_{12} + \dots + s_{1n} &= S_1 \\
 s_{21} + s_{22} + \dots + s_{2n} &= S_2 \\
 &\vdots \\
 s_{k1} + s_{k2} + \dots + s_{kn} &= S_k
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Sústava má $k \cdot n + k$ stupňov voľnosti, taktiež je tu lineárna závislosť:

$$s_{ij} = a_{ij}^{(s)} \cdot X_j, \tag{2.15}$$

kde:

$a_{ij}^{(s)}$ -technický koeficient, priama norma spotreby nakupovaných surovín, pričom predpokladáme, že priame normy surovín poznáme.

Potom sústava lineárnych rovníc je:

$$\begin{aligned}
& a_{11}^{(s)} \cdot X_1 + a_{12}^{(s)} \cdot X_2 + \dots + a_{1n}^{(s)} \cdot X_n = S_1 \\
& a_{21}^{(s)} \cdot X_1 + a_{22}^{(s)} \cdot X_2 + \dots + a_{2n}^{(s)} \cdot X_n = S_2 \\
& \vdots \\
& a_{k1}^{(s)} \cdot X_1 + a_{k2}^{(s)} \cdot X_2 + \dots + a_{kn}^{(s)} \cdot X_n = S_n
\end{aligned} \tag{2.16}$$

a matica priamych noriem spotreby nakupovaných surovín je:

$$\overline{\mathbf{A}}^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \dots & a_{1n}^{(s)} \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} & \dots & a_{2n}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(s)} & a_{n2}^{(s)} & \dots & a_{nn}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Matica $\overline{\mathbf{A}}^{(s)}$ nemusí byť štvorcová, počet jej riadkov je ľubovoľný, počet stĺpcov musí byť však rovnaký ako v matici $\overline{\mathbf{A}}$.

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix} \text{ - vektor nakupovaných surovín.}$$

Maticovo vektorový zápis rozšíreného Leontjevovho ŠM je :

$$\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{X}} + \overline{\mathbf{Y}} = \overline{\mathbf{X}}, \tag{2.10}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{(s)} \cdot \overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{S}}. \tag{2.17}$$

Pri rozšírenom Leontjevovom ŠM môžeme riešiť nasledovné úlohy:

- 1. úloha:** Na základe známeho plánu celkovej produkcie jednotlivých odborov môžeme vypočítať plán odbytu odborov a plán nákupu surovín (na základe známeho $\overline{\mathbf{X}}$ môžeme riešiť neznáme $\overline{\mathbf{Y}}$ a $\overline{\mathbf{S}}$.

$$\overline{\mathbf{Y}} = (\overline{\mathbf{E}} - \overline{\mathbf{A}}) \cdot \overline{\mathbf{X}}. \tag{2.11}$$

$$\bar{S} = \bar{A}^{(s)} \cdot \bar{X} . \quad [2.17]$$

- 2. úloha** Na základe známeho plánu odbytu jednotlivých odborov možno vypočítať plán celkovej produkcie pre jednotlivé odbory a plán nákupu surovín (na základe známeho $\bar{Y}$ môžeme vypočítať neznáme $\bar{X}$ a $\bar{S}$).

$$\begin{aligned} \bar{Y} \rightarrow \bar{X} = ? \quad , \quad \bar{S} = ? \\ \bar{X} = (\bar{E} - \bar{A})^{-1} \cdot \bar{Y} = \bar{B} \cdot \bar{Y} \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{B}\bar{Y} . \end{aligned} \quad [2.18]$$

$$\bar{S} = \bar{A}^{(s)} \cdot \bar{B} \cdot \bar{Y} = \bar{B}^{(s)} \cdot \bar{Y} \Leftrightarrow \bar{S} = \bar{B}^{(s)}\bar{Y} \quad [2.19]$$

kde $\bar{B}^{(s)}$ je matica plných alebo komplexných noriem spotreby nakupovaných surovín

$$\bar{B}^{(s)} = \bar{A}^{(s)} \cdot \bar{X} . \quad [2.20]$$

2.3 ŠTRUKTÚRNY MODEL OPERATÍVNEHO PLÁNU VÝROBY PODNIKU

Štruktúrny model operatívneho plánu výroby podniku je viacrozmerný maticový model. Podklady na zostavenie jednotlivých matíc napr. v strojárkej výrobe tvorí základná, konštrukčná a technologická dokumentácia. Základné informácie na zostavovanie matíc možno získať z podkladov operatívneho plánovania, ako sú:

- dielenské výkresy- výrobkov, zostáv, podzostáv a súčiastok,
- konštrukčné rozpisky výrobkov,
- technicko-hospodárske normy spotreby materiálu.

Doplňkové informácie získavame z rozborov réžie a z účtovnej a štatistickej evidencie. Pri zostavovaní matíc technických koeficientov postupujeme takto:

1. prvú zostavíme maticu technických koeficientov spotreby vlastnej výroby maticu $\bar{A}$, ktorá je vždy štvorcová a počet m a n je rovný počtu modelovanej jednotky,
2. zostavíme maticu $\bar{A}^{(n)}$ - je to matica technických koeficientov alebo priamych noriem spotreby nakupovaných výrobkov (výrobky montované do finálnych výrobkov),

matica $\bar{A}^{(n)}$ musí mať počet stĺpcov rovný počtu stĺpcov matice $\bar{A}$, počet riadkov závisí od nakupovaných výrobkov, každému výrobku pridáme riadok,

3. $\bar{A}^{(s)}$ - matica technických koeficientov alebo priamych noriem spotreby nakupovaných surovín, materiálu a energie,
4. $\bar{A}^{(k)}$ - matica technických koeficientov alebo priamych noriem spotreby času na jednotlivých pracoviskách, alebo na jednotlivých výrobných zariadeniach,
5. $\bar{A}^{(m)}$ - matica technických koeficientov alebo priamych noriem spotreby miezd (riadky matice predstavujú jednotlivé kategórie pracovníkov).

Poznámka: Všetky vymenované matice musia mať rovnaký počet stĺpcov a počet riadkov môže byť rozdielny!

Zložená matica technických koeficientov:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{A}^{(n)} \\ \bar{A}^{(s)} \\ \bar{A}^{(k)} \\ \bar{A}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Na základe toho môžeme napísať štruktúrny model operatívneho plánu výroby podniku:

$$\bar{A}\bar{X} + \bar{Y} = \bar{X} \quad [2.10]$$

$$\bar{A}^{(n)}\bar{X} = \bar{N} \quad [2.21]$$

$$\bar{A}^{(s)}\bar{X} = \bar{S} \quad [2.22]$$

$$\bar{A}^{(k)}\bar{X} = \bar{K} \quad [2.23]$$

$$\bar{A}^{(m)}\bar{X} = \bar{M} \quad [2.24]$$

pričom:

$\bar{N}$ - vektor spotreby nakupovaných výrobkov, jednotlivé zložky vektora predstavujú množstvá výrobkov podľa jednotlivých druhov, ktoré treba v uvažovanom období nakúpiť,

$\bar{S}$ - vektor spotreby nakupovaných surovín, materiálu a energie udáva, aké množstvá týchto komodít treba nakúpiť,

$\bar{K}$ - vektor spotreby času podľa jednotlivých kapacitných druhov udáva, aké výrobné kapacity musíme mať k dispozícii, aby sme mohli operatívny plán realizovať,

$\bar{M}$ - vektor spotreby miezd, udáva, aký musíme mať k dispozícii mzdový fond podľa jednotlivých kategórií zamestnancov a koľko zamestnancov budeme potrebovať.

Pomocou štruktúrneho modelu operatívneho plánu výroby podniku vieme riešiť nasledovné úlohy:

- 1. úloha:** Ak poznáme celkovú produkciu odborov môžeme vypočítať odbyť odborov a taktiež vektory $\bar{Y}$, $\bar{N}$, $\bar{S}$, $\bar{K}$ a $\bar{M}$:

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{X} + \bar{Y} &= \bar{X} & \bar{Y} &= (\bar{E} - \bar{A}) \cdot \bar{X} \\ \bar{A}^{(n)}\bar{X} &= \bar{N} & \bar{S} &= \bar{A}^{(s)}\bar{X} \\ \bar{A}^{(s)}\bar{X} &= \bar{S} & \bar{N} &= \bar{A}^{(n)}\bar{X} \\ \bar{A}^{(k)}\bar{X} &= \bar{K} & \bar{K} &= \bar{A}^{(k)}\bar{X} \\ \bar{A}^{(m)}\bar{X} &= \bar{M} & \bar{M} &= \bar{A}^{(m)}\bar{X}\end{aligned}$$

- 2. úloha:** Na základe známeho plánu odbytu jednotlivých odborov môžeme vypočítať plán celkovej produkcie pre jednotlivé odbory a potrebu nakupovaných výrobkov, surovín, materiálu, energií, kapacít a mzdový fond:

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{X} + \bar{Y} &= \bar{X} & \bar{X} &= \bar{B} \cdot \bar{Y} \\ \bar{A}^{(n)}\bar{X} &= \bar{N} & \bar{N} &= \bar{A}^{(n)} \cdot \bar{B} \cdot \bar{Y} = \bar{B}^{(n)} \cdot \bar{Y} \\ \bar{A}^{(s)}\bar{X} &= \bar{S} & \bar{S} &= \bar{A}^{(s)} \cdot \bar{B} \cdot \bar{Y} = \bar{B}^{(s)} \cdot \bar{Y} \\ \bar{A}^{(k)}\bar{X} &= \bar{K} & \bar{K} &= \bar{A}^{(k)} \cdot \bar{B} \cdot \bar{Y} = \bar{B}^{(k)} \cdot \bar{Y} \\ \bar{A}^{(m)}\bar{X} &= \bar{M} & \bar{M} &= \bar{A}^{(m)} \cdot \bar{B} \cdot \bar{Y} = \bar{B}^{(m)} \cdot \bar{Y}\end{aligned}$$

kde $\bar{B}^{(n)}$, $\bar{B}^{(s)}$, $\bar{B}^{(k)}$, $\bar{B}^{(m)}$ sú matice komplexných noriem spotreby nakupovaných výrobkov, surovín, materiálu, energie, spotreby času a miezd.

V strojárenskej praxi má uplatnenie **Leontjevov otvorený statický ŠM**. ŠM je vhodné využívať vo výrobe sériovej, veľkosériovej a hromadnej. Štruktúrne vzťahy vyjadrujú závislosti medzi výrobnými procesmi, ich výsledkami a rozdeľovaním zdrojov v podniku. Analýzy týchto

procesov však neposkytujú informácie o probléme účinného použitia výrobných faktorov, o rôznych možnostiach ich použitia. Pri ŠM vieme zabezpečiť proporcionalitu, ich nevýhoda je, že nám **neumožňujú optimalizovať**.

RIEŠENÉ PRÍKLADY

Príklad č. 2.1

V nábytkárskom podniku vyrábajú špeciálne jedálenské steny, ktoré si objednala predtým IKEA v počte 100 ks, kombinované z troch druhov dreva, označme ich D1, D2, D3. Podnik má k dispozícii dva zdroje 400 m^3 guľatiny a 800 kW elektrickej energie. Podnik má na tento účel vyčlenené štyri pracoviská (P_1, P_2, P_3, P_4), z ktorých každé vyrába práve jeden druh výrobku. Na prvom pracovisku (P_1) sa spracováva guľatina na dosky, z tých sa pripravujú špeciálne dosky D1 podľa dizajnu jedálenskej steny. Tieto druhy sú povrchovo upravené ako prírodné drevo. Sú medzivýrobkom na výrobu dosiek D2 na druhom pracovisku (P_2), kde sa dosky znovu režú, tvarujú a dyhujú, a na treťom pracovisku (P_3), kde sa vytvárajú dosky D3 kombináciou dosiek D1 a D2.

Z P_1 sa presúva 400 ks dosiek na P_2 , 100 ks na P_3 a 100 ks na finálne spracovanie steny, na P_4 . Nakoľko sú dosky použiteľné aj pre domácich majstrov, 200 ks sa dodáva do bauMaxu.

Na P_2 sa spracujú dosky D1 na tvar D2 a 400 ks sa posiela na P_3 , 400 na finalizáciu a 200 do bauMaxu. Na P_3 sa robí kombinácia dosiek – dizajn D3 z dosiek D1 a D2, z ktorých 500 ks posiela na finalizáciu štvrtého výrobku a 500 ks do bauMaxu.

Podnik zavedie novú technológiu na P_4 , čím sa zvýši výroba stien o 10 %. Výroba ostatného sortimentu – dosiek D1, D2, D3 ostane na súčasnej úrovni.

Úloha: Treba určiť, ako sa zmení množstvo finálneho produktu a množstvo dosiek D1, D2, D3 určených na odbyt.

Predpokladajme, že na základe prieskumu trhu podnik zistí znížený dopyt po doskách D3 o 20 %. Treba interpretovať zmeny vo výrobe po zavedení príslušného opatrenia, teda zmeny výrobných množstiev (vektor $\mathbf{X}$) a zmeny spotreby zdrojov (vektor $\mathbf{S}$).

Východiskový stav vo výrobe podniku je v nasledujúcej tabuľke.

		Spotreba				Odbyt	Celková produkcia
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	Y	X
Dosky D1	P ₁	0	400	100	100	200	X ₁
Dosky D2	P ₂	0	0	400	400	200	X ₂
Dosky D3	P ₃	0	0	0	500	500	X ₃
Jedálenské steny	P ₄	0	0	0	0	100	X ₄
Gulatina v m ³	S ₁	400	0	0	0	0	
Elektrická energia v kW	S ₂	800	0	0	0	0	

Riešenie:

Najskôr vypočítame hodnoty celkovej produkcie jednotlivých dielní/pracovnísk, a to podľa:

$$X_j = \sum_{i=1}^4 x_{ij} + y_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad [2.25]$$

napr.: $X_2 = 0 + 0 + 400 + 400 + 200 = 1000$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Matica medziodborovej alebo vlastnej výrobnéj spotreby (endogénne zdroje z I. kvadrantu ŠT):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 400 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 400 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matica vonkajších zdrojov, ktoré podnik nakupuje (gulatina, elektrická energia):

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{S}_{13} & \mathbf{S}_{14} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} & \mathbf{S}_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 \\ 800 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Na základe vzťahu [2.2] vypočítame koeficienty matice $\mathbf{A}$ a na základe vzťahu [2.15] vypočítame koeficienty matice $\mathbf{A}^{(s)}$.

Napr.: $a_{13} = 100/1\,000 = 0,1$

$$a_{34} = 500/100 = 5$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z toho matica

$$(\bar{E} - \bar{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,1 & -1 \\ 0 & 1 & -0,4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matica priamych noriem spotreby pre nakupované zdroje (guľatina, elektrická energia)

$$\mathbf{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maticový model podniku I môžeme zapísať nasledovne [podľa vzťahov 2.11 a 2.17]:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,1 & -1 \\ 0 & 1 & -0,4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

Napr.: z 1. stĺpca matice vyplýva, že na výrobu jednej dosky D1 sa spotrebuje 0,5 m³ guľatiny a 1 kW elektrickej energie a zo 4. stĺpca je zrejmé, že na výrobu jednej jedálenskej steny (pracovisko P₄) sa spotrebuje 1 ks dosky D1, 4 ks dosiek D2 a 5 ks dosiek D3.

Podnik zavedie novú technológiu na P₄, na základe čoho sa zvýši výroba jedálenských stien o 10 %.

$$X_4 = 100 + 0,1 \cdot 100 = 110$$

Požadované množstvá výrobkov vyjadríme vo vektorovom tvare

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 1000 \\ 110 \end{pmatrix}$$

Potom na základe maticového modelu podniku I [podľa vzťahov 2.11 a 2.17]:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,1 & -1 \\ 0 & 1 & -0,4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 1000 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 160 \\ 450 \\ 110 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Podnik na zvýšenie celkovej produkcie jedálenských stien o 10 % potrebuje 400 m³ guľatiny a 800 kW elektrickej energie, pričom na odbyt pôjde z 1. dielne 190 ks dosiek D1, z 2. dielne 160 ks D2, z 3. dielne 450 ks dosiek D3 a zo 4. dielne 110 ks jedálenských stien.

Nasledovne zostavíme maticový model podniku II, na základe ktorého možno pri stanovení odbytu $\mathbf{Y}$ vypočítať potrebné množstvo celkovej produkcie $\mathbf{X}$. Inverzná matica k matici $(\mathbf{E}-\mathbf{A})$ má tvar:

$$(\overline{\mathbf{E}} - \overline{\mathbf{A}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \\ 0 & 1 & 0,4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica $\mathbf{A}^{(s)} \cdot (\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ má tvar:

$$\mathbf{A}^{(s)} \cdot (\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,13 & 1,95 \\ 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \end{pmatrix}$$

Zapíšeme maticový model podniku II [podľa vzťahov 2.12 a 2.19]:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \\ 0 & 1 & 0,4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,13 & 1,95 \\ 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

Interpretácia 3. stĺpca matice je nasledovná: na výrobu jednej dosky D3 určenej na odbyt je potrebné vyrobiť 0,26 ks dosiek D a 0,4 ks dosiek D2. Súčasne sa spotrebuje 0,13 m³ guľatiny a 0,26 kW elektrickej energie.

Predpokladajme, že na základe prieskumu trhu podnik zistí znížený dopyt po doskách D3 o 20%.

$$Y_3 = 500 - 500 \cdot 0,2 = 400$$

Z tohto množstvo tovarov určených na odbyt možno vyjadriť takto:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$$

získame:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \\ 0 & 1 & 0,4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,13 & 1,95 \\ 1 & 0,4 & 0,26 & 3,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 774 \\ 960 \\ 900 \\ 100 \\ 387 \\ 774 \end{pmatrix}$$

Výpočtom sme zistili, že pri znížení odbytu dosiek D3 o 20% podniku na výrobu stačí 387 m³ guľatiny a 774 kW elektrickej energie, pričom 1. dielňa celkom vyprodukuje 774 ks dosiek D1, 2. dielňa 960 ks dosiek D2, 3. dielňa 900 ks dosiek D3 a 4. dielňa 100 jedálenských stien.

Príklad č. 2.2

Podnik má 6 dielní, v ktorých spracúva vlastné polotovary (spracovaná bavlna, syntetické vlákna, upravené syntetické vlákna, technické a úpletové tkaniny a ponožky) a nakupované suroviny (surová bavlna, syntetická látka a elektrická energia).

Pri spracovaní bavlny sa spotrebuje 1 000 kW elektrickej energie a 1 200 kg surovej bavlny. Na výrobu syntetického vlákna 850 kW elektrickej energie a 1 000 kg syntetickej látky. Na úpravu syntetického vlákna 600 kW elektrickej energie a 900 kg syntetického vlákna. Na výrobu technických tkanín sa spotrebuje 800 kW elektrickej energie a 60 kg syntetického vlákna. Na výrobu úpletových tkanín sa spotrebuje 60 kg bavlny, 40 kg syntetického vlákna, 20 kg upraveného syntetického vlákna a 750 kW elektrickej energie. Na výrobu ponožiek sa spotrebuje 100 kg bavlny a 580 kW elektrickej energie. Na odbyt je určených 100 kg syntetického vlákna, 500 kg upraveného syntetického vlákna, 100 kg technických a 2 000 m úpletových tkanín a 1 600 párov ponožiek.

Na základe prijatých opatrení sa manažment podniku rozhoduje medzi dvoma potenciálnymi zmenami výroby:

1. variant: Jednotlivé dielne sú schopné spracovať 200 kg bavlny, 1 200 kg syntetického vlákna, 100 kg technických a 2 000 m úpletových tkanín, 1 600 párov ponožiek, pričom v 3. dielni možno upraviť 20 kg syntetického vlákna.
2. variant: Dielne majú určený výrobný plán: 200 kg bavlny, 1 200 kg syntetického vlákna, 100 kg technických tkanín, 2 200 m úpletových tkanín, 1 600 párov ponožiek, pričom v 3. dielni možno upraviť 20 kg syntetického vlákna.

Úloha: Treba interpretovať vplyv zmeny výroby na množstvá výrobkov určených na predaj pri prvom a pri druhom variante.

Z prieskumu podnik zistil dopyt po finálnych produktoch v množstvách 200 kg spracovanej bavlny, 100 kg syntetického vlákna, 520 kg upraveného syntetického vlákna, 100 kg technických a 2 000 m úpletových tkanín a 1 600 párov ponožiek. Treba interpretovať, ako príslušná zmena ovplyvní celkovú výrobu.

Vstupné údaje sú v nasledovnej tabuľke.

1. variant

		Spotreba						Odbyt	Celková produkcia
		V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	Y	X
Spracovanie bavlny	V ₁	0	0	0	0	60	100	0	160
Výroba synt. vlákna	V ₂	0	0	900	60	40	0	100	1100
Úprava synt. vlákna	V ₃	0	0	0	0	20	0	500	520
Výroba tech. tkanín	V ₄	0	0	0	0	0	0	100	100
Výroba úplet. tkanín	V ₅	0	0	0	0	0	0	2 000	2000
Výroba ponožiek	V ₆	0	0	0	0	0	0	1600	1600
Bavlna	S ₁	1200	0	0	0	0	0	0	1200
Syntetická látka	S ₂	0	1000	0	0	0	0	0	1000
Elektrická energia	S ₃	1000	850	600	800	750	580	0	4580

Riešenie:

Matica vlastných polotovarov (I. kvadrant ŠT):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \\ 0 & 0 & 900 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a matica nakupovaných surovín (III. kvadrant ŠT):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 850 & 600 & 800 & 750 & 580 \end{pmatrix}$$

Podľa vzťahu [2.2] vypočítame koeficienty matice $\mathbf{A}$ a na základe vzťahu [2.15] vypočítame koeficienty matice $\mathbf{A}^{(s)}$.

$$\text{Např.: } a_{23} = 900/520 = 1,73,$$

$$a_{15} = 60/2000 = 0,03,$$

$$a_{33}^{(s)} = 600/4580 = 1,1538.$$

Matica $\mathbf{A}$ bude mať nasledovné hodnoty:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 0,0625 \\ 0 & 0 & 1,73 & 0,6 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z toho matica

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,0625 \\ 0 & 1 & -1,73 & -0,6 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matica

$$\mathbf{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,909091 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6,25 & 0,772727 & 1,1538 & 8 & 0,375 & 0,3625 \end{pmatrix}$$

Zostavíme maticový model podniku I [podľa vzťahov 2.11 a 2.17]:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,0625 \\ 0 & 1 & -1,73 & -0,6 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9091 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6,25 & 0,7727 & 1,1538 & 8 & 0,375 & 0,3625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

Z matice vyplýva, že na výrobu 1 m úpletovej tkaniny spotrebujeme 0,03 kg bavlny, 0,02 kg syntetického vlákna, 0,01 kg upraveného syntetického vlákna a 0,375 kW elektrickej energie. Po aplikovaní 1. variantu jednotlivé dielne spracujú 200 kg bavlny, 1 200 kg syntetického vlákna, 100 kg technických a 2 000 m úpletových tkanín, 1 600 párov ponožiek a 3.dielňa upraví 20 kg syntetického vlákna.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1200 \\ 100 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Potom:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,0625 \\ 0 & 1 & -1,73 & -0,6 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9091 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6,25 & 0,7727 & 1,1538 & 8 & 0,375 & 0,3625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 1200 \\ 100 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 1065,4 \\ 0 \\ 100 \\ 2000 \\ 1600 \\ 1500 \\ 1090,909 \\ 4330,35 \end{pmatrix}$$

Pri zmene výroby bude na finálny odbyt určených 1 600 párov ponožiek, 2 000 m úpletových tkanín, 100 kg technických tkanín, 0 kg upraveného syntetického vlákna, 1065,4 kg syntetického vlákna a 40 kg bavlny. Pritom sa spotrebuje 1500 kg bavlny, 1090,909 kg syntetickej látky a 4330,35 kW elektrickej energie.

2. variant

Dielne v tomto variante majú určený výrobný plán 200 kg bavlny, 1 200 kg syntetického vlákna, 100 kg technických tkanín, 2 200 m úpletových tkanín, 1 600 párov ponožiek a 3. dielňa upraví 20 kg syntetického vlákna.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1200 \\ 20 \\ 100 \\ 2200 \\ 1600 \end{pmatrix}$$

Potom na základe maticového modelu podniku I [podľa vzťahov 2.11 a 2.17]:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,03 & -0,0625 \\ 0 & 1 & -1,73 & -0,6 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9091 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6,25 & 0,7727 & 1,1538 & 8 & 0,375 & 0,3625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 1200 \\ 20 \\ 100 \\ 2200 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 1061,4 \\ -2 \\ 100 \\ 2200 \\ 1600 \\ 1500 \\ 1090,909 \\ 4405,35 \end{pmatrix}$$

Keď si všimneme úpravovňu syntetického vlákna, zistíme, že vypočítané množstvo určené na odbyt je -2 kg. Záporná hodnota predaja nie je možná. Po bližšom pohľade na situáciu, ktorá nastala, môžeme zistiť príčinu. Bilančná rovnica pre tretí výrobok je

$$y_3 = x_3 - 0,01x_5,$$

čo znamená, že 3. výrobok sa spotrebúva pri výrobe 5. výrobku a zvyšok je určený na odbyt. Koeficient $a_{53} = 0,01$, čiže na výrobu 1 metra 5. výrobku sa spotrebuje 0,01 kg 3. výrobku. Z toho vyplýva, že na výrobu 2 200 metrov 5. výrobku potrebujeme 22 kg 3. výrobku, čo nie je možné, pretože 3. dielňa je schopná vyrobiť len 20 kg 3. výrobku.

Takýto výrobný plán nemožno realizovať. Podnik môže vyriešiť túto situáciu tak, že dokúpi chýbajúce množstvo 2 kg 3. výrobku z iného podniku.

Ďalej na základe odbytu Y vypočítame celkovú produkciu jednotlivých dielní.

Inverzná matica k matici $(E - A)$ má tvar:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 0,0625 \\ 0 & 1 & 1,73 & 0,6 & 0,0373 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica $A^{(s)} \cdot (E - A)$ má tvar:

$$A^{(s)} \cdot (E - A) = \begin{pmatrix} 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0,225 & 0,46875 \\ 0 & 0,909091 & 1,573427 & 0,545455 & 0,033916 & 0 \\ 6,25 & 0,772727 & 2,491259 & 8,463636 & 0,602867 & 0,753125 \end{pmatrix}$$

Maticový model podniku II potom zapíšeme nasledovne [podľa vzťahov 2.18 a 2.19]:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 0,0625 \\ 0 & 1 & 1,73 & 0,6 & 0,0373 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0,225 & 0,46875 \\ 0 & 0,909091 & 1,573427 & 0,545455 & 0,033916 & 0 \\ 6,25 & 0,772727 & 2,491259 & 8,463636 & 0,602867 & 0,753125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix}$$

Ak chce podnik dodať na finálny odbyt 1 pár ponožiek, potrebujeme na to 0,0625 kg bavlny, 0,46875 kg surovej bavlny a 0,753125 kW energie.

Z prieskumu podnik určil dopyt po finálnych produktoch v množstvách 200 kg spracovanej bavlny, 100 kg syntetického vlákna, 520 kg upraveného syntetického vlákna, 100 kg technických tkanín, 2 000 m úpletových tkanín a 1 600 párov ponožiek.

Pri zmene vektora odbytu Y bude maticový model nasledovný:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0,03 & 0,0625 \\ 0 & 1 & 1,73 & 0,6 & 0,0373 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,5 & 0 & 0 & 0 & 0,225 & 0,46875 \\ 0 & 0,909091 & 1,573427 & 0,545455 & 0,033916 & 0 \\ 6,25 & 0,772727 & 2,491259 & 8,463636 & 0,602867 & 0,753125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 520 \\ 100 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 1134,6 \\ 540 \\ 100 \\ 2000 \\ 1600 \\ 2700 \\ 1031,5 \\ 5879,8 \end{pmatrix}$$

To znamená, ak sa zvýši odbyt upraveného syntetického vlákna z 3. dielne o 20 kg (na 520 kg) a odbyt 1. dielne na 200 kg, bude potrebné zvýšiť produkciu 2. dielne na 1 134,6 kg, celková výroba v 3. dielni bude 540 kg. Zvýši sa aj produkcia 1. dielne na 360 kg, nezmení sa produkcia štvrtej, piatej a ani šiestej dielne.

ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE

1. Stručne charakterizujte podstatu ŠM (základné zásady zostrojovania, definícia, klasifikácia).
2. Popíšte postup konštrukcie základného Leontjevovho ŠM (symboly, šachovnicová tabuľka, model v maticovom tvare, riešené úlohy).
3. Popíšte postup konštrukcie rozšíreného Leontjevovho ŠM (symboly, šachovnicová tabuľka, model v maticovom tvare, riešené úlohy).
4. Popíšte postup konštrukcie základného Leontjevovho ŠM (symboly, šachovnicová tabuľka, model v maticovom tvare, riešené úlohy).
5. Vysvetlite potrebu ŠM operatívneho plánu.

Príklad č. 2.3

Podnik vyrába 3 druhy výrobkov, ktoré sa predávajú samostatne alebo slúžia ako polotovary na ďalšie spracovanie: špice, kolesá, bicykle. Špice sú na kolesách a tie na hotových bicykloch. Ako základ sa využívajú 2 suroviny: oceľ a farba. Na výrobu špíc sa spotrebuje 100 kg ocele. Na výrobu kolies sa použije 300 kg ocele, 45 kg farby a 6 000 ks špíc. Špice sa spotrebúvajú aj pri bicykloch, a to v množstve 500 ks. Pri výrobe bicyklov sa ďalej spotrebuje 100 kolies, 200 kg ocele a 50 kg farby. Do predaja sa dodáva 200 kolies, 50 bicyklov a 1 000 špíc.

Úloha č. 1: Výroba zaznamenala na trhu pokles dopytu po výrobkoch, v dôsledku čoho podnik znížil produkciu na 5 000 ks špíc, 120 kolies a 30 bicyklov. Aký vplyv na odbyt a na spotrebu surovín bude mať daný pokles výroby?

Výsledky: $y = (2\ 300; 60; 30)$

$$s = (306,7; 48)$$

Úloha č. 2: Podnik na základe prieskumu trhu určil množstvá tovarov, ktoré je schopný predat' 500 špíc, 30 kolies a 10 bicyklov, pričom chce zistiť, v akom objeme má zakúpiť suroviny a akým spôsobom zmení výrobný plán.

Výsledky: $x = (1\ 600; 50; 10)$

$$s = (111,3; 17,5)$$

Príklad č. 2.4

V pivovare Taruc, a. s., je produkcia vyrábaná v šiestich hlavných prevádzkach. Kľúčovými prvkami sú úpravovňa vody (V1) a sladovňa (V2). Samotné pivo sa varí v štyroch prevádzkach, každá produkuje iný druh. Sú to prevádzky, v ktorých sa vyrába pivo: 12° Mocný Jano (V3), 11° Odvážny Ondro (V4), 10° Veselý Jožo (V5) a 9° Smädný Paľo (V6). Vstupnými surovinami sú prírodná voda z vlastných prírodných prameňov a vysokokvalitný sladový jačmeň.

V súčasnosti je v podniku nasledujúci stav výroby:

- úpravovňa V1 spotrebúva $10\,000\text{ m}^3$ vody,
- sladovňa V2 spracúva 40 000 ton sladového jačmeňa a $8\,000\text{ m}^3$ upravenej vody, export sladu je 3 000 ton,
- Mocný Jano sa vyrába zo 4 000 ton sladu a 400 m^3 upravenej vody, na trh sa ho dodáva $2\,000\text{ m}^3$,
- Odvážny Ondro okrem 400 m^3 upravenej vody a 3 500 ton sladu vyžaduje 300 m^3 Jana, na trh sa ho dodá $1\,800\text{ m}^3$,
- Veselý Jožo sa vyrába zo 400 m^3 upravenej vody a 3 000 ton sladu, mimo podniku sa vyvezie 700 m^3 ,
- Smädný Paľo sa vyrába z 500 m^3 upravenej vody, 800 m^3 Jana, 800 m^3 Ondra a 700 m^3 Joža a predá sa ho $2\,500\text{ m}^3$.

Rozšírením kapacít úpravovne vody na $13\,000\text{ m}^3$ a sladovne na 17 000 ton sa plánuje zvýšiť aj výroba Mocného Jana na $3\,500\text{ m}^3$. Treba interpretovať, ako táto zmena ovplyvní finálnu produkciu jednotlivých výrobkov a spotrebu surovín.

Výsledky: $y = (1\,174,31; 5\,983,87; 2\,400; 1\,800; 700; 2\,500)$

$s = (13\,402,06; 50\,370,37)$

S ohľadom na tendencie na trhu (stúpa popularita slabších pív) sa plánuje zvýšiť predaj Paľa o 700 m^3 , Joža o 300 m^3 pri znížení predaja Ondra o 800 m^3 a Jana o 400 m^3 . Opäť treba interpretovať zmenu celkovej produkcie jednotlivých prevádzok a spotrebu surovín.

Výsledky: $x = (9\ 847; 13\ 475; 2\ 858; 2\ 024; 1\ 896; 3\ 200)$
 $s = (10\ 151; 39\ 925)$

Literatúra k 2. kapitole

- [1] Ivaničová, Z. - Brezina, I. – Pekár, J. *Operačný výskum*. Bratislava: Iura Edition, 2002. 287 s. + 1 CD-ROM. - (Ekonomía). - ISBN 80-89047-43-2
- [2] Ivaničová, Z. - Brezina, I. – Pekár, J. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*. Bratislava: Ekonóm, 1999. ISBN 80-225-1180-3.
- [3] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra II*. Trnava: SP SYNERGIA, 2006.
- [4] SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza*. Bratislava: SVŠT, 1983. 85-425-83.
- [5] ŠTRPKA, A. - SAKÁL, P. *Operačná a systémová analýza. Zbierka príkladov II*. Bratislava: ES SVŠT, 1991

3. LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Ciele:

- základná charakteristika matematického a lineárneho programovania,
- klasifikácia úloh matematického programovania,
- klasifikácia súvislostí maticovo - vektorového zápisu modelov matematického programovania a lineárnych optimalizačných modelov,
- klasické aplikácie lineárneho optimalizačného modelu v riešených príkladoch.

3.1 MATEMATICKÉ PROGRAMOVANIE

Medzi základné metódy operačnej analýzy, ktoré umožňujú transformovať reálne ekonomické operácie a procesy do matematických modelov, patrí matematické programovanie (MP). MP sa často používa pri riešení problémov optimálneho využitia surovín, materiálu, časového fondu strojov a zariadení, plôch, počtu pracovníkov, investičných a finančných prostriedkov a podobne. Pre MP je charakteristické, že umožňuje relatívne presne kvantitatívne hodnotiť taký výber určitého riešenia z väčšieho množstva možných riešení, ktoré je z hľadiska matematicky formulovaného cieľa najlepšie (Ivaničová, 2002).

Každá úloha MP je zostavená s cieľom zobrazit' nejakú ekonomickú situáciu, v ktorej ide o nájdenie najlepšieho riešenia pri určitých ohraničujúcich predpokladoch. Na každý takýto problém sa možno pozerat' ako na samostatný skúmaný systém zložený z prvkov, medzi ktorými existujú väzby či už priame, alebo nepriame a takisto väzby systému s okolím.

Z predchádzajúceho vyplýva, že MP je zostavovanie matematických modelov pre také úlohy, pre ktoré je typická mnohovariantnosť riešenia aj riešenie týchto modelov, pričom metódy MP umožňujú z tých viacero alebo nekonečne veľa možných riešení úlohy vybrať také riešenie, ktoré je z určitého hľadiska najvýhodnejšie = optimálne riešenie danej úlohy.

Matematicky možno úlohu MP zapísať nasledovne: treba nájsť extrém (max. resp. min.) funkcie n - premenných na množine riešení nasledovnej sústavy nerovností:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max, \text{ respektíve min} \quad [3.1]$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad [3.2]$$

$$\begin{aligned} f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad [3.3]$$

Pre daný model treba nájsť nezáporné hodnoty premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, pre ktoré funkcia F nadobudne požadovaný extrém a pritom tieto hodnoty budú vyhovovať aj funkciám $f_1, f_2, \dots, f_m =$ *hľadanie viazaného extrému funkcie*.

Ciele sa v úlohách MP vyjadrujú prostredníctvom optimalizačných kritérií. Optimalizačné kritérium (kritérium optimálnosti) je také, podľa ktorého sa vyberá najlepšie zo všetkých možných riešení. Optimalizačné kritérium by malo výstižne vyjadrovať určený cieľ. V úlohách MP je cieľ definovaný v exaktnom tvare pomocou jednej alebo viacerých účelových funkcií [3.1]. Ak úloha obsahuje viac účelových funkcií, hovoríme o úlohe viackritériálnej optimalizácie.

Na formuláciu optimalizačného kritéria úloh MP na úrovni výrobného podniku sa najčastejšie používajú nasledujúce kritériá:

- maximalizácia množstva vyrobenej produkcie,
- maximalizácia zisku,
- minimalizácia celkových nákladov,
- maximalizácia produktivity práce,
- maximalizácia rentability,
- minimalizácia mzdových nákladov,
- maximalizácia využitia strojovej kapacity,
- maximalizácia využitia materiálu,
- minimalizácia odpadu z produkcie,
- minimalizácia doby návratnosti,
- minimalizácia prepravných nákladov,
- minimalizácia najazdených kilometrov,
- maximalizácia množstva prepraveného materiálu,
- iné druhy optimalizačných kritérií.

Klasifikácia úloh MP:

I. Z hľadiska charakteru funkcií delíme úlohy MP takto:

1. Úlohy lineárneho programovania, ak sú funkcie v optimalizačnom modeli (F aj $f_1, f_2, \dots, f_m$) lineárne, tzv. **lineárny optimalizačný model** – LOM.
2. Úlohy nelineárneho programovania, tzv. **nelineárny optimalizačný model**, ak aspoň jedna z funkcií vystupujúca v úlohe je nelineárna, pričom ich ďalej delíme na:
 - a) **úlohy kvadratického programovania**, ak funkcia F je kvadratickou funkciou, t.j. mnohočlenom druhého stupňa a funkcie f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) sú lineárne;
 - b) **úlohy konvexného programovania**, ak funkcia F je konvexná (konkávna);
 - c) **úlohy lomeného (hyperbolického) programovania**, ak funkcia F je tvaru zlomku (lomená) a f_i sú lineárne.

II. Úlohy MP podľa charakteru parametrov:

- a) **úlohy deterministického programovania**: parametre majú charakter konštant;
- b) **úlohy stochastického programovania**: parametre majú charakter náhodných veličín a pri zostavovaní modelu sa za parametre považujú stredné hodnoty náhodných veličín;
- c) **úlohy parametrického programovania**: parametre sú funkcie iných veličín.

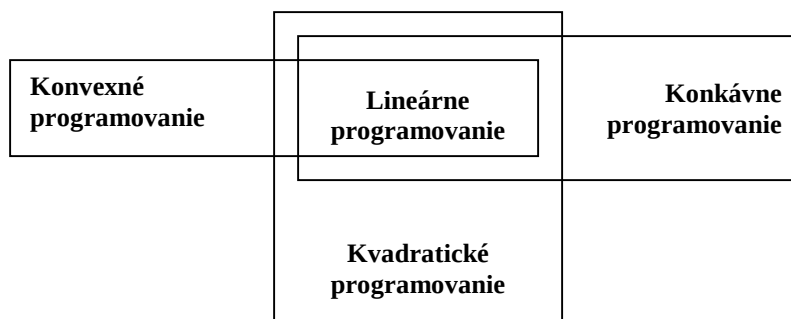
III. Úlohy MP podľa toho, aké hodnoty môžu nadobúdať premenné:

- a) **úlohy spojitého programovania**: premenné nadobúdajú akékoľvek hodnoty na intervaloch, na ktorých sú definované;
- b) **úlohy celočíselného (diskrétného) programovania**: premenné sú iba celočíselné hodnoty; *špeciálny prípad* – úlohy bivalentného programovania (úlohy kombinatorickej povahy), obsahujú tzv. binárne premenné (0,1).

IV. Z hľadiska vplyvu času delíme úlohy MP na:

- a) **úlohy statického MP**, ak neuvažujeme faktor času;
- b) **úlohy dynamického MP**, ak uvažujeme faktor času, dajú sa riešiť aj úlohy statické (tzv. viacetapové rozhodovacie procesy).

Vzájomný vzťah úloh MP je graficky znázornený na obr. 3-1.



Zdroj: Sakál, 2003

Obr. 3-1 Vzájomný vzťah úloh MP

3.2 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Teoretickým základom lineárneho programovania (LP) je lineárna algebra. Otcou LP je prof. Dantzig. Pomocou modelov a metód LP riešime také úlohy, pre ktoré je typická mnohovariantnosť riešenia a v ktorých sa dá predpokladať, že medzi veličinami, ktoré vystupujú v úlohách sú iba lineárne závislosti, čiže predmetom LP je riešenie lineárnych optimalizačných úloh, ktoré sú špeciálnym prípadom všeobecnej úlohy MP.

LP sa vo veľkej miere využíva na podporu rozhodovania manažmentu výrobných podnikov na operatívnej úrovni, napr.:

- pri optimalizácii výrobného programu podniku,
- na určenie optimálnej zmesi (vsádzka do pece, palivo do lietadiel, riešenie nutričného problému pre ľudí a zvieratá, atď.),
- na riešenie dopravného problému (rozvoz alebo zvoz homogénneho produktu, napr.: rozvoz pečiva, mäsa alebo piva či iného produktu do jednotlivých predajní, zvoz odpadového skla, bielizne do čistiarní a pod.),
- na optimalizáciu zásob (napr. stanovenie optimálneho počtu skladovaných plechov).

Metódy, ktoré boli vypracované v rámci teórie LP, sú pomerne jednoduché vo svojej matematickej štruktúre a zároveň použiteľné na riešenie veľkého počtu rôznych úloh.

Všeobecná úloha LP spočíva v určení vektora premenných $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pre ktoré nadobúda extrém (maximum, minimum) funkcia:

$$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n = \max \text{ resp. } \min = \text{ÚF} \quad [3.4]$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \quad [3.5]$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad [3.6]$$

kde a_{ij} , b_i a c_j sú dané konštanty a $m \leq n$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Táto formulácia úloh LP sa tiež nazýva normovaný (kanonický) tvar problému LP alebo lineárny optimalizačný model – LOM.

Dve základné zložky lineárnych optimalizačných modelov (LOM) sú:

1. Funkcia z [3.4], ktorej extrém hľadáme, nazýva sa **účelová funkcia** (ÚF) (**cieľová, preferenčná, ekonomická, kritériálna funkcia**). Pomocou nej matematicky formulujeme cieľ, ktorý chceme dosiahnuť riešením úlohy. Z matematického hľadiska ide o *lineárnu formu* alebo o *lineárnu funkcionálu*.

Definícia: Lineárnou funkciou nazývame takú funkciu f definovanú všeobecne na n -rozmernom vektorovom priestore, ktorá každému vektoru $\bar{x}$ z tohto priestoru priradzuje číslo y , čiže $f(\bar{x}) = y$ a pre ktorú platí:

$$f(\alpha \bar{x}) = \alpha f(\bar{x}) \text{ a } f(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2), \text{ kde } \alpha \text{ je reálne číslo.}$$

Vecná interpretácia ÚF:

- *maximalizácia:* celkového zisku z predaja výrobkov, z objemu výroby za určité obdobie, z produktivity práce, rentability, mzdových nákladov, využitia materiálu, využitia strojovej kapacity a iné;
- *minimalizácia:* výrobných nákladov, prepravných nákladov, celkového výrobného času výroby, odpadu z produkcie, doby návratnosti a iné.

LOM môže mať jednu alebo aj viacej účelových funkcií, ak má:

- jednu funkciu $z \Rightarrow$ jednokriteriálna optimalizácia,
- viac funkcií $z \Rightarrow$ viackriteriálna optimalizácia.

2. Obmedzujúce (ohraničujúce) podmienky (OP), pomocou obmedzení charakterizujeme základné procesy, ktoré sú typické a podstatné pre daný jav. Rozoznávame dva druhy obmedzení:

a) vlastné (štruktúrne) obmedzenia (VO), dané sú [3.5]: matematicky vyjadrujú najrôznejšie podmienky, ktorými je charakterizovaný určitý jav, za ktorých máme uskutočniť optimálne riešenie (extrém).

VO môžu byť formulované:

- v tvare neostrých nerovností ($\leq, \geq$) v oboch smeroch, čo je našou snahou;
- v tvare rovníc ($=$), len v krajnom prípade, lebo variantnosť riešenia do značnej miery vyplýva z nerovností. Ak sú v tvare rovníc, potom sa počet variantov znižuje. Ak sa v slovnom zadaní úlohy nežiada striktná formulácia obmedzenia v tvare rovnice, čiže ak môžeme rozhodnúť či použiť rovnicu, alebo nerovnosť, tak vhodnejšie je použiť nerovnosť.

VO delíme aj na :

- aktívne- ak ich vynecháme, tak sa výsledok riešenia zmení (vždy ich uvažujeme!);
- pasívne- ak ich vynecháme, nemá to vplyv na výsledok riešenia; môžeme ich vypustiť, pretože sa nezúčastňujú na tvorbe optimálneho riešenia a získané riešenie ako keby tam boli, (tiež hovoríme o podstatných a nepodstatných VO).

VO môžu vyjadrovať v ekonomickej praxi jednak:

- OP na strane vstupu (vstupné VO): predstavujú disponibilné množstvá výrobných činiteľov (to, čo vstupuje do procesu): suroviny, materiál, nakupované výrobky, strojné a výrobné zariadenia, pracovné sily a podobne, disponibilné množstvo sa úplne spotrebuje (označujeme $=$) alebo zostane rezerva (označujeme $\leq$),

- OP na strane výstupu (výstupné VO): sú dané plánom výroby, to, čo vystupuje z výrobného procesu- požiadavky na sortiment, obmedzenosť odbytu a podobne, plán sa splní (označujeme =) alebo sa prekročí (označujeme $\geq$).
- b) podmienky nezápornosti (PN) premenných [3.6], ktorými zabezpečujeme, že premenné môžu nadobúdať iba nezáporné hodnoty (vyjadrujeme nimi požiadavku, aby procesy, ktoré uskutočňujeme, neprebiehali na zápornej úrovni). Táto požiadavka je pri ekonomických úlohách oprávnená.

V každom modeli (LOM) vystupujú dva druhy veličín:

- premenné modelu (endogénne veličiny): $x_1, x_2, \dots, x_n$, hodnoty získame vyriešením modelu;
- parametre modelu (exogénne veličiny): a, b, c , ich hodnoty musíme poznať ak chceme zostaviť a riešiť model.

Premenné $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ predstavujú úroveň určitých procesov, môžeme ich písať ako usporiadanú n - ticu čísel vo forme n - rozmerného vektora $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{- vektor úrovne procesov, } x_j \text{ - úroveň } j\text{-teho procesu.}$$

Každý proces je charakterizovaný usporiadanou sústavou $(m + 1)$ reálnych čísel. Napríklad prvý proces je charakterizovaný sústavou $[a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, c_1]$. Prvých m – čísel charakterizuje štruktúra procesu. Pretože ide o usporiadanú m - ticu čísel, môžeme ich písať vo forme stĺpcového vektora $\bar{a}_j$, čo nazývame vektormi štruktúrnych procesov:

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{- vektor štruktúry procesov, } j = 1, 2, \dots, n; \quad \bar{a}_j \text{ - vektor štruktúry } j\text{-teho procesu}$$

a_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) koeficienty štruktúry procesov – udávajú, koľko jednotiek i -teho činiteľa treba ak j - ty proces chceme realizovať na jednotkovej úrovni (koľko i -teho sa spotrebuje na výrobu j - teho výrobku); normy spotreby materiálu, času,...

Ľubovoľný proces je vtedy determinovaný ak poznáme jeho ocenenie (c_j) a ak poznáme jeho vektor štruktúry ($\bar{a}_j$). Vektory $\bar{a}_j$ môžeme písať vo forme matice $\bar{A} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n]$ - matica koeficientov štruktúry procesov.

Cena procesu $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ – predstavuje: jednotkový zisk, jednotkové ceny, náklady, ...; oceňujú procesy (jednotkovú úroveň procesov). „Ceny“ jednotlivých procesov môžeme písať ako usporiadanú n -ticu čísel vo forme n – rozmerného riadkového vektora $\bar{c} = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_n]$. Vektor $\bar{c}$ nazývame vektorom ocenenia úrovne procesov (vektor cien).
 c_j – koeficienty ÚF – oceňujeme jednotlivé procesy vzhľadom na stanovený cieľ (váha, ceny, náklady, spotreba času s pod.), t.j. akým podielom proces prispieva na realizáciu cieľa.

Čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ predstavujú pravé strany obmedzujúcich podmienok, resp. disponibilné množstvá výrobných činiteľov alebo plánované množstvá výrobkov, môžeme ich písať vo forme m -rozmerného stĺpcového vektora $\bar{b}$, ktorý nazývame vektorom disponibilných zdrojov.

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{- vektor pravých strán obmedzujúcich podmienok alebo vektor disponibilných činiteľov}$$

Na základe vektorovo maticovej symboliky môžeme zapísať LOM v maticovo – vektorovom tvare:

$$z = \bar{c} \cdot \bar{x} = \max, \text{ resp. } \min$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq 0$$

[3.7]

a) maximalizačná úloha

$$z = \bar{c} \cdot \bar{x} = \max$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b} \quad [3.8]$$

$$\bar{x} \geq 0$$

b) minimalizačná úloha

$$z = \bar{c} \cdot \bar{x} = \min$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b} \quad [3.9]$$

$$\bar{x} \geq 0$$

Zápis LOM pomocou sumarizačných znamienok:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j = \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_j \quad i=1,2,\dots,m \quad [3.10]$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{pre } j=1,2,\dots,n$$

Maximalizačnú úlohu možno zmeniť na minimalizačnú alebo opačne, minimalizačnú na maximalizačnú tak, že koeficienty účelovej funkcie prenásobíme (-1), potom hodnoty účelovej funkcie, ktoré získame riešením modelu, musíme opäť prenásobiť (-1), aby sme dostali akceptovateľnú hodnotu.

Poznámka:

Lom nemá ekonomický zmysel, ak:

a) $z = \bar{c} \cdot \bar{x} = \max$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b}$$

- riešenie tohto modelu je vektor $\bar{x}$ s nekonečne veľkými súradnicami

b) $\bar{x} \geq 0$

$$z = \bar{c} \cdot \bar{x} = \min$$

- nulové riešenie, ktoré tiež nemá praktický zmysel.

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq 0$$

3.3 MATEMATICKÁ FORMULÁCIA ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Predpokladajme, že celá ťažká a na skúsenosť a vedomosti náročná práca, spojená obvykle s rozsiahlym zberom a spracovaním štatistického materiálu- formulácia ekonomického modelu, bola dokončená.

Našou úlohou teraz bude transformovať takto formulované ekonomické modely na matematický model a formulovať mu zodpovedajúcu matematickú úlohu.

Pri formulácii matematických modelov (úloh) sa používa niekoľko základných typických obrátov či postupov. Tieto obraty a postupy sú obsiahnuté v niekoľkých klasických úlohách, ktoré majú svoj názov obvykle ako rozmiestňovacia úloha (alokačný problém), vyživovací (nutričný) problém, Kantorovičova úloha výrobného plánovania, dopravný problém, priradovací problém a podobne.

Pri zostavovaní matematického modelu úlohy LP je vhodné analyzovať ekonomický model nasledovným spôsobom (Sakál, 1990):

1. **Identifikovať procesy**- určiť, čo sa bude považovať za procesy modelu, definovať jednotkovú úroveň každého procesu, zvoliť premenné na označenie hľadanej úrovne procesov, určiť presný vecný význam premenných, ich dimenziu a mernú jednotku.
2. **Identifikovať činitele a určiť technické koeficienty**- určiť činitele, ktoré vstupujú do procesov (zdroje- suroviny, materiál, časové fondy) a činitele, ktoré vystupujú a sú výsledkom realizácie procesov (vyrobené množstvá polotovarov, hotových výrobkov, atď.). Ďalej je potrebné určiť, aké množstvo toho - ktorého činiteľa vstupuje do procesu, či vystupuje z neho, ak proces realizujeme na jednotkovej úrovni, t.j. stanoviť technické koeficienty.
3. **Formulovať ohraničenie úlohy v tvare** lineárnych rovníc alebo nerovníc, pričom na pravej strane rovníc alebo nerovníc sú disponibilné množstvá vstupujúcich (výrobných) činiteľov (DMVČ), alebo produkované (plánované) množstvo vystupujúceho (vyrobeného) činiteľa (PMV), v oboch prípadoch vyjadrené ako lineárna funkcia premenných úloh.
4. Určiť **kritérium optimality** a vyjadriť ho ako lineárnu funkciu premenných úloh.

Predchádzajúci postup bude uvedený na niekoľkých príkladoch, pričom klasickými aplikáciami úloh LP sú už spomínané úlohy o optimalizácii výrobného programu podniku, určenie optimálnej zmesi, riešenie dopravného problému, úlohy o optimálnom rezaní materiálu. Uvádzané príklady sú prevzaté z (Sakál, 2003) a (Ivaničová, 2002).

3.4 KLASICKÉ ÚLOHY LOM

A1- Optimálny plán výroby

Podnik vyrába 2 typy výrobkov V_1 a V_2 v dvoch prevádzkach P_1 a P_2 . Za jeden výrobok V_1 realizuje zisk 10 jednotiek (tisíc), za jeden výrobok V_2 zisk 12 jednotiek. Kapacita prevádzky P_1 stačí na výrobu 6 výrobkov V_1 za zmenu alebo výrobu 12 výrobkov V_2 za zmenu. Kapacita prevádzky P_2 je 12 výrobkov V_1 alebo 8 výrobkov V_2 za zmenu.

Úlohou je naplánovať výrobu (určiť počty výrobkov V_1 a V_2) tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk.

Riešenie:

Zo slovnej úlohy vyplýva, že za **proces** budeme považovať **výrobu výrobkov**.

Slovnú úlohu si formálne zapíšeme do nasledovnej tabuľky.

Výrobok	V_1	V_2	Kapacita
Prevádzka			
P_1	6	12	1
P_2	12	8	1
Zisk	10	12	MAX

Po formálnom zápise úlohy do tabuľky je už vytvorenie jej matematického modelu elementárne. Ďalším krokom pri zostavovaní modelu je proces výroby výrobkov rozdeliť na jednotlivé úrovne (**úroveň procesu**): k hľadanému počtu výrobkov V_1 priradíme premennú x_1 a hľadanému počtu výrobkov V_2 premennú x_2 .

Účelová funkcia bude mať tvar: $z = 10x_1 + 12x_2 = \max$

a obmedzujúce podmienky vyplývajúce z toho, že nesmú byť prekročené disponibilné množstvá

(zásoby) surovín, budú v tvare:

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

pre prvú prevádzku a

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

pre druhú prevádzku. Z fyzikálneho princípu úlohy pritom vyplývajú ešte dve ďalšie obmedzujúce podmienky (počet výrobkov nemôže byť záporné číslo), a preto platí:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Pre úplnosť uvedieme tento model ešte v kompaktnom zápise, ktorého tvar je:

$$z = 10x_1 + 12x_2 = \max$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

A2 – Optimalizácia výrobného sortimentu

Predpokladajme, že závod môže vzhľadom na svoje výrobné činitele vyrábať 4 rôzne výrobky V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , pričom V_1 a V_2 jednak spotrebúva na výrobu V_3 a V_4 a jednak ich odpredáva ako náhradné súčiastky.

Na V_3 sa spotrebuje: $1V_3 = 2V_1 + 4V_2$,

na V_4 sa spotrebuje: $1V_4 = 3V_1 + 5V_2$.

Na výrobu týchto 4 výrobkov sa spotrebovávajú okrem iného 2 druhy surovín S_1 a S_2 , ktoré sú úzkoprofilové. V sledovanom období má závod k dispozícii 3000 jednotiek S_1 a 2800 jednotiek S_2 .

Spotreba surovín na jednotlivé výrobky je uvedená v tabuľke:

	V_1	V_2	V_3	V_4
S_1	2	3	-	1
S_2	4	5	2	-

Nadriadený orgán žiada od závodu, aby vyrobil minimálne:

- 10 ks V_1 ako náhradné súčiastky,
- 15 ks V_2 ako náhradné súčiastky navyše.

Ceny jednotlivých výrobkov z hľadiska odbytu sú nasledovné:

výrobok $V_1 - 10$ €,
 $V_2 - 20$ €,
 $V_3 - 200$ €,
 $V_4 - 300$ €.

Treba určiť, koľko ktorých výrobkov by mal závod v sledovanom období vyrobiť, aby vzhľadom na obmedzené výrobné činitele a vzhľadom na stanovenú podmienku pre náhradné súčiastky maximalizoval hodnotu odbytu (za predpokladu čo vyrobí, to aj predá).

Riešenie:

- **procesy** – výroba jednotlivých výrobkov (4 procesy V_1, V_2, V_3, V_4),

- **úroveň procesov** – počet vyrobených výrobkov: $x_1 - V_1$,
 $x_2 - V_2$,
 $x_3 - V_3$,
 $x_4 - V_4$.

- **vlastné obmedzenia** – na strane vstupu – suroviny:

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 3000 \quad \text{....spotreba } S_1,$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2800 \quad \text{....spotreba } S_2,$$

– na strane výstupu – náhradné súčiastky:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 - 2x_3 - 3x_4 & \geq & 10 \quad \dots 10 \text{ ks náhradných súčiastok } V_1, \\
 x_2 - 4x_3 - 5x_4 & \geq & 15 \quad \dots 15 \text{ ks náhradných súčiastok } V_2. \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & \text{spotreba pri výrobe } V_3 \text{ a } V_4
 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

ÚF: - len to odpredáme, čo nespotrebuje vo vnútri závodu, t.j.:

$$z = 10(x_1 - 2x_3 - 3x_4) + 20(x_2 - 4x_3 - 5x_4) + 200x_3 + 300x_4 = \max$$

B1- Určenie optimálnej zmesi

Úlohou je vyrobiť pri minimálnych nákladoch zmes o obsahu minimálne 54 jednotiek zložky A, minimálne 45 jednotiek zložky B a minimálne 52 jednotiek zložky C. K dispozícii sú 2 suroviny S_1 a S_2 o jednotkových cenách 600 a 800 jednotiek. Pritom surovina S_1 obsahuje v jednotkovom množstve 2 jednotky zložky A, 1 jednotku zložky B a 3 jednotky zložky C, surovina S_2 obsahuje 3 jednotky zložky A, 2 jednotky zložky B a 2 jednotky zložky C.

Riešenie:

Zo slovnej úlohy vyplýva, že za **proces** budeme považovať **výrobu zmesi**.

Slovnú úlohu si formálne zapíšeme do tabuľky.

Suroviny	S_1	S_2	Požiadavky
Zložky			
A	2	3	54
B	1	2	45
C	3	2	52
Ceny	600	800	MIN

Po formálnom zápise úlohy do tabuľky vytvoríme jej matematický model. Ďalším krokom pri zostavovaní modelu proces výroby zmesi rozdelíme na jednotlivé úrovne (**úroveň procesu**): k výrobe zmesi z S_1 priradíme premennú x_1 a k výrobe zmesi z S_2 premennú x_2 .

Matematický model úlohy je nasledovný:

$$\begin{aligned}
z &= 600x_1 + 800x_2 = \max \\
2x_1 + 3x_2 &\geq 54 \\
1x_1 + 2x_2 &\geq 45 \\
3x_1 + 2x_2 &\geq 52 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Formálne na rovnaký model vedie aj modifikácia klasického zadania nutričnej úlohy, ktorá rieši optimálne zloženie stravy s udanými požiadavkami na dodržanie zásad zdravého stravovania (percento základných zložiek stravy v jedlách) s cieľom minimalizovať náklady na nákup potravín, na spotrebovanú energiu a prácu pri príprave jedál.

B2- Problém výživy (úloha o diéte)

V rámci predpísanej diéty v nemocnici majú deti získať určité množstvá látok dôležitých pre ich výživu z obilninových pokrmov, podávaných v rámci raňajok. Pri zostavovaní jedálneho lístka možno voliť medzi dvoma bežne podávanými polotovarimi z obilnín (K, C) alebo sa rozhodnúť pre nejakú ich zmes. Z raňajok by deti mali získať prinajmenšom 1 mg tiamínu, 6 mg niacínu a 400 kalórií. Jeden dag polotovaru K obsahuje 0,1 mg tiamínu, 1 mg niacínu a 110 kalórií. Jeden dag polotovaru C obsahuje 0,1 mg tiamínu, 0,2 mg niacínu a 150 kalórií. Cena 1 dag polotovaru K je 0,18 €, cena 1 dag polotovaru C je 0,13 €. Treba určiť, v akom množstve sa musia nakúpiť produkty na raňajky pre jedno dieťa, aby sa dosiahla potrebná skladba výživy a aby náklady pre nemocnicu boli minimálne.

Pretože možno predpokladať, že vzťahy medzi množstvom podávaných obilninových produktov a získanými množstvami tiamínu, niacínu a kalóriami sú lineárne, môžeme skonštruovať LOM.

Riešenie:

- **procesy** – podávanie polotovarov z obilnín (2 procesy K, C),

- **úroveň procesov** – množstvo polotovarov: $x_1 - K$,
 $x_2 - C$.

- **vlastné obmedzenia** – na strane vstupu – nie sú

– na strane výstupu – nutričné množstvá:

$$0,1x_1 + 0,1x_2 \geq 1 \quad \dots 1 \text{ mg tiamínu}$$

$$x_1 + 0,2x_2 \geq 6 \quad \dots 6 \text{ mg niacínu}$$

$$110x_1 + 150x_2 \geq 400 \quad \dots 400 \text{ kalórií}$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2 \geq 0$

ÚF: minimalizácia nákladov na nákup produktov, t.j.:

$$z = 0,15x_1 + 0,12x_2 = \min$$

C- Riešenie dopravného problému

Predpokladáme, že určitý materiál je rozmiestnený v troch skladoch, ktoré sú na rôznych miestach. Sklad S_1 má kapacitu 300 jednotiek, S_2 - 400 j., S_3 - 300 j. Materiál zo skladov treba prepraviť trom odberateľom, ktorí sú na rôznych miestach. Požiadavky odberateľov sú nasledovné: O_1 - 200 j., O_2 - 300 j., O_3 - 500 j. Prepravné sadzby v € na jednu prepravovanú jednotku sú v tabuľke.

	O_1	O_2	O_3
S_1	40	35	38
S_2	42	32	41
S_3	44	36	39

Úlohou je určiť, z ktorého skladu koľko jednotiek materiálu dopraviť ktorému odberateľovi tak, aby sme odberateľov plne uspokojili a pritom aby celkové náklady na rozvoz materiálu zo skladov odberateľov boli minimálne.

Riešenie:

Zo slovnej úlohy vyplýva, že za **proces** budeme považovať **prepravu materiálu**.

Úroveň procesu: v danej úlohe je výhodné zaviesť dvojindexovú premennú x_{ij} , kde i bude predstavovať sklady ($i = 1, 2, 3$) a j odberateľov ($j = 1, 2, 3$). Procesov je $3 \times 3 = 9$.

x_{ij} -prepravované množstvo materiálu z i -teho skladu k j -temu odberateľovi v jednotkách.

Obmedzujúce podmienky budú vyjadrovať kapacitu skladov (vstupné VO) a požiadavky odberateľov (výstupné VO). Pred samotným zostavením modelu musíme zistiť, či je dopravná úloha (DÚ) vyvážená. Vyváženosť DÚ zistíme porovnaním kapacít skladov a požiadaviek odberateľov:

- a) ak sa rovnajú => DÚ je vyvážená, potom VO formulujeme v tvare rovníc,
- b) ak sa nerovnajú => DÚ je nevyvážená, potom VO formulujeme v tvare nerovností.

V úlohe je kapacita skladov rovná s požiadavkami odberateľov ($1000 = 1000$) => DÚ je **vyvážená**.

VO vstupné:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 300$	... S_1
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400$	... S_2
$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 300$	... S_3

VO výstupné:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$	... O_1
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300$	... O_2
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 500$	... O_3

Podmienky nezápornosti:

$x_{ij} \geq 0$	$i = 1, 2, 3$
	$j = 1, 2, 3$

Účelová funkcia bude vyjadrovať (matematicky) náklady v € na prepravu ako súčet súčinov prepravných sadzieb v €/jednotka a jednotiek množstva prepravovaného materiálu, pričom chceme minimalizovať náklady:

$$\begin{aligned} \text{ÚF: } z = & 40 x_{11} + 35 x_{12} + 38 x_{13} + 42 x_{21} + 32 x_{22} + 41 x_{23} + 44 x_{31} + 36 x_{32} + \\ & + 39 x_{33} = \min \end{aligned}$$

Poznámka: DÚ má **vždy aspoň jedno optimálne riešenie:**

- ak pravé strany obmedzujúcich podmienok sú celé čísla, potom celočíselné optimálne riešenie;

- na riešenie existujú: - metódy na získanie východiskového (vyhovujúceho) riešenia ako napríklad:

- severozápadného rohu (SZR);
- indexová metóda (IM);
- Vogelova aproximačná metóda (VAM);
- frekvenčná metóda (FM);

- presné metódy:

- metóda stĺpcových a riadkových čísiel (modifikovaná metóda- MODI).

Vymenované metódy budú bližšie vysvetlené v kapitole 4.1.

D1 – úloha zostavovania optimálnych zaťažovacích plánov

- a) (strojov, výrobných zariadení) $\approx$ rozvrhovanie plánovanej výroby na stroje;
- b) úloha vznikne vtedy, ak máme v dielni, prevádzke, závode navzájom zameniteľné stroje (výrobné zariadenia).

Predpokladajme, že máme k dispozícii 3 stroje označené S_1 , S_2 , S_3 , na ktorých možno vyrábať 4 rôzne výrobky A, B, C, D. Pričom každý výrobok možno vyrábať na všetkých 3 strojoch.

Efektívne časové fondy strojov v sledovanom období sú nasledovné:

S_1 – 3000 strojových hodín,

S_2 – 2500 strojových hodín,

S_3 – 2800 strojových hodín.

Plán stanovuje vyrobiť v sledovanom období na týchto strojoch 300 ks výrobkov A,
250 ks výrobkov B,
290 ks výrobkov C,
420 ks výrobkov D.

Spotreba strojového času na jednotlivé výrobky v min/ks je uvedená v tabuľke:

	A	B	C	D
S_1	12	14	18	17
S_2	10	12	19	15
S_3	14	15	16	14

[min/ks]

Náklady na výrobu jednotlivých výrobkov na jednotlivých strojoch v €/ks sú v tabuľke:

	A	B	C	D
S_1	2	2,4	3,2	3,0
S_2	1,6	1,8	2,5	1,7
S_3	1,9	2,4	2,2	1,7

[€/ks]

Treba určiť, koľko ktorých výrobkov na ktorom stroji vyrobiť tak, aby sa splnil plán s minimálnymi nákladmi (týmto plánom optimálne zaťažiť stroje!).

Riešenie:

- **procesy** – výroba určitého výrobku na určitom stroji,
- **úroveň procesov** – x_{ij} (dvojindexová premenná $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$),

x_{ij} – množstvo výrobkov j -teho druhu, ktoré treba vyrobiť na i -tom stroji (alebo čas, ktorý venujeme na výrobu j -teho výrobku na i -tom stroji, rozhodujeme sa podľa zadania).

ÚF: predstavuje výrobné náklady, minimalizujeme (náklady na A–ty výrobok na stroji S_1 sú 20 €/ks, atď.),

$$z = 2,0x_{11} + 2,4x_{12} + 3,2x_{13} + 3,0x_{14} + 1,6x_{21} + 1,8x_{22} + 2,5x_{23} + 1,7x_{24} + 1,9x_{31} + 2,4x_{32} + 2,2x_{33} + 1,7x_{34} = \min$$

OP: - VO na strane vstupu, vyplývajú z efektívnych časových fondov jednotlivých strojov [min] :

$$12x_{11} + 14x_{12} + 18x_{13} + 17x_{14} \leq 3000 \cdot 60 \quad \dots S_1$$

$$10x_{21} + 12x_{22} + 19x_{23} + 15x_{24} \leq 2500 \cdot 60 \quad \dots S_2$$

$$14x_{31} + 15x_{32} + 16x_{33} + 14x_{34} \leq 2800 \cdot 60 \quad \dots S_3$$

- VO na strane výstupu – plánom určené množstvá jednotlivých výrobkov [ks]:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300 \quad \dots \text{výrobkov A na všetkých strojoch}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 250 \quad \dots \text{výrobkov B na všetkých strojoch}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 290 \quad \dots \text{výrobkov C na všetkých strojoch}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 420 \quad \dots \text{výrobkov D na všetkých strojoch}$$

- podmienky nezápornosti: $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4)$

(tzv. zovšeobecnený distribučný model)

D2 – zovšeobecnený distribučný model

(úloha zostavovania optimálnych zaťažovacích plánov)

Formulujme matematický model úlohy:

Strojárenský závod vyrába štyri druhy presných skrutiek na troch druhoch automatických strojov. Každý druh skrutky môže byť vyrobený na stroji z niektorej skupiny strojov s určitým vynaložením strojového času. Náklady na hodinu práce stroja

S_1 sú 120 €,

S_2 - 90 €,

S_3 - 80 €.

V každej strojovej skupine je k dispozícii 2400 strojových hodín.

Plán výroby je

- 800 ks skrutiek A,
- 1800 ks skrutiek B,
- 1400 ks skrutiek C,
- 1800 ks skrutiek D.

Čas v hodinách potrebný na výrobu 1 skrutky určitého druhu na stroji určitej skupiny je uvedený v tabuľke:

	A	B	C	D
S ₁	0,4	0,2	0,4	0,2
S ₂	0,8	0,6	0,4	0,6
S ₃	1,0	1,0	0,8	0,6

[hod/ks]

Je treba pridelit' výrobu do strojovych skupin tak, aby bol plan splneny s minimalnymi nakladmi.

Riesenie:

- **procesom** (hospodarskou cinnost'ou) v tomto modeli bude výroba skrutiek urcitého druhu na stroji určitej skupiny;
- **úroveň procesov** – x_{ij} , počet skrutiek j -teho druhu vyrábaných na stroji i -tej skupiny ($j = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2, 3$); premenné môžu nadobúdať iba nezáporné celočíselné hodnoty;
- **ÚF** – vyjadruje náklady na výrobu skrutiek;
- najskôr musíme vypočítať náklady na výrobu jednej skrutky všetkých druhov na stroji každej skupiny. Tieto koeficienty dostaneme vynásobením nákladov na jednu hodinu práce stroja časom potrebným na výrobu jednej skrutky na tomto stroji, pozri tabuľku:

	A	B	C	D
S ₁	120.0,4	120.0,2	120.0,4	120.0,2
S ₂	90.0,8	90.0,6	90.0,4	90.0,6
S ₃	80.1,0	80.1,0	80.0,8	80.0,6

[€/ks]

Náklady na uskutočnenie hľadaného výrobného programu sú dané výrazom účelovej funkcie:

$$z = 48x_{11} + 24x_{12} + 48x_{13} + 24x_{14} + 72x_{21} + 54x_{22} + 36x_{23} + 54x_{24} + 80x_{31} + 80x_{32} + 64x_{33} + 48x_{34} = \min$$

OP: na strane vstupu – vyplývajú z obmedzenej kapacity strojov:

$$0,4x_{11} + 0,2x_{12} + 0,4x_{13} + 0,2x_{14} \leq 2400 \quad \dots S_1$$

$$0,8x_{21} + 0,6x_{22} + 0,4x_{23} + 0,6x_{24} \leq 2400 \quad \dots S_2$$

$$x_{31} + x_{32} + 0,8x_{33} + 0,6x_{34} \leq 2400 \quad \dots S_3$$

na strane výstupu – vyplývajú z požiadaviek plánu:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 800 \quad \dots A$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1800 \quad \dots B$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 1400 \quad \dots C$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 1800 \quad \dots D$$

- **podmienky nezápornosti:** $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$).

E- Úloha o optimálnom rezaní materiálu

Z polotovaru o dĺžke $l = 8$ m je potrebné narezať minimálne 1000 priereзов o dĺžke $l_1 = 2,5$ m, 600 priereзов dĺžky $l_2 = 3,0$ m a 200 priereзов dĺžky $l_3 = 3,5$ m tak, aby odpad vzniknutý pri rezaní bol minimálny. V tabuľke sú uvedené varianty rezania s počtami narezaných dĺžok priereзов l_1, l_2, l_3 , a odpadom pri jednotlivých variantoch rezania.

Dĺžka prierezu	Variant rezania						Potreba
	1	2	3	4	5	6	
$l_1 = 2,5$ m	3	-	-	2	1	-	1000
$l_2 = 3,0$ m	-	2	-	1	-	1	600
$l_3 = 3,5$ m	-	-	2	-	1	1	200
odpad	0,5	2,0	1,0	0	2,0	1,5	MIN

Riešenie:

Zo slovnej úlohy vyplýva, že za:

- **proces** budeme považovať **rezanie materiálu**,
- **úroveň procesu:** jednoindexová premenná x_i - udáva počet, koľkokrát sa použije i -ty variant rezania ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Matematický model:

$$\begin{aligned}
 z &= 0,5x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 2x_5 + 1,5x_6 = \min \\
 3x_1 + 2x_4 + 1x_5 &\geq 1000 & \dots l_1 \\
 2x_2 + 1x_4 + 1x_6 &\geq 600 & \dots l_2 \\
 2x_3 + 1x_5 + 1x_6 &\geq 200 & \dots l_3 \\
 x_i &\geq 0 \text{ pre } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned}$$

Poznámka: Uvedený príklad predstavuje klasický model optimálneho rezného plánu uvádzaný všeobecne v literatúre. Jeho riešením je $x_3 = 100$, $x_4 = 600$, $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$ a hodnota účelovej funkcie $Z = 100$.

Podobné úlohy (A - E) je možné nájsť v bohatej dostupnej literatúre zaoberajúcej sa problematikou lineárneho programovania. Heslovito je možné uviesť niektoré z nich :

- optimálny plán montáže,
- optimálne zloženie strojových zostav,
- optimálne plány rozvozu tovaru (dopravná úloha),
- optimálne umiestnenie výrobní,
- optimálne priradenie a pod.,
- najkratšia cesta v grafe,
- maximálny tok v sieti,
- optimálny plán zložitých projektov atď.

Ako bude uvedené v ďalšom, prakticky všetky úlohy je možné riešiť všeobecnými algoritmami lineárneho programovania, avšak pre niektoré z nich – dopravný a priradovací problém a úlohy teórie grafov - boli vyvinuté špeciálne metódy a algoritmy riešenia, ktoré sú efektívnejšie ako postupy všeobecné (špeciálne metódy na riešenie dopravného a priradovacieho problému budú uvedené v kapitole 4, úlohy teórie grafov v kapitole 5.).

3.5 VLASTNOSTI RIEŠENIA ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

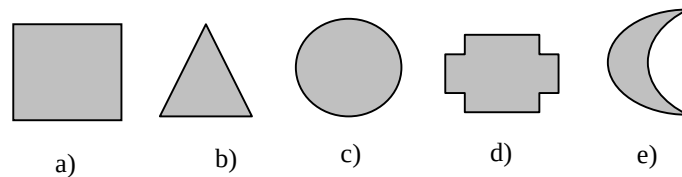
Rozoznávame tri druhy riešenia pri úlohách LP (Sakál, 2003):

Definícia 1: *Prípustné riešenie*

Prípustným riešením úlohy lineárneho programovania nazývame vektor $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyhovujúci vlastným obmedzeniam a podmienkam nezápornosti.

Poznámka: Množina prípustných riešení je konvexnou množinou (ohraničená s konečným počtom krajných bodov alebo neohraničená).

Konvexná množina (KM)- je každá taká množina, do ktorej patrí celá spojnica ľubovoľných dvoch bodov tejto množiny. Napr.: priamka, polpriamka, úsečka, rovina, polrovina, priestor, polpriestor). Ukážka konvexných/nekonvexných množín je na nasledujúcom obrázku.



Obr. 3-2 Konvexné množiny (a, b, c) a nekonvexné množiny (d, e)

KM delíme na:

- ohraničené- neobsahujú polpriamku,
- neohraničené- obsahujú aspoň jednu polpriamku, rovinu, ...

Body KM delíme na: - vnútorné body,

- hraničné body.

Špeciálnym prípadom hraničného bodu je krajný bod. Je to taký hraničný bod, ktorý neleží na spojnici žiadnych dvoch bodov KM.

Oporná priamka (o. rovina, o. nadrovina)- voči určitej KM je taká priamka, ktorá má s danou KM spoločný aspoň jeden bod a pritom KM celá leží v jednej z polrovín, na ktoré priamka rozdeľuje rovinu.

Definícia 2: Základné (bázické) riešenie

Základným riešením úlohy LP nazývame také prípustné riešenie $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ktoré má maximálne toľko nenulových kladných premenných, koľko je lineárne nezávislých obmedzujúcich podmienok:

$$\bar{b} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \cdot x_j, \text{ ktorých je najviac } (\leq) m.$$

Ak počet kladných zložiek vektora $\bar{x}$ je práve m , bázové riešenie nazývame nedegenerované. V ostatných prípadoch budeme hovoriť o degenerovanom probléme.

Grafickým zobrazením základného riešenia je krajný bod množiny prípustných riešení.

Definícia 3: Optimálne riešenie

Optimálnym riešením úlohy LP nazývame také prípustné riešenie, ktoré tiež vyhovuje účelovej funkcii (maximalizuje, minimalizuje lineárnu funkcionálu).

ÚF nadobúda extrémnu hodnotu buď v jednom krajnom bode množiny prípustných riešení, alebo vo viacerých krajných bodoch a vo všetkých tých bodoch, ktoré sú konvexným obalom týchto krajných bodov.

Veta 1: Množina všetkých prípustných riešení úloh LP je konvexná.

Veta 2: Účelová funkcia nadobúda extrém v krajnom bode konvexnej množiny, ktorá je množinou prípustných riešení tejto úlohy. Ak ÚF nadobúda extrém vo viac ako jednom krajnom bode, dosahuje túto hodnotu v ľubovoľnom bode, ktorý je konvexnou lineárnou kombináciou týchto bodov.

Základná veta LP: Ak má úloha LP optimálne riešenie, potom má tiež základné optimálne riešenie.

Závery:

1. Existuje taký krajný bod prípustnej množiny, v ktorom ÚF úlohy LP nadobúda svoj extrém.
2. Každé základné (bázické) riešenie zodpovedá nejakému krajnému bodu prípustnej množiny riešení.
3. Každému krajnému bodu prípustnej množiny riešení prislúcha m lineárne nezávislých vektorov z danej sústavy n vektorov.

Pri hľadaní optimálneho riešenia stačí teda skúmať len základné riešenia, t.j. len krajné body prípustnej množiny riešení, z ktorých každý je určený sústavou m lineárne nezávislých vektorov.

Keďže sústava n m -rozmerných vektorov nemá viac ako $\binom{n}{m}$ podsústav pozostávajúcich z m lineárne nezávislých vektorov, veličina $\binom{n}{m}$ udáva hornú hranicu počtu bázických riešení úlohy. Teda počet riešení, z ktorých môžeme vybrať optimálne riešenie, je konečný, ale s rastúcimi hodnotami n a m sa počet základných riešení neúmerne zvyšuje.

Poznámka: To znamená, že treba hľadať základné optimálne riešenie len medzi optimálnymi riešeniami (nachádza sa aspoň v 1 krajnom bode).

Na určenie základného optimálneho riešenia treba mať však výpočtovú schému, umožňujúcu systematický prechod od jedného základného riešenia k druhému. Takouto schémou je simplexová metóda (navrhnutá G. B. Dantzigom).

Ak úloha nemá prípustné riešenie alebo ak jej ÚF nie je na množine prípustných riešení ohraničená, simplexová metóda to umožňuje zistiť po konečnom počte krokov.

3.6 SITUÁCIE, KTORÉ MÔŽU NASTAŤ PRI RIEŠENÍ ÚLOH LP

1. LOM (úloha LP) nemá optimálne riešenie (Sakál, 2003):

- a) – nemá vôbec prípustné riešenie, tzn., že obmedzujúce podmienky sú navzájom sporné, ich množina riešení je prázdna (ak chceme, aby úloha mala prípustné riešenie, musíme upraviť obmedzujúce podmienky);
- b) – úloha má síce prípustné riešenie, ale ÚF nenadobúda na množine prípustných riešení konečný požadovaný extrém (tzn., že optimálne riešenie úlohy neexistuje):

$$\bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \max$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad „\infty“$$

$$\bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \min$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad „0“$$

2. LOM (úloha LP) má optimálne riešenie (Sakál, 2003):

- a) – úloha má iba jedno jediné optimálne riešenie;
 - hovoríme, že úloha je jednoznačná;
 - ÚF nadobúda požadovaný extrém iba v jednom krajnom bode množiny prípustných riešení;
- b) – úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení;
 - hovoríme, že úloha má optimálne riešenie mnohoznačné;
 - ÚF nadobúda požadovaný extrém aspoň v dvoch krajných bodoch množiny prípustných riešení a vo všetkých bodoch, ktoré sú konvexnou kombináciou týchto bodov;
 - v tomto prípade možno množinu optimálnych riešení rozdeliť na dve podmnožiny:

α – diskrétnu podmnožinu optimálnych základných riešení,

β – spojitú podmnožinu optimálnych nezákladných riešení.

Poznámka:

Optimálne nezákladné riešenia vytvárajú konvexný obal optimálnych základných riešení, čiže ľubovoľné optimálne nezákladné riešenie môžeme vypočítať ako konvexnú kombináciu optimálnych základných riešení.

Definícia: Konvexnou kombináciou bodov $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ sa nazýva bod:

$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n,$$

kde

$$\alpha_i \geq 0 \text{ a } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1).$$

Podmnožina $\bar{C}$ z $\bar{E}_n$ sa nazýva *konvexnou*, keď konvexná kombinácia ľubovoľnej dvojice jej bodov $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, $\bar{x} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2$ tiež patrí do podmnožiny $\bar{C}$.

Príkladom konvexných množín je sám priestor $\bar{E}_n$, kruh, kocka. Množina bodov tvoriaca hranicu kruhu (kružnicu) nie je konvexnou množinou.

Poznámka:

Ľubovoľnú úlohu LP môžeme riešiť buď ako maximalizačnú, alebo minimalizačnú:

$$\begin{array}{ll} \text{ÚF:} & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \max \quad / \cdot (-1) & - \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \min \\ & \bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b} & \bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b} \\ & \bar{x} \geq \bar{0} & \bar{x} \geq \bar{0} \end{array}$$

3.7 RIEŠENIE LOM

LOM môžeme riešiť dvoma spôsobmi:

- **graficky:** - teoretický a ilustratívny význam,
- dajú sa pochopiť vlastnosti riešenia;
- **numericky:** - praktický význam, rieši počítač (PC).

3.7.1 Grafické riešenie LOM- geometrická interpretácia úloh LP

Graficky možno riešiť iba tieto úlohy:

- a) úloha LP s obmedzeniami vo forme nerovností, obsahujúca iba dve, resp. tri premenné a ľubovoľný počet obmedzujúcich podmienok;

b) úlohy s 2–ma obmedzujúcimi podmienkami a ľubovoľným počtom neznámych (duálna úloha).

Pri grafickom riešení úloh LP sa vo väčšine prípadov stretávame s úlohami popísanými v bode a). Ak sa stretneme s inými, je ich treba transformovať na model typu a). Grafické riešenie úloh typu a) prebieha vo dvoch etapách:

- najskôr znázorníme oblasť prípustných riešení (množinu prípustných riešení – MRP),
- potom nájdeme na tejto oblasti optimálny bod (t.j. bod, v ktorom dosahuje ÚF svoj extrém).

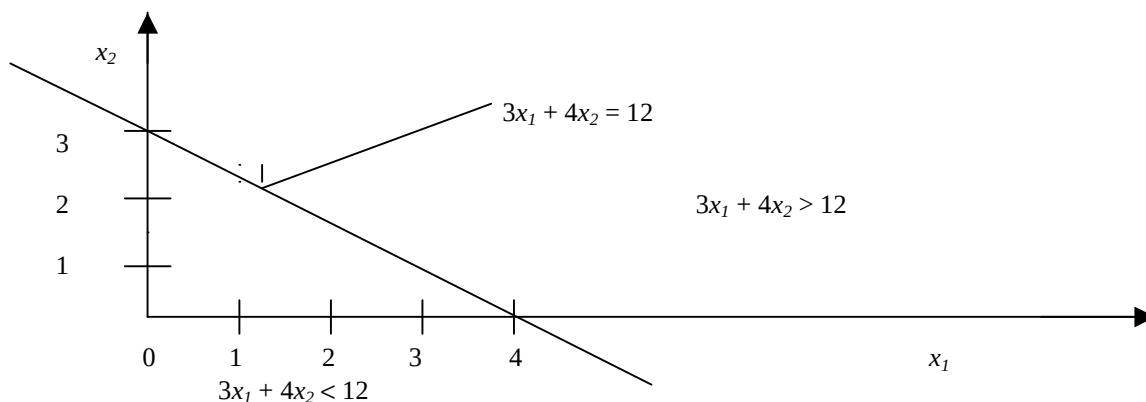
Pri zostrojovaní oblastí prípustných riešení sa môžeme stretnúť s tromi prípadmi:

- a – oblasť prípustných riešení je prázdnu množinou;
- b – oblasť prípustných riešení je konvexným mnohouholníkom;
- c – oblasť prípustných riešení je neobmedzenou konvexnou oblasťou.

Vieme, že geometricky predstavuje nerovnosť o dvoch neznámych polrovinu (Sakál, 2003):

- čiže riešením nerovnosti o dvoch neznámych sú všetky body určitej polroviny. Príslušná polrovina je množinou všetkých riešení nerovnosti o dvoch neznámych.

Napr.: $3x_1 + 4x_2 \leq 12$



Obr. 3-3

Ak máme sústavu nerovností, riešením každej z týchto nerovností sú všetky body príslušnej polroviny a riešením sústavy je každý bod, ktorý leží vo všetkých polrovinách, ktorých body sú riešením jednotlivých nerovností danej sústavy.

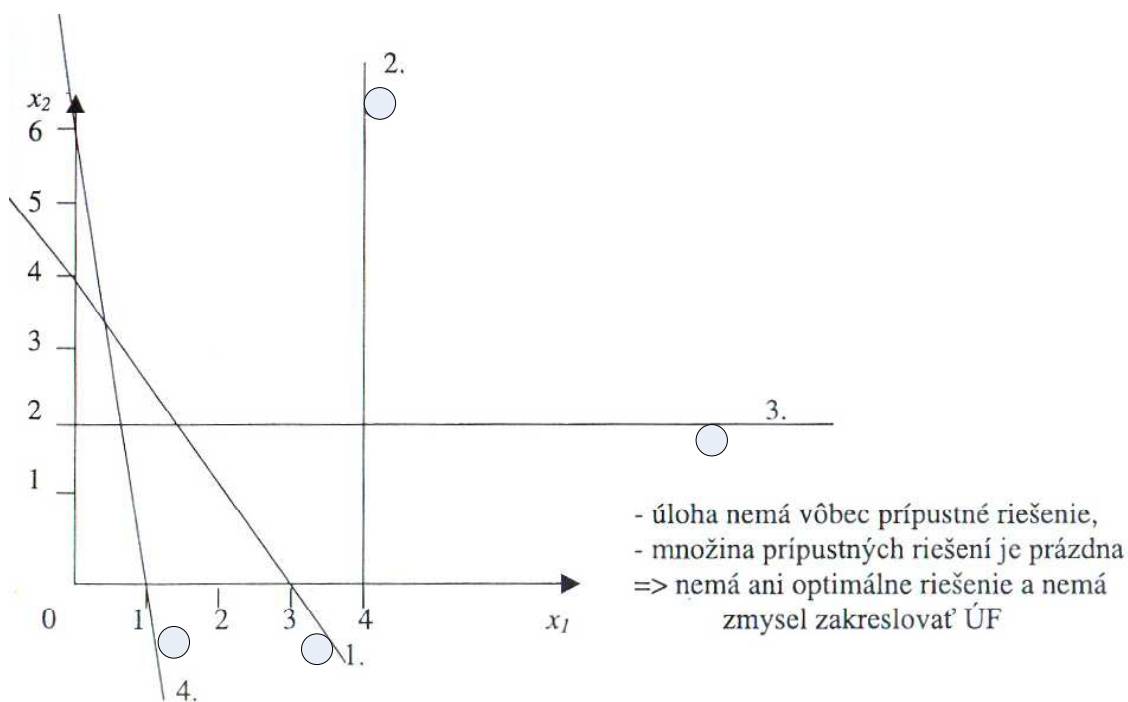
Riešením sústavy je spoločná časť – prienik polrovín určených nerovnosťami sústavy. Táto spoločná časť je konvexnou množinou, pretože vznikla ako prienik polrovín a vieme, že polrovina je konvexná množina.

Ako sme už uviedli, môžu nastať tri prípady:

a) množina riešení sústavy je prázdna – polroviny odpovedajúce nerovnostiam sústavy nemajú ani jeden bod spoločný;

Majme napr. takúto sústavu nerovností o dvoch neznámych:

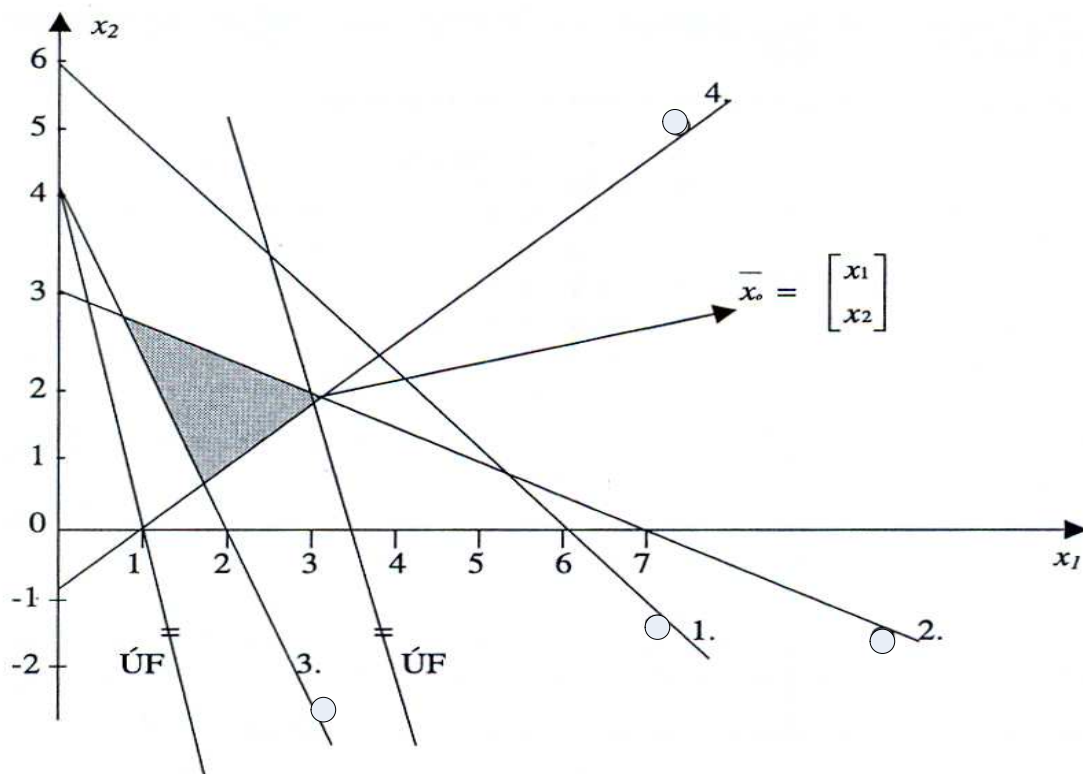
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= \min \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \quad \dots\dots 1 \\ x_1 &\geq 4 \quad \dots\dots 2 \\ x_2 &\leq 2 \quad \dots\dots 3 \\ 6x_1 + x_2 &\geq 6 \quad \dots\dots 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Obr. 3-4

b1) spoločná časť polrovín je mnohouholník – množina riešení je obmedzenou množinou;

$$\begin{aligned} \text{Napri.: } 4x_1 + x_2 &= \max \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \dots 1 \\ 3x_1 + 7x_2 &\leq 21 \dots 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \dots 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \dots 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Obr. 3-5

– nakreslíme smernicu ÚF, miesto max napíšeme ľubovoľné číslo, napr. „4“:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4 \\ x_2 = 0, \quad x_1 = 1 \end{aligned}$$

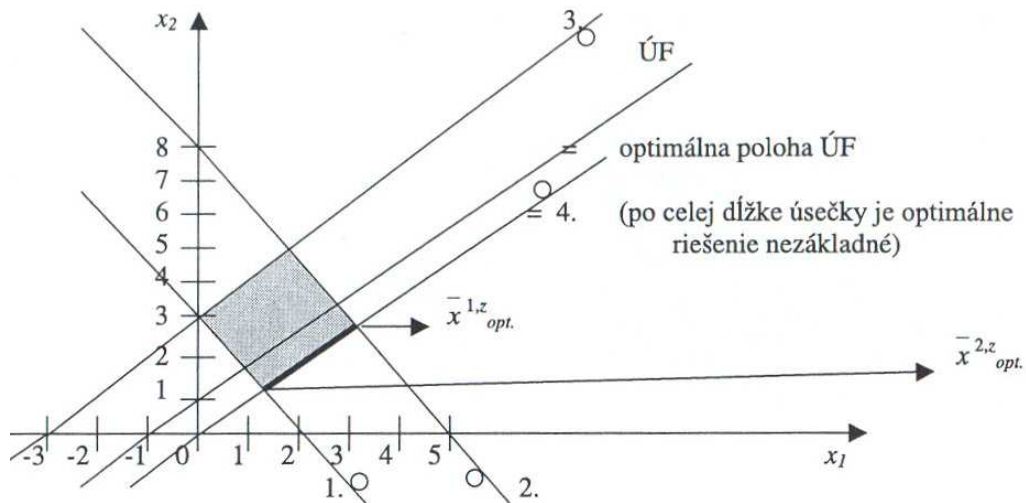
– túto smernicu musíme dostať do polohy opornej priamky.

– musí mať 1 spoločný bod s konvexnou množinou, a to pre nás v prijateľnom tvare, max
=> optimálna poloha bude,

– úloha má iba jedno optimálne riešenie, úloha je jednoznačná;

b2) riešte graficky sústavu nerovností o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= \min \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \quad \dots\dots 1 \\ 8x_1 + 5x_2 &\leq 40 \quad \dots\dots 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \quad \dots\dots 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \quad \dots\dots 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Obr. 3-6

$$\begin{aligned} \text{ÚF: } -x_1 + x_2 = 1 &\Rightarrow x_1 = 0, & x_2 = 1 \\ & & x_2 = 0, & x_1 = -1 \end{aligned}$$

nezákladné:

$$\begin{aligned} \bar{x}^n_{opt} &= \bar{x}^{1,z}_{opt} \cdot \alpha_1 + \bar{x}^{2,z}_{opt} \cdot \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ 0 &\leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- množina prípustných riešení uzavretá,
- úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení,
- pri tejto úlohe môžeme vybrať optimálne riešenia aj také, ktoré vyhovujú aj takým obmedzujúcim podmienkam, ktoré sme nemohli do modelu zahrnúť

(po úsečke ÚF: $\bar{x}^{1,z}_{\text{opt}} \rightarrow \bar{x}^{2,z}_{\text{opt}}$);

c) spoločná časť polrovín obsahuje aspoň jednu polpriamku – množina riešení je neobmedzená!

Napr.:

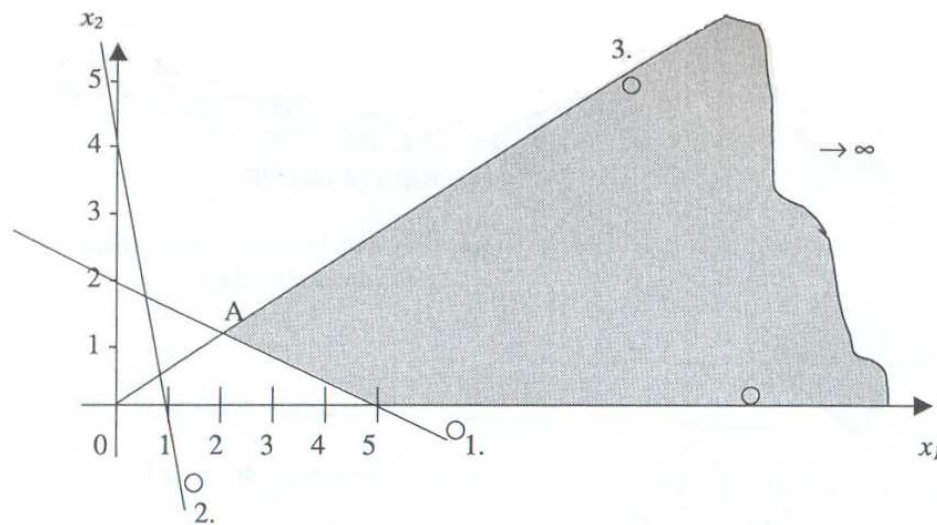
$$2x_1 + x_2 = \max$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad \dots\dots 1$$

$$4x_1 + x_2 \geq 4 \quad \dots\dots 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 0 \quad \dots\dots 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Obr. 3-7

- množina prípustných riešení neohraničená!
- ÚF nenadobúda na množine konečné maximum!
- nemá optimálne riešenie

$$\bar{c} \cdot \bar{x} = \underline{\max}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}$$

- ľahko by sme zistili, že minimálnu hodnotu by nadobudla ÚF v bode A!

3.7.2 Numerické riešenie LOM – úloh LP

Na riešenie úloh LP existuje mnoho metód využívajúcich rôzny výpočtový aparát. Najdôležitejšia a najpoužívannejšia z nich je simplexová metóda.

Simplexová metóda (SM) patrí medzi univerzálne metódy úloh LP. Za tvorca tejto metódy je považovaný Holanďan Dantzig, ktorý ju sformuloval v roku 1944. Matematickým základom SM je Gaussova eliminačná metóda, ktorou hľadáme základné riešenie sústavy rovníc a prechádzame od jedného základného riešenia k ďalším.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy môžeme nájsť základné riešenie, prípadne prejsť na iné základné riešenie. Pri úlohách LP hľadáme také základné riešenie, ktoré extremalizuje ÚF. Mohli by sme teda postupovať tak, že pomocou eliminačnej metódy by sme našli všetky základné riešenia vyhovujúce OP a pre každé riešenie by sme vypočítali hodnotu ÚF, a tak by sme zistili, ktoré je optimálne. S takýmto postupom by sme vystačili iba pri úlohách malých rozsahov.

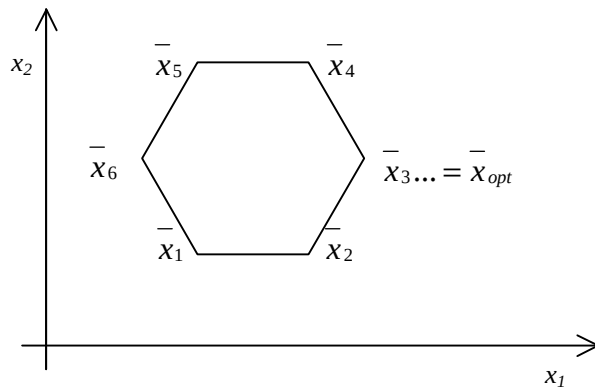
Nedostatkom eliminačnej metódy je i to, že nezaručuje prípustnosť nájdeného základného riešenia.

Uvedené nedostatky nemá SM, ktorá je v podstate modifikácia metódy úplnej eliminácie. Na rozdiel od nej, táto metóda (SM) zabezpečuje, vychádzajúc zo známeho bázičného riešenia úlohy, že každé nové riešenie, na ktoré prejdeme, bude riešením prípustným a z hľadiska ÚF výhodnejším ako predchádzajúce.

Gaussova metóda nám neumožňuje ohodnotiť riešenie. Nezaručuje, že z východiskového riešenia sa do optimálneho riešenia dostaneme kratšou cestou.

Simplexová metóda nám zaručuje, že každé nové základné riešenie je prípustné riešenie, že ďalšie riešenie je lepšie z hľadiska ÚF ako riešenie predchádzajúce ($x_1 \rightarrow x_2$, atď.).

Simplexová metóda je iteračná metóda (metóda postupných aproximácií), t. zn., že za jej pomoci sa k optimálnemu riešeniu dospieva krok za krokom.



- skáčeme po krajných bodoch konvexného mnohoúhelníka, až sa dostaneme do optimálneho riešenia (alebo nedostaneme)

Obr. 3-8

Aby sme mohli riešiť LOM simplexovou metódou, musí spĺňať určité základné podmienky:

1. $\bar{b} \geq \bar{0}$ - vektory pravých strán obmedzujúcich podmienok musia byť nezáporné, ak niektorá hodnota je záporná, tú obmedzujúcu podmienku musíme prenásobiť hodnotou (-1).
2. $\bar{x} \geq \bar{0}$ - všetky premenné v modeli musia spĺňať podmienku nezápornosti, ak niektorá z nich túto podmienku nespĺňa, musíme ju nahradiť substitúciou:
 - a) ak x_k je voľná premenná potom: $x_k = x_k^+ - x_k^-$; $x_k^+ \geq 0$, $x_k^- \geq 0$,
 - b) ak $x_s \leq 0$, potom: $x_s = -y_p$, $-y_p \geq 0$.
3. všetky nerovnosti v modeli musíme zmeniť na rovnice pomocou prídavných premenných x_i' , pre všetky prídavné premenné platí podmienka nezápornosti ($x_i' \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$)
 - do ÚF ich pridávame vždy ako $+0 x_i'$;
 - do VO ich pridávame na ľavú stranu podľa smeru nerovnosti:

$+ x_i'$	$\leq$
$- x_i'$	$\geq$

4. sústavu vlastných obmedzení musíme upraviť do kanonického tvaru pomocou *pomocných premenných* x_i'' , pre všetky pomocné premenné platí podmienka nezápornosti ($x_i'' \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$)

- do VO ich pridávame vždy ako $+x_i''$;
- do ÚF ich pridávame podľa extrému funkcie:

$+Mx_i''$	min
$-Mx_i''$	max

Kanonický tvar – v každej obmedzujúcej podmienke musí byť aspoň jedna premenná, pri ktorej je kladný jednotkový vektor a tieto jednotkové vektory musia spolu vytvárať jednotkovú maticu (kladnú jednotkovú bázu).

Sústavu obmedzujúcich podmienok dostaneme do kanonického tvaru buď pomocou prídavných premenných, ak sú pri nich kladné jednotkové vektory, ktoré vytvárajú jednotkovú bázu. Ak tam nie sú takéto prídavné premenné alebo ich nemáme v požadovanom množstve, potom zaradíme do modelu tzv. pomocné (umelé) premenné. Pri pomocných premenných musia byť len kladné jednotkové vektory, iba vtedy plnia funkciu, na ktorú sú určené.

Algoritmus SM je finitný (konečný), t. zn., že optimálne riešenie sa dosiahne po konečnom počte krokov, ak ho úloha LP má alebo ak neexistuje, potom SM zistí, že ho nemá.

Algoritmus má dve základné fázy:

1. Určenie východiskového základného riešenia.
2. Postupný prechod od jedného základného prípustného riešenia k druhému základnému prípustnému riešeniu tak, aby sa zlepšovala hodnota ÚF, čo sa deje v tzv. **iteračných krokoch**.

Výpočtový algoritmus (t.j. 2. fáza SM) sa v každej iterácii rozpadá do troch etáp:

- kritérium optimality;
- zlepšovanie riešenia;
- zmena riešenia.

Uvedieme teraz hrubý algoritmus riešenia SM:

1. Nájdenie 1. základného prípustného riešenia (tzv. východiskové).
2. Pomocou testu optimality (kritéria) ohodnotíme nájdené riešenie.
3. Ak zistíme, že nájdené riešenie je optimálne, výpočet ukončíme.
4. Ak nájdené riešenie nie je optimálne, prejdeme na ďalšie základné prípustné riešenie a ďalej postupujeme podľa bodu 2.

Ak zistíme hneď v prvom kroku, že úloha nemá vôbec prípustné riešenie, vedie SM po konečnom počte krokov k dvom už spomínaným možnostiam, a to k optimálnemu riešeniu alebo k výsledku, ktorý dokazuje, že úloha nemá konečný extrém.

V ďalšom si postupne vysvetlíme postup hrubého algoritmu SM.

3.7.2.1 Nájdenie 1. základného prípustného riešenia (východiskového) a úprava úlohy do kanonického tvaru

Tento krok sa robí najťažšie. Nevieme totiž ohodnotiť, kde máme začať (napr. 6 krajných bodov konvexného mnohoholníka).

Jedným z možných spôsobov, ako hľadať východiskové bázické riešenie, je použitie Gaussovej eliminačnej metódy pri riešení sústavy m -lineárnych rovníc o n -neznámych ($m < n$). Táto sústava môže mať *maximálne* $\binom{n}{m}$ základných riešení, ostatné nezákladné voľné premenné sú rovné nule.

Tvar sústavy lineárnych rovníc (po použití eliminačnej metódy), v ktorej každá rovnica obsahuje jednu a len jednu základnú premennú, nazývame kanonickým tvarom sústavy lineárnych rovníc.

Majme napr. sústavu 3 rovníc o 5 neznámych:

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 & & - x_5 = 4 \\ & 1x_2 & + 6x_4 + 5x_5 = 2 \\ & & 1x_3 - 2x_4 - x_5 = 5 \end{array}$$

Našou úlohou je zvoliť 3 základné riešenia a ostatné (voľné) položiť rovné 0. Ak zvolíme za základné tie, vzhľadom na ktoré je sústava v kanonickom tvare x_1, x_2, x_3 – ZP a ostatné $x_4 = x_5 = 0$ za nezákladné premenné NP, potom $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 5$.

Avšak ako by sme sa mohli presvedčiť riešením ľubovoľnej sústavy m lineárnych rovníc o n - neznámych, keď určenie týchto základných premenných eliminačnou metódou nie je jednoduché najmä pri väčších m, n .

Preto kladnú jednotkovú bázu (kanonický tvar) pre východiskové riešenie vytvárame pomocou vektorov: a) tzv. prídavných premenných,

b) pomocných premenných.

Je to najjednoduchší prípad, keď matica koeficientov $[a_{ij}]$ pri premenných (základných) obsahuje bez transformácie len pridaním spomínaných vektorov úplnú sústavu jednotkových vektorov (jednotkovú maticu, bázu). Vtedy je sústava rovníc (obmedzujúcich podmienok = nerovností) daná v kanonickom tvare.

- a) Použitie prídavných premenných na vytvorenie východiskového riešenia v prípade, ak obmedzujúce podmienky tvoria systém nerovností typu " $\leq$ ":
- v ekonomickej oblasti je takouto úlohou napr. zostavenie výrobného programu pri obmedzujúcich činiteľoch.

Matematická formulácia problému je nasledovná:

Riešiť sústavu lineárnych nerovností tak, že pripojením ďalších neznámych (prídavných premenných) utvoríme ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc. Napr.:

$$3x_1 + 4x_2 \stackrel{!}{=} \max$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 80$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$z = 3x_1 + 4x_2 + 0x'_1 + 0x'_2 \stackrel{!}{=} \max$$

$$5x_1 + 2x_2 + x'_1 = 80$$

$$2x_1 + 3x_2 + x'_2 = 60$$

$$x_1, x_2, x'_1, x'_2 \geq 0$$

$$\text{ZP: } x'_1, x'_2$$

$$x'_1 = 80, x'_2 = 60$$

$$\text{NP: } x_1 = x_2 = 0$$

$$Z_0 = 0, \text{ hodnota ÚF zatiaľ nevyhovuje pre max!}$$

Všeobecne: treba nájsť n -nezáporných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré spĺňajú obmedzenia (nerovnosti):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

a pri ktorých ÚF (lineárna forma, funkcionála): $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ dosahuje maximum.

Aby sme mohli riešiť model LP SM, musíme všetky vlastné obmedzenia vyrovnať na rovnice pomocou m -prídavných premenných $x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x'_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), ktoré sú rovné rozdielu oboch strán nerovnosti.

Potom:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x'_1 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 1x'_2 = 0$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 1x'_m = 0$$

Táto sústava je v kanonickom tvare (matica koeficientov $[a_{ij}]$ a obsahuje úplnú sústavu jednotlivých vektorov pri m – prídavných premenných):

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{typu „}m/m\text{“}.$$

Zároveň táto sústava m rovníc obsahuje $(m + n)$ premenných.

Za základné premenné pri východiskovom riešení zvolíme prídavné premenné x_i' ($i = 1, 2, \dots, m$) a za nezákladné premenné zvolíme pôvodné premenné $x_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Tak dostaneme jedno z bázičných, súčasne prípustných riešení, pretože z povahy zadania plynie, že $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) a môžeme ho použiť ako východiskové riešenie.

V maticovom zápise:

$$\bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b}, \quad \bar{b} \geq \bar{0}$$

pridaním prídavných premenných zmeníme nerovnosti na rovnice. Sústava nadobudne tvar:

$$[\bar{A} / \bar{E}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}' \end{bmatrix} = \bar{b},$$

kde: - $\bar{E}$ je jednotková matica koeficientov prídavných premenných a je m -tého rádu;

- $\bar{x}'$ je m rozmerný vektor prídavných premenných.

Koeficienty prídavných premenných v tomto prípade tvoria nezávislú sústavu kladných jednotkových vektorov (jednotkovú bázu). Ak teda zvolíme prídavné premenné za základné premenné, dostaneme bez transformácie, pretože sústava je už v kanonickom tvare, základné riešenie $\bar{x}'$,

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ - \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \bar{x} = \bar{0}, \quad \bar{x}' = \bar{b},$$

ktoré je už zrejme riešením prípustným ($\bar{b} \geq \bar{0}$) a môžeme ho považovať za východiskové riešenie.

Hodnota ÚF: $Z_0 = 0$, zatiaľ nevyhovuje pre maximalizáciu.

b) Použitie pomocných premenných pre vytvorenie východiskového riešenia v prípade, ak obmedzujúce podmienky tvoria systém nerovnosti typu " $\geq$ ", " $=$ ":

- v týchto prípadoch matica koeficientov $[a_{ij}]$ (včítane koeficientov n -prídavných premenných) neobsahuje kladnú jednotkovú maticu (bázu), môžeme získať východiskové riešenie (kanonický

tvár) zavedením tzv. pomocných premenných (umelých, fiktívnych), z koeficientov ktorých vytvoríme kladnú jednotkovú bázu $x''_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Matematická formulácia problému

- Riešte sústavu m -lineárnych rovníc (nerovností " $\geq$ ") o n -neznámých tak, že pripojením ďalších neznámých (pomocných premenných) utvoríme ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc. Napr.:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= \max \\ 3x_1 + 2x_2 &= 40 \\ 5x_1 + 8x_2 &= 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - Mx''_1 - Mx''_2 &= \max \\ 3x_1 + 2x_2 + x''_1 &= 40 \\ 5x_1 + 8x_2 + x''_2 &= 100 \\ x_1, x_2, x''_1, x''_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ZP: $x''_1 = 40$
 $x''_2 = 100$

NP: $x_1 = x_2 = 0$ $Z_0 = -140 M$, číslo ∞ malé a nám ide o maximalizáciu ÚF,
 potom nevyhovuje.

Všeobecne:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

tak, aby sme maximalizovali funkciu $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$;

- východiskové riešenie v tomto prípade získame tak, že si vytvoríme pomocnú (umelú) bázu rozšírením sústavy rovníc o pomocné premenné $x''_1, x''_2, \dots, x''_m$, $x''_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) s jednotkovými koeficientmi, ktoré vytvoria jednotkovú maticu:

Potom:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x''_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 1x''_2 = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 1x''_m = b_m$$

- za základné premenné pri východiskovom riešení zvolíme pomocné premenné x''_i ($i = 1, 2, \dots, m$);
- do ÚF zaradíme pomocné premenné s nekonečne:
 - a) malým ocenením $-M$, ak ide o maximalizáciu ÚF;
 - b) veľkým ocenením $+M$, ak ide o minimalizáciu ÚF (tzv. prohibívne sadzby).

V maticovom zápise: $\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{b} \geq \bar{0}$

matica $\bar{A}$ neobsahuje kladnú jednotkovú bázu, východiskové riešenie získame zavedením tzv. pomocných premenných $x''_1, x''_2, \dots, x''_m$. Vlastné obmedzenia nadobudnú tvar:

$$[\bar{A} / \bar{E}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \bar{b},$$

$\bar{E}$ – jednotková matica m -tého rádu pozostávajúca z kladných koeficientov pomocných premenných;

$\bar{x}''$ – vektor pomocných premenných, $\bar{x}'' \geq \bar{0}$.

Ak zvolíme pomocné premenné za základné premenné, dostaneme opäť bez transformácie základné riešenie $\bar{x}''$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ - \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad \dots \bar{x} = \bar{0}, \bar{x}'' = \bar{b},$$

ktoré je prípustným riešením ($\bar{b} \geq \bar{0}$) a môžeme ho považovať za východiskové riešenie.

Obdobná je situácia pri riešení sústavy nerovností typu " $\geq$ ".

Použijeme tu konkrétny príklad:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 & \stackrel{!}{=} \min \\ 5x_1 + 4x_2 & \geq 150 \\ 7x_1 + 2x_2 & \geq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- zavedením prídavných premenných zmeníme nerovnosti na rovnice:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 0x'_1 + 0x'_2 & \stackrel{!}{=} \min \\ 5x_1 + 4x_2 - x'_1 & = 150 \\ 7x_1 + 2x_2 - x'_2 & = 120 \\ x_1, x_2, x'_1, x'_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Prídavné premenné x'_1, x'_2 majú však záporné koeficienty a ich voľbou za ZP by sme nutne dostali neprípustné riešenie:

$$x'_1 = -150$$

$$x'_2 = -120$$

Preto si zavedieme znovu pomocné premenné $x''_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 0x'_1 + 0x'_2 + Mx''_1 + Mx''_2 & \stackrel{!}{=} \min \\ 5x_1 + 4x_2 - x'_1 + 1x''_1 & = 150 \\ 7x_1 + 2x_2 - x'_2 + 1x''_2 & = 120 \\ x_1, x_2, x'_1, x'_2, x''_1, x''_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Poznámka: x''_1 nikdy neodčítujeme v OP, v ÚF áno!

- východzie riešenie dostaneme tak, že za ZP zvolíme pomocné premenné:

$$\text{- ZP: } x''_1, x''_2,$$

$$\text{- NP: } x_1 = x_2 = x'_1 = x'_2 = 0.$$

Potom 1. prípustným bázičným riešením je: $x''_1 = 150$,

$$x''_2 = 120.$$

$Z = 270M$, hodnota ÚF je nekonečne veľká, $M \rightarrow \infty$, potom tu nevyhovuje!

V maticovom zápise: $\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{0}, \bar{b} \geq \bar{0}$

matica $\bar{A}$ neobsahuje kladnú jednotkovú bázu, využívame pomocnú (umelú) bázu:

$$[\bar{A} / -\bar{E} / \bar{E}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}' \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \bar{b}$$

Voľbou pomocných premenných za ZP dostaneme bez transformácie základné riešenie $\bar{x}'$:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}' \\ - \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ - \\ \bar{0} \\ - \\ \bar{b} \end{bmatrix}, \text{ kde je } \bar{x}'' \text{ prípustným riešením } (\bar{b} \geq \bar{0}) \text{ a teda aj východiskovým riešením.}$$

Poznámka: Všimnime si rozdiely medzi prídavnými premennými a pomocnými premennými.

Prídavnými premennými sme transformovali sústavu nerovností ($\leq$) na sústavu rovníc.

Zavedením pomocných premenných sme zmenili sústavu rovníc na rozšírenú sústavu rovníc, ktorá jej nie je ekvivalentná. Hneď prvému základnému riešeniu rozšírenej sústavy nezodpovedá žiadne riešenie pôvodnej sústavy.

Avšak každému riešeniu rozšírenej sústavy, v ktorej sú pomocné premenné rovné nule, zodpovedá riešenie pôvodnej sústavy. Je potrebné teda prejsť pri ďalších iteráciách na také riešenie rozšírenej sústavy, pri ktorých sa budú pomocné premenné rovnať nule.

Na to stačí riešiť túto pomocnú úlohu:

Minimalizovať lineárnu formu (ÚF):

$$z'' = c''_1 x''_1 + c''_2 x''_2 + \dots + c''_m x''_m = \bar{c}'' \cdot \bar{x}''$$

za podmienok
$$[\bar{A} / \bar{E}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} = \bar{b}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}'' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix}$$

kde $\bar{c}'' = [1, 1, \dots, 1]$ je m rozmerný vektor. Vzhľadom na podmienku $\bar{x} \geq \bar{0}$, $\bar{x}'' \geq \bar{0}$, musí takisto platiť: $z'' \geq 0$.

Môžu potom nastať dva prípady:

- $\min z'' = 0$, z čoho vyplýva, že $x_1'' = x_2'' = \dots = x_m'' = 0$ ($\bar{x}'' = \bar{0}$), čiže získame východiskové riešenie pôvodnej sústavy;
- $\min z'' > 0$, z tohto výsledku vyplýva, že pôvodná sústava nemá prípustné riešenie, lebo každému prípustnému riešeniu pôvodnej sústavy zodpovedá iba také riešenie rozšírenej sústavy, pri ktorom $z'' = 0$. z'' sa však bude rovnáť nule iba vtedy, ak všetky pomocné premenné x_i'' budú nezákladnými premennými.

Aby nastala takáto situácia, musíme urobiť najmenej toľko elementárnych transformácií (krokov), koľko je pomocných premenných, pretože vo východiskovom riešení vystupujú všetky v úlohe základných premenných.

Táto skutočnosť veľmi predlžuje riešenie, a preto sa snažíme pridať toľko pomocných premenných, koľko nevyhnutne potrebujeme na vytvorenie kladnej jednotkovej bázy.

Záver:

- Ak pôvodná úloha má prípustné riešenie, tak všetky pomocné premenné sa vynulujú.
- Ak v priebehu riešenia aspoň jedna z pomocných premenných ostane ZP a jej hodnota bude kladná (> 0) a pritom podľa pravidiel SM sa už ďalej nedá pokračovať v riešení, t. zn., že pôvodná úloha nemá vôbec prípustné riešenie.

3.7.2.2 Vecná interpretácia prídavných a pomocných premenných

Interpretácia prídavných premenných:

- tieto vždy vecne interpretujeme;
- ich vecná interpretácia závisí od obmedzení, kde ich pridávame;
- pri úlohách, ktoré majú vlastné obmedzenia v tvare „ $\leq$ “ (vstup), znamenajú prídavné premenné takmer vždy nevyužitie príslušného činiteľa (sú to rezervy, úzkoprofilové, nedostatkové materiály a pod.);
- pri úlohách s obmedzeniami typu „ $\geq$ “ (na strane výstupu) môžu predstavovať prídavné premenné určité jednotky vyrobené, pridané, nakúpené dodané a pod. nad určité minimálne vyžadované množstvo, limit (napr. jednotky vyrobené nad plán).

Formálne môžeme prídavné premenné považovať, podobne ako ostatné premenné, za úroveň nejakých procesov. Nejde však o procesy, pri ktorých by sa niečo spotrebúvalo a niečo vyrábalo. Prídavné premenné tak predstavujú úroveň fiktívnych procesov, pri ktorých sa nič nevyrába a nemajú teda ani „cenu“, t.j. majú v ÚF koeficient (ceny) nulový.

Prídavné premenné plnia vždy primárnu funkciu, pomocou nich vyrovnávame nerovnosti na rovnice. Tie prídavné premenné, pri ktorých sú vo VO kladné jednotkové vektory, plnia aj druhú (sekundárnu) funkciu, prispievajú ku kanonizácii sústavy obmedzujúcich podmienok.

Interpretácia pomocných premenných

- ak daná úloha má prípustné riešenie, čiže ak sa pomocné premenné anulujú v priebehu riešenia, tak slúžia len ako výpočtové prostriedky na získanie východiskového riešenia, a vtedy sa im nedáva žiadna vecná interpretácia (ekonomická);
- ak daná úloha nemá prípustné riešenie, potom nenulové hodnoty pomocných premenných predstavujú čiastky, o ktoré treba zvýšiť pravé strany obmedzujúcich podmienok (výrobné činitele), aby vôbec daná úloha mala prípustné riešenie.

Pomocné premenné plnia iba jednu funkciu, pomocou nich dostávame sústavu obmedzujúcich podmienok do kanonického tvaru.

3.7.2.3 Ohodnotenie nájdeneho riešenia kritériom (testom) optimality

Majme všeobecnú úlohu LP zadanú takto:

Treba nájsť maximálnu hodnotu ÚF:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m + c_{m+1}x_{m+1} + \dots + c_lx_l + \dots + c_nx_n = \max$$

Za podmienok:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1l}x_l + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2l}x_l + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{ml}x_l + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Máme sústavu m rovníc o n premenných.

Predpokladajme, že koeficienty a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) tvoria regulárnu maticu m -tého rádu, čiže prvých m -premenných tvorí bázu, sú lineárne nezávislé.

Riešme sústavu rovníc podľa neznámych $x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$ZP \rightarrow x_1, x_2, \dots, x_m,$$

$$NP \rightarrow x_{m+1} = x_l = \dots = x_n = 0,$$

- tzn., že treba pretransformovať pôvodnú maticu koeficientov $\bar{A} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_l, \dots, \bar{a}_n]$ na maticu jednotkovú.

Využijeme pri tom $\bar{B} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m]$ maticu koeficientov štruktúry prvých m premenných.

Platí totiž: $\bar{B} \cdot \bar{B}^{-1} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{B} = \bar{E}$.

Vynásobením sústavy rovníc zľava inverznou maticou $\bar{B}^{-1}$ dostaneme:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{1l}x_l + \dots & + \alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ & x_2 & + \alpha_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{2l}x_l + \dots & + \alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ & \dots & & & \\ & & x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{ml}x_l + \dots & + \alpha_{mn}x_n & = \beta_m \end{array}$$

Ak dosadíme za NP nuly, $x_{m+1} = \dots = x_l = \dots = x_n = 0$, dostaneme 1. základné riešenie:

$$\begin{array}{l} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \dots \\ x_m = \beta_m \end{array}$$

Nech $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), potom môžeme toto riešenie považovať za východiskové riešenie našej úlohy.

Hodnota ÚF bude:

$$z_1 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_m\beta_m + 0.$$

V upravenej sústave rovníc:

α – súradnice vektorov $\bar{a}_{m+1}, \dots, \bar{a}_l, \dots, \bar{a}_n$ v báze $\bar{B}$,

- napr.:

$$\bar{\alpha}_{m+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,m+1} \\ \alpha_{2,m+1} \\ \dots \\ \alpha_{m,m+1} \end{bmatrix}, \text{ kde } \bar{\alpha}_{m+1} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{a}_{m+1},$$

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}, \text{ kde } \bar{\beta} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}.$$

Teraz pôjde o posúdenie, či nájdené riešenie je optimálne. Riešenie bude zrejme vtedy optimálne, ak prechodom na iné prípustné riešenie hodnota ÚF vzrastie.

Ďalšie riešenie zistíme tak, že za jednu NP (x_l) dosadíme hodnotu $t > 0$: $x_l = t$.

Dostaneme potom takého nezákladné riešenie:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 - \alpha_{1l} t & \dots &\geq 0 \\ x_2 &= \beta_2 - \alpha_{2l} t & \dots &\geq 0 \\ &\dots & & \\ x_m &= \beta_m - \alpha_{ml} t & \dots &\geq 0 \\ x_l &= t \end{aligned} \quad [3.11]$$

a ostatné premenné sú rovné nule!

ÚF nadobúda pri tomto riešení hodnotu:

$$\begin{aligned} Z_2 &= c_1 (\beta_1 - \alpha_{1l} t) + c_2 (\beta_2 - \alpha_{2l} t) + \dots + c_m (\beta_m - \alpha_{ml} t) + c_l t = \dots \text{úpravou} \\ &= \underbrace{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_m \beta_m}_{z_1} - t \underbrace{(c_1 \alpha_{1l} + c_2 \alpha_{2l} + \dots + c_m \alpha_{ml} - c_l)}_{c'_l} \end{aligned}$$

$$z_2 = z_1 - t (c'_l - c_l)$$

c'_l – cena ekvivalentnej kombinácie procesov.

Ekvivalentná kombinácia procesov je daná pre proces „l“ vzťahom:

$$\bar{a}_l = \alpha_{1l} \bar{a}_1 + \alpha_{2l} \bar{a}_2 + \dots + \alpha_{ml} \bar{a}_m,$$

kde táto rovnica vecne znamená, že každý proces je z hľadiska daných obmedzení ekvivalentnou lineárnou kombináciou základných procesov v tom zmysle, že ak berieme do úvahy len sústavu obmedzení (*nie však ocenenia*), je úplne jedno, či uskutočňujeme daný proces alebo kombináciu základných procesov jemu ekvivalentnú.

Veľkosť $z_2 - z_1 = -t(c'_l - c_l)$ je závislá od rozdielu $(c'_l - c_l)$, lebo podľa predpokladu $t > 0$.

Pri každom základnom procese je rozdiel $(c'_l - c_l)$ rovný nule, pri nezákladných procesoch môžu nastať tieto tri prípady:

1. $(c'_l - c_l) < 0$,

potom $z_2 - z_1 > 0$ a z toho $z_2 > z_1$:

- t. zn., že cena procesu „l“ c'_l je väčšia ako cena ekvivalentnej kombinácie základných procesov $c'_l = c_1\alpha_{1l} + c_2\alpha_{2l} + \dots + c_m\alpha_{ml}$, t. j. $c_l > c'_l$;
- zaradením x_l medzi základné premenné $x_l > 0$, hodnota ÚF vzrastie $Z_2 > Z_1$;
- naša snaha pri maximalizácii odstrániť $(c'_l - c_l) < 0$.

2. $(c'_l - c_l) > 0$,

potom $z_2 - z_1 < 0$ a z toho $z_2 < z_1$:

- t. zn., že cena procesu „l“ c_l je menšia ako cena ekvivalentnej kombinácie základných procesov $c'_l = c_1\alpha_{1l} + c_2\alpha_{2l} + \dots + c_m\alpha_{ml}$, t. j. $c_l < c'_l$;
- zavedením x_l medzi základné premenné $x_l > 0$, hodnota ÚF klesne $z_2 < z_1$;
- naša snaha pri minimalizácii odstrániť $(c'_l - c_l) > 0$.

3. $(c'_l - c_l) = 0$,

potom $z_2 - z_1 = 0$ a z toho $z_2 = z_1$:

- t. zn., že ekvivalentná kombinácia základných procesov 1, 2, ..., m je ekvivalentná s procesom „l“ i z hľadiska ocenenia $c'_l = c_l$;
- zavedením x_l medzi základné premenné sa hodnota ÚF nezmení $z_2 = z_1$.

Všeobecne pri hodnotení riešenia z hľadiska optimality využívame rozdiel:

$$(c'_j - c_j) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Kritérium optimality:

- medzi cenou každého nezákladného procesu a cenou ekvivalentnej kombinácie základných procesov jemu príslušnej.

Ak ide o maximalizáciu ÚF, potom optimálne je to riešenie, pre ktoré platí $c'_j - c_j \geq 0$ pre $j = 1, 2, \dots, n$.

Ak ide o minimalizáciu ÚF, je zase optimálne to riešenie, pre ktoré platí $c'_j - c_j \leq 0$ pre $j = 1, 2, \dots, n$.

Ak v optimálnom riešení je rozdiel $(c'_j - c_j) = 0$ aspoň pre jeden nezákladný proces, ide o viacnásobné optimálne riešenie.

Ak pri maximalizácii ÚF je aspoň jeden z rozdielov $(c'_j - c_j) < 0$ (záporný), nie je toto riešenie optimálne, v riešení musíme pokračovať.

Pri minimalizácii ÚF riešenie nie je optimálne vtedy, ak aspoň jeden z týchto rozdielov $(c'_j - c_j) > 0$ je kladný.

Ďalej v riešení postupujeme tak pri maximalizácii ÚF, že do riešenia, t. j. za základnú premennú zaradíme tú nezákladnú premennú (proces), hodnotu „t“ dosadíme za tú NP, pre ktorú je rozdiel $(c'_j - c_j) < 0$ záporný a v absolútnej hodnote $|c'_j - c_j|$ najväčší zo záporných rozdielov (resp. zo všetkých záporných rozdielov $c'_j - c_j < 0$ najmenší) – tzv. zaradovaná premenná.

Pri minimalizácii ÚF zaradíme tú premennú v novom riešení, pre ktorú je tento rozdiel kladný $(c'_j - c_j) > 0$ a z kladných rozdielov najväčší.

3.7.2.4 Prechod na nové – lepšie základné riešenie

Prechod na nové základné riešenie uskutočníme tak, že vyberieme podľa kritéria optimality vhodnú premennú z nezákladných premenných a zaradíme ju do riešenia. Je však otázka, ktorú základnú premennú máme pritom z riešenia vylúčiť, aby nové riešenie bolo prípustným riešením.

Všimnime si riešenia [3.1]:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \beta_1 - \alpha_{1l} t \\
 x_2 &= \beta_2 - \alpha_{2l} t \\
 &\dots \\
 x_m &= \beta_m - \alpha_{ml} t \\
 x_l &= t, \quad \text{ostatné premenné sú rovné nule!}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Aby bolo toto riešenie prípustné, musí platiť:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{il} t \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Táto požiadavka je, zrejme, automaticky splnená pre všetky i , pre ktoré $\alpha_{il} \leq 0$. Pre všetky i , pre ktoré je $\alpha_{il} > 0$, musí „ t “ premenná, ktorú zaradíme do riešenia, spĺňať podmienku:

$$\left. \begin{array}{l} x_l = t \leq \beta_1 / \alpha_{1l} \\ t \leq \beta_2 / \alpha_{2l} \\ \dots \\ t \leq \beta_m / \alpha_{ml} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \leq \min_i \{\beta_i / \alpha_{il}\}}$$

Ak potom za t dosadíme $\min_i \{\beta_i / \alpha_{il}\}$, tak zaručíme, že nové riešenie bude aj prípustné, aj základné.

Predpokladajme, že v našom prípade:

$$\min_i \{\beta_i / \alpha_{il}\} = \beta_2 / \alpha_{2l} = t$$

- zvolíme túto hodnotu t , za zaradovanú premennú;
- dosadíme do [3.1]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 - \alpha_{1l} (\beta_2 / \alpha_{2l}) \\ x_2 &= \beta_2 - \alpha_{2l} (\beta_2 / \alpha_{2l}) = 0 \dots \text{vyraďovaná premenná} \\ &\dots \\ x_m &= \beta_m - \alpha_{ml} (\beta_2 / \alpha_{2l}) \\ x_l &= \beta_2 / \alpha_{2l} \end{aligned}$$

Základná premenná x_2 sa teda anulovala a ostatné premenné ostali nezáporné. Prejdeme tým na nové riešenie, v ktorom premenné $x_1, x_3, \dots, x_m, x_l$ budú základnými premennými (vypadlo x_2 , pribudlo x_l) a ostatné budú nezákladné:

- premennú x_l , ktorá sa stala základnou premennou v novom riešení nazývame zaradovanou premennou;

- premennú, ktorú sme vylúčili z riešenia, x_2 , čiže prešla medzi nezákladné premenné, nazývame vylučovanou premennou.

Ak sa prechodom na nové riešenie anulovalo viac premenných ako jedna, to znamená, že nové základné riešenie je degenerované.

Ak všetky základné premenné sú kladné a rôzne od nuly, potom takéto riešenie je nedegenerované.

Ak aspoň jedna základná premenná nadobúda nulovú hodnotu, potom je to degenerované riešenie.

Z hľadiska matematického vektorového zaradenie a vyradenie definujeme ako elementárnu zmenu bázy:

- vyradíme vektor pri vyradovanej premennej;
- zaradíme vektor pri zaradovanej premennej:

$$\bar{B}_1 = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m] - \text{pôvodná báza,}$$

$$\bar{B}_2 = [\bar{a}_1, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m, \bar{a}_l] - \text{upravená báza.}$$

Všetky vektory je potrebné pretransformovať z $\bar{B}_1$ do $\bar{B}_2$ (súradnice vektorov $\bar{a}_j$).

3.7.2.5 Simplexová tabuľka

Akákoľvek úloha LP upravená do kanonického tvaru je riešiteľná, len je potrebné zvoliť vhodnú formu a určiť pre ňu mechanické pravidlá.

Najzaužívanejšie je tabelovanie výpočtov do tzv. simplexovej tabuľky. Jej autorom je Dantzig a od roku 1947 prešla rôznymi úpravami. Podstata je však vo všetkých variantoch rovnaká; miesto riešenia sústavy rovníc sa postupne transformuje sústava vektorov z rozšírenej matice sústavy postupnou výmenou jedného vektora za iný. V podstate ide o eliminačnú metódu – jej modifikáciu.

Ak sú vlastné obmedzenia v tvare „ $\leq$ “, môže mať východisková simplexová tabuľka tento tvar:

i-ty krok: SM „max“ „ $\leq$ “

ZP	CZP	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n	x'_{1}	x'_{2}		x'_m	$\bar{b}$
		c_1	c_2		c_{n-1}	c_n	0	0		0	
x'_{i1}	c'_{i1}	a_{11}	a_{12}		$a_{1,n-1}$	a_{1n}	1	0		0	b_1
x'_{i2}	c'_{i2}	a_{21}	a_{22}		$a_{2,n-1}$	a_{2n}	0	1		0	b_2
.....											
.....											
x'_{im}	c'_{im}	a_{m1}	a_{m2}		$a_{m,n-1}$	a_{mn}	0	0		1	b_m
$c'_j - c_j$		$c'_1 - c_1$	$c'_2 - c_2$		$c'_{n-1} - c_{n-1}$	$c'_n - c_n$	0	0		0	ÚF

kde

c'_j – skalárny súčin

$$(c'_1 = c'_{i1}a_{11} + c'_{i2}a_{21} + \dots + c'_{im}a_{m1})$$

$$\text{tu: } c'_1 - c_1 = 0 - c_1 = -c_1$$

V prípade, že sú vlastné obmedzenia zadané sústavou rovníc a ide o minimalizáciu ÚF, môže mať východisková simplexová tabuľka tvar:

„min“ + M „=“

ZP	CZP	x_1	x_2		x_{n-1}	x_n	x''_{1}	x''_{2}		x''_m	$\bar{b}$
		c_1	c_2		c_{n-1}	c_n	M	M		M	
x''_{i1}	M	a_{11}	a_{12}		$a_{1,n-1}$	a_{1n}	1	0		0	b_1
x''_{i2}	M	a_{21}	a_{22}		$a_{2,n-1}$	a_{2n}	0	1		0	b_2
.....											
.....											
x''_{im}	M	a_{m1}	a_{m2}		$a_{m,n-1}$	a_{mn}	0	0		1	b_m
$c'_j - c_j$	M	c'_1	c'_2		c'_{n-1}	c'_n	0	0		0	ÚF''
		$-c_1$	$-c_2$		$-c_{n-1}$	$-c_n$	0	0		0	ÚF

- **hlavička** – premenné a ceny zodpovedajúce procesom;
- **legenda** – ZP, CZP;
- **posledný riadok** – výpočtový ($c'_j - c_j$), optimalizačný riadok ÚF;

- **posledný stĺpec** – požiadavkový stĺpec, v priebehu výpočtu sa mení a po ukončení výpočtu dáva výsledok (hodnoty kladných koreňov), určuje teda, ktoré procesy sa majú realizovať, aby výsledný efekt bol optimálny podľa zvoleného kritéria optimálnosti.

Príklad č. 3.1

Riešme pomocou simplexovej tabuľky LOM:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= \max \\ 2x_1 + x_2 &\leq 60 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pomocou prídavných premenných zmeníme vlastné obmedzenia na ekvivalentnú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 0x'_1 + 0x'_2 &= \max \\ 2x_1 + x_2 + x'_1 &= 60 \\ x_1 + 2x_2 + x'_2 &= 20 \\ x_1, x_2, x'_1, x'_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ak za základné premenné zvolíme prídavné premenné, dostaneme hneď východiskové základné (bázické) riešenie (prídavné premenné majú kladné jednotkové vektory):

$$x'_1 = 60, \quad x'_2 = 20, \quad x_1 = x_2 = 0$$

Pri tomto riešení sa nič nevyrába, kapacity, disponibilné zdroje sú nevyužité a hodnota ÚF je nulová:

$$z_0 = 2.0 + 3.0 + 0.60 + 0.20 = 0$$

=> Zapíšeme túto sústavu do simplexovej tabuľky:

I. Tabuľka východiskového riešenia je zostavená podľa postupu opísaného skôr:

- hodnoty testovacieho riadku (výpočtového) ($c'_j - c_j$) sa vypočítajú nasledovne tak, že hodnoty a_{ij} v jednotlivých stĺpcoch násobíme sadzbami stĺpca CZP a od súčtu týchto súčinov odpočítame koeficient c_j v ÚF príslušnej premennej (uvedenej v záhlaví tabuľky).

Napr. rozdiel ($c'_j - c_j$) pre stĺpec premennej x_1 : $(2.0 + 1.0) - 2 = -2$

x_2 : $(1.0 + 2.0) - 3 = -3$

x'_1 : $(1.0 + 0.0) - 0 = 0$

x'_2 : $(0.0 + 1.0) - 0 = 0$

Pravidlo: hodnoty rozdielov ($c'_j - c_j$) v stĺpcoch bázičných premenných sú vždy nulové.

SM „max“

	ZP	CZP	x_1	x_2	x'_1	x'_2	–	Kontrolný stĺpec
			2	3	0	0	b	
I.	x'_1	0	2	1	1	0	60	$\Sigma = 64$
	x'_2	0	1	2	0	1	20	$\Sigma = 24 \quad /:2$
II.	$c'_j - c_j$		-2	-3	0	0	0	$\Sigma = -5$
III.	x'_1	0	3/2	0	1	-1/2	50	52
	x_2	3	1/2	1	0	1/2	10	$\Sigma = 12 \quad /:2$
	$c'_j - c_j$		-1/2	0	0	3/2	30	31
	x'_1	0	0	-3	1	-2	20	16
	x_1	2	1	2	0	1	20	24
	$c'_j - c_j$		0	1	0	2	40	43

- hodnota v riadku ($c'_j - c_j$) a v stĺpci $\bar{b}$ sa vypočíta ako súčet súčinov absolútnych členov b_i a sadzieb CZP, teda:

$$60.0 + 20.0 = 0 \quad \dots = \text{hodnota } \bar{UF}.$$

Je zrejmé podľa zadania úlohy, že $\bar{UF}$ má dosiahnuť maximum, treba teda tabuľku upraviť tak, aby v riešení (báze) boli pôvodné (štruktúrne, procesné) premenné x_1, x_2 . Každá úprava, ktorá dáva nové výhodnejšie riešenie, predstavuje jeden simplexový krok (iteráciu).

Podstatou simplexového algoritmu je zaraďovať do riešenia (bázy) tú premennú, ktorá v príslušnej iterácii najviac ovplyvní hodnotu $\bar{UF}$ v priaznivom zmysle. V našom prípade tú, ktorá prinesie zvýšenie hodnoty $\bar{UF}$:

- určuje ju kľúčový stĺpec!

- riešime maximalizáciu ÚF – v riadku $(c'_j - c_j)$ sú hodnoty $-2, -3 \Rightarrow$ riešenie je prípustné, ale nie je optimálne;
- riešime ďalej tak, že zvolíme kľúčový stĺpec a kľúčový riadok.
- V kľúčovom stĺpci je zaradovaná premenná a v kľúčovom riadku vyradovaná premenná. Tam, kde sa pretína kľúčový stĺpec a kľúčový riadok, je kľúčové políčko a v ňom je kľúčový prvok.
- Za kľúčový zvolíme pre maximalizáciu ÚF ten stĺpec, ktorý má v riadku $(c'_j - c_j)$ zápornú hodnotu a zo všetkých záporných hodnôt v absolútnej hodnote najväčšiu.
- Tu: $(c'_j - c_j) = -3$, potom x_2 je zaradovanou premennou a v ďalšom riešení bude ZP.
- Pri voľbe kľúčového riadka postupujeme takto:
 - hodnotu v stĺpci $\bar{b}$ vydelíme s kladnými koeficientmi kľúčového stĺpca a riadok, v ktorom bude tento rozdiel najmenší, zvolíme za kľúčový riadok: $\min \{60/1, 20/2\} = 20/2$, potom x'_2 bude vyradovanou premennou pre nasledujúce riešenie;
- v priesečníku kľúčového stĺpca a kľúčového riadku sa nachádza kľúčové políčko a v ňom kľúčový prvok (2), ktorý zakrúžkujeme.

Po voľbe zaradovanej premennej a vyradovanej premennej prejdeme na ďalšie riešenie. Proces uskutočňujeme jedným krokom eliminačnej metódy (elementárnou transformáciou) takto:

- a) v legende tabuľky najprv vymeníme symbol vylučovanej premennej (tu x'_2) a namiesto CZP vylučovaného procesu (0) zapíšeme cenu zaradovaného procesu x_2 (3);
- b) budeme deliť všetky prvky kľúčového riadka kľúčovým prvkom a dostaneme riadok zaradovanej premennej;
- c) riadky pre ostatné ZP vypočítame tak, že vynásobíme riadok zaradovanej premennej (t.j. riadok vypočítaný podľa b) prvkom príslušného riadka, ktorý leží v kľúčovom stĺpci a súčin odčítame od tohto riadka. Inak povedané: od každého riadka odčítame taký násobok riadka zaradovanej premennej, aby v kľúčovom stĺpci ostali samé nuly (okrem jednotky v riadku zaradovanej premennej).

Ďalší postup výpočtu je v ST analogický ako predchádzajúci.

$$\text{II. } x_1' = 50, x_2 = 10, z = 30$$

– v poslednom riadku $(c_j' - c_j) < 0$

$-1/2 < 0$, potom riešenie nie je optimálne, podľa kritéria optimality pre max ÚF;

$$\text{III. } \bar{x}^0 = \bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1^{i0} \\ x_2^{i0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{max} = 40,$$

pretože v riadku $(c_j' - c_j)$ nie je žiadne záporné číslo,

- hodnoty premenných a ÚF vypočítame priamo z tabuľky;
- z riadku $(c_j' - c_j)$ okrem toho vyplýva, že optimálne riešenie je jediné, pretože pre všetky nezákladné premenné je $(c_j' - c_j) > 0$, t. j. : „cena“ príslušných procesov je menšia ako „cena ekvivalentnej kombinácie“ základných procesov. Z toho tiež vyplýva, že zavedením NP do riešenia by hodnota ÚF klesla.

Vecná (ekonomická) interpretácia výsledkov riešenia:

$x_1^0 = 20$, znamená to, že sa má vyrobiť 20 jednotiek procesov x_1 (výrobkov);

$x_2^0 = 0$, tento výrobok sa nebude vyrábať;

$x_1^{i0} = 20$, zostane nevyužitých 20 jednotiek disponibilných zdrojov b_1 ;

$x_2^{i0} = 0$, tieto disponibilné zdroje sa úplne využijú.

Technika výpočtu v simplexovej tabuľke v prípade, že sa v modeli vyskytujú pomocné premenné:

Príklad č. 3.2

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= \min \\ x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Riešenie:

- prv, než začneme riešiť úlohu pomocou simplexovej metódy v simplexovej tabuľke, musíme príslušne upraviť model, t.j. vyrovnať OP na rovnice prídavnými premennými a pomocou pomocných premenných vytvoriť kladnú jednotkovú bázu, aby sme získali východiskové riešenie bez transformácie.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 0x_1' + 0x_2' &= \min \\ x_1 + 2x_2 - x_1' &= 100 \\ 2x_1 + x_2 - x_2' &= 120 \\ x_1, x_2, x_1', x_2' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 0x_1' + 0x_2' + Mx_1'' + Mx_2'' &= \min \\ x_1 + 2x_2 - x_1' + x_1'' &= 100 \\ 2x_1 + x_2 - x_2' + x_2'' &= 120 \\ x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$„\min“ + M \rightarrow \infty$$

ZP	CZP	x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_1''	x_2''	$\bar{b}$	
		2	1	0	0	M	M		
I.	x_1''	M	1	2	-1	0	1	0	100
	x_2''	M	2	1	0	-1	0	1	120
		M	3	3	-1	-1	0	0	220
	$c_j' - c_j$		-2	-1	0	0	0	0	0
II.	x_1''	M	0	3/2	-1	1/2	1	-1/2	40
	x_1	2	1	1/2	0	-1/2	0	1/2	60
III.		M	0	3/2	-1	1/2	0	-3/2	40
	$c_j' - c_j$		0	0	0	-1	0	1	120
IV.	x_2	1	0	1	-2/3	1/3	2/3	-1/3	80/3
	x_1	2	1	0	1/3	-4/6	-1/3	2/3	140/3
		M	0	0	0	0	-1	-1	0
	$c_j' - c_j$		0	0	0	-1	0	1	120
	x_2	1	2	1	0	-1	0	1	360/3
	x_1'	0	3	0	1	-2	-1	2	140
	M	0	0	0	0	-1	-1	0	
	$c_j' - c_j$		0	0	0	-1	0	-1	120

I. – všimame si $(c_j' - c_j)$ pri hodnote M (predposledný riadok).

Ak v tomto riadku existuje aspoň jedna kladná hodnota, potom riešenie nie je optimálne.

Tu máme dve hodnoty kladné 3; $3 > 0$, potom pokračujeme ďalej v riešení a vo voľbe klúčového stĺpca – volíme ten, v ktorom je najväčšia kladná hodnota M (resp. $c_j' - c_j$);

– volíme 1. stĺpec (z dvoch rovnakých hodnôt 3), potom x_1 je ZP zaradovanou premennou;

– klúčový riadok zvolíme na základe podielov $\min_i \{\beta_i / \alpha_i\} = \min \{100/1; 120/2\}$

$= 120/2$, potom riadok x_2'' bude vyradovanou premennou a 2 bude klúčovým prvkom.

II. $c_1' = M \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$$c_1 = 2$$

$$c_1' - c_1 = 2 - 2 = 0$$

$$c_2' = M \cdot 2/3 + 2 \cdot 1/2 = 3/2M + 1$$

$$c_2 = 1$$

$$c_2' - c_2 = 3/2M + 1 - 1 = 3/2M$$

$$c_3' = M \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -M$$

$$c_3 = 0$$

$$c_3' - c_3 = -M - 0 = -M$$

– nájdené riešenie nie je ešte optimálne, lebo v predposlednom riadku sú kladné hodnoty =>

- klúčový stĺpec: $M \cdot 3/2 > 0$ maximálne, potom x_2 zaradovaná premenná

- klúčový riadok: $\min \{40/(3/2); 60/(1/2)\}$, potom x_1 vyradovaná premenná.

III. – v predposlednom riadku ($c_j' - c_j$) všetky hodnoty sú nekladné (≤ 0), potom všetky pomocné premenné sa stali nezákladnými premennými a našli sme prípustné riešenie !

- ďalej sa riadime posledným riadkom, a ten nám hovorí, že nájdené riešenie je aj optimálne riešenie.

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1'^0 \\ x_2'^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140/3 \\ 80/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_{min} = 120$$

Poznámka 1: Ak pomocnú premennú raz vylúčime z riešenia, už naspäť do riešenia ju nesmieme zaradiť.

Poznámka 2: Všimnime si, že v riadku ($c_j' - c_j$) a v stĺpci x_1' sa nachádzajú nuly. To nám hovorí, že existuje ešte jedno optimálne riešenie.

Čiže v simplexovej tabuľke sa prejaví, že úloha je mnohoznačná, že má nekonečne veľa optimálnych riešení tak, že ($c_j' - c_j$) je v optimálnom riešení ($c_j' - c_j$) = 0 aj pod aspoň jednou nezákladnou premennou (pod ZP je a priori = 0).

U nás pod x_1, x_2 – ZP je 0, 0.

Ak zaradíme do riešenia tú nezákladnú premennú, pod ktorou je rozdiel $(c_j' - c_j) = 0$, hodnota ÚF sa nám nezmení a dostaneme tak ďalšie optimálne základné riešenie.

Tu: $x_1' \rightarrow (c_j' - c_j) = 0$:

- klúčový stĺpec – x_1' – zaradovaná premenná,
- klúčový riadok – $\min \{(140/3) / (1/3)\}$, x_1 – vyradovaná premenná,
- klúčový prvok $(1/3)$.

Po úprave:

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1'^0 \\ x_2'^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 140 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{min} = 120$$

Poznámka 3: Ako sa prejaví v simplexovej tabuľke, že ÚF nenadobúda v množine prípustných riešení konečný extrém?

- Prejaví sa to tak, že v kľúčovom stĺpci sú všetky koeficienty nekladné „ ≤ 0 “ pri maximalizácii aj minimalizácii.

Poznámka 4: Pomocné premenné majú význam technických výpočtových prostriedkov iba v prípade prípustného riešenia. Ak však zostanú v optimálnom riešení, úloha nemá prípustné riešenie, a to zn., že z OP sú nesplniteľné. Aké opatrenia treba urobiť na odstránenie nesplniteľnosti podmienok, to zistíme práve ich prostredníctvom.

3.7.2.6 Maticovo – vektorová interpretácia výpočtu v simplexovej tabuľke

Majme:

$$\begin{aligned} \bar{c} \cdot \bar{x} & \stackrel{!}{=} \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} & \leq \bar{b} \\ \bar{x} & \geq \bar{0} \end{aligned}$$

$$\bar{c} \cdot \bar{x} + \bar{c}' \cdot \bar{x}' \stackrel{!}{=} \max \quad \dots \text{pridaním prídavných premenných v maticovom tvare:}$$

$$[\bar{A}/\bar{E}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}' \end{bmatrix} = \bar{b}, \quad \begin{bmatrix} \bar{x} \\ - \\ \bar{x}' \end{bmatrix} \geq \bar{0}$$

Simplexová tabuľka:

ZP	CZP	$\bar{x}$	$\bar{x}'$	
		$\bar{c}$	$\bar{c}'$	
$\bar{x}_0$	$\bar{c}_0$	$\bar{A}$	$\bar{B}_0$	$\bar{b}$
		$\bar{c}_0 \bar{A} - \bar{c}'$	$\bar{c}_0 \bar{B} - \bar{c}'$	$\bar{c}_0 \bar{b}$

kde:

$\bar{x}_0$ – vektor tých premenných, ktoré sú základné premenné vo východiskovom riešení

$$\bar{x}_0 = \bar{x}' \text{ (u nás v príkladoch),}$$

$\bar{x}_i$ – vektor premenných, ktoré sú základné premenné v i -tom kroku simplexovej tabuľky;

$\bar{c}_0$ – vektor ocenení tých premenných, ktoré sú ZP vo východiskovom riešení

$$\text{tu } (\bar{c}_0 = \bar{c}' = \bar{0});$$

$\bar{c}_i$ – vektor ocenení tých premenných, ktoré sú ZP v i -tom kroku simplexovej tabuľky;

$\bar{B}_0$ – matica, ktorá pozostáva z vektorov pri tých premenných, ktoré sú ZP vo východiskovom riešení (báza východiskového riešenia)

tu: $\bar{B}_0 = \bar{E}$, lebo za základné premenné sme volili prídavné premenné

ZP	CZP	$\bar{x}$	$\bar{x}'$	
		$\bar{c}$	$\bar{c}' = \bar{0}$	
$\bar{x}'$	$\bar{0}$	$\bar{A}$	$\bar{E}$	$\bar{b}$
		$-\bar{c}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

$i...$

$\bar{x}_i$	$\bar{c}_i$	$\bar{B}_i^{-1} \cdot \bar{A}$	$\bar{B}_i^{-1}$	$\bar{B}_i^{-1} \cdot \bar{b}$
		$\bar{c}_i \bar{B}_i^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c}$	$\bar{c}_i \bar{B}_i^{-1} - \bar{0}$	$\bar{c}_i \bar{B}_i^{-1} \cdot \bar{b}$

Ak platí: $[\bar{c}_i \bar{B}_i^{-1} \bar{A} - \bar{c} / \bar{c}_i \bar{B}_i^{-1}] \leq \bar{0}$, potom z toho vyplýva, že B_i nie je optimálnou bázou, v riešení musíme ďalej pokračovať.

k...

$\bar{x}_k$	$\bar{c}_k$	$\bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{A}$	$\bar{B}_k^{-1}$	$\bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$
		$\bar{c}_k \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c}$	$\bar{c}_k \bar{B}_k^{-1}$	$\bar{c}_k \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$

Nech platí: $[\bar{c}_k \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c} / \bar{c}_k \bar{B}_k^{-1}] \geq \bar{0}$.

Ak platí pre $\bar{B}_k$ táto nerovnosť, znamená to, že $\bar{B}_k$ je optimálnou bázou a:

$$\bar{x}_{opt} = \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$z_{max} = \bar{c}_k \cdot \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$$

- nastáva transformácia z bázy do bázy.

Rozoberme jednotlivé časti simplexovej tabuľky po k-tom kroku:

$\bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{A}$ – submatica, je transformovaná matica koeficientov (α_{ij});

- prvky tejto submatice sú vlastne súradnice vektorov $a_1, a_2, \dots, a_n$ v báze $\bar{B}_k$ - t. zn., že každý stĺpec tejto submatice (α_j) udáva, akej kombinácii základných procesov je z hľadiska obmedzenia ekvivalentná jedna jednotka daného procesu.

$(\bar{c}_k \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c})$ – riadkový vektor, ktorého prvky predstavujú už známe rozdiely cien ekvivalentnej kombinácie a cien jednotlivých procesov;

- udávajú, o koľko klesne hodnota ÚF, ak zaradíme určitú nezákladnú premennú do riešenia a jej zodpovedajúci proces uskutočníme na jednotkovej úrovni.

$\left. \begin{array}{l} \bar{B}_k^{-1} \\ \bar{c} \bar{B}_k^{-1} \end{array} \right\}$ - submatice s podobnou vecnou interpretáciou,
ale vo vzťahu k fiktívnym procesom;

- súradnice riadkového vektora $\bar{c} \bar{B}_k^{-1}$ udávajú, o koľko sa zmení hodnota ÚF, ak uskutočníme jeden raz fiktívny proces. Avšak uskutočnenie fiktívneho procesu znamená vlastne nevyužitie kapacity príslušného disponibilného zdroja (činiteľa).

$\bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$ – vektor riešenia v k -tom kroku;

- jeho súradnice udávajú hodnoty základných premenných.

$\bar{c} \bar{B}_k^{-1} \cdot \bar{b}$ – hodnota ÚF v k -tom kroku.

3.9 DUALITA ÚLOH LP

Ku každej úlohe LP existuje iná úloha LP, ktorá je s ňou duálne združená a nazývame ju **duálnou úlohou**, kým pôvodnú nazývame **úlohou primárnou**.

- obidve úlohy sú konštruované z tých istých konštánt;
- dualita je vlastnosť (vzťah) dvoch úloh LP.

Význam duality v LP spočíva v nasledujúcich bodoch:

- výpočtový význam, na dualite sú založené niektoré modifikácie simplexovej metódy,
- v postoptimalizačnej analýze, špeciálne v analýze citlivosti optimálneho riešenia,
- v ekonomickej interpretácii duálnych premenných.

Rozoznávame v podstate dva druhy duálne združených úloh:

- **symetrická dualita** - ak vlastné obmedzenia oboch duálne združených úloh sú formulované v tvare nerovností opačného typu;
- **nesymetrická dualita** – ak vlastné obmedzenia jednej úlohy sú formulované v tvare rovníc a vlastné obmedzenia druhej úlohy v tvare nerovností.

Aby sme mohli matematicky vyjadriť duálne združené úlohy, zavedieme si nasledovné symboly a názvy:

$\bar{x}$ – vektor primárnych premenných:

$$\bar{x} = [\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{\text{primárne premenné}}, \underbrace{x_1', x_2', \dots, x_m'}_{\text{prídavné primárne premenné}}] - \text{stĺpcový vektor}$$

$\bar{u}$ – vektor duálnych premenných:

$$\bar{u} = [\underbrace{u_1, u_2, \dots, u_m}_{\text{duálne premenné}}, \underbrace{u_1', u_2', \dots, u_n'}_{\text{duálne prídavné premenné}}] - \text{riadkový vektor}$$

3.9.1 Symetrické duálne úlohy

Symetricky sú úlohy duálne združené vtedy, ak jedna z úloh je maximalizačná a druhá je minimalizačná a ak v oboch úlohách sú vlastné obmedzenia neostre nerovnosti opačného smeru a súčasne platí podmienka, že všetky premenné v modeli spĺňajú podmienku nezápornosti.

Primárna úloha (PÚ):

$$\begin{aligned} \bar{c} \cdot \bar{x} &\stackrel{!}{=} \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} &\leq \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0} \end{aligned} \quad [3.8]$$

Duálna úloha (DÚ):

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \bar{b} &\stackrel{!}{=} \min \\ \bar{u} \cdot \bar{A} &\geq \bar{c} \\ \bar{u} &\geq \bar{0} \end{aligned} \quad [3.13]$$

Jedna z úloh je vždy max, druhá min; resp. min, druhá max:

- vektor $\bar{c}$ a $\bar{b}$ si navzájom zamenia funkciu;
- vektor $\bar{x}$ je stĺpcový, $\bar{u}$ – riadkový;
- matica $\bar{A}$ v PÚ je transponovaná $\bar{A}^T$ v DÚ.

Primárne i duálne premenné nadobúdajú iba nezáporné (≥ 0) hodnoty pri symetrickej dualite.

Napr.:

PÚ		DÚ
$3x_1 + 4x_2 \stackrel{!}{=} \max$		$80u_1 + 60u_2 + 100u_3 \stackrel{!}{=} \min$
$2x_1 + 5x_2 \leq 80$	$\longleftrightarrow u_1$	≥ 0
$4x_1 + 3x_2 \leq 60$	$\longleftrightarrow u_2$	≥ 0
$7x_1 + 5x_2 \leq 100$	$\longleftrightarrow u_3$	≥ 0
$x_1 \geq 0$	$\longleftrightarrow 2u_1 + 4u_2 + 7u_3$	≥ 3
$x_2 \geq 0$	$\longleftrightarrow 5u_1 + 3u_2 + 5u_3$	≥ 4

Resp. všeobecne:

PÚ

DÚ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$u_1 \geq 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$u_2 \geq 0$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad [3.14]$$

$$u_m \geq 0 \quad [3.15]$$

$$x_1 \geq 0$$

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m \geq c_1$$

$$x_2 \geq 0$$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m \geq c_2$$

.....

$$x_n \geq 0$$

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m \geq c_n$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \stackrel{!}{=} \max$$

$$u_1b_1 + u_2b_2 + \dots + u_mb_m \stackrel{!}{=} \min$$

Z tohto zápisu je zrejmé:

1. Ak je primárna úloha maximalizačná, k nej duálne združená úloha je minimalizačná (a naopak).
2. Vlastné obmedzenia v PÚ sú formulované v tvare nerovnosti ($\leq$) a primárne premenné spĺňajú podmienku nezápornosti (≥ 0), potom aj vlastné obmedzenia DÚ sú formulované ako nerovnosti ($\geq$) s opačným znamienkom a duálne premenné spĺňajú podmienku nezápornosti (≥ 0).
3. Matica koeficientov vlastných obmedzení DÚ je vlastne transponovaná matica koeficientov vlastných obmedzení PÚ.
4. Vektor „cien“ $\bar{c}$ PÚ vystupuje v DÚ ako vektor obmedzení a vektor obmedzení $\bar{b}$ PÚ vystupuje v DÚ ako vektor „cien“.
5. Každému vlastnému obmedzeniu PÚ zodpovedá určitá duálna premenná, ale tiež opačne: každému obmedzeniu DÚ zodpovedá určitá primárna premenná.

Dualita je vzájomný vzťah, t. zn. duálne združené úlohy môžeme ľubovoľne označiť za primárnu, resp. duálnu.

Napr.:

$$\begin{aligned}
 & \text{PÚ} \\
 & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \min \\
 & \bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b} \\
 & \bar{x} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad [3.9]$$

$$\begin{aligned}
 & \text{DÚ} \\
 & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \max \\
 & \bar{u} \cdot \bar{A} \leq \bar{c} \\
 & \bar{u} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad [3.16]$$

3.9.2 Nesymetrické duálne úlohy

Sú to také duálne úlohy, v ktorých jedna z duálne združených úloh má vlastné obmedzenia v tvare rovníc („ = “) a druhá v tvare nerovností („ ≤ “, „ ≥ “) a nie je zaručená podmienka nezápornosti pre všetky premenné v modeli.

V maticovom zápise:

$$\begin{aligned}
 & \text{PÚ} \\
 & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \max \\
 & \bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b} \\
 & \bar{x} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \text{DÚ} \\
 & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \min \\
 & \bar{u} \cdot \bar{A} \geq \bar{c}
 \end{aligned}
 \quad [3.17]$$

$\bar{u}$ – vektor voľných premenných
(môže nadobúdať ľubovoľné hodnoty)

$$\begin{aligned}
 \text{alebo} \quad & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \max \\
 & \bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b} \\
 & \bar{x} \text{ – vektor voľných premenných}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \min \\
 & \bar{u} \cdot \bar{A} = \bar{c} \\
 & \bar{u} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad [3.18]$$

$$\begin{aligned}
 \text{alebo} \quad & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \min \\
 & \bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{b} \\
 & \bar{x} \text{ – vektor voľných premenných}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \max \\
 & \bar{u} \cdot \bar{A} = \bar{c} \\
 & \bar{u} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad [3.19]$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \min \\
 & \bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b} \\
 & \bar{x} \geq \bar{0}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \max \\
 & \bar{u} \cdot \bar{A} \leq \bar{c} \\
 & \bar{c} \text{ – vektor voľných premenných}
 \end{aligned}
 \quad [3.20]$$

Platí: Ak i -te obmedzenie v PÚ je v tvare rovnice, tak i -ta duálna premenná je voľná premenná

alebo ak j -ta primárna premenná je voľná premenná, potom j -te obmedzenie v DÚ treba formulovať v tvare rovnice,

čiže pri nesymetrických duálnych úlohách nie je zabezpečená nezápornosť premenných pri tej úlohe (primárnej, duálnej), ktorá má vlastné obmedzenia v tvare nerovnosti (t. zn., že ak má jedna z duálne združených úloh vlastné obmedzenie v tvare rovníc, premenné druhej úlohy všeobecne nespĺňajú podmienky nezápornosti).

Prečo nemožno zabezpečiť nezápornosť premenných pri nesymetrických úlohách, ukážeme si na príklade.

Príklad č. 3.3

K PÚ sformulujte duálne združenú DÚ!

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 + 5x_2 & \stackrel{!}{=} & \max \\
 7x_1 + 4x_2 & \geq & 40 \\
 3x_1 + 2x_2 & = & 30 \\
 4x_1 + x_2 & \leq & 20 \\
 x_1, x_2 & \geq & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \\
 / \cdot (-1) \\
 / \leq / \\
 / \geq -\leq / \\
 \\
 \end{array}$$

Poznámka:

Ak chceme k určitej úlohe (PÚ) napísať úlohu duálne združenú (DÚ), musíme všetky vlastné obmedzenia tejto úlohy zmeniť na nerovnosti rovnakého typu (pri maximalizačnej úlohe na $\leq$, pri minimalizačnej úlohe na $\geq$).

- smer nerovnosti zmeníme jednoducho tým, že pre násobíme obidve strany nerovnosti -1 ;
- ak sa v PÚ vyskytujú obmedzenia v tvare rovníc, nahradíme ich nerovnosťami:

$$| = | > < | < > | > < |$$

Teda PÚ:

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 + 5x_2 & \stackrel{!}{=} & \max \\
 -7x_1 - 4x_2 & \leq & -40 \\
 3x_1 + 2x_2 & \leq & 30 \\
 3x_1 + 2x_2 & \geq & 30 \quad / \cdot (-1)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
4x_1 + x_2 &\leq 20 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
2x_1 + 5x_2 &\stackrel{!}{=} \max \\
-7x_1 - 4x_2 &\leq -40 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\
-3x_1 - 2x_2 &\leq -30 \\
4x_1 + x_2 &\leq 20 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

– teraz už len symetrická dualita so 4 duálnymi premennými u_1, u_2^+, u_2^-, u_3 .

DÚ:

$$\begin{aligned}
-40u_1 + 30u_2^+ - 30u_2^- + 20u_3 &\stackrel{!}{=} \min \\
-7u_1 + 3u_2^+ - 3u_2^- + 4u_3 &\geq 2 \\
-4u_1 + 2u_2^+ - 2u_2^- + u_3 &\geq 5 \\
u_1, u_2^+, u_2^-, u_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Potom DÚ:

$$\begin{aligned}
-40u_1 + 30(u_2^+ - u_2^-) + 20u_3 &\stackrel{!}{=} \min \\
-7u_1 + 3(u_2^+ - u_2^-) + 4u_3 &\geq 2 \\
-4u_1 + 2(u_2^+ - u_2^-) + u_3 &\geq 5 \\
u_1, u_2^+, u_2^-, u_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Zavedieme substitúciu: $(u_2^+ - u_2^-) = u_2$

Čiže DÚ:

$$\begin{aligned}
-40u_1 + 30u_2 + 20u_3 &\stackrel{!}{=} \min \\
-7u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\geq 2 \\
-4u_1 + 2u_2 + u_3 &\geq 5 \\
u_1, u_3 &\geq 0 \\
u_2 &\text{ – voľná premenná.}
\end{aligned}$$

Pravidlá, ktoré pri zostavovaní duálne združených úloh musíme brať do úvahy, sú prehľadne usporiadané v tab. 3-1 a 3-2.

Tab. 3-1

Primárna úloha	Duálna úloha
maximalizovať	minimalizovať
koeficienty ÚF	prvky pravej strany
prvky pravej strany	koeficienty ÚF
i -tý riadok matice technol. koeficientov	i -tý stĺpec matice technol. koeficientov
j -tý stĺpec matice technol. koeficientov	j -tý riadok matice technol. koeficientov
i -té ohraničenie typu „ $\leq$ “	i -tá premenná $u_i \geq 0$
i -té ohraničenie typu „ $\geq$ “	i -tá premenná $u_i \leq 0$
i -té ohraničenie typu „ $=$ “	i -tá premenná voľná (u_i - voľná premenná)
j -tá premenná $x_j \geq 0$	j -té ohraničenie typu „ $\geq$ “
j -tá premenná $x_j \leq 0$	j -té ohraničenie typu „ $\leq$ “
j -tá premenná voľná	j -té ohraničenie typu „ $=$ “

Zdroj: Ivaničová, 2002

Tab. 3-2

Primárna úloha	Duálna úloha
minimalizovať	maximalizovať
koeficienty ÚF	prvky pravej strany
prvky pravej strany	koeficienty ÚF
i -tý riadok matice technol. koeficientov	i -tý stĺpec matice technol. koeficientov
j -tý stĺpec matice technol. koeficientov	j -tý riadok matice technol. koeficientov
i -té ohraničenie typu „ $\leq$ “	i -tá premenná $u_i \leq 0$
i -té ohraničenie typu „ $\geq$ “	i -tá premenná $u_i \geq 0$
i -té ohraničenie typu „ $=$ “	i -tá premenná voľná (u_i - voľná premenná)
j -tá premenná $x_j \geq 0$	j -té ohraničenie typu „ $\leq$ “
j -tá premenná $x_j \leq 0$	j -té ohraničenie typu „ $\geq$ “
j -tá premenná voľná	j -té ohraničenie typu „ $=$ “

Zdroj: Ivaničová, 2002

3.9.3 Vlastnosti riešenia duálnych úloh

1. Ak obe duálne združené úlohy majú prípustné riešenia, potom majú aj optimálne riešenia.
2. Ak ÚF jednej z duálne združených úloh nenadobúda na množine prípustných riešení konečný extrém, potom druhá úloha nemá vôbec prípustné riešenie.
3. Ak jedna z duálne združených úloh nemá prípustné riešenie, potom druhá úloha buď taktiež nemá prípustné riešenie, alebo má prípustné riešenie, ale ÚF nenadobúda na množine prípustných riešení konečný požadovaný extrém.
4. Ak jedna z duálne združených úloh má optimálne riešenie, potom má optimálne riešenie aj druhá úloha a hodnoty ÚF sú pre obe riešenia rovnaké.

(2 + 3 – základná veta o dualite).

Vzťah medzi primárnymi premennými a duálnymi premennými v optimálnych riešeniach:

$\overline{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_m'^0]$ – stĺpcový vektor

- vektor optimálneho riešenia PÚ,

$\overline{u}^0 = [u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0, u_1'^0, u_2'^0, \dots, u_n'^0]$ – riadkový vektor

- vektor optimálneho riešenia DÚ.

$$\text{Ak: } \left. \begin{array}{ll} x_j^0 > 0, & \text{potom: } u_j'^0 = 0 \\ x_j^0 = 0 & u_j'^0 > 0 \end{array} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\left. \begin{array}{ll} u_i^0 > 0 & x_i'^0 = 0 \\ u_i^0 = 0 & x_i'^0 > 0 \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Poznámka: Ak je optimálne riešenie jednoznačné a nedegenerované, potom z dvojice navzájom si zodpovedajúcich obmedzení je vždy jedno obmedzenie splnené ako rovnica, druhé ako nerovnosť.

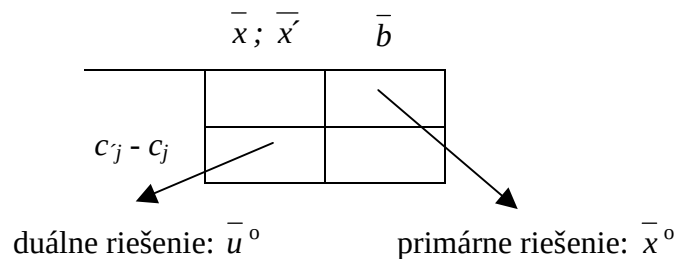
Ak jedna z duálne združených úloh má optimálne riešenie degenerované, potom druhá úloha je mnohoznačná, má nekonečne veľa riešení.

3.9.4 Duálne riešenie v simplexovej tabuľke

Výhodou riešenia duálne združených úloh je, že ak riešime jednu úlohu SM, riešime tým automaticky i druhú úlohu k nej - duálnu (toto riešenie sa objaví v simplexovej tabuľke v riadku $(c_j' - c_j)$).

Optimálne hodnoty duálnych premenných sú rozdiely $(c_j' - c_j)$ v poslednom kroku simplexovej tabuľky (ak obsahuje optimálne riešenie), a to:

- rozdiely $(c_j' - c_j)$ v stĺpci prídavných premenných (resp. pomocných premenných) $x_1', x_2', \dots, x_m'$ sú optimálne hodnoty $u_1^o, u_2^o, \dots, u_m^o$ duálnych premenných;
- rozdiely $(c_j' - c_j)$ v stĺpcoch ostatných premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú hodnoty prídavných premenných duálnej úlohy $u_1'^o, u_2'^o, \dots, u_n'^o$.



Napr.: Vektorovo – maticový zápis poslednej časti simplexovej tabuľky:

Ak je $\bar{B}$ optimálna báza (maximalizačnej úlohy), potom platí:

$$\bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c} \geq \bar{0}, \quad \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \geq \bar{0}.$$

To ale znamená, že vektor optimálneho riešenia duálnej úlohy $\bar{u}^o$ sa podľa hore uvedeného tvrdenia rovná vektoru:

$$\bar{u}^o = \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} = [u_1^o, u_2^o, \dots, u_m^o]$$

$$\bar{u}'^o = \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c} = [u_1'^o, u_2'^o, \dots, u_n'^o]$$

Podľa základnej vety o dualite (hodnoty ÚF sú rovnaké) platí:

$$\boxed{\bar{c} \cdot \bar{x}^o = \bar{u}^o \cdot \bar{b}}$$

3.9.5 Vecná interpretácia duálnych úloh

Vecná interpretácia duálnych úloh spočíva vo vecnej interpretácii duálnych premenných vo fyzikálnych jednotkách a poskytuje nám aspoň také dobré informácie o riešenej úlohe ako primárne riešenie (jeho interpretácia).

$$\begin{array}{ll}
 \text{PÚ} & \text{DÚ} \\
 \bar{c} \cdot \bar{x} \stackrel{!}{=} \max & \bar{u} \cdot \bar{b} \stackrel{!}{=} \min \\
 \bar{A} \cdot \bar{x} \leq \bar{b} & \bar{u} \cdot \bar{A} \geq \bar{c} \\
 \bar{x} \geq \bar{0} & \bar{u} \geq \bar{0}
 \end{array}
 \quad [3.18] \qquad [3.13]$$

Aby sme mohli určiť zmysel duálnej úlohy, musíme zistiť vecný rozmer duálnych premenných. Vecný rozmer konštant duálnej úlohy je ten istý ako pri primárnej úlohe, keďže duálna úloha je konštruovaná na základe tých istých konštant ako primárna úloha.

Rozmer jednotlivých konštant možno ľahko stanoviť z podmienok primárnej úlohy. Napr.:

$$\dim(c_j) = [\text{cena} / \text{proces}]$$

$$\dim(b_i) = [\text{činiteľ}]$$

$$\dim(a_{ij}) = [\text{činiteľ} / \text{proces}]$$

Rozmerová rovnica primárnej úlohy potom:

$$\boxed{[a_{ij}] [x_j] = [b_i]} \quad (1')$$

$$[\text{činiteľ} / \text{proces}] \dim(x_j) = [\text{činiteľ}]$$

$$\boxed{\dim(x_j) = [\text{proces}]} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Vecnú náplň duálnych premenných musíme podobným spôsobom určiť z podmienok duálnej úlohy.

Rozmerová rovnica duálnej úlohy bude:

$$\boxed{[a_{ij}] [u_i] = [c_j]} \quad (2')$$

$$[\text{činiteľ} / \text{proces}] \dim(u_i) = [\text{cena} / \text{proces}]$$

Potom rozmer duálnych premenných:

$$\dim(u_i) = [\text{cena} / \text{činiteľ}] \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Duálna premenná, ktorá zodpovedá obmedzujúcej podmienke takého činiteľa, ktorý sa pri realizácii optimálneho riešenia úplne spotrebuje (úzkoprofilový činiteľ), nadobudne v optimálnom riešení hodnotu > 0 .

Čím väčšiu hodnotu táto duálna premenná nadobudne, tým je činiteľ, ktorému zodpovedá, „úzkoprofilovejší“:

$$u_i^{\circ} > 0 \text{ ak } x_i^{\circ} = 0.$$

Duálna premenná, ktorá zodpovedá takému výrobnému činiteľovi, ktorý sa pri realizácii optimálneho riešenia nespotrebuje, nadobudne v optimálnom riešení nulovú hodnotu.

Hodnota duálnej premennej predstavuje čiastku, o ktorú sa zmení hodnota ÚF, ak sa disponibilné množstvo činiteľa, ktorému zodpovedá táto premenná, zmení o jednotku:

$$u_i^{\circ} = 0 \text{ ak } x_i^{\circ} > 0,$$

x_i° - prídavné premenné, ich jednotky predstavujú nevyužívané kapacity pri optimálnom riešení;

- po dokúpení úzkoprofilových činiteľov – rozšírenie výroby.

Slovná formulácia PÚ:

Na akej úrovni x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) treba uskutočniť každý proces, aby sa pri známej cene c_j na jednotku výroby j -teho druhu a pri daných disponibilných zdrojoch b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) dosiahla maximálna hodnota ÚF.

Slovná formulácia DÚ:

Akú cenu u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) treba priradiť jednotke každého činiteľa, aby sme pri daných disponibilných zdrojoch b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) a pri danej cene c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) na jednotku výroby každého druhu minimalizovali celkovú hodnotu spotrebovaných činiteľov.

Duálne premenné u_i teda oceňujú činitele. Nazývajú sa **duálnymi, fiktívnymi, tieňovými cenami**.

Vieme už, že vektor duálnych premenných $\bar{u}^\circ$:

$$\bar{u}^\circ = \bar{c}^\circ \cdot \bar{B}^{-1}$$

$\bar{c}^\circ$ - vektor ocenení tých premenných, ktoré sú základné premenné v optimálnom riešení.

Z uvedeného vzťahu $\bar{u}^\circ = \bar{c}^\circ \cdot \bar{B}^{-1}$ jasne vyplýva, že hodnota duálnych premenných je jednak závislá od $\bar{c}^\circ$ a jednak od $\bar{B}$.

1. Predpokladajme, že $\bar{B} = \text{konst.}$, $\bar{c}^\circ$ sa mení.

To znamená, že duálne ceny sú závislé od toho, ako boli v PÚ ocenené jednotlivé procesy. Ak sa mení ocenenie týchto reálnych procesov (zmena nákladov výroby), menia sa aj hodnoty duálnych premenných. Z tohto hľadiska hovoríme, že duálne premenné (ceny) nám relatívne oceňujú činitele.

2. Predpokladajme, že $\bar{c}^\circ = \text{konst.}$, $\bar{B}$ sa mení

Hodnoty duálnych cien sú pri konštantnom $\bar{c}^\circ$ jednoznačne určené optimálnou bázou. Ak sa menia množstvá obmedzujúcich činiteľov, zostáva báza optimálna len v určitých medziach ($\bar{b}_0 \leq \bar{b} \leq \bar{b}^\circ \Rightarrow \bar{B} = \text{konst.}$). Pri takejto zmene činiteľov, ktoré nespôsobia zmenu danej optimálnej bázy nezmenia sa ani hodnoty duálnych cien.

Ak by sa v dôsledku zmeny činiteľov zmenila i daná optimálna báza, zmenia sa i hodnoty duálnych cien. To potom znamená, že duálne ceny sú vlastne ceny marginálne (hraničné).

Výhody duality:

1. Z dvoch duálnych úloh riešime tú, ktorej riešenie je z hľadiska spotreby strojového času výhodnejšie, pretože ak riešime jednu, získame riešenie aj druhej.

Výhoda – takýto tvar matice:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{A} \end{bmatrix} \quad \bar{A} \quad - \text{nevýhodný tvar, viac obmedzujúcich podmienok a menej premenných.}$$

2. Na základe duality sa modifikovala simplexová metóda (duálne simplexová metóda).
3. Dualita sa využíva v postoptimalizačných úvahách.
4. Ekonomická interpretácia duality, informácie, ktoré nám poskytuje duálne riešenie o optimalite.

Poznámka 1: Všeobecne duálna premenná u_i predstavuje hodnotu, o ktorú sa zlepší (zhorší) ÚF, ak zmeníme (príslušným smerom) disponibilné množstvo toho činiteľa, ktorý duálne premenné oceňuje.

Poznámka 2: Ak pri nesymetrických duálnych úlohách nadobudnú duálne premenné záporné hodnoty, neprisudzujeme im vecnú interpretáciu.

3.9.6 Duálne simplexová metóda

Ak je dualita vzťah dvoch duálne združených úloh (PÚ a DÚ), potom duálne simplexová metóda je metóda na riešenie úloh a je založená na dualite nazývame ju aj metóda spresňovania duálnych cien.

Simplexovú metódu používame na riešenie vtedy, ak je takýto východiskový stav:

- primárne riešenie je prípustné a duálne riešenie je neprípustné.

Všeobecne si úlohu zapíšeme:

$$\begin{aligned}\bar{c} \cdot \bar{x} &= \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} &\leq \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}\end{aligned}$$

Postup výpočtu pri simplexovej metóde spočíva v tom, že sa snažíme zmeniť duálne riešenie na prípustné a tým primárne riešenie zlepšujeme.

Akonáhle sa stane duálne riešenie prípustným, sú obe riešenia optimálne, lebo sme dosiahli optimálnu bázu, ktorá je primárne aj duálne prípustná.

Predpoklad:

$\bar{B}$ – optimálna báza tejto úvahy potom musí byť primárne aj duálne prípustná.

Ak platí: $\bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} \geq 0 \Rightarrow \bar{B}$ je primárne prípustná,
 $[\bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c} / \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1}] \geq 0$, potom báza je aj duálne prípustná.

Duálne simplexovú metódu (DSM) použijeme na riešenie vtedy, ak primárne riešenie je neprípustné a duálne riešenie je prípustné.

Postup výpočtu spočíva v tom, že sa snažíme zmeniť primárne riešenie na prípustné, čím zároveň zlepšujeme (spresňujeme) hodnoty duálneho riešenia.

Akonáhle sa zmení primárne riešenie na prípustné, obe riešenia sú aj optimálne.

Konkrétny postup pri výpočte DSM

Pri DSM zvolíme najprv kľúčový riadok, až potom kľúčový stĺpec (pri SM to bolo opačne). Za kľúčový riadok volíme ten riadok, ktorý má v stĺpci $\bar{b}$ zápornú hodnotu a zo všetkých záporných hodnôt v tomto stĺpci je táto hodnota absolútne najväčšia.

Kľúčový stĺpec určíme tak, že hodnoty v riadku $(c_j' - c_j)$ podelíme zápornými hodnotami kľúčového riadka.

Stĺpec, v ktorom je tento podiel najmenší (absolútne), zvolíme za kľúčový stĺpec.

Ďalší postup výpočtu je taký istý ako pri SM.

Poznámka: V prípade, že v stĺpci $\bar{b}$ je v niektorom riadku záporná hodnota a všetky ostatné hodnoty v tomto riadku sú nezáporné a podľa pravidiel by tento riadok mal byť kľúčový, znamená to, že úloha nemá vôbec prípustné riešenie a k nej duálna úloha nemá konečný požadovaný extrém. Použitie DSM teda umožní, že nemusíme použiť pri riešení pomocné premenné.

				$\bar{b}$
				≥ 0
				≥ 0
kľúčový riadok	≥ 0		≥ 0	< 0
				≥ 0

Príklad č. 3.4

Riešme DSM nasledovný LOM:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &= \min \\2x_1 + x_2 &\geq 80 \\2x_1 + 2x_2 &\geq 150 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 0x_1' + 0x_2' &= \min \\2x_1 + x_2 - x_1' &= 80 \quad / \cdot (-1) \\2x_1 + 2x_2 - x_2' &= 150 \quad / \cdot (-1) \quad \cdot 1/2 \\x_1, x_2, x_1', x_2' &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 0x_1' + 0x_2' &= \min \\-2x_1 - x_2 + x_1' &= -80 \\-x_1 - x_2 + x_2' &= -75 \\x_1, x_2, x_1', x_2' &\geq 0\end{aligned}$$

Teraz vyhovuje upravený LOM pre DSM a môžeme ho zapísať so tabuľky. Úloha sa však mohla riešiť aj SM, ale museli by sme dať 2 pomocné premenné.

DSM „min“

ZP	CZP	x_1	x_2	x_1'	x_2'	–
		3	2	0	0	b
I.	x_1'	0	-2	1	0	-80
	x_2'	0	-1	0	1	-75
	$c_j' - c_j$	-3	-2	0	0	0
II.	x_1	3	1	1/2	-1/2	40
	x_2'	0	0	-1/2	1	-35
III.	$c_j' - c_j$	0	-1/2	-3/2	0	120
	x_1	3	1	0	-1	5
	x_2	2	0	1	-2	70
	$c_j' - c_j$	0	0	-1	-1	155

I. Pri minimalizácii úloh LP je optimálne riešenie, ak v riadku ($c_j' - c_j$) sú len hodnoty nekladné (≤ 0), potom duálne riešenie je v tabuľke prípustné.

- ale primárne je neprípustné, potom ho treba zmeniť na prípustné,
- riešime DSM – volíme klúčový riadok $\Rightarrow x_1'$ - vyradovaná premenná

$$(\max \{|-80|, |-75|\} = -80)$$

a vyberieme $\min\{-3/-2, -2/-1\} = 3/2$, potom 1. stĺpec klúčový $\Rightarrow x_1$ – zaraďovaná premenná

$$\textcircled{-2} \quad \text{klúčový prvok}$$

x_1 – zaraďovaná premenná, tam jednotka, v ostatných políčkach nuly,

x_1' - vyradovaná premenná.

II. V stĺpci $\bar{b}$ je záporná hodnota (- 35), potom primárne riešenie je stále neprípustné, pokračujeme DSM;

- zvolíme klúčový riadok : (- 35), x_2' - vyradovaná premenná,
- klúčový stĺpec: $\min \{(-1/2)/(-1/2), (-3/2)/(-1/2)\}$, 2. stĺpec,

x_2 – zarad'ovaná premenná,

x_2' – vyrad'ovaná premenná.

III. V stĺpci $\bar{b}$ sú samé kladné hodnoty, potom primárne riešenie je prípustné, duálne riešenie ostalo prípustné, potom obe riešenia sú aj optimálne:

$$\bar{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1'^0 \\ x_2'^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{min} = 155$$

$$\bar{u}^0 = [u_1^0, u_2^0, u_1'^0, u_2'^0] = [-1, -1, 0, 0]$$

3.10 POSTOPTIMALIZAČNÉ ÚVAHY (POOPTIMALIZAČNÉ)

Sú to úvahy, ktoré robíme po vyriešení úlohy, t. j. po nájdení optimálneho riešenia.

- Zist'ujeme, čo by sa stalo s optimálnym riešením v prípade, ak by sa zmenili východiskové podmienky (údaje) na základe ktorých sme našli optimálne riešenie;
- zist'ujeme citlivosť výsledkov na zmenu východiskových údajov.

Zmeny vo východiskových údajoch pri postoptimalizačných úvahách

1. Zmeny v zložkách vektora $\bar{b}$, $\Delta \bar{b}$;

zmeníme na $\bar{b} + \Delta \bar{b}$.

2. Zmena vo vektore $\bar{c}$, $\Delta \bar{c}$, nový vektor $\bar{c} + \Delta \bar{c}$.

3. Zmena v prvkoch matice $\bar{A}$ o $\Delta \bar{A}$, zmena noriem spotreby: $\bar{A} + \Delta \bar{A}$.

Štúdiom týchto troch zmien sa zaoberá analýza senzitivity (citlivosti). Pozri napr.

S. I. Gass: Lineárne programovanie, str. 165.

4. Zmena v počte obmedzujúcich podmienok.

5. Zmena v počte procesov.

Majme úlohu LP:

$$\begin{aligned}\bar{c} \cdot \bar{x} &= \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} &\leq \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}\end{aligned}$$

Predpokladajme, že sme našli optimálne riešenie tejto úlohy $\bar{x}^o$ a optimálnu bázu $\bar{B}$, ktorá musí byť primárne i duálne prípustná:

$$\begin{aligned}\bar{x}^o &= \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} \geq \bar{0} \dots\dots\dots \text{primárne prípustné riešenie,} \\ \bar{u}^o &= [\bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A} - \bar{c} / \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1}] \geq \bar{0} \dots\dots \text{duálne prípustné riešenie.}\end{aligned}$$

Potom platí:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{opt} &= \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} \\ \bar{u} &= \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \\ z_{max} &= \bar{c} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}\end{aligned}$$

Uvažujme zmeny vo východiskových údajoch – postoptimalizačné úvahy:

1. $\bar{b}, \Delta \bar{b}; \bar{b} + \Delta \bar{b}$:

Zmena v zložkách vektora $\bar{b}$ môže ovplyvniť primárnu prípustnosť v báze, pri určitej zmene $\bar{b}$ prestane byť primárne prípustná, a tým prestane byť aj optimálna.

Treba nájsť novú bázu $\bar{B}$, ktorá bude optimálna aj vzhľadom na zmeny v zložkách vektora $\bar{b}$ (ak vôbec takáto optimálna báza existuje).

Robíme to tak, že v riešení ďalej pokračujeme DSM. Pretože na duálne riešenie zmena vektora $\bar{b}$ nemá vplyv, duálne riešenie ostalo prípustné, iba primárne riešenie prestalo byť prípustné.

Ak platí: $\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{b} + \Delta \bar{b}) \geq \bar{0}$, potom báza $\bar{B}$ ostane aj naďalej optimálnou bazou.

Ak to neplatí, čiže $\bar{B}^{-1} \cdot (\bar{b} + \Delta \bar{b}) \not\geq \bar{0}$, báza B prestane byť optimálnou bazou.

2. $\bar{c}, \Delta \bar{c}; \bar{c} + \Delta \bar{c}$:

Zmena v zložkách vektora $\bar{c}$ môže zapríčiniť, že pôvodná optimálna báza prestane byť duálne prípustná.

Na primárnu prípustnosť v báze nemá zmena v zložkách $\bar{c}$ vplyv.

Ak prestane byť báza $\bar{B}$ duálne prípustná, prejaví sa to tak, že v poslednom riadku ST sa objaví záporná hodnota. Pri hľadaní novej optimálnej bázy postupujeme ďalej SM.

$$[(\bar{c} + \Delta \bar{c}) \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A} - (\bar{c} + \Delta \bar{c}) / (\bar{c} + \Delta \bar{c}) \cdot \bar{B}^{-1}] \geq \bar{0},$$

- ak platí táto nerovnosť, pôvodná báza ostane optimálnou bázou;
- ak neplatí táto nerovnosť, potom pôvodná optimálna báza prestala byť optimálnou bázou (duálne prípustnou).

3. Príliš zložitá.

4. Zmena v novej obmedzujúcej podmienke, ktorú pridáme, $(m + 1)$..:

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n \leq b_{m+1}$$

- vyrovnáme na rovnicu: (prídavnou premennou x'_{m+1})

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n + x'_{m+1} = b_{m+1}$$

- pretransformujeme do pôvodnej optimálnej bázy:

$$a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \dots + a_{m+1,n}x_n + x'_{m+1} = \beta_{m+1}$$

Ak: $\beta_{m+1} \geq 0$, potom to znamená, že nová obmedzujúca podmienka nemá vplyv na optimálne riešenie.

Ak: $\beta_{m+1} < 0$, nová obmedzujúca podmienka ovplyvní riešenie, potom ju treba pridať k ostatným pôvodným a DSM pokračovať ďalej v riešení a nájsť nové optimálne riešenie, ak existuje (primárne riešenie už prestalo byť prípustné).

5. Zmena v počte procesov – úroveň procesu x_{n+1} :

- aby sme mohli proces pridať, musíme poznať vektor štruktúry $\bar{a}_{n+1}$ a cenu c_{n+1} , musíme poznať, resp. vypočítať rozdiel $(c'_{n+1} - c_{n+1})$;
- ak je $c'_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$, potom nový proces nemá význam pridávať. Ak by sme ho pridali, hodnota ÚF by sa nezlepšila;

- ak $c'_{n+1} - c_{n+1} < 0$, potom ak pridáme nový proces, hodnota ÚF sa zlepší, premenná x_{n+1} bude základnou premennou v optimálnom riešení:

$$c'_{n+1} = \bar{\bar{c}} \cdot \bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\bar{c}} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{a}_{n+1}$$

$$\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{a}_{n+1}$$

$\bar{a}_{n+1}$ transformovať do pôvodnej bázy, potom najprv vypočítať $\bar{\alpha}_{n+1}$.

Maticu $\bar{B}^{-1}$ musíme poznať, aby sme ju mohli použiť. Hľadáme ju v ST tam, kde je jednotková matica východiskového riešenia.

Príklad č. 3.5

Treba určiť, koľko výrobku V_1 a V_2 by sa malo vyrobiť za uvažované obdobie, aby sa maximalizovala hodnota odbytu.

Cena V_1 – 2 peňažné jednotky,

V_2 – 1 peňažná jednotka.

Na výrobu sa okrem iného spotrebúvajú dve suroviny S_1, S_2 .

Na V_1 sa spotrebuje $1S_1$ a $3S_2$,

V_2 sa spotrebuje $2S_1$ a $1S_2$.

V sledovanom období je k dispozícii 100 jednotiek S_1 ,

150 jednotiek S_2 .

Ostatné výrobné činitele má závod v sledovanom období k dispozícii v ľubovoľnom množstve.

Treba zostaviť LOM a nájsť optimálne riešenie.

Riešenie:

x_1, x_2 – výroba V_1 a V_2 .

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 100 && \dots S_1 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 150 && \dots S_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 0x_1' + 0x_2' &= \max \\
x_1 + 2x_2 + x_1' &= 100 \\
3x_1 + x_2 + x_2' &= 150 \\
x_1, x_2, x_1', x_2' &\geq 0
\end{aligned}$$

- zápis do ST:

„max“ SM

ZP	CZP	x_1	x_2	x_1'	x_2'	– b	
		2	1	0	0		
x_1'	0	1	2	1	0	100	
x_2'	0	3	1	0	1	150	/ .1/3
$c_j' - c_j$		-2	-1	0	0	0	
x_1'	0	0	5/3	1	-1/3	50	/ .3/5
x_1	2	1	1/3	0	1/3	50	
$c_j' - c_j$		0	-1/3	0	2/3	100	
x_2	1	0	1	3/5	-1/5	30	
x_1	2	1	0	-1/5	2/5	40	
$c_j' - c_j$		0	0	1/5	3/5	110	
x_2	1	0	1	3/5	-1/5	130	
x_1	2	1	0	-1/5	2/5	-10	DSM
$c_j' - c_j$		0	0	1/5	3/5	110	I.
x_2	1	3	1	0	1	100	
x_1'	0	-5	0	1	-2	50	
$c_j' - c_j$		1	0	0	1	100	II.

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1'^0 \\ x_2'^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_{max} = 110.$$

$$\bar{x}_{opt} = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \bar{B}_0, \text{ vektory pri základných premenných vo východiskovom riešení,}$$

$$\bar{B}^{-1}_{opt} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \quad - \text{ v optimálnom riešení.}$$

Záver: Aby závod za uvažované obdobie dosiahol vzhľadom na existujúce podmienky maximálnu hodnotu odbytu, musí vyrobiť $x_1 = 40$ ks V_1 ,
 $x_2 = 30$ ks V_2 .

Takáto výroba mu zaručí odbyt vo výške 110 peňažných jednotiek.

Postoptimalizačné úvahy k uvedenej úlohe

Ad 1) Predpokladajme, že v nasledujúcom období dodávateľ je ochotný dodať závodu o 150 jednotiek suroviny S_1 navyše, ale dodávky S_2 kráti o 50 jednotiek, zmení sa $\bar{b}$ o $\Delta\bar{b}$.

Vektorovo to znamená, že $\bar{b}$, ktorý sa rovnal:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}, \text{ sa zmení o } \Delta\bar{b} = \begin{bmatrix} 150 \\ -50 \end{bmatrix},$$

potom $\bar{b} + \Delta\bar{b}$.

Ide o to, zistiť, či závod v dôsledku zmien v disponibilných množstvách surovín má naďalej vyrábať oba výrobky a ak má, tak v akých množstvách (treba zistiť, či pôvodná báza ostane optimálna aj vzhľadom na túto zmenu).

Zmena v $\bar{b}$ ovplyvňuje primárnu prípustnosť (bázu), ak platí:

$$\bar{B}_o^{-1} = \bar{B}_{opt}^{-1} \cdot (\bar{b} + \Delta\bar{b}) \geq \bar{0}, \text{ potom báza } \bar{B}_o \text{ bude primárne prípustná a optimálna.}$$

Dosaďme:

$$\begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 150 \\ -50 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 130 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Podmienka nezápornosti nie je splnená, $-10 < 0$:

- pôvodná optimálna báza nie je vzhľadom na zmenu vo vektore $\bar{b}$ optimálna, lebo prestala byť primárne prípustná;
- z hľadiska vecnej interpretácie tzn., že závod nebude môcť vyrábať oba výrobky, ak chce dosiahnuť maximálnu hodnotu odbytu pri zmenených disponibilných zdrojoch surovín.

Novú optimálnu bázu, resp. nový výrobný sortiment, výrobný program zistíme tak (ak existuje), keď budeme ďalej pokračovať vo výpočte DSM v ST.

Riešenie:

$$\bar{b} + \Delta \bar{b} \text{ po transformácii: } \bar{B}_o^{-1} \cdot (\bar{b} + \Delta \bar{b}) = \begin{bmatrix} 130 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ ostatné odpíšeme z predchádzajúceho.}$$

I. – duálne riešenie – všetky hodnoty > 0 ;

- primárne riešenie – hodnota $-10 < 0$ – kľúčový riadok

(keby boli všetky hodnoty kladné, potom by neexistovalo riešenie, záporná hodnota $(-1/5)$, potom kľúčový stĺpec,

$-1/5$ – kľúčový prvok.

II. – primárne riešenie – všetky hodnoty > 0 ;

- duálne riešenie – všetky hodnoty > 0 ; potom optimálne riešenie a optimálna báza

$$\bar{x}_{opt}^1 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1^{10} \\ x_2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{max} = 100,$$

- optimálna báza: $\bar{B}_{opt} = \bar{B}_1 = [\bar{a}_2, \bar{a}_1] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Záver: Aby závod dosiahol maximálne možnú hodnotu odbytu pri zmenených množstvách surovín, nesmie vyrábať V_1 , musí vyrobiť len 100 ks V_2 a získa hodnotu odbytu 100 peňažných jednotiek.

Ad 2. Predpokladajme, že v ďalšom období sa zmení cena výrobku V_1 o 2 peňažné jednotky. Treba zistiť, aký vplyv bude mať táto zmena v cene výrobku V_1 na doterajší optimálny výrobný sortiment, čiže či naďalej závod má vyrábať len V_2 .

Riešenie:

Vektorovo $\bar{c} = [2, 1]$, $\Delta \bar{c} = [2, 0]$; $\bar{c} + \Delta \bar{c} = [4, 1]$.

Zmena v $\bar{c}$ ovplyvní duálne prípustnú bázu, na primárnu nemá vplyv.

Musíme prešetriť podmienku:

$$[\bar{c} + \Delta \bar{c}] \cdot \bar{B}_1^{-1} \cdot \bar{A} - (\bar{c} + \Delta \bar{c}) / (\bar{c} + \Delta \bar{c}) \cdot \bar{B}_1^{-1} \geq \bar{0},$$

ak platí táto nerovnosť, potom zmena v $\bar{c}$ nemá vplyv na pôvodnú optimálnu bázu.

Dosadíme: $\Delta \bar{c} = \bar{0}$:

$$\left[[1,0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - [4,1] / [1,0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right] = [-1,0 / 0,1] \leq 0,$$

potom báza $\bar{B}_1$ prestala byť optimálna, musíme určiť novú optimálnu bázu (ak existuje) pre zmenenú cenu;

- ďalej vo výpočte pokračujeme SM, pretože báza prestala byť duálne prípustná, čo sa prejavilo v ST tak, že v riadku $(c_j' - c_j)$ vznikla záporná hodnota.

Riešime v ST, keď sú tam už upravené ceny $\bar{c} + \Delta \bar{c}$ a tiež v riadku $(c_j' - c_j)$ podľa vypočítanej podmienky:

SM

	ZP	CZP	x_1	x_2	x_1'	x_2'	$-$	
			4	1	0	0	b	
I.	x_2	1	3	1	0	1	100	1/3
	x_1'	0	-5	0	1	-2	50	
II.	$c_j' - c_j$		-1	0	0	1	100	
III. DSM	x_1	4	1	1/3	0	1/3	100/3	
	x_1'	0	0	5/3	1	-1/3	650/3	
IV.	$c_j' - c_j$		0	1/3	0	4/3	400/3	x_3'
	x_3'	0	2	3	0	0	60	1
	x_3'	0	0	7/3	0	-2/3	-20/3	1
	x_1	4	1	3/2	0	0	30	1/2
	x_1'	0	0	1/2	1	0	220	-1/2
	$c_j' - c_j$		0	5	0	0	120	2
	x_2'	0	0	-7/2	0	1	10	-3/2

II. $(c_j' - c_j) \geq 0$, potom nové riešenie je optimálne

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} 100/3 \\ 0 \\ 650/3 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{max} = 400/3$$

$$\bar{B}_{opt} = \bar{B}_2 = [\bar{a}_1, \bar{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Záver: Vzhľadom na zmenu $\bar{c}$ treba zmeniť výrobný sortiment, a to nevyrábať V_2 , ale vyrobiť 100/3 V_1 . Pri tomto výrobnom programe bude hodnota odbytu 400/3 a 650/3 suroviny S_1 zostane nevyužitých. S_2 sa úplne využije.

Ad 3. Predpokladajme, že v ďalšom období obmedzil dodávateľ dodávky ďalšej suroviny S_3 a ochotný je dodávať iba 60 jednotiek tejto suroviny, kým predtým dodával ľubovoľné množstvo.

Musíme zistiť, či bude táto nová surovina úzkoprofilová, či ovplyvní pôvodnú optimálnu bázu. Jednotková surovina S_3 :

$$V_1 - 2 S_3$$

$$V_2 - 3 S_3 ,$$

potom nová obmedzujúca podmienka:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60 \quad \dots S_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3' = 60$$

potom transformácia do optimálnej bázy:

- pod ZP musíme zachovať jednotkové vektory, čo nie je zachované pod $x_1 \rightarrow 2$,

potom transformáciou (elementárnou úpravou).

III. $2 - 2 \cdot 1 = 0$ a ostatné tak isto

$$3 - 2 \cdot 1/3 = 7/3 \quad 0 - 2 \cdot 1/3 = -2/3$$

$$0 - 2 \cdot 0 = 0 \quad 60 - 2 \cdot 100/3 = -20/3$$

$\beta_2 = -20/3$, potom v stĺpci $\bar{b}$ záporná hodnota!

Z toho potom vyplýva, že nová obmedzujúca podmienka (resp. S_3) je úzkoprofilová a množstvo 60 jednotiek nestačí na realizáciu pôvodného optimálneho riešenia,

- musíme určiť nové optimálne riešenie – novú optimálnu bázu, vo výpočte pokračujeme DSM.

Za klúčový riadok volíme riadok v $\bar{b}$ so zápornou hodnotou, tu $-20/3 = x_3'$

(predposledný riadok vypúšťame, je bez transformácie):

- klúčový stĺpec $\left(-2/3\right)$ klúčový prvok.

IV. v stĺpci $\bar{b}$ nie je záporná hodnota, potom riešenie je optimálne:

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 220 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_1^{*0} \\ x_2^{*0} \\ x_3^{*0} \end{bmatrix}, z_{max} = 120$$

$$\bar{B}_{opt} = \bar{B}_3 = [\bar{a}_1, \bar{a}_1', \bar{a}_2'] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Záver: Obmedzenie v dodávkach S_3 na 60 jednotiek spôsobilo, že vzhľadom na maximalizáciu hodnoty odbytu treba vyrobiť 30 ks V_1 a V_2 nevyrábať, pri realizácii takeého výrobného programu zostane nevyužitých 220 S_1 a 10 S_2 , S_3 sa úplne spotrebuje.

Ad 4) Predpokladajme, že odberatelia žiadajú, aby závod vyrábal aj ďalší výrobok V_3 . Závod si musí prešetriť, či sa mu výroba V_3 oplatí vzhľadom na maximalizáciu odbytu a vzhľadom na výrobné podmienky, ktoré má.

Odbytová cena V_3 – 3 peňažné jednotky. Spotreba na $1V_3 = 1 S_1 + 2 S_2 + 1 S_3$.

Potom vektor štruktúry nového (tretieho) procesu:

$$\bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{cena } c_3 = 3.$$

Či zaradíme V_3 do výroby, o tom rozhodujeme podľa podmienky $c_3' - c_3 \geq 0$. Ak platí, potom zaradením V_3 do výroby sa hodnota odbytu nezväčší (nezlepší).

$$\underline{\text{Tu:}} \quad c_3' = \bar{c} \cdot \bar{B}_3^{-1} \cdot \bar{a}_3 = [4, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$c_3' - c_3 = 2 - 3 = -1 < 0$$

Z výsledku vyplýva, že V_3 treba vyrábať, ak chceme zvýšiť hodnotu odbytu:

- treba zistiť, koľko V_3 treba vyrábať, t. j. musíme vypočítať nové optimálne riešenie, novú optimálnu bázu;
- musíme $\bar{a}_3$ transformovať na $\bar{\alpha}_3$:

$$\bar{\alpha}_3 = \bar{B}_3^{-1} \cdot \bar{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

SM:

	ZP	CZP	x_1	x_2	x_1'	x_2'	b	x_3'	x_3
			4	1	0	0		0	3
I.	x_1	4	1	3/2	0	0	30	1/2	1/2
	x_1'	0	0	1/2	1	0	220	-1/2	1/2
	$c_j' - c_j$		0	(5)	0	0	120	2	-1
II.	x_2'	0	0	-7/2	0	1	10	-3/2	(1/2)
	x_1	4	1	5	0	-1	20	2	0
III.	x_1'	0	0	4	1	-1	210	1	0
	$c_j' - c_j$		0	-2	0	2	140	-1	0
	x_3	3	0	7	0	2	20	-3	1
IV.	x_2	1	1/5	1	0	-1/5	4	(2/5)	0
	x_1'	0	-4/5	0	1	-1/5	194	-3/5	0
	$c_j' - c_j$		2/5	0	0	8/5	148	-1/5	0
	x_3	3	7/5	0	0	3/5	48	-1/5	1
	x_3'	0	1/2	5/2	0	-1/2	10	1	0
	x_1'	0	-1/2	3/2	1	-1/2	200	0	0
	$c_j' - c_j$		1/2	1/2	0	3/2	150	0	0
	x_3	3	3/2	1/2	0	1/2	50	0	1

I. stĺpec x_3 bol vytvorený z transformovaných hodnôt $c_3' - c_3 = -1$ a $\bar{\alpha}_3$

$(c_j' - c_j) = -1 < 0$, potom nie je optimálne riešenie a

- klúčový stĺpec je pri x_3 ,

- klúčový riadok: $\min \{30 / (1/2); 220 / (1/2); 10 / (1/2)\}$,

$$\left(\frac{1}{2} \right) \quad - \text{klúčový prvok.}$$

II. $(c_j' - c_j) = -2, -1$, potom $|-2| > |-1|$, x_2 - klúčový stĺpec, $\min \{20/5; 210/4\}$: 1. riadok klúčový,

$$(5) \quad - \text{klúčový prvok.}$$

III. ďalšie základné riešenie: $(c_j' - c_j) = -1/5 < 0$, potom nie je optimálne riešenie:

x_3' - klúčový stĺpec, $\min \{4 / (2/5)\}$: klúčový riadok x_2 ,

$$\left(\frac{2}{5} \right) \quad - \text{klúčový prvok.}$$

IV. $(c_j' - c_j) \geq 0$, potom riešenie je optimálne:

$$\bar{x}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_1^{10} \\ x_2^{10} \\ x_3^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 200 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, z_{max} = 150,$$

$$\bar{B}_{opt} = \bar{B}_4 = [\bar{a}'_1, \bar{a}'_3, \bar{a}_3]$$

Záver: Aby sa dosiahla maximálna hodnota odbytu, treba vyrobiť 50 ks V_3 ; V_1 a V_2 nevyrábať.

Pri takomto výrobnom programe zostane nevyužitých 200 jednotiek S_1 , surovina S_2 sa úplne spotrebuje a zostane nevyužitých 10 jednotiek S_3 .

Z hľadiska metodológie operačnej analýzy predstavuje postoptimalizačná analýza mimoriadne významný nástroj, pretože umožňuje namiesto poznania jediného statického optimálneho riešenia analyzovať štruktúru systému a jeho správania, a preventívne tak ukázať následky zmien, ktoré pôsobia na ekonomický systém.

Tento postup pomáha manažmentu získať konkrétnejšiu predstavu o riziku určitých strategických rozhodnutí a o stupni dôvery, ktorú by mal do určitého rozhodnutia vkladať. Postoptimalizačná analýza je použiteľná v prípade modelov dobre štruktúrovaných problémov,

kedy vzťahy medzi vstupnými a výstupnými charakteristikami modelu sú obvykle jednoznačne určené (Smejkal, 2010).

3.11 PARAMETRICKÉ LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Pri postoptimalizačných úvahách sme uvažovali jednotlivé zmeny $\bar{b}, \bar{c}$. Pri parametrickom programovaní je $\bar{b}, \bar{c}$ funkciou nejakých premenných. Najjednoduchšie prípady parametrických úloh sú také, že $\bar{b}, \bar{c}$ sú lineárnymi funkciami iba jedinej premennej (parametra):

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \cdot t \\ \bar{b} &= \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \cdot t,\end{aligned}$$

kde:

t je parameter (premenná),

$\bar{c}_0, \bar{b}_0$ sú konštanty.

Okrem toho zmenám môžu podliehať aj prvky matice $\bar{A}$, avšak táto úloha nie je doteraz uspokojivo preskúmaná.

Môžeme zostaviť 2 základné úlohy:

1. **Primárna parametrická úloha** (parametrická ÚF, parametrizovaná ÚF primárnej úlohy):

$$\begin{aligned}(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t) \cdot \bar{x} &\stackrel{!}{=} \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} &\leq \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}\end{aligned}\tag{3.21}$$

2. **Duálne parametrická úloha**, má parametrizovanú ÚF duálnej úlohy, resp. parametrizovaný vektor $\bar{b}$:

$$\begin{aligned}\bar{c} \cdot \bar{x} &\stackrel{!}{=} \max \\ \bar{A} \cdot \bar{x} &\leq \bar{b}_0 + \bar{b}_1 t \\ \bar{x} &\geq \bar{0}\end{aligned}\tag{3.22}$$

- parameter t sa mení napr. v hraniciach: $t \in \langle t_0, t^0 \rangle$, (napr. zmena plánu v roku po mesiacoch 1 – 12);

- zistujeme, či existuje iba jedna optimálna báza (jedno optimálne riešenie) alebo viac;

- obyčajne interval $< t_0, t^0 >$ sa rozpadne na viacero intervalov, pre ktoré platí vždy iná optimálna báza;

- hranice intervalu majú dve optimálne bázy - jednu z jednej strany, druhú z druhej strany.

Ad 1. Primárne parametrická úloha:

$$t = < t_0, t^0 >$$

Môžu nastať tri prípady:

- úloha má optimálne riešenie (má aj optimálnu bázu);
- úloha nemá vôbec prípustné riešenie, potom ani optimálne riešenie;
- má prípustné riešenie, ale úloha nenadobúda konečný extrém.

$t = t_0$ a nájdime optimálnu bázu pre túto spodnú hranicu t_0 .

Musí platiť pre:

– primárnu prípustnosť: $\bar{B}_0^{-1} \cdot \bar{b} \geq \bar{0}$,

– duálnu prípustnosť:

$$[(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t) \cdot \bar{B}_0^{-1} \cdot \bar{A} - (\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t) / (\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t) \cdot \bar{B}_0^{-1}] \geq \bar{0}$$

$$\underbrace{[\bar{c}_0 \bar{B}_0^{-1} \bar{A} - \bar{c}_0]}_{\bar{\gamma}_0} + \underbrace{[\bar{c}_1 t \bar{B}_0^{-1} \bar{A} - \bar{c}_1 t]}_{\bar{\gamma}_1 \cdot t} / \underbrace{[\bar{c}_0 \bar{B}_0^{-1}]}_{\bar{\gamma}_0'} + \underbrace{[\bar{c}_1 t \bar{B}_0^{-1}]}_{\bar{\gamma}_1' \cdot t} \geq \bar{0}$$

$$\text{t.j.: } [\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1 \cdot t / \bar{\gamma}_0' + \bar{\gamma}_1' \cdot t] \geq \bar{0}.$$

Ak všetky zložky vektora $[\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1']$ budú kladné, potom $\bar{B}_0$ ostane optimálnou bázou pre akékoľvek $t \geq t_0$.

$$\text{Ak budú záporné: } t \leq \min \left\{ \frac{\gamma_{0i}}{-\gamma_{1i}} \right\},$$

$$\text{ak } \min \left\{ \frac{\gamma_{0i}}{-\gamma_{1i}} \right\} = \frac{\gamma_{02}}{-\gamma_{12}} = t_1, \text{ potom bude } \bar{B}_0 \text{ optimálnou bázou pre } t = < t_0, t_1 >.$$

Pre $t > t_1$ prestane byť $\bar{B}_0$ duálne prípustná, a tým aj optimálna. Prejaví sa to tak, že v druhom stĺpci vznikne v riadku $(c_j' - c_j)$ záporná hodnota.

Novú optimálnu bázu pre $t > t_1$ hľadáme tak, že pokračujeme v riešení SM.

Optimálna báza pre $t > t_1$ existuje vtedy, ak v stĺpci, kde v riadku $(c_j' - c_j)$ je záporná hodnota, sú aj kladné koeficienty.

Ak sú tam len koeficienty záporné a nulové, tzn., že pre $t > t_1$ optimálna báza neexistuje.

Ad 2. Duálne parametrická úloha:

$t = \langle t_0, t^\circ \rangle$:

Rovnako môžu nastať tri prípady.

Predpokladajme, že $\bar{B}_0$ je optimálna báza, potom musí platiť pre:

- primárnu prípustnosť: $\bar{B}_0^{-1}(\bar{b}_0 + \bar{b}_1 t) \geq \bar{0}$,
- duálnu prípustnosť: $[\bar{c} \cdot \bar{B}_0^{-1} \bar{A} - \bar{c} / \bar{c} \cdot \bar{B}_0^{-1}] \geq \bar{0}$.

Bude $\bar{B}_0$ platiť aj pre $t > t_0$?

Na duálnu prípustnosť „ t “ nemá vplyv len na primárnu prípustnosť, potom musí platiť:

$$\bar{B}_0^{-1}(\bar{b}_0 + \bar{b}_1 t) \geq \bar{0}.$$

úpravou:

$$\underbrace{\bar{B}_0^{-1} \bar{b}_0}_{\bar{\beta}_0} + \underbrace{\bar{B}_0^{-1} \bar{b}_1 t}_{\bar{\beta}_1} \geq \bar{0},$$

$$\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1$$

$$\bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 t \geq 0$$

- ak všetky zložky $\bar{\beta}_1$ budú nezáporné, potom $\bar{B}_0$ zostane optimálnou bázou pre akékoľvek $t > t_0$,
- ak zložky $\bar{\beta}_1$ sú záporné:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{01} + \beta_{11}t \geq 0 \\ \beta_{02} + \beta_{12}t \geq 0 \\ \dots \\ \beta_{0p} + \beta_{1p}t \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t \leq \min \left\{ \frac{\beta_{0i}}{\beta_{1i}} \right\}$$

Predpokladajme, že $\min \{ \beta_{0i} / \beta_{1i} \} = \beta_{02} / \beta_{12} = t_1$, t. zn., že $\bar{B}_0$ bude platiť (bude optimálne) pre $t = \langle t_0, t_1 \rangle$.

ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE

1. Vymedzte predmet LP.
2. Ako možno vecne formulovať optimalizačnú úlohu?
3. Vysvetlite význam grafického riešenia úloh LP.
4. Upresnite vlastnosti riešenia úloh LP.
5. Opíšte postup pri grafickom riešení úlohy.
6. Upravte matematický model pred riešením simplexovou metódou.
7. Upravte sústavu obmedzujúcich podmienok do kanonického tvaru.
8. Definujte kanonický tvar.
9. Definujte opornú priamku.
10. Vecne interpretujte prídavné a pomocné premenné.

Riešené príklady a príklady na precvičenie nájdete v literatúre: (Sakál, 2003), (Sakál, 1990), (Ivaničová, 2002) a (Ivaničová, 1999) a pod..

Literatúra k 3. kapitole

- [1] FAJMON, B. – KOLÁČEK, J. *Pravděpodobnost, statistika a operační výskum*. Elektronické skriptum FEKT VUT, Brno 2005.
- [2] GROS, I. *Kvantitativní metody v manažérském rozhodování*. Praha: Grada Publishing, 2003.
- [3] HANUŠ, F. – MOLNÁR, Z.- ŠTRPKA, A. *Operační a systémová analýza*. Praha: ČVUT, 1981.

- [4] IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačný výskum*. Bratislava: Iura Edition, 2002. 287 s. + 1 CD-ROM. - (Ekonomía).
- [5] IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*. Bratislava: Ekonóm, 1999.
- [6] JABLONSKÝ, J. *Programy pro matematické modelování*. Praha: VŠE, 2007.
- [7] KUBÁTOVÁ, J. *Kvantitativní manažerské metody*. Olomouc, 2000.
- [8] LANGOVÁ, M – JABLONSKÝ, J. *Lineární modely*. Praha: VŠE, 2009.
- [9] PLESNÍK, J. - DUPAČOVÁ, J. - VLACH, M. *Lineárne programovanie*. Bratislava: Alfa, 1990.
- [10] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra*. Trnava: SP SYNERGIA, 2003.
- [11] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra II*. Trnava: SP SYNERGIA, 2006.
- [12] SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza*. Bratislava: SVŠT, 1983.
- [13] SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza. Zbierka príkladov I*. Bratislava: SVŠT, 1990.
- [14] SMEJKAL, V. - RAIS, K. *Řízení rizik ve firmách a jiných organizacích*. Praha: Grada, 2009.
- [15] ZIMOLA, B. *Operační výskum*. Brno: VUT, 2000.

4. DISTRIBUČNÉ PROBLÉMY

Ciele

- charakteristika dopravných a priradovacích úloh,
- riešenie dopravných a priradovacích úloh vybranými metódami.

Distribučné problémy tvoria osobitnú časť úloh LP. Ich riešením sa získavajú podklady pre rozhodovanie o riadení dopravy v rámci podniku, medzi skladmi, resp. medzi výrobcami a spotrebiteľmi, pri priradovaní pracovníkov na pracoviská podľa ich profesie, pri lokalizácii výstavby nových výrobných alebo skladovacích kapacít, prípadne obchodných zariadení, atď.. Distribučné problémy, ktoré umožňujú riešiť úlohy spojené s rozvozom tovaru, patria medzi najpoužívanéjšie úlohy LP v praxi (Ivaničová, 2002).

4.1 METÓDY NA RIEŠENIE DOPRAVNÝCH ÚLOH

V dopravných úlohách ide o zostavenie **rozvrhu rozvozu** určitého množstva substrátu (surovín, kvapalín, súčiastok, polotovarov, hotových výrobkov, obalov, zásielok a pod.) z dodávateľských miest (zdrojov, od výrobcov, ...) k odberateľom, resp. spotrebiteľom. Cieľom je pritom nájsť taký rozvrh (spôsob, dopravný plán), ktorý je spojený s minimálnymi nákladmi na zabezpečenie tohto rozvozu.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať metódami, ktoré boli vyvinuté na riešenie úloh tohto typu.

4.1.1 Matematická formulácia dopravnej úlohy

Existuje m **dodávateľov** (miest výroby, skladov) $D_1, D_2, \dots, D_m$ a n **spotrebiteľov** (miest spotreby) $S_1, S_2, \dots, S_n$. **Kapacity dodávateľov** (množstvá určitého substrátu, ktoré sa nachádzajú u jednotlivých dodávateľov) sú $a_1, a_2, \dots, a_m$ a **požiadavky spotrebiteľov** (množstvá toho istého substrátu, ktoré požadujú jednotliví spotrebiteľia) sú $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Dopravné náklady od dodávateľa D_i ($i = 1, 2, \dots, m$) k spotrebiteľovi S_j ($j = 1, 2, \dots, n$) za jednotku množstva substrátu sú c_{ij} .

Úlohou je zostaviť taký plán prepravy (určiť množstvá x_{ij} , ktoré treba prepraviť od i -teho dodávateľa k j -temu spotrebiteľovi), aby požiadavky spotrebiteľov boli splnené (ak nie sú väčšie ako kapacity dodávateľov) a celkové dopravné náklady boli minimálne.

Dopravné náklady c_{ij} (tak ako sú tu zadefinované) sa tiež niekedy nazývajú **cený dopravy**. V skutočnosti môže ísť aj o vzdialenosti, ktoré je potrebné pri realizácii dodávky jednotkového množstva od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j prejsť (len v jednom smere alebo aj s uvažovaním návratu vyloženého dopravného prostriedku späť k dodávateľovi). Jednotkovým množstvom môže byť napríklad jedna dopravná dávka, ktorú možno naraz dopraviť jedným naloženým dopravným prostriedkom a množstvo x_{ij} potom bude počet dopravných dávok dopravených od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j v uvažovanom období. V tomto prípade bude cieľom minimalizovať súčet prejdených dopravných vzdialeností, čo však v konečnom dôsledku je opäť priamo úmerné dopravným nákladom.

V ďalších úvahách budeme **celkové dopravné náklady** Z , (rovnako ako aj **cený dopravy** c_{ij}) vyjadrovať v peňažných jednotkách a počítat' ich podľa vzťahu:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} .$$

V prípade **vyváženej úlohy** (bilancovanej) predpokladáme, že:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Postup v prípade nevyváženej úlohy bude popísaný neskôr.

Je zrejmé, že takto formulovaná úloha vychádza z mnohých skutočností, ktoré sa môžu vyskytnúť pri riešení reálnych úloh praxe. Napríklad:

- medzi jednotlivými miestami výroby a spotreby môže existovať viac ciest,
- jednotlivé cesty môžu mať ohraničenú priepustnosť,
- viac druhov substrátov môže byť prepravovaných viacerými typmi dopravy,

- závislosť ceny dopravy od prepravovaného množstva nemusí byť lineárna a často nie je ani spojitá a pod.

Každá z týchto skutočností vedie k zložitejšiemu modelu dopravy.

4.1.2 Spôsoby riešenia dopravnej úlohy

Dopravnú úlohu možno riešiť aj ako úlohu lineárneho programovania (Sakál, 2003). V tom prípade treba nájsť minimum funkcie: $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$,

pri vlastných obmedzeniach: $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$,

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

a podmienkach nezápornosti: $x_{ij} \geq 0$ pre $\forall i, j$.

Úlohu možno riešiť bežnými postupmi, teda napr. simplexovou metódou. Tento spôsob riešenia je však prácny a preto je vhodnejšie postupovať jednoduchšími spôsobmi, ktoré možno použiť vďaka špecifickému tvaru vlastných obmedzení.

Na riešenie dopravnej úlohy boli vyvinuté viaceré metódy, ktoré možno rozdeliť na:

- **metódy na získanie východiskového alebo vyhovujúceho riešenia,**
- **presné metódy.**

V každom prípade je výhodné znázorniť model dopravnej úlohy pomocou tabuľky (tabuľka 4.1) a pri ručnom riešení pomocou tejto tabuľky aj riešiť.

Tab. 4.1

		Spotrebitelia				Kapacity dodávateľov
		S_1	S_2	...	S_n	
Dodávateľia	D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
	D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
	:	:	:	:	:	:
	D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Požiadavky spotrebiteľov		b_1	b_2	...	b_n	

Použitie všetkých uvedených metód bude demonštrované na jednom príklade.

4.1.2.1 Metódy na získanie východiskového alebo vyhovujúceho riešenia

Dopravná úloha má vždy optimálne riešenie. V niektorých praktických prípadoch je však hľadanie tohto riešenia natoľko prácne, že riešiteľ sa uspokojí s rýchlejšie nájdeným riešením, ktoré je podľa neho „vyhovujúce“ alebo „dobré“, aj keď nemusí byť optimálne. Metódy, ktoré toto umožňujú, budú popísané ako **približné (aproximatívne) metódy**. Približné metódy umožňujú nájsť prípustné riešenie, ktoré môže byť v určitých prípadoch aj optimálnym riešením alebo aspoň riešením „blízkym“ optimálnemu riešeniu. Či je optimálne, treba overiť inými metódami. Ak optimálne nie je, možno v riešení pokračovať presnou metódou s tým, že na dosiahnutie optimálneho riešenia stačí urobiť menej krokov (iterácií). V tom prípade plní riešenie, získané približnou metódou, funkciu **východiskového riešenia**. Medzi približné metódy patrí napr. *indexová metóda*, *frekvenčná metóda*, alebo *Vogelova aproximačná metóda* (Sakál, 1983).

Niektoré presné metódy nevyhnutne potrebujú, aby bolo v prvom kroku nájdené ľubovoľné východiskové riešenie, ktoré je jedným z prípustných riešení úlohy. Toto môže byť získané aj bez toho, aby pri jeho hľadaní boli zohľadňované ceny dopravy od dodávateľov k spotrebiteľom. Jednou z rýchlych a jednoduchých metód, ktoré toto umožňujú, je **metóda severozápadného rohu**.

Použitie metódy severozápadného rohu bude demonštrované na príklade 4.1 priamo v rámci kapitoly obsahujúcej popis uvedenej metódy. Použitie približných metód bude demonštrované na príklade 4.2 uvedenom v kapitole 4.1.2.2, aby bolo možné výsledky riešenia jednotlivými približnými metódami porovnať navzájom a aj s výsledkami riešenia presnou metódou.

Metóda severozápadného rohu

Autorom **metódy severozápadného rohu** (podľa Charnesa a Coopera „metódy severozápadného uhla“) je G. B. Dantzig (Churchman, 1968). Ide o metódu na nájdenie východiskového riešenia.

Popis metódy - postup:

1. Riešenie sa začína v ľavom hornom poli tabuľky (odtiaľ je názov metódy), t.j. v poli premennej x_{11} . Toto pole sa obsadí maximálne možným množstvom, t.j.

$$x_{11} = \min(a_1, b_1).$$

2. Ak $x_{11} = a_1$, je vyčerpaná kapacita dodávateľa 1, polia vpravo od práve vyplneného poľa останú prázdne (príslušné $x_{1j} = 0$) a postupujeme do poľa premennej x_{21} . Ak $x_{11} = b_1$, je uspokojená požiadavka spotrebiteľa 1, polia pod práve vyplneným poľom останú prázdne (príslušné $x_{i1} = 0$) a postupujeme do poľa premennej x_{12} . Ak $x_{11} = a_1$ a súčasne $x_{11} = b_1$, je súčasne vyčerpaná kapacita dodávateľa 1 a uspokojená požiadavka spotrebiteľa 1, останú prázdne polia vpravo od vyplneného poľa aj pod ním a postupujeme do poľa premennej x_{22} (po uhlopriečke).

3. Pole premennej x_{ij} , do ktorého sme postúpili v predchádzajúcom kroku, obsadíme maximálne možným množstvom x_{ij} , t.j. čo najväčším množstvom x_{ij} , ale takým, aby platilo $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$

a zároveň $\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j$. Ak je vyčerpaná kapacita niektorého dodávateľa, t. j. $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$,

polia vpravo od práve vyplneného poľa останú neobsadené (príslušné $x_{ij} = 0$) a postupujeme do poľa pod práve vyplneným poľom. Ak je uspokojená požiadavka niektorého spotrebiteľa,

t.j. $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$, polia pod práve vyplneným poľom останú neobsadené (príslušné $x_{ij} = 0$)

a postupujeme do poľa vpravo od práve vyplneného poľa. Ak je súčasne vyčerpaná kapacita príslušného dodávateľa a uspokojená požiadavka príslušného spotrebiteľa, postupujeme (podobne ako v bode 2) do ďalšieho poľa po uhlopriečke.

4. Bod 3 postupu opakujeme, kým nie sú vyčerpané kapacity všetkých dodávateľov a uspokojené požiadavky všetkých spotrebiteľov.

Príklad č.4.1

Podnik zaregistroval dopyt po určitom výrobku v počte 1300 ks. Uvedený počet výrobkov môže vyrobiť v troch svojich závodoch, ktoré majú voľnú časť výrobnnej kapacity – závod 1 na výrobu 480 ks, závod 2 na 300 ks a závod 3 na 520 ks. Štyria odberatelia prejavili záujem o odber celého vyrobeného množstva – odberateľ 1 prejavil záujem o 230 ks, odberateľ 2 o 370 ks, odberateľ 3 o 600 ks a odberateľ 4 o 100 ks. Rozdiely v cenách dopravy medzi jednotlivými dvojicami závod – odberateľ sú zanedbateľné. Navrhните plán prepravy.

Riešenie

Keďže ceny dopravy nebudeme uvažovať, možno na zostavenie plánu dopravy použiť metódu severozápadného rohu. Závody označíme D_i (dodávatelia), odberateľov označíme S_j (spotrebitelia) a riešenie znázorníme v tabuľke:

	S_1	S_2	S_3	S_4	KD
D_1	230	250			480
D_2		120	180		300
D_3			420	100	520
PS	230	370	600	100	

Výsledok riešenia možno interpretovať tak, že zo závodu 1 bude dodaných 230 ks odberateľovi 1 a 250 ks odberateľovi 2, zo závodu 2 bude dodaných 120 ks odberateľovi 2 a 180 ks odberateľovi 3, zo závodu 3 bude dodaných 420 ks odberateľovi 3 a 100 ks odberateľovi 4.

Indexová metóda

Pri indexovej metóde postupujeme tak, že polia tabuľky zoradíme **vzostupne** podľa cien dopravy a postupne ich obsadzujeme maximálne možným množstvom x_{ij} pri rešpektovaní riadkových a stĺpcových čísiel, t.j. v každom kroku musia byť splnené podmienky:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \text{pre všetky } i = 1, 2, \dots, m$$

a

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad \text{pre všetky } j = 1, 2, \dots, n .$$

Pri rovnakých cenách dopravy vo viacerých poliach uprednostňujeme polia, ktoré možno obsadiť väčším množstvom. Či je získané riešenie optimálne, môžeme zistiť pomocou metódy riadkových a stĺpcových čísiel a ak nie je, môžeme touto metódou aj pokračovať v riešení.

Frekvenčná metóda

Pri frekvenčnej metóde berieme pri každom poli tabuľky do úvahy vzťah jeho ceny dopravy k ostatným cenám dopravy v príslušnom riadku a stĺpci. Čím je jeho cena dopravy v danom poli menšia ako priemerné ceny dopravy v príslušnom riadku a stĺpci, tým je pole výhodnejšie. Postupujeme takto:

- Vypočítame priemerné ceny dopravy v riadkoch r_i a stĺpcoch r_j :

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^n c_{ij}}{n} \qquad r_j = \frac{\sum_{i=1}^m c_{ij}}{m} .$$

- Každé pole ohodnotíme pomocnou sadzbou $s_{ij} = r_i + r_j - c_{ij}$, (môžeme ju zapisovať do ľavého dolného rohu polí).
- Polia tabuľky zoradíme **zostupne** podľa pomocnej sadzby a postupne ich obsadzujeme maximálne možným množstvom x_{ij} pri rešpektovaní riadkových a stĺpcových čísiel rovnako ako pri indexovej metóde.

Rovnako ako pri ostatných približných metódach môžeme zistiť pomocou metódy riadkových a stĺpcových čísiel, či je riešenie optimálne a ak nie je, môžeme touto metódou aj pokračovať v riešení.

Vogelova aproximačná metóda (VAM)

Pri metódach, ktoré vychádzajú zo zámeru obsadzovať najprv „najvýhodnejšie“ polia, sa môže stať, že po dosiahnutí okrajových hodnôt (vyčerpaní kapacít niektorých dodávateľov a splnení požiadaviek niektorých spotrebiteľov) možno obsadzovať už len polia, ktoré sú mimoriadne „nevýhodné“. Výhodou Vogelovej aproximačnej metódy je, že umožňuje obsadzovať polia so strednými sadzbami. Využíva sa pri tom nasledujúci postup:

1. V každom riadku a každom stĺpci vypočítame **absolútnu hodnotu rozdielu medzi najnižšou a najbližšou vyššou cenou dopravy R ($R \geq 0$)**. Ak je najnižšia cena dopravy v dvoch poliach, $R = 0$.
2. Zo všetkých hodnôt R (v riadkoch aj stĺpcoch) nájdeme najväčšiu a v príslušnom riadku alebo stĺpci obsadíme pole s najmenšou cenou dopravy maximálnym možným množstvom. Ak je viac rovnakých najväčších hodnôt R , uprednostníme pole s najmenšou cenou dopravy zo všetkých zodpovedajúcich riadkov alebo stĺpcov. Ak by bolo polí s rovnakou najmenšou cenou dopravy viac, vyberieme z nich ľubovoľné.
3. Množstvo, ktorým sme obsadili príslušné pole, odčítame od kapacity dodávateľa v príslušnom riadku a požiadavky spotrebiteľa v príslušnom stĺpci. Ak po odčítaní ostala niektorá z kapacít alebo požiadaviek nulová (vyčerpala sa okrajová hodnota), zapíšeme do neobsadených polí príslušného riadku alebo stĺpca nuly.
4. Opravíme rozdiely vypočítané v bode 1 tak, že pri výpočte už neuvažujeme ceny dopravy v obsadených poliach (ani v tých, ktoré sú obsadené nulami). Nové hodnoty R budú teda absolútne hodnoty rozdielov medzi najnižšou a najbližšou vyššou cenou dopravy v neobsadených poliach jednotlivých riadkov a stĺpcov.
5. Postup od bodu 2 opakujeme, kým nebudú obsadené všetky polia.
6. Získané riešenie môžeme považovať za konečné alebo rovnako ako pri ostatných približných metódach môžeme zistiť pomocou metódy riadkových a stĺpcových čísiel, či je optimálne a ak nie je, môžeme touto metódou aj pokračovať v riešení.

4.1.2.2 Presné metódy

Presné metódy umožňujú nájsť optimálne riešenie a overiť riešenie, či je riešením optimálnym, prípadne či je jediným optimálnym riešením.

Medzi presné metódy patrí napr. **metóda riadkových a stĺpcových čísiel** (nazývaná tiež **modifikovaná metóda** alebo **metóda potenciálov**). Možno ju použiť aj na overenie optimálnosti riešení získaných niektorou z približných metód. Riešenie sa začína nájdením východiskového riešenia. Túto metódu popíšeme podrobnejšie.

Ďalšou presnou metódou je tzv. **maďarská metóda**, vyvinutá Kuhnom, ktorý vychádzal z prác maďarského matematika Egerváryho (Laščiak, 1990). Jednou z jej výhod je, že nereaguje na degeneráciu, a preto ju možno použiť aj na riešenie *degenerovaných úloh*.

Dopravnú úlohu možno riešiť aj **metódou vetvenia a hraníc** (Walter, 1989). Riešenie dopravnej úlohy touto metódou však nie je veľmi efektívne, preto tu postup riešenia neuvedieme.

Metóda riadkových a stĺpcových čísiel – Modifikovaná metóda

Popis metódy - postup:

Na riešenie možno použiť tabuľku 4.1 doplnenú o stĺpec, do ktorého budeme zapisovať tzv. **riadkové čísla** u_i a riadok, do ktorého budeme zapisovať tzv. **stĺpcové čísla** v_j .

Riešenie sa začína nájdením východiskového riešenia (napr. metódou severozápadného rohu alebo niektorou z približných metód) a pokračuje v krokoch až po nájdenie optimálneho riešenia – optimálneho plánu prepravy (resp. optimálnych riešení). V každom kroku sa nájdené prípustné riešenie ohodnotí – zistí sa, či je optimálne a ak nie je, hľadá sa ďalšie – „lepšie“ prípustné riešenie. Riešenie môže pokračovať aj po nájdení optimálneho riešenia, ak sa zistí, že optimálnych riešení je viac a treba nájsť aj ostatné optimálne riešenia. V tom prípade sa hľadajú ďalšie – „nie horšie“ prípustné riešenia.

Pri zisťovaní, či je nájdené riešenie optimálne, postupujeme nasledovne:

- Za jedno z riadkových alebo stĺpcových čísiel dosadíme hodnotu 0 (zapišeme ju do tabuľky do stĺpca u_i alebo v_j). Je vhodné vybrať to riadkové alebo stĺpcové číslo, ktoré je v riadku

alebo stĺpci s najväčším počtom obsadených polí (s najväčším počtom nenulových hodnôt x_{ij}), čo však nie je nevyhnutné.

- Ostatné riadkové a stĺpcové čísla určíme tak, aby pre obsadené polia platilo:

$$c_{ij} = u_i + v_j.$$

- Pre všetky neobsadené polia vypočítame rozdiely $(u_i + v_j) - c_{ij}$ a zapíšeme ich do ľavých dolných rohov príslušných polí. V prípade, že sú tieto rozdiely záporné, stačí zapísať len znamienko „-“.
- Ak sú všetky rozdiely záporné, je nájdené riešenie optimálne. Ak je niektorý rozdiel kladný, riešenie nie je optimálne. Ak je niektorý rozdiel „0“ a žiaden nie je kladný, má úloha viac optimálnych riešení a nájdené riešenie je jedno z nich. Ak je jeden nulový rozdiel, úloha má spravidla 2 optimálne riešenia, ak sú nulové rozdiely 2, optimálne riešenia budú 4, atď.

Poznámka: Ak počet obsadených polí je menší ako $m + n - 1$, nie je možné určiť riadkové a stĺpcové čísla, a teda ani overiť optimálnosť nájdeného riešenia (aj keď môže byť optimálne). V tom prípade hovoríme, že úloha je **degenerovaná** a ďalší postup v takom prípade bude popísaný neskôr.

Pri hľadaní ďalšieho – „lepšíeho“ resp. „nie horšieho“ riešenia postupujeme takto:

- Do tabuľky zakreslíme lomenou čiarou uzavretý okruh, ktorý vychádza z neobsadeného poľa s najväčšou hodnotou vypočítaného rozdielu $(u_i + v_j) - c_{ij}$ (v prípade hľadania ďalšieho optimálneho riešenia z poľa s nulovým rozdielom), mení smer v pravom uhle len v obsadených poliach a končí sa v neobsadenom poli z ktorého vychádzal. Vodorovné a zvislé úsečky tvoriace okruh môžu prechádzať (bez zmeny smeru) aj cez iné obsadené alebo neobsadené polia. Vždy možno nájsť len jediný takýto okruh.
- Polia, v ktorých okruh mení smer, označíme striedavo znamienkami $\oplus$ a $\ominus$, pričom začíname so znamienkom $\oplus$ v neobsadenom poli.
- Nájdeme najmenšiu hodnotu x_{ij} zo všetkých hodnôt x_{ij} v poliach označených znamienkom $\ominus$ a túto hodnotu pripočítame k pôvodným hodnotám x_{ij} v poliach označených znamienkom $\oplus$ a odčítame ju od pôvodných hodnôt x_{ij} v poliach označených znamienkom $\ominus$. Vypočítané

nové hodnoty, ako aj tie, ktoré neboli zmenené, zapíšeme do novej tabuľky, ktorá bude predstavovať nové prípustné riešenie. Toto riešenie môžeme opäť overiť, či je optimálne.

Poznámka 1: Uvedeným postupom dosiahneme to, že pôvodne neobsadené pole bude obsadené množstvom zodpovedajúcim minimálnej hodnote x_{ij} z polí označených znamienkom $\ominus$. Toto množstvo vynásobené maximálnym rozdielom, zapísaným v ľavom dolnom rohu obsadzovaného poľa udáva, o koľko je nové prípustné riešenie „lepšie“ ako predchádzajúce (o koľko sú celkové dopravné náklady z nového riešenia nižšie ako celkové dopravné náklady predchádzajúceho riešenia).

Poznámka 2: Odčítaním minimálnej hodnoty x_{ij} ostane najmenej jedno z pôvodne obsadených polí neobsadené. Ak by z pôvodne obsadených polí ostalo neobsadených polí viac (rovnaká minimálna hodnota x_{ij} by bola vo viacerých poliach označených znamienkom $\ominus$), klesol by počet obsadených polí pod $m + n - 1$ a nové prípustné riešenie by bolo degenerované.

Príklad č.4.2

Príklad nadväzuje na príklad 4.1. Rovnako ako v príklade 4.1 sú z troch závodov s výrobnými kapacitami 480, 300 a 520 ks dopravované výrobky štyrom odberateľom s požiadavkami 230, 370, 600 a 100 ks. Rozdiel je v tom, že sú známe ceny dopravy jednotkového množstva (t.j. jedného výrobku) z i -teho závodu k j -temu odberateľovi. Sú uvedené v nasledujúcej tabuľke (v peňažných jednotkách – p.j.):

Ceny dopravy	S_1	S_2	S_3	S_4
D_1	15	10	9	7
D_2	12	13	10	8
D_3	4	11	11	3

Treba zostaviť taký plán prepravy, ktorý minimalizuje celkové dopravné náklady.

Riešenie metódou riadkových a stĺpcových čísiel

Ako východiskové riešenie použijeme prípustné riešenie získané v rámci riešenia príkladu 4.1 metódou severozápadného rohu (je uvedené v tabuľke označenej 0.krok). Tabuľku doplníme o stĺpec riadkových čísiel a riadok stĺpcových čísiel. Za u_1 dosadíme hodnotu 0 a vypočítame hodnoty ostatných riadkových a stĺpcových čísiel. Vypočítame rozdiely $(u_i + v_j) - c_{ij}$ a zapíšeme ich do ľavých dolných rohov neobsadených polí. Riešenie nie je optimálne, pretože niektoré rozdiely sú kladné. Najväčší z rozdielov má hodnotu 15 a je v poli premennej x_{31} . Cez toto pole vytvoríme uzavretý okruh a polia, v ktorých mení smer, označíme striedavo znamienkami $\oplus$ a $\ominus$.

0.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 230 $\ominus$	10 250 $\oplus$	9 — —	7 — —	480	0
D_2	12 6 $\oplus$	13 120 $\ominus$	10 180 $\oplus$	8 — —	300	3
D_3	4 15 $\oplus$	11 3 $\ominus$	11 420 $\ominus$	3 100 —	520	4
PS	230	370	600	100		
v_j	15	10	7	-1		

Najmenšou hodnotou x_{ij} v poliach označených $\ominus$ je hodnota 120. Túto hodnotu odčítame od hodnôt x_{ij} v poliach označených znamienkom $\ominus$ a pripočítame ju k hodnotám x_{ij} v poliach označených znamienkom $\oplus$. Výsledok zapíšeme do novej tabuľky. Tá predstavuje nové prípustné riešenie, ktorého celkové dopravné náklady by mali byť menšie o hodnotu $\Delta Z = 15 \cdot 120 = 1800,-$ p.j. Možno sa o tom presvedčiť aj tak, že vypočítame celkové dopravné náklady riešenia získaného metódou severozápadného rohu Z_0 (v predchádzajúcej tabuľke) a celkové dopravné náklady riešenia získaného v prvom kroku metódou riadkových a stĺpcových čísiel Z_1 (v nasledujúcej tabuľke):

$$Z_0 = 15 \cdot 230 + 10 \cdot 250 + 13 \cdot 120 + 10 \cdot 180 + 11 \cdot 420 + 3 \cdot 100 = 14230 \text{ p. j.}$$

$$Z_1 = 15 \cdot 110 + 10 \cdot 370 + 10 \cdot 300 + 4 \cdot 120 + 11 \cdot 300 + 3 \cdot 100 = 12430 \text{ p. j.}$$

Nové prípustné riešenie, zapísané do nasledujúcej tabuľky, overíme podobne ako v predchádzajúcom kroku. Ak nebude jediným optimálnym riešením, bude východiskovým

riešením pre ďalší krok postupu. Tak postupujeme až do nájdenia optimálneho riešenia. Po každom kroku možno vypočítať aj celkové dopravné náklady jednotlivých prípustných riešení.

1.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 110 (-)	10 370	9 13 (+)	7 7	480	11
D_2	12 -	13 -	10 300	8 -	300	-1
D_3	4 120 (+)	11 -	11 300 (-)	3 100	520	0
PS	230	370	600	100		
v_j	4	-1	11	3		

2.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 -	10 370 (-)	9 110 (+)	7 -	480	9
D_2	12 -	13 -	10 300	8 -	300	10
D_3	4 230	11 1 (+)	11 190 (-)	3 100	520	11
PS	230	370	600	100		
v_j	-7	1	0	-8		

$$Z_2 = 10 \cdot 370 + 9 \cdot 110 + 10 \cdot 300 + 4 \cdot 230 + 11 \cdot 190 + 3 \cdot 100 = 11000 \text{ p.j.}$$

opt.	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 -	10 180	9 300	7 -	480	-1
D_2	12 -	13 -	10 300	8 -	300	0
D_3	4 230	11 190	11 -	3 100	520	0
PS	230	370	600	100		
v_j	4	11	10	3		

Posledné prípustné riešenie (uvedené v tabuľke označenej „opt.“) je zároveň riešením optimálnym. Vzhľadom na to, že žiaden rozdiel v ľavom dolnom rohu neobsadených polí nie je

nulový, ide o jediné optimálne riešenie. Výsledok riešenia možno interpretovať tak, že zo závodu 1 bude dodaných 180 ks odberateľovi 2 a 300 ks odberateľovi 3, zo závodu 2 bude dodaných všetkých 300 ks odberateľovi 3 a zo závodu 3 bude dodaných 230 ks odberateľovi 1, 190 ks odberateľovi 2 a 100 ks odberateľovi 4. Hodnota celkových dopravných nákladov je:

$$Z_{opt} = 10 \cdot 180 + 9 \cdot 300 + 10 \cdot 300 + 4 \cdot 230 + 11 \cdot 190 + 3 \cdot 100 = 10810 \text{ p.j.}$$

Riešenie indexovou metódou

Zoradíme vzostupne ceny dopravy:

$$c_{34} < c_{31} < c_{14} < c_{24} < c_{13} < c_{12} = c_{23} < c_{32} = c_{33} < c_{21} < c_{22} < c_{11} .$$

Pole premennej x_{34} obsadíme množstvom $x_{34} = 100$, čo je $\min(100, 520)$. Tým je uspokojená požiadavka spotrebiteľa S_4 a ďalšie polia v stĺpci tohto spotrebiteľa ostanú neobsadené. Druhým obsadzovaným poľom bude pole premennej x_{31} , ktoré obsadíme množstvom $x_{31} = 230$. Pole premennej x_{14} nemožno obsadzovať, pretože požiadavka spotrebiteľa S_4 je už uspokojená. Takto postupne prejdeme všetky polia. Dosiahnuté riešenie je uvedené v nasledujúcej tabuľke.

	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 –	10 $\oplus$ 2 13 180 $\ominus$	9 $\ominus$ 480 10 120 $\oplus$	7 –	480	1
D_2	12 –	11 190	11 –	8 –	300	2
D_3	4 230	11 190	11 –	3 100	520	0
PS	230	370	600	100		
v_j	4	11	8	3		

Riešenie nie je optimálne. Celkové dopravné náklady sú $Z = 11170$ p.j. Metódou riadkových a stĺpcových čísiel sa možno dostať v jednom kroku k riešeniu, ktoré je uvedené v nasledujúcej tabuľke. Toto riešenie už je optimálne a $Z = 10810$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 –	10 180	9 300	7 –	480	–1
D_2	12 –	13 –	10 300	8 –	300	0
D_3	4 230	11 190	11 –	3 100	520	0
PS	230	370	600	100		
v_j	4	11	10	3		

Riešenie frekvenčnou metódou

Vypočítame priemerné ceny dopravy v riadkoch a stĺpcoch a zapíšeme ich do tabuľky. Pre všetky polia vypočítame pomocné sadzby a zapíšeme ich do ľavých dolných rohov polí tabuľky. Pomocné sadzby zoradíme zostupne:

$$s_{31} > s_{12} > s_{13} > s_{23} > s_{34} > s_{14} > s_{21} = s_{22} > s_{24} > s_{32} > s_{33} > s_{11} .$$

Pole premennej x_{31} obsadíme množstvom $x_{31} = 230$, čo je min (230, 520). Tým je uspokojená požiadavka spotrebiteľa S_1 . Potom obsadíme pole premennej x_{12} množstvom $x_{12} = 370$, atď. Výsledok riešenia pomocou frekvenčnej metódy je v nasledujúcej tabuľke.

	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	r_i
D_1	15 5,6	10 370 11,6	9 110 11,3	7 9,3	480	10,25
D_2	12 9,1	13 9,1	10 300 10,8	8 8,8	300	10,75
D_3	4 230 13,8	11 7,6	11 190 6,3	3 100 10,3	520	7,25
PS	230	370	600	100		
r_j	10,33	11,33	10	6		

Celkové dopravné náklady tohto riešenia sú $Z = 11170$ p. j.

Dosiahnuté riešenie je rovnaké ako jedno z riešení v postupnosti prípustných riešení príkladu získaných metódou riadkových a stĺpcových čísiel (v tabuľke označenej „2.krok“). Z toho vyplýva, že nie je optimálne, ale k optimálnemu riešeniu sa možno dostať štandardným postupom v rámci jedného kroku.

Riešenie Vogelovou aproximačnou metódou

Príklad budeme riešiť v nasledujúcej tabuľke.

	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	R
D_1	15 0	10 180	9 300	7 0	480, 180	2, 1
D_2	12 0	13 0	10 300	8 0	300, 0	2, 3
D_3	4 230	11 190	11 0	3 100	520, 290, 190	1, 8, 0
PS	230, 0	370	600, 300, 0	100, 0		
R	8	1	1, 2	4		

V prvom kroku vypočítame hodnoty R (v riadkoch: 2, 2, 1 a v stĺpcoch: 8, 1, 1, 4). Najväčšia hodnota (8) je v stĺpci spotrebiteľa S_1 . V tomto stĺpci je najmenšia cena dopravy $c_{31} = 4$. Do poľa s touto cenou dopravy zapíšeme hodnotu $x_{31} = 230 = \min(a_3, b_1)$ a túto hodnotu odčítame od kapacity dodávateľa D_3 $520-230=290$) a od požiadavky spotrebiteľa S_1 ($230-230=0$). Do ostatných polí prvého stĺpca zapíšeme nuly, pretože požiadavka spotrebiteľa S_1 je splnená. Opravíme rozdiely R (v riadkoch: 2, 2, 8 a v stĺpcoch: $\emptyset$, 1, 1, 4, pretože v prvom stĺpci sú už všetky polia obsadené). Najväčšia hodnota (8) je v riadku dodávateľa D_3 . Do poľa s cenou dopravy $c_{34} = 3$ zapíšeme hodnotu $x_{34} = 100 = \min(100, 290)$ a túto hodnotu odčítame od kapacity dodávateľa D_3 ($290-100=190$) a od požiadavky spotrebiteľa S_4 ($100-100=0$). Do ostatných polí štvrtého stĺpca zapíšeme nuly, pretože požiadavka spotrebiteľa S_4 je splnená. Opäť opravíme rozdiely R (v riadkoch: 1, 3, 0 a v stĺpcoch: $\emptyset$, 1, 1, $\emptyset$, pretože v prvom a štvrtom stĺpci sú už všetky polia obsadené). Najväčšia hodnota (3) je v riadku dodávateľa D_2 . Do poľa s cenou dopravy $c_{23} = 10$ zapíšeme hodnotu $x_{23} = 300 = \min(300, 600)$ a túto hodnotu odčítame od kapacity dodávateľa D_2 ($300-300=0$) a od požiadavky spotrebiteľa S_3 ($600-300=300$). Do ostatných polí druhého riadku zapíšeme nuly, pretože kapacita dodávateľa D_2 je vyčerpaná.

Opravíme rozdiely R (v riadkoch: 1, $\emptyset$, 0 a v stĺpcoch: $\emptyset$, 1, 2, $\emptyset$). Najväčšia hodnota (2) je v stĺpci spotrebiteľa S_3 . Do pol'a s cenou dopravy $c_{13} = 9$ zapíšeme hodnotu $x_{13} = 300 = \min(480, 300)$ a túto hodnotu odčítame od kapacity dodávateľa D_1 ($480-300=180$) a od požiadavky spotrebiteľa S_3 ($300-300=0$). Do ostatných polí tretieho stĺpca zapíšeme nuly, pretože požiadavka spotrebiteľa S_3 je splnená. Zvyšné množstvá možno umiestniť len jediným spôsobom: $x_{12} = 180$ a $x_{32} = 190$.

Metódou riadkových a stĺpcových čísiel by sme zistili, že nájdené riešenie je optimálne s hodnotou celkových dopravných nákladov $Z = 10810$ p.j. (je totožné s riešením uvedeným v tabuľke optimálneho riešenia v príklade 4.2).

Poznámka: Skúsenosti s používaním uvedených troch približných metód hovoria, že k „najlepším“ výsledkom (riešeniu „najbližšiemu“ k optimálnemu riešeniu) väčšinou vedie metóda VAM. Indexová metóda, ktorá je z uvedených troch metód najmenej prácna, umožňuje získať riešenie, ktoré býva od optimálneho „najvzdialenejšie“. Toto sa potvrdilo aj riešením príkladu 4.2 uvedenými metódami. Riešenie získané metódou VAM bolo optimálne s hodnotou celkových dopravných nákladov $Z = 10810$ p.j. Riešenie získané frekvenčnou metódou nebolo optimálne a hodnota celkových dopravných nákladov tohto riešenia bola $Z = 11000$ p.j. (optimálne riešenie bolo možné dosiahnuť metódou riadkových a stĺpcových čísiel v jednom kroku). Riešenie získané indexovou metódou tiež nebolo optimálne, ale hodnota celkových dopravných nákladov bola $Z = 11170$ p.j., čo je viac ako pri frekvenčnej metóde (optimálne riešenie bolo tiež možné dosiahnuť metódou riadkových a stĺpcových čísiel v jednom kroku).

4.1.3 Degenerácia

Počas riešenia dopravnej úlohy metódou riadkových a stĺpcových čísiel môže nastať situácia, keď nie je možné overiť, či získané riešenie je optimálne, pretože nie je možné vypočítať riadkové a stĺpcové čísla. Stane sa to vtedy, keď je počet nenulových premenných x_{ij} (t.j. počet obsadených polí) menší ako $m + n - 1$. Táto situácia môže nastať (ale nemusí) napr. vtedy, ak sa súčet kapacít čiastkového súboru dodávateľov rovná súčtu požiadaviek čiastkového súboru spotrebiteľov. Aby sme v takom prípade mohli pokračovať v riešení, musíme degeneráciu aspoň fiktívne odstrániť. Uvedieme dve možnosti, ako to urobiť:

Prvý spôsob predpokladá, že sa počet obsadených polí zvýši na $m + n - 1$ zapísaním potrebného počtu núl (hodnôt „0“) do niektorých neobsadených polí a ďalej sa bude s týmito poliami narábať ako s poliami obsadenými. Nulami ale možno prázdne polia obsadzovať len tak, aby medzi obsadenými poliami nevznikol uzavretý okruh.

Po zvýšení počtu obsadených polí na $m + n - 1$ sa možno presvedčiť, či je riešenie optimálne. Avšak ani splnenie uvedenej podmienky pri obsadzovaní polí nulami nezabezpečí, že nové riešenie získané v ďalšom kroku, bude „lepšie“, pretože sa môže stať, že najmenšou hodnotou v poliach označených znamienkom $\ominus$ bude práve použitá nula, ktorá sa bude pripočítavať a odčítavať. Nové riešenie nebude „lepšie“, ale bude iné (s inou polohou nuly) a v ďalšom kroku sa možno dostať k riešeniu, ktoré už možno bude „lepšie“. Vhodným umiestnením nuly sa teda dá dostať k optimálnemu riešeniu menším počtom krokov.

Príklad č. 4.3

Príklad nadväzuje na príklad 4.2. Kapacity závodov sú rovnaké ako v príklade 4.2, t.j. 480, 300 a 520 ks. Nemenia sa ani ceny dopravy. Požiadavky štyroch odberateľov sú ale iné – 230, 250, 720 a 100 ks. Treba zostaviť taký plán prepravy, ktorý minimalizuje celkové dopravné náklady.

Riešenie

Úloha je vyvážená – súčet kapacít závodov sa rovná súčtu požiadaviek odberateľov. Východiskové riešenie získame metódou severozápadného rohu. Zistíme, že toto riešenie obsahuje len 5 nenulových premenných, pričom $m + n - 1 = 6$ (nebolo by možné vypočítať riadkové a stĺpcové čísla). Preto umiestnime napr. do pol'a premennej x_{22} nulu. (Nulu nemôžeme umiestniť do pol'a premennej x_{24} , pretože by sa medzi obsadenými poliami dal vytvoriť uzavretý okruh.) Ďalej postupujeme ako v predchádzajúcom príklade. Zistíme, že riešenie nie je optimálne, preto pokračujeme hľadaním nového riešenia.

0.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	$\ominus$ 15 230	$\oplus$ 10 250	9 –	7 –	480	0
D_2	12 6	13 $\ominus$ 0	$\oplus$ 10 300	8 –	300	3
D_3	$\oplus$ 4 15	11 3	11 $\ominus$ 420	3 100	520	4
PS	230	250	720	100		
v_j	15	10	7	–1		

Nové riešenie sa bude od predchádzajúceho odlišovať len umiestnením nuly:

1.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	$\ominus$ 15 230	10 250	$\oplus$ 9 13	7 7	480	11
D_2	12 –	13 –	10 300	8 –	300	–1
D_3	4 0	11 $\oplus$ –	11 $\ominus$ 420	3 100	520	0
PS	230	250	720	100		
v_j	4	–1	11	3		

Nasledujúce riešenie bude „lepšie“ o hodnotu $\Delta Z = 13 \cdot 230 = 2990$ p.j. a nebude obsahovať nulu, pretože obsahuje 6 nenulových premenných:

2.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 –	10 250 $\ominus$	9 230 $\oplus$	7 –	480	–2
D_2	12 –	13 –	10 300	8 –	300	–1
D_3	4 230	11 $\oplus$ 1	11 190 $\ominus$	3 100	520	0
PS	230	250	720	100		
v_j	4	12	11	3		

Nasledujúce riešenie je „lepšie“ o hodnotu $\Delta Z = 190$,- p. j. a je to jediné optimálne riešenie.

Celkové dopravné náklady tohto riešenia budú:

$$Z_{opt} = 10 \cdot 60 + 9 \cdot 420 + 10 \cdot 300 + 4 \cdot 230 + 11 \cdot 190 + 3 \cdot 100 = 10690 \text{ p. j.}$$

opt.	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 –	10 60	9 420	7 –	480	–1
D_2	12 –	13 –	10 300	8 –	300	0
D_3	4 230	11 190	11 –	3 100	520	0
PS	230	250	720	100		
v_j	4	11	10	3		

Druhý spôsob riešenia v prípade degenerácie vychádza z nasledujúcej úpravy. Kapacity niektorých dodávateľov (spotrebiteľov) zväčšíme o veľmi malé číslo ε a kapacity iných dodávateľov (spotrebiteľov) o to isté číslo zmenšíme. Súčet kapacít dodávateľov (požiadaviek spotrebiteľov) však musí ostať nezmenený. Prechodom na $\lim \varepsilon = 0$ dostaneme z optimálneho riešenia upravenej úlohy optimálne riešenie pôvodnej degenerovanej úlohy. Položiť $\varepsilon = 0$ môžeme aj v priebehu riešenia, ak bude počet nenulových premenných dostatočný. Dodávateľ (spotrebiteľ), ktorému zväčšíme kapacitu (požiadavku) by nemal patriť do toho istého čiastkového súboru dodávateľov (spotrebiteľov) ako dodávateľ (spotrebiteľ), ktorému kapacitu (požiadavku) znížime.

Príklad č.4.4

Zadanie príkladu je rovnaké ako zadanie príkladu 4.3.

Riešenie

Pri hľadaní východiskového riešenia metódou severozápadného rohu zistíme, že úloha je degenerovaná. Preto sa pokúsime túto degeneráciu odstrániť tak, že kapacitu dodávateľa D_1 zväčšíme o hodnotu ε a kapacitu dodávateľa D_2 o rovnakú hodnotu zmenšíme. (Jednu čiastkovú skupinu dodávateľov predstavuje dodávateľ D_1 , pretože jeho kapacita je rovnaká ako súčet požiadaviek spotrebiteľov S_1 a S_2 a do druhej čiastkovej skupiny dodávateľov patria dodávateľa

D_2 a D_3 , pretože súčet ich kapacít sa rovná súčtu požiadaviek spotrebiteľov S_3 a S_4). Po tejto úprave opäť nájdeme východiskové riešenie metódou severozápadného rohu.

0.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD	u_i
D_1	15 230 $\ominus$	10 250	9 $\oplus$ ε	7 –	$480+\varepsilon$	0
D_2	4	12 –	13 300– ε	10 –	$300-\varepsilon$	1
D_3	13 $\oplus$	4 1	11 $\ominus$	11 100	3 520	2
PS	230	250	720	100		
v_j	15	10	9	1		

Riešenie nájdene metódou severozápadného rohu nie je optimálne, preto nájdeme metódou riadkových a stĺpcových čísiel nové riešenie:

1.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	KD
D_1	15 230	10 250	9 230+ ε	7 –	$480+\varepsilon$
D_2	12 –	13 300– ε	10 –	8 –	$300-\varepsilon$
D_3	4 230	11 190	11 100	3 520	
PS	230	250	720	100	

Ak položíme $\varepsilon = 0$, riešenie nebude degenerované, pretože bude obsahovať 6 nenulových premenných. Ak porovnáme toto riešenie s riešením dosiahnutým v príklade 4.3 (v tabuľke označenej „2.krok“), vidíme, že je rovnaké, a preto sa možno dostať k optimálnemu riešeniu štandardným postupom v rámci jedného kroku.

Poznámka: Nezávisle od toho, ktorý z uvedených spôsobov riešenia degenerácie budeme používať, degenerácia sa môže prejaviť v ktoromkoľvek kroku riešenia (nie len na začiatku riešenia). Takisto po niekoľkých krokoch môže zaniknúť (a prípadne sa neskôr znova prejaviť).

4.1.4 Riešenie nevyváženej úlohy

Ak neplatí rovnosť

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j ,$$

je dopravná úloha **nevyvážená** (nevybilancovaná). V takom prípade môžu nastať 2 prípady:

a) $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j .$

V tomto prípade úlohu riešime tak, že pridáme fiktívneho spotrebiteľa S_F , ktorého požiadavka bude:

$$b_F = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j ,$$

t.j. pridáme ďalší stĺpec s nulovými cenami dopravy.

Ak chceme, aby niektorý dodávateľ vyčerpal pri takto nevyváženej úlohe celú svoju kapacitu (napr. ak nemá skladovacie priestory), zvolíme prepravné náklady od tohto dodávateľa k fiktívnemu spotrebiteľovi M (čo je veľké číslo, ktoré sa v limite blíži k ∞).

Množstvo, ktoré má byť podľa riešenia úlohy dodané fiktívnemu spotrebiteľovi, v skutočnosti ostáva príslušnému dodávateľovi.

b) $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j .$

V tomto prípade úlohu riešime tak, že pridáme fiktívneho dodávateľa D_F , ktorého kapacita bude:

$$a_F = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i ,$$

t. j. pridáme ďalší riadok s nulovými cenami dopravy.

Ak chceme, aby požiadavka niektorého spotrebiteľa pri takto nevyváženej úlohe bola úplne uspokojená (napr. ak ide o preferovaného spotrebiteľa), zvolíme prepravné náklady od fiktívneho dodávateľa k tomuto spotrebiteľovi M (čo je veľké číslo, ktoré sa v limite blíži k ∞).

Množstvá, ktoré má podľa riešenia úlohy dodať fiktívny dodávateľ, v skutočnosti príslušný spotrebiteľ nedostane.

Príklad č. 4.5

Úloha je modifikáciou príkladu 4.2. Z troch závodov s výrobnými kapacitami 480, 380 a 520 ks výrobkov sú dopravované výrobky k štyrom odberateľom s požiadavkami 230, 370, 600 a 100 ks. Ceny dopravy jednotkového množstva z i -teho závodu k j -temu odberateľovi sú rovnaké ako v príklade 4.2. Keďže výrobné kapacity sú väčšie ako zabezpečený odbyt výrobkov, predpokladá sa, že výrobné kapacity niektorého zo závodov nebudú využité. Zámerom ale je, aby závodom s nevyužitými kapacitami nebol závod 2. Úlohou je zistiť, ktorý závod nevyužije celú výrobnú kapacitu, ak chceme, aby celkové dopravné náklady boli minimálne. Treba zostaviť plán prepravy pri rešpektovaní uvedených požiadaviek.

Riešenie

Súčet požiadaviek spotrebiteľov (odberateľov) je 1300 ks. Súčet kapacít dodávateľov (výrobných kapacít závodov) je 1380 ks, čo je o 80 ks viac ako súčet požiadaviek spotrebiteľov. Pridáme teda fiktívneho spotrebiteľa S_F s požiadavkou $b_F = 80$ ks. Ak má byť kapacita dodávateľa D_2 využitá, určíme cenu dopravy od tohto dodávateľa k fiktívnemu spotrebiteľovi $c_{2F} = M$. Ceny dopravy c_{1F} a c_{3F} budú nulové. Východiskové riešenie nájdeme napr. indexovou metódou a v riešení budeme pokračovať metódou riadkových a stĺpcových čísiel s cieľom nájsť optimálne riešenie:

0.krok	S_1	S_2	S_3	S_4	S_F	KD	u_i
D_1	15 –	10 $\oplus$ 2 $\ominus$ 480	9 $\ominus$ 480	7 –	0 1	480	1
D_2	12 –	13 260 $\ominus$	10 120 $\oplus$	8 –	M –	380	2
D_3	4 230	11 110	11 –	3 100	0 80	520	0
PS	230	370	600	100	80		
v_j	4	11	8	3	0		

opt.	S_1	S_2	S_3	S_4	S_F	KD	u_i
D_1	15 –	10 260	9 220	7 –	0 –	480	–1
D_2	12 –	13 –	10 380	8 –	M –	380	0
D_3	4 230	11 110	11 –	3 100	0 80	520	0
PS	230	370	600	100	80		
v_j	4	11	10	3	0		

Dosiahnuté riešenie je optimálne (plán prepravy v tabuľke označenej „opt.“). Ukazuje, že nebudú využité výrobné kapacity závodu 3, ktorý pri kapacite 520 vyrobí len 440 ks výrobkov (zvyšných 80 ks je dodaných fiktívnemu spotrebiteľovi). Celkové dopravné náklady optimálneho riešenia sú $Z = 10810$ p.j.

4.1.5 Paradox – viac za menej

Predpokladajme, že riešením dopravnej úlohy bol určený optimálny plán prepravy. V určitých prípadoch môže nastať situácia, kedy možno oproti pôvodnému plánu prepravy zvýšiť prepravované množstvá a dosiahnuť pritom nižšie celkové prepravné náklady ako pri pôvodnom pláne prepravy. Tento paradox sa tiež označuje **vlastnosť „viac za menej“**.

Vlastnosť „viac za menej“ budeme najprv demonštrovať na príklade.

Príklad č. 4.6

V nasledujúcej tabuľke je uvedené optimálne riešenie dopravnej úlohy získané pomocou ľubovoľnej metódy a overené metódou riadkových a stĺpcových čísiel:

	S_1	S_2	S_3	KD	u_i
D_1	5 –	2 30	1 –	30	–5
D_2	4 50	7 10	3 20	80	0
PS	50	40	20		
v_j	4	7	3		

Celkové prepravné náklady tohto riešenia sú $Z = 390$.

Predpokladajme, že chceme zvýšiť kapacitu dodávateľa D_1 a požiadavku spotrebiteľa S_3 o 10 jednotiek. Riešením získame nasledujúcu tabuľku s optimálnym riešením (pri jeho overovaní musíme použiť jednu z metód na odstránenie degenerácie).

	S_1	S_2	S_3	KD	u_i
D_1	5 –	2 40	1 0	40	0
D_2	4 50	7 –	3 30	80	2
PS	50	40	30		
v_j	2	2	1		

Celkové prepravné tohto riešenia s väčším celkovým prepraveným množstvom je $Z = 370$ (teda nižšie).

Výber dodávateľa a spotrebiteľa, u ktorých možno zvýšiť dodávané a požadované množstvá, súvisí s hodnotami premenných duálnej úlohy k pôvodnej úlohe. S podrobnejším popisom sa možno oboznámiť napr. v literatúre (Ivaničová, 1999; Lačšiak, 1990). Platí, že celkové dopravné náklady možno znížiť pri vyšších prepravovaných množstvách vtedy, ak sa zvýši o rovnakú hodnotu kapacita niektorého dodávateľa a niektorého spotrebiteľa. Pri určovaní, o ktorého dodávateľa a spotrebiteľa môže ísť, vychádzame z hodnoty riadkových a stĺpcových čísiel získaných pri overovaní optimálnosti riešenia pôvodnej úlohy metódou riadkových a stĺpcových čísiel. Vyberieme tú dvojicu dodávateľ – spotrebiteľ, pri ktorej je súčet príslušného riadkového a stĺpcového čísla záporný (v príklade 3.6 je to dodávateľ D_1 a spotrebiteľ S_3 , pretože $-5+3 = -2 < 0$). Určenie, o koľko možno zvýšiť prepravované množstvá tak, aby sa znížila cena prepravy, závisí od viacerých faktorov a môže byť aj rôzne pre viac optimálnych riešení tej istej úlohy.

Uvedené poznatky môžu byť v praxi užitočné napr. pri rozhodovaní o tom, ktoré kapacity skladov alebo výroby treba zvýšiť alebo znížiť, a tiež pri rozhodnutiach týkajúcich sa budovania nových kapacít a odbytíšť a s tým spojených investičných úloh pri riešení problémov budovania a rozširovania dopravných komunikácií a pod (Lačšiak, 1990).

4.2 PRIRAĐOVACIE PROBLÉMY

K distribučným problémom patria aj priraďovacie problémy, ktoré možno charakterizovať aj ako špeciálne prípady dopravnej úlohy.

Priraďovací problém je definovaný ako úloha o optimálnom priradení prvkov množiny $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ prvkom rovnako početnej množiny $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Pritom predpokladáme, že hodnoty a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ a hodnoty b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ sú rovné 1. Vektor $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$ tvoria premenné x_{ij} , ktorých hodnota sa rovná 1, keď je a_i priradený prvok b_j , inak $x_{ij} = 0$. Koeficienty c_{ij} možno ekonomicky interpretovať ako efektívnosť z dosiahnutého priradenia. Na základe uvedeného môžeme formulovať priraďovací problém v tvare:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \stackrel{!}{=} \max., \text{ resp. } \min \quad [4.1]$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [4.2]$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad [4.3]$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad [4.4]$$

Typickými priraďovacími problémami sú: úloha priradenia prác strojom, úloha výberu kádrov (maximalizačná úloha) alebo denné priradenie dopravného prostriedku z centrálnej garáže na určité stanovisko (minimalizačná úloha) a podobne.

Uvedená úloha je špeciálnym prípadom dopravnej úlohy, ak platí (Sakál, 1990):

- počet dodávateľov je rovný počtu odberateľov ($m = n$),
- kapacity dodávateľov a požiadavky odberateľov sa rovnajú 1, teda sú celočíselné,
- z celočíselnosti pravých strán OP vyplýva aj celočíselnosť optimálneho riešenia, a preto sú metódy na riešenie dopravnej úlohy použiteľné aj pre priraďovací problém,

- každé prípustné riešenie prirad'ovacieho problému má práve n nenulových zložiek, čo je proti $m + n - 1$ bázičských premenných príslušnej dopravnej úlohy silná degenerácia.

Prirad'ovaciú úlohu možno formulovať nasledovne (Linczenyi, 1978): Je dané m prostriedkov a m úloh a účinnosť každého prostriedku pri každej úlohe (sadzby, ktorých je m^2). Úlohou je priradiť každý prostriedok k jednej a len k jednej úlohe tak, aby daná miera účinnosti bola minimálna/maximálna.

Minimalizačnú úlohu môžeme formulovať napríklad nasledovne: Stavebný podnik má na m stavbách po jednej miešačke betónu rovnakého typu a chce presunúť tieto miešačky na m nových stavenísk. Kilometrové vzdialenosti medzi jednotlivými staveniskami podnik pozná; otázka znie, ako presunúť miešačky, t.j., z ktorej stavby na ktorú ich prepraviť, aby celkový počet najazdených kilometrov (a tým celkové náklady na presun) bol minimálny.

Maximalizačnú úlohu možno formulovať napríklad takto: m pracovníkov treba priradiť na m rôznych pracovísk tak, aby celkový výkon všetkých m pracovísk bol maximálny. Vychádzame z predpokladu, že každý pracovník môže pracovať na ľubovoľnom z uvažovaných m pracovísk, pričom priemerná výkonnosť jednotlivých pracovníkov na jednotlivých pracoviskách, ktorú musíme poznať, je rôzna.

V dôsledku silnej degenerovanosti boli na takéto úlohy vyvinuté špeciálne metódy, napr. maďarská metóda, ktorej názov je odvodený od toho, že princíp metódy vychádza z vety maďarských matematikov Königa a Egerváryho.

Postup riešenia pri maďarskej metóde (Sakál, 2006):

1. Zo zadanej tabuľky sadzieb zostavíme maticu sadzieb. V danej matici vykonáme **redukciu** po riadkoch a stĺpcoch tak, aby po redukcii v každom riadku a stĺpci bola aspoň jedna nula:
 - a) Pri max. úlohe robíme redukciu tak, že najväčšiu sadzbu v každom riadku a v každom stĺpci odpočítame od všetkých ostatných sadzieb v riadku a stĺpci.
 - b) Pri min. úlohe robíme redukciu tak, že nájdeme najmenšiu sadzbu v riadku, resp. v stĺpci a odčítame ju od všetkých ostatných sadzieb v riadku, resp. stĺpci.
2. Po redukcii sa snažíme zakrúžkovať požadovaný počet núl v matici, ak ide o maticu n –tého rádu počet zakrúžkovaných núl by sa mal rovnať n , aby riešenie bolo *optimálne*. Pri krúžkovaní núl postupuje tak, aby sme mali v každom riadku a stĺpci zakrúžkovanú *len jednu nulu*. Pri

krúžkovaní postupujeme tak, aby sme krúžkovali nuly v tých riadkoch a stĺpcoch, kde je iba jedna nula.

3. Ak počet zakrúžkovaných núl v matici n - tého rádu je menší ako n , potom nájdené riešenie nie je optimálne a musíme skontrolovať, či nájdené riešenie je správne. Správnosť riešenia overíme pomocou tzv. krycích čiar (KČ). Pri určení počtu použitých krycích čiar postupujeme podľa Königovej vety: *Minimálny počet krycích čiar, ktoré sú potrebné na pokrytie všetkých núl v matici, sa rovná maximálnemu počtu núl, ktoré možno zakrúžkovať*.

Krycou čiarou rozumieme čiaru, ktorú preložíme cez taký riadok alebo stĺpec, v ktorom je aspoň jedna nulová sadzba.

4. Po určení počtu krycích čiar postupujeme nasledovne: pri prekladaní KČ postupujeme maximálne úsporne, každou KČ sa snažíme pokryť maximálny možný počet núl. Postupujeme tak, že nájdeme stĺpec alebo riadok, v ktorom je iba jedna nula a kolmo na tento stĺpec, resp. riadok cez túto nulu preložíme KČ.

5. Riešenie je správne, ale nie je optimálne a musíme pokračovať v riešení. Vykonáme ďalšiu redukciu matice a to tak, že nájdeme najmenšiu nepokrytú sadzbu (pri min. úlohe) a odčítame ju od všetkých nepokrytých sadzieb, pričítame ju k dvakrát pokrytým sadzbám a jedenkrát pokryté sadzby ponecháme nezmenené. Pri max. úlohe postupujeme rovnako, len nájdeme najväčšiu nepokrytú sadzbu.

6. V hľadaní optimálneho riešenia postupujeme podľa bodov 2-5, až kým počet zakrúžkovaných núl nie je zhodný s rádom matice. Potom sa miesta zakrúžkovaných núl premietnu na pôvodnú nezmenenú maticu a po dosadení daných hodnôt do účelovej funkcie dostaneme optimálne riešenie úlohy.

Príklad č. 4.7

Treba premiestniť päť žeriavov z pôvodných päť stavenísk na päť nových tak, aby sa najazdil minimálny počet kilometrov. V políčkach tabuľky 4.2 sú uvedené dopravné vzdialenosti z pôvodných miest (D_i) do nových miest (S_j).

Tab. 4.2

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	a_i
D_1	20	40	70	60	25	1
D_2	30	45	35	20	20	1
D_3	40	35	80	40	45	1
D_4	60	20	40	35	70	1
D_5	35	30	65	50	60	1
b_j	1	1	1	1	1	5

Riešenie

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 40 & 70 & 60 & 25 \\ \hline 30 & 45 & 35 & 20 & 20 \\ \hline 40 & 35 & 80 & 40 & 45 \\ \hline 60 & 20 & 40 & 35 & 70 \\ \hline 35 & 30 & 65 & 50 & 60 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (20) \\ (20) \\ (35) \\ (20) \\ (30) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 20 & 50 & 40 & 5 \\ \hline 10 & 25 & 15 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 45 & 5 & 10 \\ \hline 40 & 0 & 20 & 15 & 50 \\ \hline 5 & 0 & 35 & 20 & 30 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 20 & 35 & 40 & 5 \\ \hline 10 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 30 & 5 & 10 \\ \hline 40 & 0 & 5 & 15 & 50 \\ \hline 5 & 0 & 20 & 20 & 30 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (0) \\ (0) \\ (15) \\ (0) \\ (0) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 25 & 35 & 40 & 5 \\ \hline 10 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 25 & 0 & 5 \\ \hline 35 & 0 & 0 & 10 & 45 \\ \hline 0 & 0 & 15 & 15 & 25 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 40 & 70 & 60 & 25 \\ \hline 30 & 45 & 35 & 20 & 20 \\ \hline 40 & 35 & 80 & 40 & 45 \\ \hline 60 & 20 & 40 & 35 & 70 \\ \hline 35 & 30 & 65 & 50 & 60 \\ \hline \end{array} \Rightarrow z_{\min} = 20 + 20 + 40 + 40 + 30 = 150$$

Zo zadanej tabuľky sme zostavili maticu sadzieb. V danej matici sme vykonali **redukciu** po riadkoch a stĺpcoch tak, že po redukcii v každom riadku a stĺpci zostala aspoň jedna nula: v každom riadku, resp. stĺpci sme našli najmenšiu sadzbu a odčítali ju od všetkých ostatných sadzieb v riadku, resp. stĺpci.

Po redukcii sme vedeli zakrúžkovať len 3 nuly v matici, t. z. nenašli sme optimálne riešenie. Pri krúžkovaní sme postupovali tak, aby sme krúžkovali nuly v tých riadkoch a stĺpcoch, kde je iba jedna nula.

Keďže počet zakrúžkovaných núl v matici 5. rádu je menší ako 5, potom nájdené riešenie nie je optimálne a musíme skontrolovať, či nájdené riešenie je správne. Správnosť riešenia overíme pomocou KČ. Pri určení počtu použitých KČ sme postupovali podľa Königovej vety. V matici, sme vedeli zakrúžkovať maximálne 3 nuly, na pokrytie všetkých núl v matici nám musia stačiť 3 KČ.

Pri prekladaní KČ sme postupovali maximálne úsporne, každou KČ sme sa snažili pokryť maximálny možný počet núl. Zistili sme, že riešenie je správne (3 KČ sme zakryli všetky nuly v matici), ale nie je optimálne a musíme pokračovať v riešení. Vykonali sme ďalšiu redukciu matice, a to tak, že sme našli najmenšiu nepokrytú sadzbu (v našom prípade hodnota 5) a odčítali sme ju od všetkých nepokrytých sadzieb, pričítali sme ju k dvakrát pokrytým sadzbám a jedenkrát pokryté sadzby sme ponechali nezmenené.

V matici, ktorá vznikla po redukcii, sme zakrúžkovali 5 núl, t. z. našli sme optimálne riešenie.

V našom prípade je optimálne riešenie také, ak prvý žeriav priradíme k prvému novému miestu, druhý žeriav piatemu novému miestu, tretí žeriav štvrtému novému miestu, štvrtý žeriav tretiemu novému miestu a piaty žeriav druhému novému miestu. V takomto prípade ÚF nadobúda hodnotu 150, čiže najazdí sa minimálny počet kilometrov.

Pri riešení **maximalizačnej** priradovacej úlohy by sme postupovali podobne ako pri minimalizačnej, len pri redukciách by sme operovali vždy s **najväčšou** hodnotou.

Aby sme pri riešení priradovacích úloh zaručili, že sme našli najväčší možný počet zakrúžkovaných núl v matici, musíme dodržať nasledujúci logický postup (Linczenyi, 1978):

- a) Zakrúžkujeme nuly, ktoré sú jediné v riadku, resp. stĺpci tak, aby v každom riadku a v každom stĺpci bola zakrúžkovaná nanajvýš jedna nula.
- b) Ak je v každom riadku, resp. stĺpci viac ako jedna nula, určíme riadok, resp. stĺpec s najmenším počtom núl a vyberieme v ňom jednu nulu ako nezávislú, t.j. zakrúžkujeme

jednu nulu. Takto postupujeme dovtedy, kým nevyčerpáme existujúci počet nezávislých núl.

Pri prekladaní KČ postupujeme takto (Linczenyi, 1978):

- a) Vyberieme riadok, resp. stĺpec, v ktorom nie sú nezávislé nuly (ak také riadky, resp. stĺpce existujú) a preložíme nulami tohto riadku, resp. stĺpca kolmo na tento riadok, resp. stĺpec KČ. Tento postup opakujeme, pokiaľ to ide.
- b) Ak sme tým všetky nuly nepokryli, t. j. ak zostanú nepokryté len stĺpce, resp. riadky s nezávislými nulami, vedieme KČ cez tieto stĺpce, resp. riadky. Pri takomto postupe prekladania KČ sa nestane, aby sa preťali dve čiary na nezávislej nule.

Ku komplexu distribučných úloh patria aj iné špeciálne dopravné problémy, ktoré môžeme definovať ako priradovací problém (Ivaničová, 2002):

- problém hľadania najkratšej cesty,
- problém obchodného cestujúceho,
- rozmiestňovací problém (umiestnenie nových výrobných, resp. skladovacích kapacít, ktorých riešenie nadobúda hodnoty 0 a 1 tak ako pri priradovacom probléme.

Zvlášť významný pre organizáciu a riadenie dopravy je problém obchodného cestujúceho, nazývaný aj problém okružných ciest, resp. problém dopravných liniek. Problém okružných ciest spočíva na princípe prepojenia m miest tak, že začiatkové aj konečné miesto (miesto dodávateľa) sú identické a že každé miesto spotreby je len raz zahrnuté v dopravnej sieti. Cieľom je minimalizácia celkovej dĺžky trasy, t. j. celkových nákladov, resp. trvania cesty (pozri Ivaničová, 2002).

Úlohy/otázky na samostatné riešenie

1. Prečo je v základnom riešení dopravného problému maximálne $(m + n - 1)$ nenulových premenných?
2. V čom je z hľadiska formulácie ekonomického a matematického modelu základný rozdiel medzi dopravným a priradovacím problémom?

3. Čo sú bivalentné premenné a aké je ich použitie?
4. Ako znie Königova veta a na čo sa používa?
5. Popíšte postup výpočtu pri jednotlivých metódach riešenia dopravných úloh.
6. Uveďte rozdiel medzi vyváženou a nevyváženou dopravnou úlohou.
7. Vysvetlite ekonomický význam fiktívneho dodávateľa, resp. odberateľa.
8. Aké riešenie dopravného problému nazývame degenerované, vysvetlite akým spôsobom ho získame a ako ho odstránime.

Príklad č. 4.8

Predpokladajme, že určitý materiál je rozmiestnený v troch skladoch v S_1 - 200 jed. mat., S_2 - 500 jed. mat., S_3 - 300 jed. mat. Materiál zo skladov treba prepraviť ku štyrom odberateľom: O_1 požaduje 300 jed. mat., O_2 - 300 jed. mat., O_3 - 200 jed. mat., O_4 - 200 jed. mat. Prepravné sadzby v € na prepravovanú jednotku sú zapísané v tabuľke.

	O_1	O_2	O_3	O_4
S_1	15	18	14	17
S_2	16	12	15	14
S_3	13	19	17	15

Úlohou je určiť optimálny plán prepravy materiálu zo skladov k odberateľom, t.j. určiť, z ktorého skladu koľko materiálu prepraviť ktorému odberateľovi tak, aby sme odberateľov plne uspokojili a aby celkové prepravné náklady na rozvoz materiálu odberateľom boli minimálne.

Príklad č. 4.9

Predpokladajme, že 5 ťažkých nákladných vozidiel je rozmiestnených v 5 garážach, ktoré sú na rôznych miestach. Vozidlá treba pristaviť 5 prepravcom, ktorí sú na rôznych miestach. Treba určiť, z ktorej garáže ku ktorému prepravcovi pristaviť vozidlo tak, aby sa pri pristavení vozidiel najazdil minimálny počet km. Vzdialenosti v kilometroch medzi G a P sú zapísané v tabuľke.

	P1	P2	P3	P4	P5
G1	41	38	45	47	39
G2	44	41	49	45	50

G3	48	37	51	49	52
G4	51	45	50	46	53
G5	49	47	52	54	48

Príklad č.4.10

Spoločnosť MECHA, s. r. o., vlastní stavebné stroje, ktoré požičiava podľa požiadaviek rôznym stavebným firmám. Špeciálne žeriavy VZZ, ktoré už ukončili svoju prácu na predchádzajúcom pracovisku, treba presunúť na iné stavby alebo na skladovaciu plochu. Spoločnosť STAVO, s. r. o., má rozostavané štyri výškové budovy, pri výstavbe ktorých potrebuje VZZ žeriavy. Podľa dohody spoločnosť STAVO, s.r.o., platí prenájom žeriavov a spoločnosť MECHA, s. r. o., platí ich dopravu. Pretože preprava žeriavov je veľmi nákladná, snaží sa spoločnosť MECHA, s. r. o., nájsť také cestné spojenia medzi ukončenými stavbami a novo začínajúcimi stavbami, aby prepravné náklady boli minimálne. Vzdialenosti v kilometroch sú uvedené v tabuľke.

	Stavba budovy 1	Stavba budovy 2	Stavba budovy 3	Stavba budovy 4
Stavba 1	380 km	276 km	428 km	524 km
Stavba 2	326 km	548 km	179 km	350 km
Stavba 3	476 km	390 km	280 km	462 km
Stavba 4	310 km	276 km	358 km	287 km

Výsledky

$$x_{12} = x_{23} = x_{31} = x_{44} = 1 ; z = 1218$$

$$x_{12} = x_{21} = x_{33} = x_{44} = 1 ; z = 1169$$

Literatúra k 4. kapitole

- [1] CHURCHMAN, C.W., ACKOFF, R.L., ARNOFF, E.L. *Úvod do operačného výskumu*. Bratislava: Alfa, 1968.
- [2] IVANIČOVÁ, Z., BREZINA, I., PEKÁR, J. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*. Bratislava: Ekonóm, 1999.

- [3] IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačný výskum*. Bratislava: Iura Edition, 2002. 287 s. + 1 CD-ROM. - (Ekonomía).
- [4] LAŠČIAK, A. a kol. *Optimálne programovanie*. Bratislava: Alfa, 1990.
- [5] LINCZÉNYI, A. – ŠTRPKA, A. *Operačná analýza*. Bratislava: SVŠT, 1978.
- [6] SAKÁL, P., JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra*. Trnava: TRIPSOFT-SP-SYNERGIA, 2003.
- [7] SAKÁL, P., ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza*. Bratislava: ES SVŠT, 1983.
- [8] ŠTRPKA, A., SAKÁL, P. *Operačná a systémová analýza. Zbierka príkladov II*. Bratislava: ES SVŠT, 1986.
- [9] WALTER, J., VEJMOLA, S., FIALA, P. *Aplikace metod síťové analýzy v řízení a plánování*. Praha: SNTL, 1989.

5. METÓDY SIEŤOVEJ ANALÝZY

Ciele

- charakteristika a teoretické východiská sieťovej analýzy,
- klasifikácia a charakteristika sieťového grafu,
- časová analýza sieťového grafu metódou CPM, PERT, MPM a GERT,
- zdrojová a nákladová analýza sieťového grafu.

Sieťová analýza (SA) je časťou matematického programovania. Jej teoretický základ tvorí teória grafov a teória pravdepodobnosti. Predmetom skúmania je konštrukcia, riešenie a aplikácia matematických modelov zložitých komplexov činností (projektov), tvoriacich nadväzný proces. To znamená, že medzi týmito činnosťami existujú technologické a organizačné väzby v tom zmysle, že určitá činnosť sa môže začať až po ukončení niektorých iných činností.

SA sa používa pri príprave, plánovaní, riadení, koordinácii a kontrole zložitých úloh v rôznych oblastiach hospodárskej činnosti, napr. pri:

- plánovaní výskumu a vývoja,
- plánovaní a organizácii veľkých športových a iných podujatí,
- riadení a kontrole rôznych hlavne zložitých činností: chirurgický zákrok, operné predstavenie, riadenie letu rakety a pod.,
- výstavbe alebo rekonštrukcii priemyselných objektov a iných stavieb,
- rozbere technickej prípravy výroby prototypov a v kusovej výrobe a pod..

Metódy sieťovej analýzy (MSA) sa využívajú na zosúladenie časovej nadväznosti rôznych, vzájomne sa podmieňujúcich činností pri riadení rozsiahlych **projektov**. SA je zameraná na konštrukciu, riešenie a aplikáciu matematických modelov zložitých komplexov činností – **projektov**, tvoriacich nadväzný proces – **technologické** a **organizačné väzby**. Všeobecne však možno povedať, že využívanie metód SA je vyvolané potrebou vzájomného a jednoduchého previazania navzájom sa ovplyvňujúcich veličín (Dolanský, 1996).

Projekt možno charakterizovať takto (Sakál, 2003):

- ✓ Je to súbor spravidla veľkého počtu čiastkových činností, ktoré sú navzájom podmienené a realizovateľné v určitom poradí a ktoré musia byť vykonané v rámci riešenia zložitej úlohy.
- ✓ Počet „produktov“ takto organizovaných činností je malý, spravidla ide o splnenie jedinej úlohy, napr. realizáciu jednej stavby, vybudovanie jedného závodu, riešenie jednej výskumnej úlohy a pod.
- ✓ Realizácia jednotlivých činností aj celej úlohy je spojená s väčším rizikom, ako je bežné pri opakovaných činnostiach v rámci napr. výrobného procesu ako z hľadiska času (termínov), tak aj z hľadiska nákladov. Keďže ide spravidla o neopakovateľné činnosti, odhady ich trvania a nákladov sa robia na základe skúseností s riešením podobných úloh v minulosti, a preto môžu byť aj pomerne dosť nepresné.
- ✓ Na realizácii jednotlivých činností sa zúčastňujú rôzne oddelenia, útvary alebo aj firmy, a preto treba klásť dôraz na ich účinnú koordináciu.
- ✓ V čase realizácie projektu treba viac alebo menej často meniť časový plán v dôsledku nutnosti prispôbovať sa meniacim sa technickým, organizačným a ekonomickým podmienkam.

Celkový význam slova projekt sa dá zhrnúť nasledovne: „Projekt je jedinečná sústava činností smerujúcich k dopredu stanovenému a jasne definovanému cieľu a má určený **začiatok a koniec a vyžaduje spoluprácu rôznych profesií, viaže ich kapacity a ich úsilie a využíva (prípadne spotrebováva) na vytvorenie cieľových výstupov informácií, materiálu, peňazí schopností a zručností zúčastnených ľudí**.“ Môžeme tiež povedať, že projekt je jednorazová transformácia vstupov (informácie, prostredie, materiál, peniaze, schopnosti a zručnosti zúčastnených ľudí) na výstupy - cieľové produkty - za pomoci vývojových činností usporiadaných do etáp, krokov a úloh a koordinovaných riadiacimi činnosťami (Hrablík, 2009).

Na riešenie úloh z oblasti riadenia projektov a časového plánovania sa pôvodne využívali diagramy, v praxi nazývané **harmonogramy**, v literatúre známe ako **Ganttové diagramy**, **gantogramy**, alebo **úsečkové diagramy** (Sakál, 2003). Harmonogram bol v tejto kapitole využitý v príklade 5.5 pri analýze zdrojov (obr. 5.24).

V roku 1957 vznikla v USA metóda, pre ktorú sa neskôr ustálil názov **CPM** (Critical Path Method – Metóda kritickej cesty). Túto metódu vyvinuli M. R. Walker z chemického koncernu DuPont a J. E. Kelley zo spoločnosti RAND pôvodne pod názvom Project Planning and Scheduling System (Systém plánovania a rozvrhovania projektov). Použili ju v oblasti údržby a rekonštrukcie výrobných zariadení a pri vývoji nových chemických výrobkov. Metóda je určená pre deterministické procesy.

Približne o rok neskôr vyvinuli W. Fazar, J. Roseboom, C. Clark a D. Malcolm takmer súčasne ale nezávisle od seba pre potrebu vývoja balistickej strely Polaris metódu, ktorá je známa pod označením **PERT** (Project Evaluation and Review Techniques – Metóda hodnotenia a previerky projektov), (Sakál, 2003). Je určená pre stochastické procesy.

Okrem uvedených metód boli vyvinuté aj ďalšie metódy sieťového plánovania, napr. MPM, PD alebo GERT. Sú však menej známe a menej používané.

Metódy SA sa zvyknú označovať aj ako:

- metódy sieťového plánovania,
- modely nadväzných procesov,
- metódy projektového manažmentu.

5.1 SIEŤOVÝ GRAF PROJEKTU

Modelom projektu je **sieťový graf** (SG), ktorý je konečný, súvislý, orientovaný, acyklický, hranovo alebo uzlovo ohodnotený graf a vyjadruje závislosti jednotlivých činností projektu. SG predstavuje grafické znázornenie plánovanej akcie. V SG sú usporiadaným spôsobom zoradené jednotlivé činnosti, ktoré sa musia vykonať, aby mohol byť dosiahnutý presne definovaný cieľ celého projektu.

SG je prostriedkom na znázornenie projektu a činností, ktoré musia byť vykonané, aby bol dosiahnutý stanovený cieľ projektu. Projekt preto rozdelíme na jednotlivé čiastkové činnosti a zistíme väzby medzi týmito činnosťami. Výsledkom realizácie určitej čiastkovej činnosti je dosiahnutie určitého stavu projektu vyjadreného **udalosťou**. Udalosti označíme $E_1, E_2, \dots, E_n$. Činnosť, ktorá prispieva k tomu, aby sa projekt dostal zo stavu vyjadreného udalosťou E_i do stavu vyjadreného udalosťou E_j , označíme pomocou indexov východiskového a cieľového stavu

(i, j). Pritom udalosť E_i nastáva až vtedy, keď sú ukončené všetky činnosti, ktoré prispievajú k dosiahnutiu stavu E_i projektu. Činnosť (i, j) zasa nemôže začať skôr, ako je dosiahnutý stav E_i projektu. Udalosť E_j nemusí nastať hneď po ukončení činnosti (i, j). Nastane až vtedy, keď sú ukončené všetky činnosti prispievajúce k dosiahnutiu stavu E_j (Sakál, 2003).

SG pozostáva z dvoch geometrických prvkov, a to z:

- **uzlov** – najčastejšie sú znázornené krúžkami, štvorcami, elipsami a pod.,
- **hrán** – znázornených orientovanými úsečkami.

SG sa delíme na:

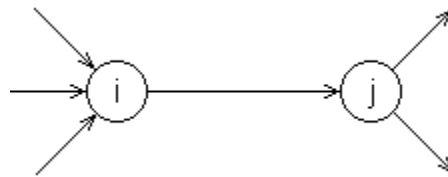
- **hranovo definované**- činnosť projektu je modelovaná hranou SG, t.j. orientovanou úsečkou a uzol predstavuje začiatok alebo ukončenie jednej alebo viac činností,
- **uzlovo definované**- činnosť projektu je modelovaná uzlom SG a väzby medzi jednotlivými činnosťami sú vyjadrené hranami.

Grafické znázornenie postupu prác na projekte pomocou SG má veľa predností, ktoré môžeme zhrnúť nasledovne (Dolanský, 1996):

- SG poskytuje jasný prehľad o rozsahu projektu, o nadväznosti a podmienenosti čiastkových prác a o tom, ktoré z nich môžu prebiehať súčasne,
- predstavuje preventívny prostriedok odstraňujúci možnosť vypustenia dôležitých prác,
- všetkým zamestnancom zúčastneným na projekte približuje problematiku riadenia celej akcie,
- poskytuje podklady na vyhodnocovanie účinnosti navrhovaných opatrení,
- postup práce je znázornený vo forme SG a je k dispozícii širokému okruhu zainteresovaných zamestnancov,
- SG sa dá výhodne využiť na rýchle zaškolenie zamestnancov do problematiky danej úlohy, atď.

Na obr. 5.1 je znázornená časť hranovo definovaného sieťového grafu (HDSG) s tromi činnosťami, prispievajúcimi k dosiahnutiu stavu E_i , jednou činnosťou (a zároveň jedinou)

prispievajúcou k dosiahnutiu stavu E_j , ktorá sa môže začať až keď je dosiahnutý stav E_i projektu a dvoma činnosťami, ktoré sa môžu začať až po dosiahnutí stavu E_j (Sakál, 2003).



Obr. 5.1

Uzol, do ktorého nevstupuje žiadna hrana, je **počiatočný uzol grafu** a uzol, z ktorého nevystupuje žiadna hrana, je **koncový uzol grafu**.

5.1.1 Základné zásady pri zostavovaní hranovo definovaných konjuktívno deterministických SG

Základné zásady, ktoré musia byť dodržané pri zostavovaní HDSG konjuktívno deterministických sú:

1. Každá činnosť má jeden počiatočný a jeden koncový uzol. Pomocou čísel začiatočného a koncového uzla môžeme činnosť presne definovať. Pri HDSG rozdeľujeme činnosti na 2 druhy:

- **reálne činnosti:** skutočné činnosti (obr. 5.2), ktoré majú určité časové trvanie a na ich realizáciu sa spotrebujú určité prostriedky, znázorňujeme ich v SG neprerušovanými orientovanými úsečkami.



Obr. 5.2

- **fiktívne činnosti:** majú nulové trvanie a nič sa pri nich nespotrebuje a nevyžadujú žiadne náklady, zakresľujeme ich prerušovanými úsečkami (obr. 5.3).

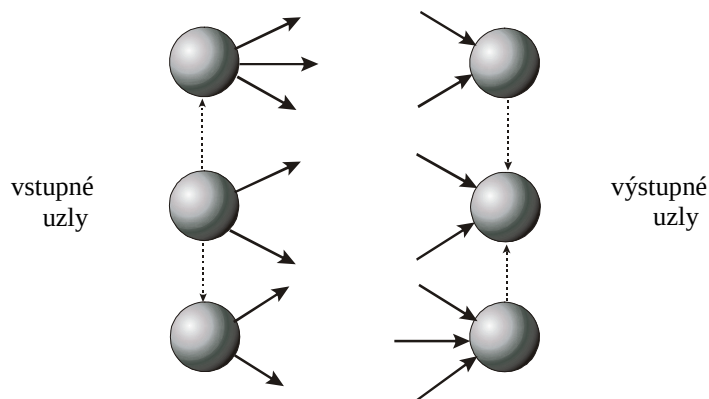


Obr. 5.3

Používajú sa ako pomocný prostriedok na:

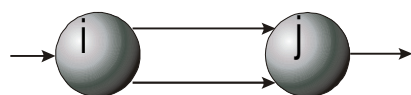
- odstránenie paralelnosti činností,
- vyjadrenie závislosti medzi činnosťami,
- sprehľadnenie SG,
- úpravu SG s cieľom dodržať formálne pravidlá,
- vyjadrenie iných ako technologických vzťahov – najčastejšie organizačných.

2. SG podobne ako činnosti by mal mať 1 vstupný uzol a 1 výstupný uzol. Ak to tak nie je, môžeme pomocou fiktívnych činností SG normalizovať:

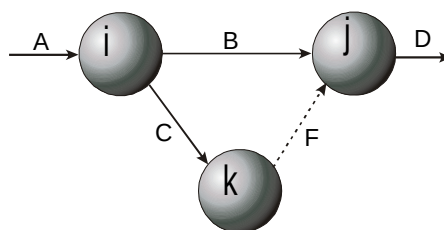


Obr. 5.4

3. Medzi dvoma uzlami môže bezprostredne prebiehať iba jedna činnosť:



=>

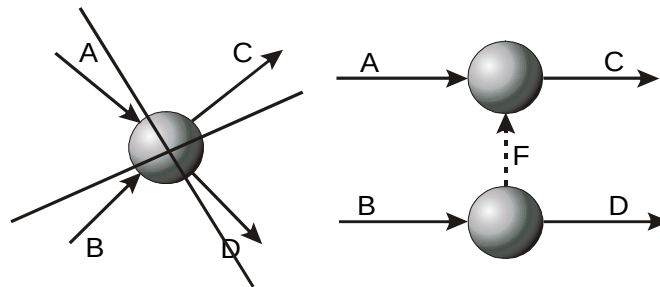


toto nesmie obsahovať

odstránime pridaním fiktívneho uzla k

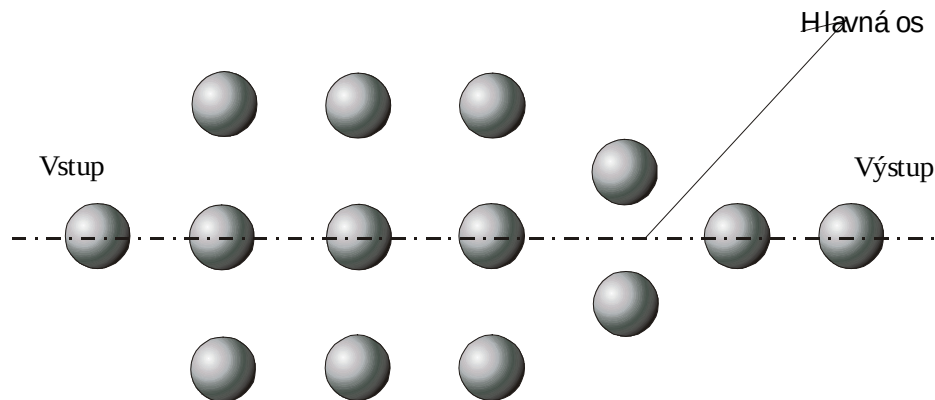
Obr. 5.5

4. Použitie fiktívnych činností na znázornenie závislosti medzi činnosťami. Napríklad (obr. 5.6): máme činnosti **A**, **B**, **C**, **D**; začatie činnosti **C** je závislé od ukončenia a činností **A** a **B** a činnosť **D** sa môže začať po skončení činnosti **B**.



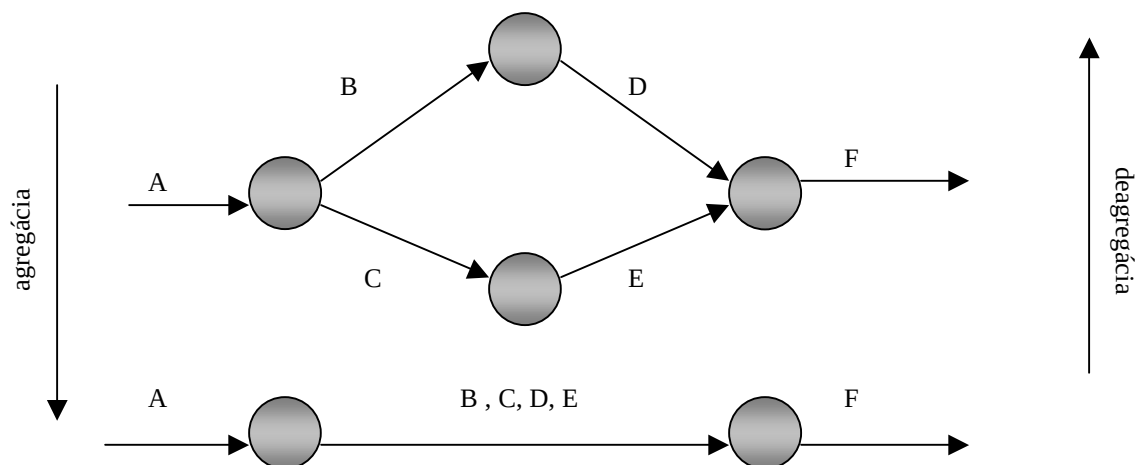
Obr. 5.6

5. Ak nakreslíme SG v časovej mierke v takom prípade dĺžky hrán grafu nemusia byť úmerné trvaniu jednotlivých činností. Dĺžky hrán volíme tak, aby bol SG čo najprehľadnejší, aby sa hrany čo najmenej pretínali, aby mal nejakú hlavnú os, na ktorej je najviac uzlov a aby mal zjavný vstup a zjavný výstup:



Obr. 5.7

6. Agregácia a deadregácia SG (obr. 5.8):
- ak zostavujeme SG pre vrcholové radiácie stupne, tieto SG sú silne agregované,
 - stredný stupeň riedenia - SG sú oveľa menej agregované ako pre vrcholový stupeň riadenia a poskytujú nám oveľa viac informácií,
 - operatívne riadenie- najmenej agregované, musia verne opísať danú skutočnosť, lebo na ich základe sa priamo riadi realizácia projektu.



Obr. 5.8

7. SG nesmie obsahovať cyklus:

- ak by obsahoval cyklus nemôžeme robiť časovú analýzu,
- v incidenčnej matici sa cyklus prejaví tak, že sa objavia nenulové prvky na hlavnej diagonále alebo pod hlavnou diagonálou.

8. Aby sme mohli správne zostaviť SG musíme mať o každej činnosti nasledovné informácie:

- a) musíme poznať, ktoré činnosti danú činnosť bezprostredne predchádzajú,
- b) musíme poznať, ktoré činnosti za danou činnosťou bezprostredne nasledujú,
- c) musíme poznať, ktoré činnosti sa môžu vykonávať paralelne s danou činnosťou,
- d) musíme poznať závislosti medzi činnosťami.

9. Metódy zostavovania SG sú:

- a) Metóda postupu vpred - zistíme všetky činnosti, ktoré nič nepredchádza a tieto činnosti zakreslíme, potom zistíme všetky činnosti, ktoré bezprostredne nasledujú po týchto činnostiach a zakreslíme, až sa dostaneme k činnostiam, po ktorých už nič nenasleduje (posledné).
- b) Metóda postupu späť - je opačná, zistíme všetky činnosti, za ktorými už nič nenasleduje, potom zistíme všetky činnosti, ktoré tieto činnosti bezprostredne predchádzajú, až dovedy kým prideme k činnosti, ktorú už nič nepredchádza (prvá).

- c) Metóda z prostriedku – SG nezostavujeme naraz, ale si ho rozložíme na čiastkové, ktoré potom spojíme do celkového grafu.

Zostrojovanie SG prebieha zhruba v troch fázach, ktoré sú spoločné pre všetky metódy sieťovej analýzy:

1. fáza - vytvoríme zoznam činností a určíme väzby medzi nimi. Tento krok sa robí tímovo a nedá sa žiadnym spôsobom zautomatizovať. Pri každej činnosti projektu dodržiavame vyššie uvedené zásady na zostavovanie SG.
2. fáza - vytvoríme grafický model projektu – SG. V nakreslenom SG uzly označujeme číslami, čím získavame zároveň i označenie každej činnosti SG ako dvojice čísiel (i, j) , pričom všeobecne platí $i < j$. Po vytvorení SG ako grafického modelu projektu nasleduje časové ohodnotenie činnosti. určenie trvania t_{ij} každej činnosti (i, j) projektu buď výpočtom (na základe výkonových noriem), alebo odhadom (poskytnutým kvalifikovanými odborníkmi);
3. fáza - obsahuje vypočítanie všetkých potrebných charakteristík, ich analýzu a vypracovania záverov ako pre jednotlivé činnosti tak aj pre celý projekt.

5.1.2 Ohodnotenie SG

Vzhľadom ne ekonomickú interpretáciu jednotlivých činností projektu v SG tieto ohodnocujeme. Prakticky sa používajú tri druhy ohodnotenia činnosti (Sakál, 1989):

1. Časové ohodnotenie činností - každej činnosti v SG priradíme obvykle celé kladné číslo, ktoré vyjadruje počet zvolených časových jednotiek (napr. dní, týždňov, mesiacov, rokov a pod.), potrebných na realizáciu činností.
2. Zdrojové ohodnotenie činností - činnostiam SG priradíme čísla, ktoré vyjadrujú potrebu jednotiek určitých zdrojov (materiál, finančné prostriedky, normohodiny, plocha, atď.) potrebných na realizáciu činností.
2. Nákladové ohodnotenie činností - činnostiam SG priradíme čísla, vyjadrujúce údaje o nákladoch na realizáciu činností.

Voľba druhu ohodnotenia závisí od účelu použitia SA. Časové ohodnotenie je základné pre všetky typy modelov a analýz a my ho využijeme pri metódach CPM, PERT, MPM a GERT.

Špeciálnym prípadom ohodnotenia SG je pravdepodobnostné ohodnotenie. Pri zovšeobecnených SG sa jednotlivé hrany ohodnocujú aj pravdepodobnostne; sú im priradené (pravdepodobnosti) čísla medzi 0 a 1, ktoré predstavujú podmienené pravdepodobnosti realizácie činností. Pravdepodobnostné ohodnotenie využijeme pri metóde GERT.

5.1.3 Klasifikácia hranovo definovaných siet'ových grafov

HDSG rozlišujeme podľa interpretácie uzlov SG vzhľadom na vstupnú a výstupnú časť uzla.

Vstupná časť uzla sa chápe ako (fiktívna) časť uzla, v ktorej končia činnosti SG. Po jej dosiahnutí nastáva udalosť, t.j. realizácia uzla, ku ktorej dôjde, ak sú realizované:

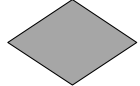
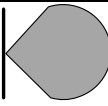
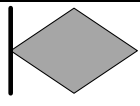
- všetky činnosti do uzla vstupujúce - konjunktívny vstup,
- aspoň jedna zo vstupujúcich činností - inkluzívny vstup,
- iba jediná vstupujúca činnosť - disjunktívny vstup.

Výstupná časť uzla sa chápe ako (fiktívna) časť uzla, z ktorej vystupujú činnosti SG. Realizácia vystupujúcich činností je podmienená realizáciou uzla, po ktorej môže nastať:

- začatie realizácie všetkých vystupujúcich činností - deterministický výstup,
- začatie realizácie jednej alebo niekoľkých vystupujúcich činností s určitou pravdepodobnosťou - stochastický výstup.

V nasledujúcej tabuľke uvádzame možné interpretácie uzlov SG spolu so symbolmi na ich grafické odlíšenie.

Tab. 5.1

Vstup \ Výstup		DETERMINISTICKÝ	STOCHASTICKÝ
			
KONJUNKTÍVNY			
INKLUZÍVNY			
DISJUNKTÍVNY			

V praxi sa najčastejšie využívajú kombinácie:

- konjunktívno deterministický uzol (CPM, PERT),
- konjunktívno stochastický (rozhodovací) uzol (GERT),
- disjunktívno deterministický uzol (GERT).

HDSG delíme na základe interpretácie uzlov na (Sakál, 1990):

- Konjunktívno deterministické SG:** obsahujú len uzly s konjunktívnymi vstupmi a deterministickými výstupmi. Ohodnotenie SG môže byť časové, nákladové alebo zdrojové, pričom časové ohodnotenie môže byť deterministické (CPM), t. j. s jedinou hodnotou trvania činnosti alebo stochastické (PERT), t. j. pomocou určitých charakteristík rozdelenia pravdepodobnosti trvania činnosti.
- Zovšeobecnené SG:** obsahujú aspoň jeden uzol s inou interpretáciou ako konjunktívno deterministickou. Ohodnotenie SG môže byť časové alebo nákladové. Predstaviteľom metód časovej analýzy sú metódy GERT alebo metódy analýz rozhodovacích stromov.

Uzlovo definované sieťové grafy (UDSG) sa chápu len ako konjunktívno deterministické (CPM, MPM).

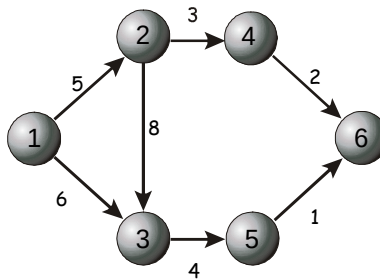
5.1.4 Formalizácia sieťových grafov

V praxi sa využívajú tieto spôsoby formalizácie (zázpisu) SG (Sakál, 2003):

- grafické znázornenie,
- tabuľkové vyjadrenie,
- incidenčná matica,
- matematicky: $G(U, H)$,
- Ganttovým diagramom (harmonogram).

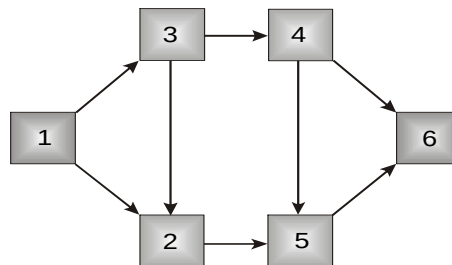
Grafické znázornenie využíva diagram grafu (v praxi je zaužívanejším pojmom na označenie diagramu grafu pojem „graf“, preto ho budeme v ďalšom texte používať). Grafické znázornenie je najčastejším spôsobom znázornenia v prípade malých a stredne veľkých grafov (do 300 až 500 činností). Ako príklad možno uviesť:

1. HDSG:



Obr. 5.9

2. UDSG:



Obr. 5.10

Každý HDSG možno prekresliť UDSG a opačne.

Tabuľkové vyjadrenie- umožňuje zachytiť viac informácií, avšak je menej prehľadné ako grafické znázornenie. Príkladom je tabuľka 5.2, uvedená v zadaní príkladu 5.1. Okrem údajov obsiahnutých v tejto tabuľke (číslo alebo označenie činnosti, popis činnosti, trvanie činnosti a zoznam činností - bezprostredných predchodcov uvedenej činnosti) môže tabuľka obsahovať aj ďalšie informácie, napr. špecifikáciu zdrojov, vyčíslenie nákladov (aj pre viac alternatív trvania činností), namiesto zoznamu bezprostredných predchodcov môže obsahovať priamo dvojicu uzlov, ktorých spojnicou je hrana reprezentujúca danú činnosť a pod. Pri malých a stredných grafoch sa tabuľkové vyjadrenie používa spravidla súbežne s grafickým znázornením, pri veľkých grafoch (nad 500 činností) sa tabuľkové vyjadrenie používa ako jediné.

Incidenčná matica (IM)- môže sa pri popise sieťového grafu vyskytovať v troch podobách – IM uzol-uzol, IM uzol-činnosť alebo IM činnosť-činnosť. IM uzol-uzol je štvorcová matica rozmeru $n \times n$, kde n je počet uzlov grafu. Prvkami matice a_{ij} môžu byť priamo údaje, ktorými sú ohodnotené hrany spájajúce uzly i a j , napr. trvanie činnosti t_{ij} alebo hodnoty 1 (ak medzi uzlami i a j existuje orientovaná hrana h_{ij}), resp. 0 (ak takáto hrana neexistuje). V i -tom riadku matice teda sú údaje o činnostiach reprezentovaných hranami, ktoré vystupujú z i -teho uzla a v j -tom stĺpci matice sú údaje o činnostiach reprezentovaných hranami, ktoré vstupujú do j -teho uzla. Základ tabuľky použitej pri riešení príkladu 5.3 v tabuľke tvorí práve incidenčná matica uzol-uzol, ktorej prvkami sú hodnoty t_{ij} . Príklady pre jednotlivé IM sú:

1. Incidenčná matica **uzol – uzol**: zachytáva len topológiu SG (obr.5.11a) zachytávajúca topológiu a aj časové trvanie jednotlivých činností (obr. 5.11b).

	1	2	3	4	5	6
1		1	1			
2			1	1		
3					1	
4						1
5						1
6						

Obr.5.11a

	1	2	3	4	5	6
1		5	6			
2			8	3		
3					4	
4						2
5						1
6						

Obr.5.11b

2. Incidenčná matica **uzol – činnosť**: používa sa pri HD SG.

	1,2	1,3	2,3	2,4	3,5	4,6	5,6
1	1	1					
2	-1		1	1			
3		-1	-1		1		
4				-1		1	
5					-1		1
6						-1	-1

kde:

1 znamená začiatkový uzol

-1 znamená koncový uzol

Obr.5.12

Nemusí byť štvorcová: počet riadkov matice = počtu uzlov SG a počet stĺpcov matice = počtu hrán SG. Používa sa vtedy, ak úlohy v SA riešime pomocou modelov matematického programovania

3. Incidenčná matica **činnosť – činnosť**: používa sa pri UDSG. Je to štvorcová matica, do riadkov a stĺpcov píšeme uzly (činnosti).

	1	2	3	4	5	6
1		1	1			
2			1		1	
3				1		
4					1	1
5						1
6						

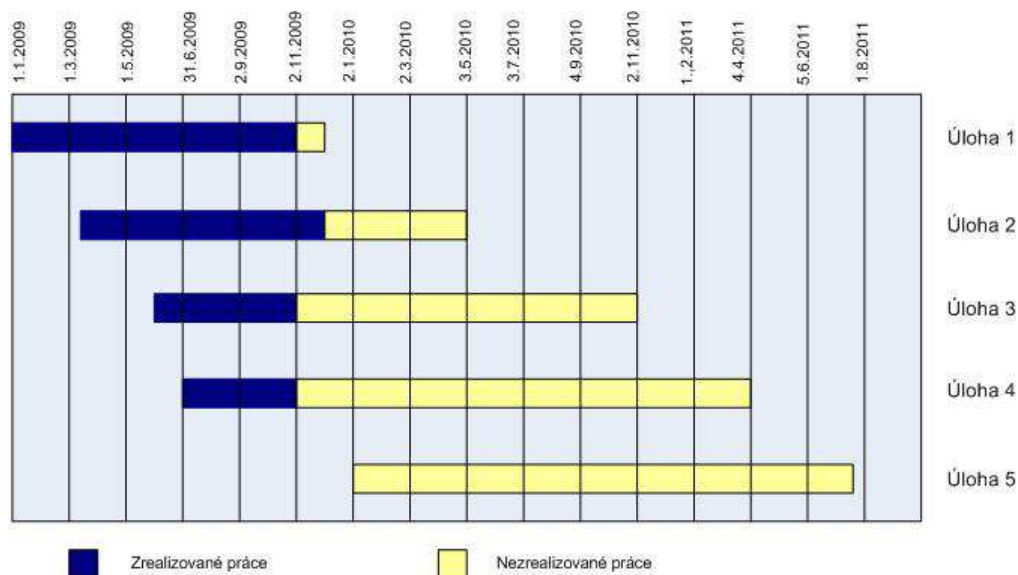
Obr. 5.13

Matematicky zapisujeme údaje o sieťovom grafe nasledovne: $G(U,H)$, kde:

- U- predstavuje definovanú množinu uzlov sieťového grafu,
- H- predstavuje definovanú množinu hrán sieťového grafu.

Ganttov diagram (GD) (obr.5.14) označovaný aj ako úsečkový diagram, sa zakresľuje v meradle (väčšinou v časovom) a úsečky tohto diagramu, znázorňujúce jednotlivé čiastkové činnosti sú úmerné množstvu spotrebovaného času. Pomocou týchto diagramov sledujeme vzájomnú závislosť jednotlivých činností v čase. Do popredia tu vystupuje predovšetkým vzťah medzi udalosťami a časom, čo je hlavná úloha a prednosť úsečkových diagramov. V dôsledku toho môžeme tieto diagramy používať ako nástroje zostavenia časového plánu a aj ako nástroje kontroly postupu prác. GD je možné použiť pre rôzne stupne dekompozície projektu, pre rôzne časové horizonty, rôzne stupne podrobnosti aj pre čiastkové projekty. Výhodou GD je jeho jednoduchosť a zrozumiteľnosť. To je tiež hlavný dôvod, že ho manažéri projektov používajú na sledovanie priebehu prác tak, že v grafe zobrazujú nielen plánované, ale aj skutočne dosiahnuté výsledky (Hrablik, 2009).

V dôsledku toho, že tieto diagramy nezohľadňovali vzťahy medzi jednotlivými činnosťami, došlo k vyvinutiu sieťovej analýzy, ktorá sleduje a prepracováva hlavnú myšlienku GD ďalej, pričom zároveň účinne rieši problém koordinácie všetkých činností tak, aby akcia ako celok bola splnená čo najskôr. Kým GD vyjadruje časovú postupnosť čiastkových operácií, sieťové diagramy zobrazujú v plnej šírke ich vecnú (organizačnú, technologickú) závislosť. Napriek tomu GD v pôvodnej podobe zostane aj naďalej cenným nástrojom plánovania a riadenia všade tam, kde ide výslovne o sledovanie časového, prípadne objemového plnenia úloh bez zvláštneho dôrazu na vzťah medzi čiastkovými činnosťami (výroba, vlastné náklady, produktivita práce, zamestnanosť, využitie výrobného zariadenia a pod.) (Hrablik, 2009).



Zdroj: Hrablík, 2009

Obr. 5.14

Na príklade 5.1 je demonštrovaný spôsob zostavovania sieťového grafu.

Príklad č. 5.1

Vedenie spoločnosti sa rozhodlo vybudovať novú výrobnú prevádzku. Odborníci špecifikovali činnosti, ktoré musia byť vykonané, ich trvanie (v týždňoch) a ich vzájomné väzby:

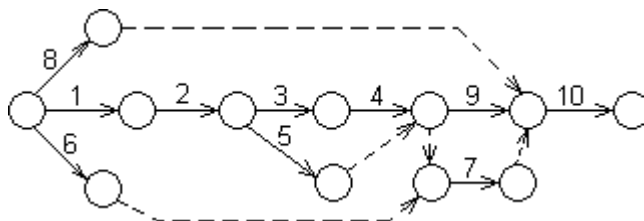
Tab. 5.2

Číslo činnosti	Popis činnosti	Trvanie	Bezprostredne predchádzajúce činnosti
1	Úprav staveniska a zemné práce	3	-
2	Vybudovanie základov	2	1
3	Vytvrdnutie základov (nevyhnutný predpoklad ďalších stavebných prác)	1	2
4	Stavba výrobnéj haly a súvisiace práce	5	3
5	Vybudovanie spevnenej prístupovej cesty nevyhnutnej na dovoz výrobného zariadenia do výrobnéj haly (práce vykonáva skupina pracovníkov, ktorí budovali základy)	4	2
6	Objednanie a výroba výrobného zariadenia	12	-
7	Dovoz a inštalácia výrobného zariadenia pracovníkmi dodávateľskej organizácie	3	4, 5, 6
8	Príprava a zaškolenie obslužného personálu v sídle dodávateľa výrobného zariadenia	2	-
9	Naplnenie skladu vo výrobnéj hale potrebnou zásobou polotovarov pred začatím skúšobnej prevádzky	1	4, 5
10	Skúšobná prevádzka	2	7, 8, 9

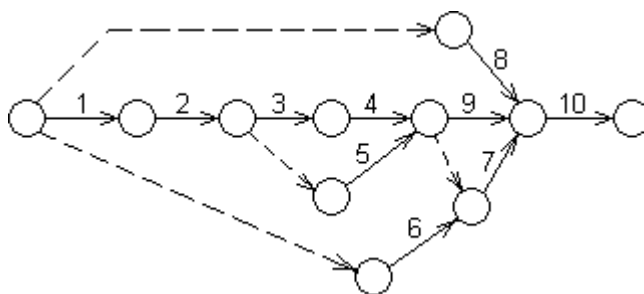
Úlohou je zostaviť SG.

Riešenie

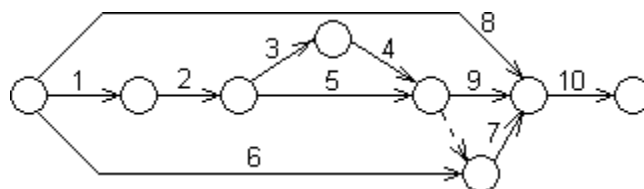
Pri zostavovaní SG metódou postupu vpred (späť) vznikne graf zobrazený na obrázku 5.15a (5.15b) a po úprave vylúčením zbytočných fiktívnych hrán graf zobrazený na obr. 5.16.



Obr. 5.15a



Obr. 5. 15b



Obr. 5.16

Činnosti 1 a 2 by mohli byť za určitých predpokladov zlúčené do jednej činnosti, ktorej trvanie by bolo súčtom trvaní pôvodných činností.

Predtým, ako pristúpime k tretej fáze – riešeniu, doplníme hrany údajmi, t. j. ohodnotíme ich. Prakticky sa používajú tri spôsoby ohodnotenia činností – **časové**, **zdrojové** alebo **nákladové**. Voľba spôsobu závisí od účelu použitia SA. Pri časovom ohodnotení je hrana doplnená údajom o trvaní danej činnosti, pri zdrojovom údajom o potrebe jednotiek jednotlivých zdrojov na realizáciu činnosti (materiálu, finančných prostriedkov, normohodín, plochy a pod.), pri nákladovom údajom o nákladoch, spojených s realizáciou danej činnosti.

5.2 ČASOVÁ ANALÝZA SIEŤOVÉHO GRAFU METÓDOU CPM

Prvým krokom riešenia SG býva časová analýza, t. j. výpočet údajov, ktoré charakterizujú priebeh prác na projekte a tvoria základ časového plánu celého projektu. Časová analýza je tiež východiskom pre nákladovú alebo zdrojovú analýzu.

5.2.1 Základné charakteristiky – definície a výpočty

Pri časovej analýze majú rozhodujúci význam údaje o okamihoch, v ktorých nastanú jednotlivé udalosti, údaje o trvaní, začiatku a ukončení jednotlivých činností aj projektu ako celku a údaje o rezervách. Sú to (Sakál, 2003):

a) *časové charakteristiky týkajúce sa projektu ako celku:*

T_0 **čas začiatku projektu** (môže byť zadany absolútne – ako dátum alebo relatívne – ako „čas 0“),

T_n **vypočítaný čas trvania projektu** (trvanie projektu dané súčtom trvania činností tvoriacich kritickú cestu = dĺžka kritickej cesty),

T_p **plánované trvanie projektu** (trvanie projektu, ktoré zodpovedá požadovanému termínu jeho ukončenia);

b) *časové charakteristiky týkajúce sa jednotlivých činností:*

t_{ij} **trvanie činnosti (i, j)** (vyjadrené v zvolených časových jednotkách – dňoch, týždňoch, mesiacoch a pod.),

- ZM_{ij} **najskôr možný začiatok činnosti (i, j)**, t. j. časový okamih, v ktorom sa príslušná činnosť môže najskôr začať,
- KM_{ij} **najskôr možný koniec činnosti (i, j)**, t. j. časový okamih, v ktorom sa príslušná činnosť môže najskôr skončiť,
- ZP_{ij} **najneskôr prípustný začiatok činnosti (i, j)**, t. j. časový okamih, v ktorom sa musí príslušná činnosť najneskôr začať,
- KP_{ij} **najneskôr prípustný koniec činnosti (i, j)**, t. j. časový okamih, v ktorom sa musí príslušná činnosť najneskôr skončiť,
- RC_{ij} **celková rezerva činnosti (i, j)**, t. j. počet časových jednotiek, o ktorý možno najviac predĺžiť trvanie príslušnej činnosti alebo posunúť jej začiatok oproti jej najskôr možnému začiatku bez toho, aby sa zmenilo trvanie celého projektu (ak sa trvanie danej činnosti predĺži o celkovú rezervu, stane sa táto činnosť kritickou, rovnako ako aj aspoň jedna z jej bezprostredne predchádzajúcich a aspoň jedna z jej bezprostredne nasledujúcich činností),
- RV_{ij} **voľná rezerva činnosti (i, j)**, t. j. počet časových jednotiek, o ktorý možno najviac predĺžiť trvanie príslušnej činnosti alebo posunúť jej začiatok oproti jej najskôr možnému začiatku bez toho, aby sa zmenil najskôr možný začiatok všetkých bezprostredne nasledujúcich činností (vyčerpanie voľnej rezervy nemá vplyv na celkovú rezervu činností vystupujúcich z uzla j),
- RN_{ij} **nezávislá rezerva činnosti (i, j)**, t. j. počet časových jednotiek, o ktorý možno najviac predĺžiť trvanie príslušnej činnosti alebo posunúť jej začiatok oproti jej najskôr možnému začiatku bez toho, aby sa zmenil najskôr možný začiatok všetkých bezprostredne nasledujúcich činností a najneskôr prípustný koniec všetkých bezprostredne predchádzajúcich činností (je to vlastne maximálne posunutie alebo predĺženie danej činnosti bez oddiaľovania, alebo predlžovania nasledujúcich činností za predpokladu, že predchádzajúce činnosti sa končia čo najneskôr),
- RZ_{ij} **závislá rezerva činnosti (i, j)**, t. j. počet časových jednotiek, o ktorý možno najviac predĺžiť trvanie príslušnej činnosti alebo posunúť jej začiatok oproti najneskôr prípustnému koncu bezprostredne predchádzajúcich činností bez toho, aby sa zmenil najneskôr prípustný začiatok všetkých bezprostredne nasledujúcich činností (je to vlastne

maximálne posunutie alebo predĺženie danej činnosti, ktoré neovplyvní trvanie projektu, ak predchádzajúce činnosti využili svoje rezervy);

c) *časové charakteristiky týkajúce sa jednotlivých uzlov:*

TM_i **najskôr možný termín uzla i** , t. j. časový okamih, v ktorom sa môže najskôr uskutočniť udalosť vyjadrená príslušným uzlom,

TP_i **najneskôr prípustný termín uzla i** , t. j. časový okamih, v ktorom sa musí najneskôr uskutočniť udalosť vyjadrená príslušným uzlom,

R_i **rezerva uzla i** , t. j. rozdiel medzi najskôr prípustným a najneskôr možným termínom uzla ($R_i = TP_i - TM_i$).

V nasledujúcich výpočtoch budeme predpokladať, že plánovaným trvaním projektu bude vypočítané trvanie a čas začiatku projektu bude zadaný relatívne, t.j. $T_0 = 0$.

Časové charakteristiky sa počítajú na základe **rekurentných vzťahov**. Výpočet má 2 etapy. V prvej postupujeme od počiatočného uzla ku koncovému uzlu a určujeme najskôr možné termíny činností aj uzlov, v druhej etape postupujeme od koncového uzla k počiatočnému a určujeme najneskôr prípustné termíny činností a uzlov.

Najskôr možný a najneskôr prípustný termín uzla možno určiť pomocou vzťahov:

$$TM_i = ZM_{ij}$$

$$TM_1 = T_0 = 0 \quad (\text{počiatočný uzol grafu má index } 1),$$

$$TM_i = \max_h (TM_h + t_{hi}) \quad (h \text{ sú indexy všetkých uzlov, z ktorých vystupujú hrany vstupujúce do uzla } i),$$

$$TP_m = TM_m = T_n \quad (\text{koncový uzol grafu má index } m),$$

$$TP_j = \min_k (TP_k - t_{jk}) \quad (k \text{ sú indexy všetkých uzlov, do ktorých vstupujú hrany vystupujúce z uzla } i).$$

Časové charakteristiky jednotlivých činností možno vypočítať pomocou vzťahov:

$$ZM_{ij} = TM_i$$

$$KM_{ij} = ZM_{ij} + t_{ij} = TM_i + t_{ij}$$

$$KP_{ij} = TP_j$$

$$ZP_{ij} = KP_{ij} - t_{ij} = TP_j - t_{ij}$$

Postupnosť hrán (činností) spájajúcich počiatočný a koncový uzol grafu, v ktorom sa každá nasledujúca činnosť začína v uzle, kde sa predchádzajúca činnosť končí, sa nazýva **cesta**. Trvanie cesty je súčtom trvania všetkých činností tvoriacich cestu. Cesta, ktorá má najdlhšie trvanie, sa nazýva **kritická cesta**. Každá z činností tvoriacich kritickú cestu je **kritická činnosť**. Činnosť je kritická, ak platí:

$$t_{ij} = TP_j - TM_i$$

Pre kritickú činnosť platí tiež, že

$$t_{ij} = KP_{ij} - ZM_{ij}, \quad ZM_{ij} = ZP_{ij}, \quad KM_{ij} = KP_{ij}.$$

Kritické činnosti majú všetky rezervy nulové. Kritická cesta prechádza cez uzly, ktoré majú nulovú rezervu uzla. V SG môže byť aj niekoľko kritických ciest, ktoré sa môžu vetviť. Kritická cesta môže obsahovať aj fiktívne činnosti, ktoré však majú nulové trvanie, a preto k jej dĺžke neprispievajú.

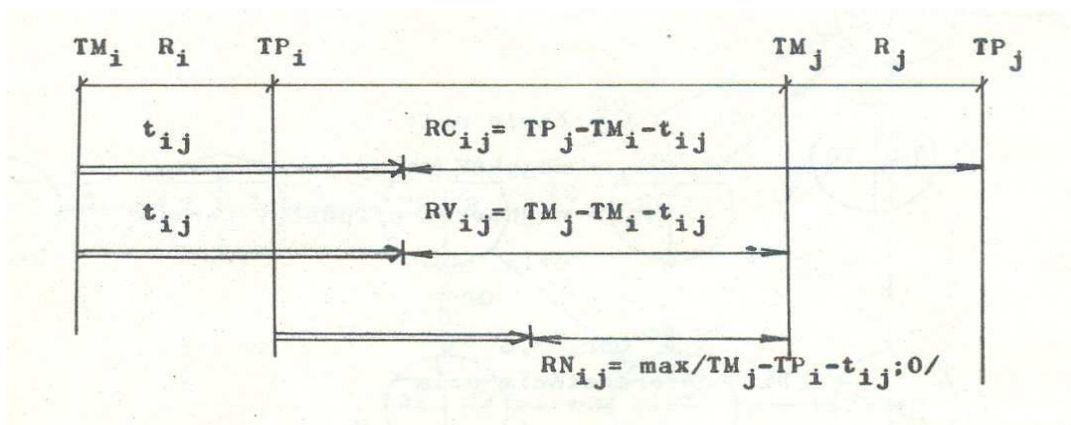
Činnosti, ktoré neležia na kritickej ceste, sa nazývajú **nekritické činnosti**. Majú nenulovú prinajmenšom celkovú rezervu a v určitých prípadoch môžu mať nenulové aj iné rezervy. Rezervy činností možno vypočítať (obr.5.17) pomocou vzťahov:

$$RC_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij} = KP_{ij} - KM_{ij} = ZP_{ij} - ZM_{ij}$$

$$RV_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij} = TM_j - ZM_{ij} - t_{ij} = TM_j - KM_{ij}$$

$$RN_{ij} = \max(TM_j - TP_i - t_{ij}; 0)$$

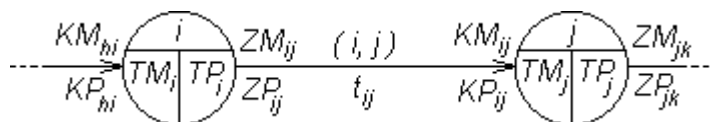
$$RZ_{ij} = TP_j - TP_i - t_{ij}$$



Obr.5.17

5.2.2 Výpočet v grafe

V predchádzajúcom texte bol uvedený postup zostavovania SG. V rámci druhej fázy tohto postupu sa vytvorí grafický model projektu – SG (môže mať podobu ako napr. na obr. 5.16). Predtým ako pristúpime k výpočtom (3. fáza postupu), je vhodné prekresliť graf do podoby, v ktorej možno do uzlov a ku hranám písať vypočítavané časové charakteristiky. Umiestnenie údajov je zrejmé z obrázku 5.18.



Obr. 5.18

Po prekreslení grafu a jeho doplnení označením hrán, uzlov a údajov o trvaní jednotlivých činností možno pristúpiť k riešeniu podľa nasledujúceho postupu:

1. Do počiatočného uzla zapísať hodnotu $TM_1 = 0$.
2. Ku všetkým hranám vychádzajúcim z počiatočného uzla grafu zapísať hodnoty $ZM_{1j} = 0$ a $KM_{1j} = t_{1j}$.
3. V uzle j , kde sú známe hodnoty KM_{ij} všetkých hrán vstupujúcich do tohto uzla, určiť a zapísať hodnotu TM_j ako maximum zo všetkých hodnôt KM_{ij} .

4. Pri uzloch j so známymi hodnotami TM_j určiť $ZM_{jk} = TM_j$ a $KM_{jk} = ZM_{jk} + t_{jk}$ všetkých hrán vystupujúcich z uzla j .
5. Body 3 a 4 tohto postupu opakovať až do určenia všetkých hodnôt KM , TM a ZM v grafe.
6. V koncovom (n - tom) uzle grafu určiť hodnotu $TP_n = TM_n$.
7. Určiť hodnoty $KP_{mn} = TP_n$ a $ZP_{mn} = KP_{mn} - t_{mn}$ všetkých hrán vstupujúcich do koncového uzla.
8. V uzle j , kde sú známe hodnoty ZP_{jk} všetkých hrán vystupujúcich z tohto uzla, určiť a zapísať hodnotu TP_j ako minimum zo všetkých hodnôt ZP_{jk} .
9. Pri uzloch j so známymi hodnotami TP_j určiť $KP_{ij} = TP_j$ a $ZP_{ij} = KP_{ij} - t_{ij}$ všetkých hrán vstupujúcich do uzla j .
10. Body 8 a 9 tohto postupu opakovať až do určenia všetkých hodnôt KP , TP a ZP v grafe.

Uvedený postup pozostáva z dvoch fáz. V prvej – pri postupe od počiatočného uzla ku koncovému sa určujú najskôr možné termíny uzlov, začiatky a konce činností, v druhej – pri postupe od koncového uzla k počiatočnému sa určujú najneskôr prípustné termíny uzlov, začiatky a konce činností. Po ukončení postupu určíme a vyznačíme v grafe kritické cesty tvorené postupnosťami kritických činností. Ktoré činnosti sú kritické, určíme pomocou vyššie uvedených vzťahov. Navyše, kritické cesty prechádzajú cez uzly s nulovou rezervou.

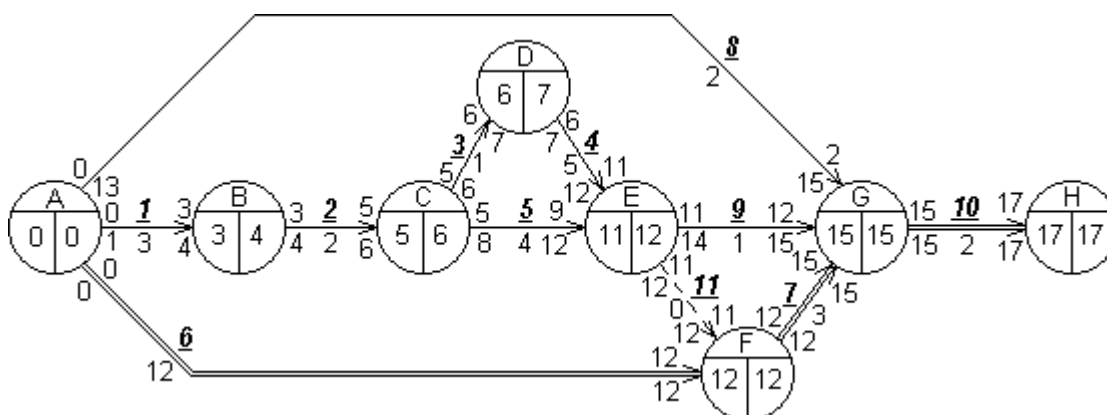
Na príklade 5.2 je demonštrovaná časová analýza sieťového grafu výpočtom v grafe.

Príklad č. 5.2

Príklad nadväzuje na výsledok riešenia príkladu 5.1, kde na základe zadania bol zostavený SG projektu. Riešením v grafe určíme celkové trvanie projektu, kritické činnosti a celkové rezervy (RC) nekritických činností.

Riešenie

Najprv treba graf z obr. 5.16 prekresliť do podoby vhodnej na riešenie v grafe. Uzly budú doplnené číslami (alebo iným označením, napr. písmenami). Výsledok riešenia v grafe je uvedený na obr. 5.19.



Obr. 5.19

Z obrázku vyplýva, že celkové trvanie projektu je 17 týždňov, kritickými činnosťami sú činnosti 6, 7 a 10. Činnosť 8 má celkovú rezervu 13 týždňov, činnosti 5 a 9 majú celkové rezervy 3 týždne a činnosti 1, 2, 3, 4 majú celkové rezervy 1 týždeň.

5.2.3 Výpočet v tabuľke

Základ tabuľky, v ktorej budeme robiť časovú analýzu SG, tvorí incidenčná matica uzol-uzol. Riadky zodpovedajú uzlom, z ktorých vystupujú hrany sieťového grafu (i), stĺpce zodpovedajú uzlom, do ktorých hrany SG vstupujú (j). Prvkami matice sú údaje o trvaní jednotlivých činností (t_{ij}), ktoré sa zapisujú do stredu jednotlivých buniek tabuľky na priesečníku príslušného riadka a stĺpca. V prípade fiktívnych činností sa zapíše hodnota 0. Ak medzi uzlami neexistuje hrana, bunka ostáva prázdna. Okrem údajov o trvaní činnosti sa do buniek tabuľky budú zapisovať v priebehu riešenia aj údaje KM_{ij} a ZP_{ij} . Do posledného stĺpca tabuľky sa budú zapisovať údaje TM_i a do posledných dvoch riadkov údaje TP_j a $TP_j - TM_j = R_j$ (tabuľka 5.3).

Tab. 5.3

$i \setminus j$	1	2	...	n	TM_i
1		KM_{ij} t_{ij} ZP_{ij}			
2					
...					
n					
TP_j					
$TP_j - TM_j$					

Po zhotovení tabuľky a vložení údajov t_{ij} bude vlastné riešenie prebiehať podľa nasledujúceho postupu:

1. Do bunky na priesečníku riadka počiatočného uzla a stĺpca TM_i zapísať hodnotu 0.
2. Do pravého rohu všetkých obsadených buniek (t.j. tých, ktoré zodpovedajú existujúcej hrane v grafe) riadka počiatočného uzla zapísať hodnotu $KM_{ij} = TM_i + t_{ij}$.
3. Nájsť j -ty stĺpec, v ktorom sú už všetky hodnoty KM_{ij} určené a z nich určiť ďalšiu hodnotu TM_j ako maximum z hodnôt KM_{ij} j -teho stĺpca. (Tento bod treba zopakovať toľkokrát, v koľkých stĺpcoch sú určené všetky hodnoty KM_{ij} .).
4. Vo všetkých obsadených bunkách riadka i s vyplnenou hodnotou TM_i určiť $KM_{ij} = TM_i + t_{ij}$.
5. Body 3 a 4 opakovať až do určenia všetkých hodnôt KM_{ij} a TM_i v tabuľke.
6. Priradiť a zapísať do tabuľky hodnotu $TP_n = TM_n$ (n je index koncového uzla grafu).
7. Vo všetkých obsadených bunkách j -teho stĺpca s určenou hodnotou TP_j vypočítať a zapísať do tabuľky hodnoty $ZP_{ij} = TP_j - t_{ij}$.
8. Nájsť i -ty riadok, v ktorom sú už všetky hodnoty ZP_{ij} určené a z nich určiť ďalšiu hodnotu TP_i ako minimum z hodnôt ZP_{ij} i -teho riadka. (Tento bod treba zopakovať toľkokrát, v koľkých riadkoch sú určené všetky hodnoty ZP_{ij} .)
9. Body 7 a 8 opakovať až do určenia všetkých hodnôt ZP_{ij} a TP_j v tabuľke.
10. Vypočítať rezervy uzlov $R_j = TP_j - TM_j$ a zapísať ich do posledného riadka tabuľky.
11. Vypočítať a zapísať do tabuľky, ktorej hlavička môže mať napríklad podobu uvedenú v tabuľke 5.4 ďalšie charakteristiky podľa nasledujúcich vzťahov:

$$ZM_{ij} = TM_i$$

$$KP_{ij} = TP_j$$

$$RC_{ij} = ZP_{ij} - ZM_{ij} = KP_{ij} - KM_{ij}$$

$$RV_{ij} = TM_j - KM_{ij}$$

$$RN_{ij} = TM_j - TP_i - t_{ij} \quad (\text{alebo } 0, \text{ ak by vyšlo výpočtom číslo menšie ako } 0)$$

$$RZ_{ij} = TP_j - TP_i - t_{ij}.$$

Tab. 5.4

<i>Činnosť</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	ZM_{ij}	KM_{ij}	ZP_{ij}	KP_{ij}	RC_{ij}	RV_{ij}	RN_{ij}	RZ_{ij}

Na príklade 5.3 je demonštrovaná časová analýza sieťového grafu výpočtom v tabuľke.

Príklad č. 5.3:

Príklad rovnako ako príklad 5.2 nadväzuje na výsledok riešenia príkladu 5.1, kde na základe zadania bol zostavený SG projektu. Riešením v tabuľke (incidenčnej matici) určíme celkové trvanie projektu, kritické činnosti a celkové rezervy (RC) nekritických činností, ale navyše aj ďalšie rezervy nekritických činností – RZ , RV a RN .

Riešenie

Pri riešení vychádzame rovnako ako v predchádzajúcom prípade zo zadania príkladu 5.1. Zostavíme tabuľku (tabuľka 5.5), pričom uzly pomenujeme rovnako ako pri grafickom riešení:

Tab. 5.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	TM_i
A		3 3 1				12 12 0	2 2 13		0
B			5 2 4						3
C				6 1 6	9 4 8				5
D					11 5 7				6
E						11 0 12	12 1 14		11
F							15 3 12		12
G								17 2 15	15
H									17
TP_j	0	4	6	7	12	12	15	17	
$TP_j - TM_i$	0	1	1	1	1	0	0	0	

Hodnoty z tabuľky 5.5, ako aj ďalšie údaje, ktoré určíme na základe uvedených vzťahov, zapíšeme do tabuľky 5.6:

Tab. 5.6

Činnosť	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>t</i>	ZM_{ij}	KM_{ij}	ZP_{ij}	KP_{ij}	<i>RC</i>	<i>RV</i>	<i>RZ</i>	<i>RN</i>
1	A	B	3	0	3	1	4	1	0	1	0
2	B	C	2	3	5	4	6	1	0	0	0
3	C	D	1	5	6	6	7	1	0	0	0
4	D	E	5	6	11	7	12	1	0	0	0
5	C	E	4	5	9	8	12	3	2	2	1
6	A	F	12	0	12	0	12	0	0	0	0
7	F	G	3	12	15	12	15	0	0	0	0
8	A	G	2	0	2	13	15	13	13	13	13
9	E	G	1	11	12	14	15	3	3	2	2
10	G	H	2	15	17	15	17	0	0	0	0
11	E	F	0	11	11	12	12	1	1	0	0

Riešenie v tabuľke viedlo k rovnakému výsledku ako riešenie v grafe. Činnosti, ktoré ležia na kritickej ceste, majú všetky rezervy nulové.

5.2.4 Náklady v sieťovej analýze

Pri nákladovej analýze v sieťovom plánovaní vychádzame z výsledkov časovej analýzy. Doposiaľ sme predpokladali, že trvanie jednotlivých činností je dané a nemenné. Teraz budeme predpokladať, že trvanie jednotlivých činností môže byť závislé od priamych nákladov vynaložených na ich realizáciu. **Nákladová funkcia**, ktorá udáva výšku priamych nákladov na realizáciu činnosti v závislosti od trvania tejto činnosti, býva v skutočnosti nelineárna. Budeme ju aproximovať lineárnou funkciou:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \cdot t_{ij},$$

kde: c_{ij} sú **priame náklady** na realizáciu činnosti (*i, j*),

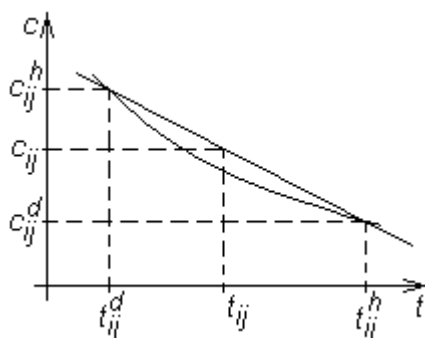
a_{ij} je konštanta, ktorá zohľadňuje veľkosť **nepružných nákladov**, nezávisiacich od trvania činnosti,

b_{ij} je **nákladový koeficient (konštanta nákladového spádu)**, ktorý vyjadruje úbytok (prírastok) nákladov na realizáciu činnosti (i, j) pri predĺžení (skrátení) trvania činnosti o jednu časovú jednotku.

Budeme predpokladať, že t_{ij}^d je najkratšie možné trvanie činnosti spojené s najvyššími možnými priamymi nákladmi c_{ij}^h a t_{ij}^h je najdlhšie možné trvanie činnosti spojené s najnižšími možnými priamymi nákladmi c_{ij}^d . t_{ij} bude normálne trvanie činnosti pri nákladoch c_{ij} . Nákladový koeficient potom možno vypočítať:

$$b_{ij} = \frac{c_{ij} - c_{ij}^d}{t_{ij}^h - t_{ij}^d} = \frac{c_{ij}^h - c_{ij}}{t_{ij} - t_{ij}^d} = \frac{c_{ij}^h - c_{ij}^d}{t_{ij}^h - t_{ij}^d}$$

Na obr. 5.20 je znázornená nákladová funkcia aj priamka, ktorou je aproximovaná.

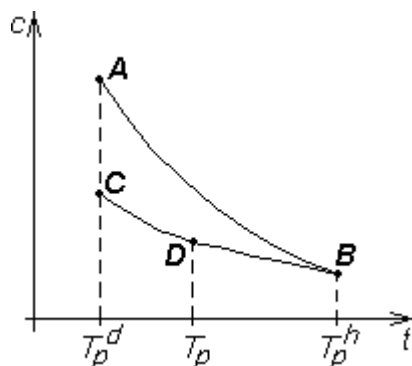


Obr. 5.20

Priame náklady celého projektu možno určiť sumariáciou priamych nákladov jednotlivých činností:

$$C_p = \sum c_{ij} = \sum (a_{ij} - b_{ij} \cdot t_{ij})$$

Vzťah medzi priamymi nákladmi celého projektu a trvaním projektu je znázornený na obr. 5.21. Body A , B , C , D predstavujú stavy, ktoré sa môžu vyskytnúť a ktorých dosiahnutie môže byť predmetom riešenia.



Obr. 5.21

Stav A nastane, ak všetky činnosti budú realizované v najkratšom možnom čase, avšak s maximálnymi nákladmi.

Stav B nastane, ak realizácia všetkých činností bude trvať čo najdlhšie, avšak s minimálnymi nákladmi.

Stav C nastane, ak bude projekt realizovaný v rovnakom čase ako v prípade A, ale s čo najnižšími nákladmi.

Stav D predstavuje optimálnu kombináciu nákladov a trvania projektu, pričom za optimálne sa považuje, keď sa dosiahne:

- požadované trvanie projektu pri čo najnižších nákladoch,
- maximálne prípustné priame náklady pri čo najkratšom trvaní projektu.

Riešenie predpokladá, že pre každú činnosť bude známe najkratšie a najdlhšie možné trvanie a takisto priame náklady spojené s realizáciou činnosti v najkratšom možnom a najdlhšom prípustnom čase. Predpokladáme tiež, že v tomto intervale možno nákladovú funkciu aproximovať priamkou. Pre každú činnosť teda možno vypočítať nákladový koeficient.

Riešenie stavov A a B je zrejmé – rovnaké ako v predchádzajúcom príklade.

Stav C predpokladá, že projekt bude zrealizovaný v najkratšom možnom čase, avšak zámerom je, aby náklady pri takomto trvaní boli čo najnižšie. Vychádza sa zo stavu A. Predĺži sa trvanie niektorých nekritických činností (**rozpustia sa rezervy** týchto činností) tak, aby sa nepredĺžilo trvanie celého projektu. Pritom rozpúšťanie rezerv treba robiť optimálnym spôsobom, aby sa dosiahla čo najväčšia úspora priamych nákladov. Rezervy treba začať rozpúšťať od tých nekritických činností, ktoré majú najväčší nákladový koeficient, pretože predĺžením ich trvania sa dosiahne najväčšia úspora nákladov. Trvanie činnosti možno predĺžiť aj o jej celú celkovú rezervu, avšak len tak, aby sa neprekročilo najdlhšie prípustné trvanie činnosti, vyplývajúce zo zadania. Po rozpustení rezervy každej jednotlivej činnosti treba urobiť časovú analýzu celého grafu, pretože rozpustením rezervy sa pravdepodobne zmenia celkové rezervy viacerých činností.

Potom možno pokračovať rozpúšťaním rezervy ďalšej činnosti s čo najväčším nákladovým koeficientom, a tak pokračovať až do vyčerpania všetkých možností.

Do stavu **D** sa možno dostať zo stavu **B** alebo zo stavu **C**.

Ak je cieľom skrátiť celkové trvanie projektu na T_p s minimálnym zvýšením nákladov, možno postupovať takto (prechod zo stavu **B** do stavu **D**):

1. Skrátiť trvanie kritickej činnosti s najmenšou hodnotou nákladového koeficienta maximálne na jej najkratšie možné trvanie. Ak na dosiahnutie celkového trvania projektu T_p netreba také skrátenie, stačí skrátiť trvanie o menšiu hodnotu.
2. Urobiť časovú analýzu celého grafu a určiť nové kritické cesty.
3. Opakovať body 1 a 2 až po dosiahnutie požadovanej hodnoty T_p .

Ak je cieľom znížiť priame náklady projektu na požadovanú hodnotu pri čo najmenšom predĺžení trvania projektu, možno postupovať takto (prechod zo stavu **C** do stavu **D**):

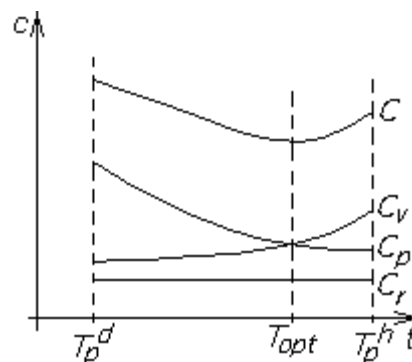
1. Predĺžiť trvanie kritickej činnosti s najväčšou hodnotou nákladového koeficienta maximálne na jej najdlhšie možné trvanie.
2. Urobiť časovú analýzu celého grafu a určiť nové kritické cesty a celkové rezervy nekritických činností.
3. Optimálnym spôsobom rozpustiť rezervy nekritických činností v poradí od tej, ktorá má najväčšiu hodnotu nákladového koeficienta (postup je rovnaký ako pri prechode zo stavu **A** do stavu **C**).
4. Ak sa celkové náklady projektu znížili viac ako bolo požadované, treba sa vrátiť k bodu 1 tohto postupu a postup zopakovať s menším predĺžením trvania uvedenej kritickej činnosti. V opačnom prípade treba zopakovať postup 1 – 4 predĺžením trvania ďalšej kritickej činnosti (tej, ktorá má teraz najväčšiu hodnotu nákladového koeficienta). Postup treba opakovať dovtedy, kým sa dosiahne požadovaná hodnota priamych nákladov s požadovanou presnosťou.

Do stavu **D** sa možno dostať zo stavu **B** aj zo stavu **C** nezávisle od toho, ktorý z uvedených cieľov sledujeme.

Celkové náklady projektu C obsahujú okrem priamych nákladov aj režijné náklady projektu ako celku (nepriame náklady) C_r a náklady viazanosti C_v (t.j. náklady na viazanie prostriedkov u dodávateľa, straty z neskoršieho uvádzania výrobných kapacít do prevádzky a pod.):

$$C = C_p + C_r + C_v$$

Spôsob určenia optimálnych celkových nákladov projektu je zrejmý z obr. 5.22.



Obr. 5.22

Uvedené postupy sú ilustrované na príklade 5.4.

Príklad č. 5.4

Zadanie príkladu je modifikáciou zadania príkladu 5.1. Činnosti a ich nadväznosti sú rovnaké ako v príklade 5.1, trvanie činností z príkladu 5.1 je považované za normálne trvanie a súčasne najdlhšie možné, ku ktorému sa viažu najnižšie náklady normálneho trvania c_{ij}^d . Odborníci konštatovali, že niektoré činnosti možno vykonať v kratšom čase t_{ij}^d , avšak s vyššími nákladmi c_{ij}^h . Aktuálne údaje sú uvedené v tabuľke 5.7. V poslednom stĺpci tabuľky je vypočítaný nákladový koeficient b_{ij} . Náklady sú uvedené v bližšie neurčených peňažných jednotkách.

Tab. 5.7

	normálne trvanie		skrátené trvanie		b_{ij}
	t_{ij}^h	c_{ij}^d	t_{ij}^d	c_{ij}^h	
1	3	70	2	100	30
2	2	110	2	110	0
3	1	0	1	0	0
4	5	400	4	450	50
5	4	200	3	250	50
6	12	600	8	920	80
7	3	80	3	80	0
8	2	10	2	10	0
9	1	10	1	10	0
10	2	20	2	20	0

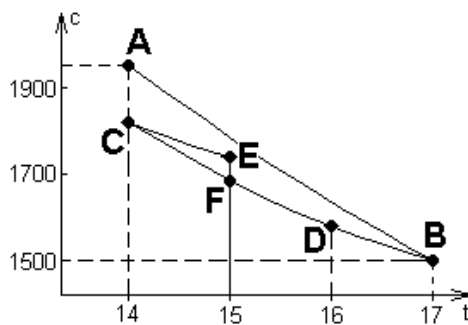
Budeme riešiť niekoľko úloh. Zavedieme pritom predpoklad, že trvanie všetkých činností môže nadobúdať len celočíselné hodnoty.

Úloha 1

Určiť trvanie projektu za predpokladu normálneho trvania všetkých činností a priame náklady na jeho realizáciu.

Úloha 1 – riešenie

Ide o situáciu, ktorá v grafickom vyjadrení zodpovedá bodu **B** na obr. 5.23. Výpočet v grafe je uvedený na obr. 5.15 (riešenie príkladu 5.2). Trvanie projektu je 17 týždňov. Priame náklady na jeho realizáciu získame sumarizáciou údajov v stĺpci c_{ij}^d tabuľky 5.7. Výsledok je 1500 jednotiek.



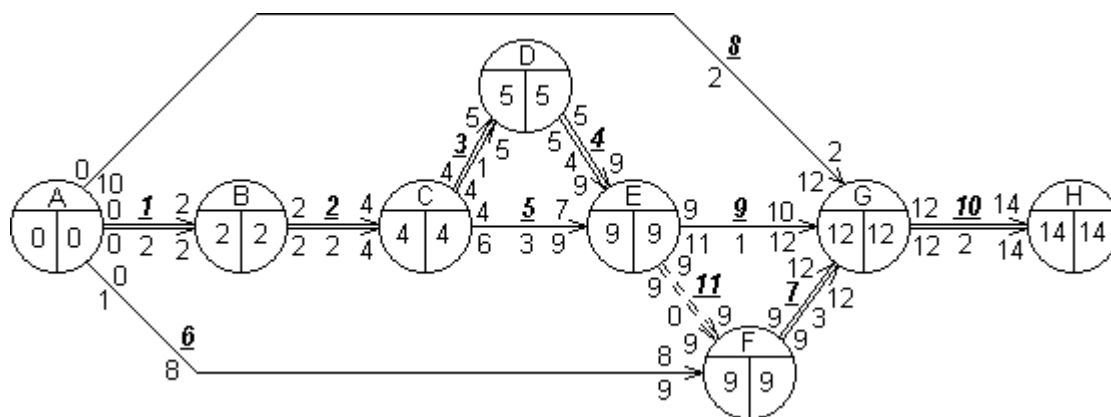
Obr. 5.23

Úloha 2

Určiť trvanie projektu za predpokladu skráteného trvania všetkých činností a priame náklady na jeho realizáciu.

Úloha 2 – riešenie

Ide o situáciu, ktorá v grafickom vyjadrení zodpovedá bodu **A** na obr. 5.23. Výpočet v grafe je uvedený na obr. 5.24. Trvanie projektu je 14 týždňov. Priame náklady na jeho realizáciu získame sumarizáciou údajov v stĺpci c_{ij}^h tabuľky 5.7. Je to 1950 jednotiek. Kritickými činnosťami sú činnosti 1, 2, 3, 4, 11 (fiktívna), 7 a 10.



Obr. 5.24

Úloha 3

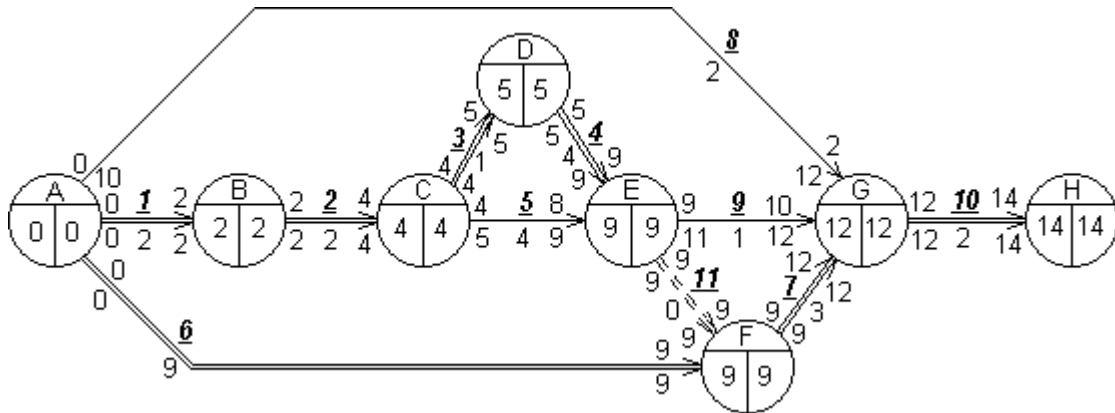
Určiť najkratšie možné trvanie projektu s čo najnižšími nákladmi.

Úloha 3 – riešenie

Vychádzame z riešenia úlohy 2, ktoré budeme ďalej upravovať postupným rozpúšťaním rezerv nekritických činností.

V prvom kroku predĺžime trvanie nekritickej činnosti s najväčším nákladovým koeficientom. Je to činnosť 6 s nákladovým koeficientom 80, ktorá má celkovú rezervu 1. Jej trvanie možno predĺžiť o celú túto rezervu, čím sa náklady znížia na 1870 jednotiek. Táto zmena nemá vplyv na celkové rezervy ostatných nekritických činností, takže možno predĺžiť aj trvanie činnosti 5 s nákladovým koeficientom 50, ktorá má celkovú rezervu 2. S ohľadom na zadanie

však možno jej trvanie predĺžiť len o hodnotu 1, čím náklady klesnú na 1820. Po týchto krokoch sú naďalej niektoré činnosti nekritické (okrem činnosti 5 aj činnosti 8 a 9), avšak s ohľadom na zadanie nemožno ich trvanie predlžovať. Výsledné riešenie je na obr. 5.25 a na obr. 5.23 mu zodpovedá bod C. Kritickými činnosťami sú činnosti 6, 1, 2, 3, 4, 11 (fiktívna), 7 a 10.



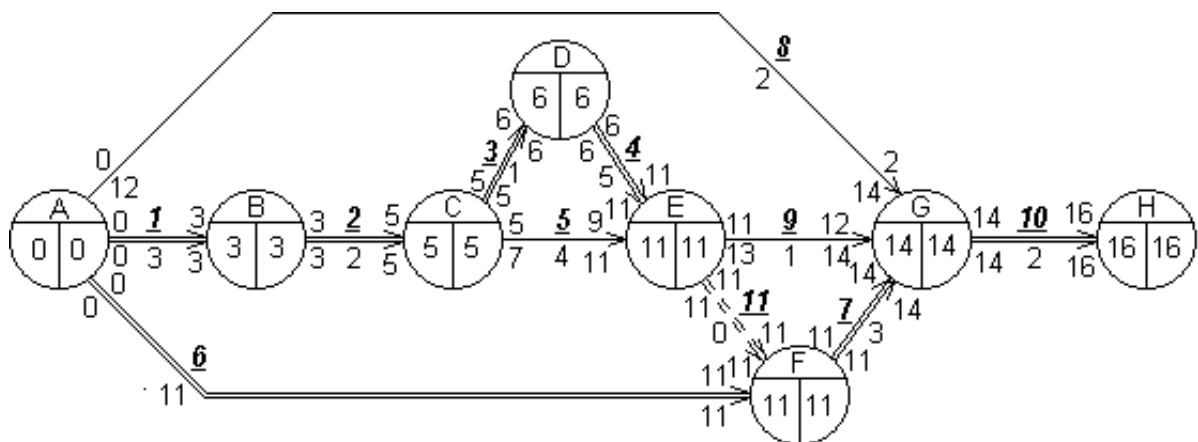
Obr. 5.25

Úloha 4

Zistiť, s akými čo najnižšími nákladmi možno zrealizovať projekt za 16 týždňov.

Úloha 4 – riešenie

Vychádzame z riešenia úlohy 1. Treba skrátiť o 1 týždeň trvanie tej kritickej činnosti, ktorá má najmenšiu hodnotu nákladového koeficientu. Z troch kritických činností (6, 7 a 10) však možno skrátiť len trvanie činnosti 6, preto ho skrátime z hodnoty 12 na 11. Náklady sa tým zvýšia na 1580 a výsledné riešenie (obr. 5.26) obsahuje okrem pôvodných kritických činností (6, 7, 10) aj ďalšie kritické činnosti (1, 2, 3, 4 a 11). Riešenie zodpovedá bodu D na obr. 5.23.



Obr. 5.26

Úloha 5

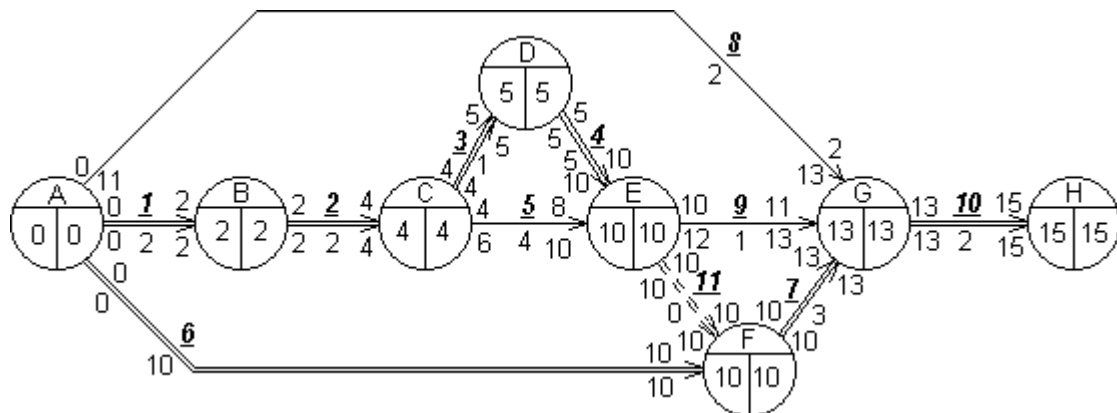
Zistiť, za aký čo najkratší čas možno zrealizovať projekt s nákladmi nižšími ako 1700 jednotiek.

Úloha 5 – riešenie

Úlohu možno riešiť dvoma spôsobmi. Pri jednom spôsobe by sme vychádzali z riešenia úlohy 4 a pokračovali rovnako ako v úlohe 4 skracovaním trvania vhodných kritických činností. My však teraz použijeme druhý spôsob.

Budeme vychádzať z riešenia úlohy 3 a budeme predlžovať trvanie kritickej činnosti s maximálnou hodnotou nákladového koeficientu. Je to činnosť 6. Jej trvanie predĺžime o 1 týždeň a presvedčíme sa, či sa náklady po rozpustení rezerv znížia pod hodnotu 1700 jednotiek (mohli by sme skúsiť aj väčšie predĺženie, avšak v tomto konkrétnom príklade je zrejmé, že predĺžením o 2 týždne by sme sa po rozpustení rezerv dostali až do bodu **D** na obr. 5.23, ktorý zodpovedá riešeniu úlohy 4. Postup možno rozdeliť do dvoch fáz. V prvej fáze skrátime uvedeným spôsobom trvanie činnosti 6, čím sa dostaneme z bodu **C** do bodu **E** (na obr. 5.23), náklady sa znížia na 1740 jednotiek a kritickými останú len činnosti 6, 7 a 10. V druhej fáze rozpustíme optimálnym spôsobom rezervy všetkých nekritických činností, a tým sa dostaneme do bodu **F**. Z nekritických činností možno predĺžiť len trvanie činností 1 a 4. Väčší nákladový koeficient má z nich činnosť 4, preto jej trvanie predĺžime o 1 týždeň, čo je jej celková rezerva a zároveň maximálne možné predĺženie vyplývajúce zo zadania. Výsledné riešenie je na

obr. 5.27. Náklady realizácie projektu klesli na 1690 jednotiek. Činnosti 1, 2, 3, 4, 11 (fiktívna), 7, 10 a 6 sú kritické a žiadnej z nekritických činností (5, 8 a 9) už nemožno predĺžiť trvanie.



Obr. 5.27

5.2.5 Zdroje v sieťovej analýze

V predchádzajúcich úvahách sme uviedli, že realizácia činností analyzovaných v rámci SA je podmienená určitým disponibilným časom a spojená s určitým objemom peňažných prostriedkov na ich realizáciu – nákladmi. Okrem toho ale môže byť podmienená tiež dostatkom iných zdrojov, napr. pracovníkov, technických zariadení, nástrojov, prípravkov, mechanizmov a pod. Niekedy je množstvo takýchto zdrojov, ktoré musia byť súčasne k dispozícii, obmedzené, inokedy je vhodné rozložiť spotrebu takýchto zdrojov v určitom období rovnomerne.

Zdroje môžu byť **deliteľné**, ktoré možno rozdeliť medzi paralelne prebiehajúce činnosti alebo **nedeliteľné**. Potrebu nedeliteľných zdrojov treba zohľadniť už pri zostavovaní sieťového grafu napríklad tým, že medzi činnosťami, ktoré ich využívajú, sa určí vzťah predchodca – následník a úlohou je len určiť, v akom poradí budú uvedený zdroj jednotlivé činnosti využívať. Plánovanie rozloženia potreby deliteľných zdrojov bude obsahom nasledujúcich úvah.

Zdrojová analýza - vychádza z výsledkov časovej analýzy a jej cieľom je spracovanie **rozvrhu zdrojov**. Rieši úlohu vymedzenia disponibilných zdrojov projektu ako celku, ale aj úlohu určovania nárokov jednotlivých činností na určité zdroje. Môže ísť o sumarizáciu nárokov na zdroje, ale cieľom býva spravidla vyrovnanie nárokov na zdroje v určitom období.

V najjednoduchšom prípade ide o vyrovňovanie nárokov na jeden zdroj v rámci jedného projektu. Ak sa analýza týka viacerých zdrojov súčasne, ide o **viaczdrojovú** úlohu. Môže nastať aj situácia, keď je predmetom analýzy potreba jedného zdroja v rámci organizácie, ktorá súčasne realizuje viac projektov – pôjde o **viacprojektovú** úlohu. Najzložitejšie však bývajú viaczdrojové a viacprojektové úlohy.

Postupy, ktoré sa používajú na riešenie uvedených úloh, nie sú typickými optimalizačnými metódami, ale skôr heuristickými algoritmami. Využívajú **harmonogramy** (*Ganttove diagramy*), a **súčtové histogramy** potreby zdrojov.

Podstatou najjednoduchšej metódy vyrovňovania zdrojov je hľadanie takého rozvrhu činností, ktorý pri danom trvaní projektu zabezpečuje rovnomernosť využívania zdrojov a minimalizuje nároky na zdroje. Využíva sa pritom možnosť posúvania času vykonávania nekritických činností v rámci ich rezerv. V prípade, že týmto postupom nie je možné dosiahnuť rozvrh, ktorý rešpektuje disponibilné množstvo zdroja, treba pristúpiť napríklad k predĺženiu trvania projektu.

Kritériami rovnomernosti rozloženia nárokov na zdroj sú predovšetkým **rozptyl nárokov na zdroj**, **maximálna absolútna odchýlka od priemerného nároku** a **maximálny nárok na zdroj v určitom intervale** (spravidla počas celého projektu). Vypočítať ich možno pomocou nasledujúcich vzťahov.

Celkový nárok na zdroj za celé trvanie projektu T_n určíme:

$$Z_c = \sum_{i,j} z_{ij} \cdot t_{ij} ,$$

kde z_{ij} je hodnota rovnomerného nároku činnosti (i, j) na zdroj v každom časovom intervale jej trvania a t_{ij} je trvanie tejto činnosti.

Priemerný nárok na zdroj za časovú jednotku určíme:

$$Z = \frac{1}{T_n} \cdot Z_c = \frac{1}{T_n} \sum_{i,j} z_{ij} \cdot t_{ij} = \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} Z(t),$$

kde $Z(t)$ je funkcia, udávajúca nároky na zdroj v každej časovej jednotke t všetkých činností, ktoré sa realizujú v tejto časovej jednotke ($t = 1, 2, \dots, T_n$).

Rozptyl nárokov na zdroj určíme:

$$s_z^2 = \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} (Z(t) - Z)^2 = \frac{1}{T_n} \sum_{t=1}^{T_n} Z(t)^2 - Z^2.$$

Pri minimalizácii rozptylu nárokov na zdroj však stačí minimalizovať len výraz: $\sum_{t=1}^{T_n} Z(t)^2$.

Minimálnu absolútnu odchýlku od priemerného nároku určíme:

$$\max |Z(t) - Z|, \quad \text{kde } t \in \langle 0; T_n \rangle.$$

Maximálny nárok na zdroj určíme:

$$\max Z(t), \quad \text{kde } t \in \langle 0; T_n \rangle.$$

Pri vyrovnávaní nárokov na zdroje sa spravidla snažíme minimalizovať posledné tri uvedené charakteristiky.

Pri vyrovnávaní nárokov na zdroj možno postupovať pomocou viacerých heuristických algoritmov. Uvedieme jeden z možných postupov:

1. Zostrojíme SG projektu a urobíme jeho časovú analýzu.
2. Na základe SG zostavíme harmonogram (Ganttov diagram), do ktorého zakresľujeme jednotlivé činnosti v najskôr možných termínoch ich realizácie (**ľavostranný plán**) a tiež v najneskôr prípustných termínoch ich realizácie (**pravostranný plán**). Kritické činnosti označíme zvlášť, pretože nemajú žiadnu rezervu a ich poloha je nemenná. Je vhodné zakresľovať činnosti vzostupne podľa termínu ich realizácie.
3. Pod harmonogram zakreslíme súčtové histogramy nárokov na zdroj (pre ľavostranný aj pravostranný plán); nároky na zdroj v jednotlivých obdobiach určíme sčítaním nárokov na zdroj tých činností, ktoré sa v tomto období práve realizujú.
4. Pre oba plány (ľavostranný aj pravostranný) vypočítame súčet štvorcov nárokov na zdroje pre každý časový interval v histograme, čo je údaj, ktorý je vhodným kritériom časového kolísania nároku na zdroj. Čím je rovnomernejšia potreba zdroja, tým je táto hodnota nižšia.

Zaujímavým údajom, ktorý je viditeľný priamo v histograme, je tiež maximálny nárok na zdroj.

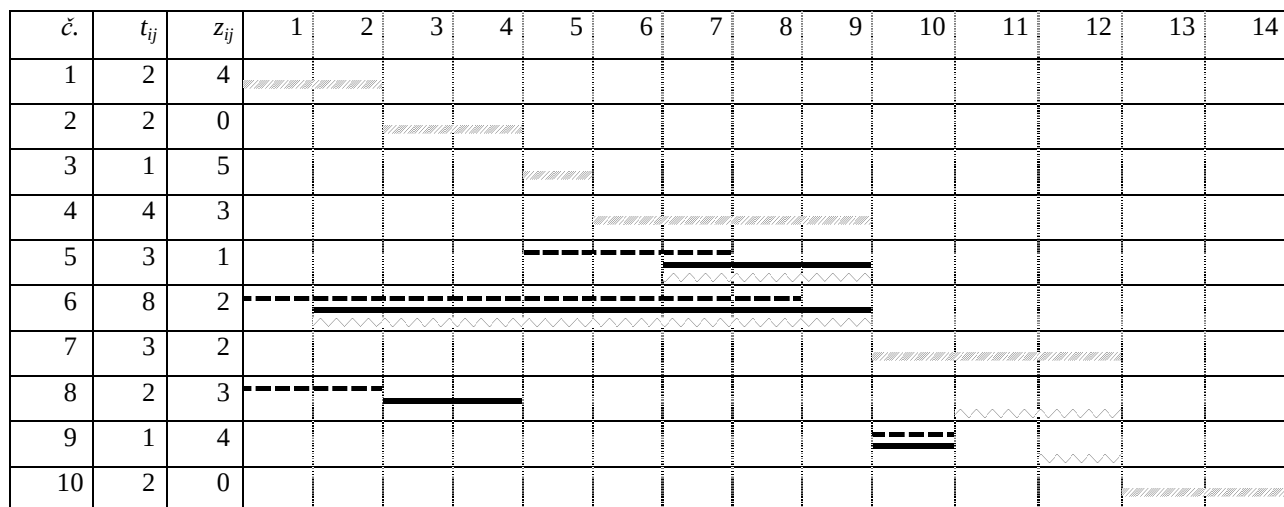
5. Zoberieme poslednú nekritickú činnosť v harmonograme (ľavostranný plán) a posúvame jej začiatok smerom doprava o toľko časových jednotiek, aby hodnota súčtu štvorcov nárokov na zdroj bola minimálna. Ak existuje viac možností umiestnenia s rovnakou vypočítanou hodnotou, posunieme činnosť čo najviac doprava.
6. Postupne rovnakým spôsobom posúvame predposlednú nekritickú činnosť a potom ďalšie nekritické činnosti tak, aby sa hodnota súčtu štvorcov nárokov na zdroj postupne znižovala.
7. Body 5 a 6 tohto postupu opakujeme až po dosiahnutie uspokojivého stavu, prípadne predtým zmeníme poradie, v ktorom sú jednotlivé činnosti v harmonograme zapísané. Treba pamätať na to, že posunutie činnosti doprava (oproti ľavostrannému plánu) je na úkor celkových rezerv činností následníkov a posunutie činnosti doľava (oproti pravostrannému plánu) je na úkor celkových rezerv činností predchodcov, preto je vhodné po ukončení postupu overiť, či vykonávanie činností ležiacich na ľubovoľnej ceste nebolo naplánované paralelne.

Príklad č. 5.5

Podkladom na zdrojovú analýzu bude sieťový graf, ktorého riešenie bolo predmetom úlohy 2 v rámci príkladu 5.4. Zadanie doplníme o informáciu, že na vykonanie niektorých činností je potrebný bližšie neurčený zdroj v množstvách uvedených na obr. 5.28 v stĺpci z_{ij} . Na príklade bude demonštrovaný spôsob zostavenia ľavostranného a pravostranného plánu (LP a PP) a tiež výsledok riešenia – harmonogram, zodpovedajúci vyrovnanému plánu (VP), ktorý bol dosiahnutý s cieľom, aby potreba uvedeného zdroja v žiadnom okamihu neprekročila stanovené obmedzenie 7 jednotiek. Okrem toho budú vypočítané niektoré charakteristiky a kritériá rovnomernosti rozloženia potreby zdroja.

Riešenie

Na obr. 5.28 je uvedený harmonogram časového priebehu prác v prípade ľavostranného, pravostranného aj vyváženého plánu, ktorý je zároveň výsledkom riešenia a bol nájdený heuristickým postupom založeným na pravidlách logického uvažovania.



Legenda:

kritické činnosti



ľavostranný plán



pravostranný plán



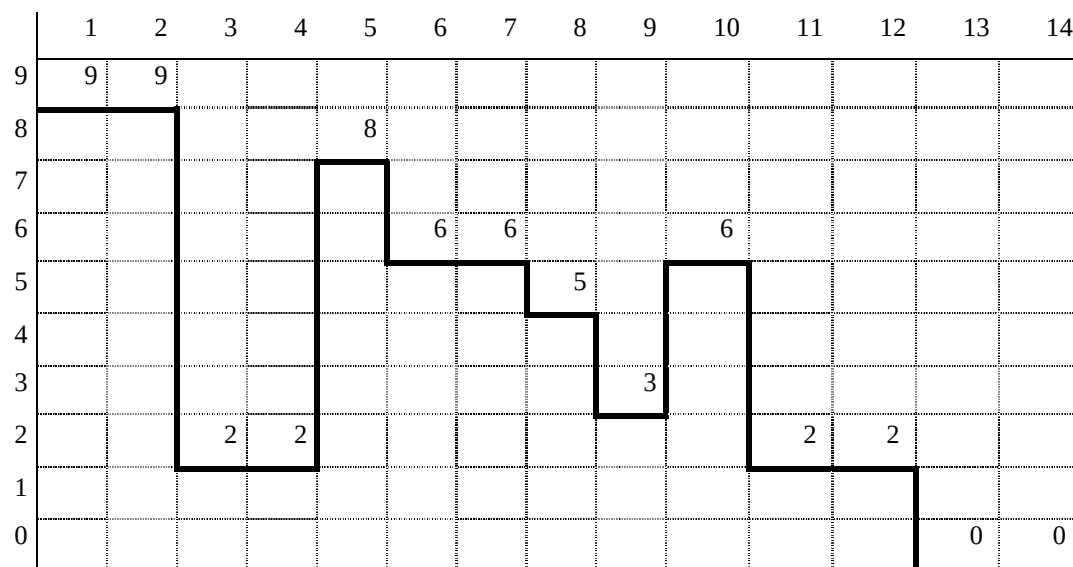
vyrovnaný plán



Obr. 5.28

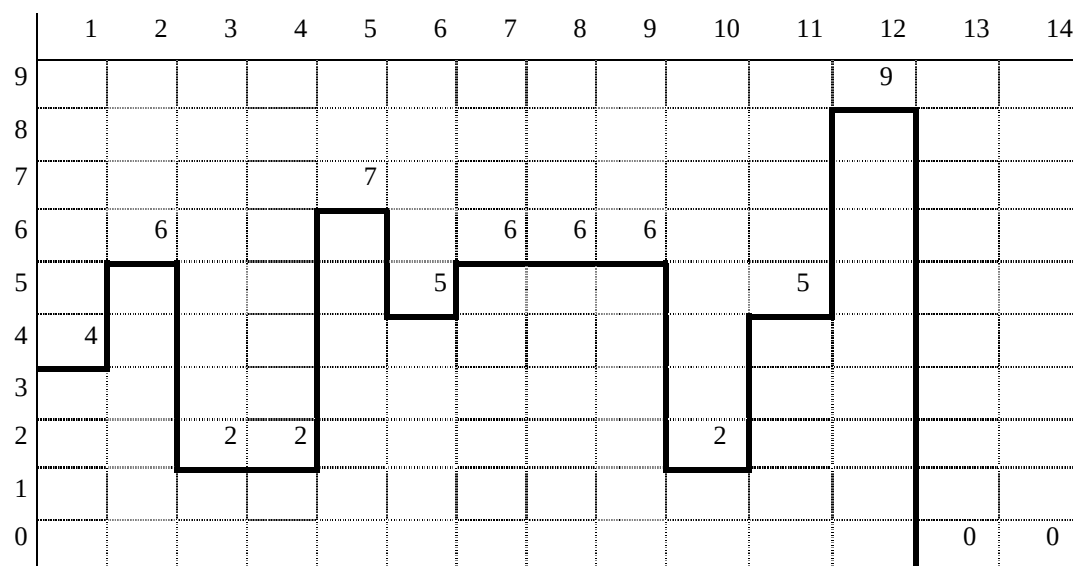
Na obr. 5.29 a, b, c sú uvedené súčtové histogramy potreby zdrojov pre ľavostranný plán, pre pravostranný plán a pre vyvážený plán (vyhovujúci z hľadiska zadaných požiadaviek).

LP:



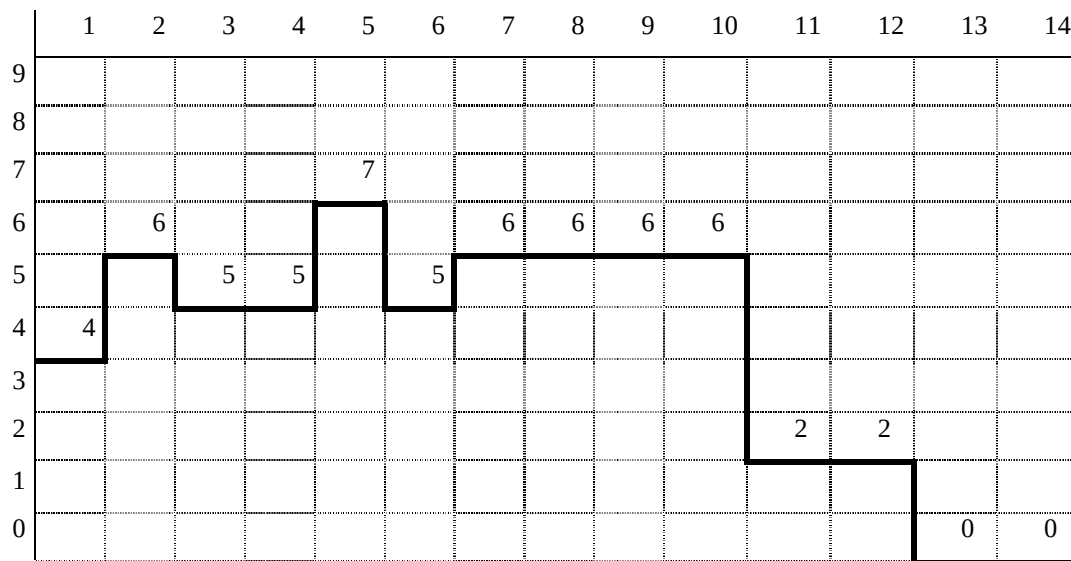
Obr. 5.29a

PP:



Obr. 5.29b

VP:



Obr. 5.29c

Vypočítané charakteristiky:

Celkový nárok na zdroj:

$$Z_c = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 60.$$

$$\text{Priemerný nárok na zdroj za časovú jednotku: } Z = \frac{60}{14} = 4,29.$$

Rozptyl nárokov na zdroj:

$$\text{LP: } s_z^2 = \frac{384}{14} - 4,29^2 = 9,06 \quad \text{PP: } s_z^2 = \frac{352}{14} - 4,29^2 = 6,78$$

$$\text{VP: } s_z^2 = \frac{328}{14} - 4,29^2 = 5,06$$

(Údaj v čitateli uvedených vzťahov bol vypočítaný sumarizáciou druhých mocnín celkových nárokov na zdroj v jednotlivých jednotkových časových intervaloch, uvedených na obr. 2.20. Napríklad pre LP: $9^2 + 9^2 + 2^2 + 2^2 + 8^2 + 6^2 + \dots + 2^2 + 0^2 + 0^2 = 384$.)

Maximálna absolútna odchýlka od priemerného nároku:

$$\text{LP: } |9 - 4,29| = 4,71 \qquad \text{PP: } |9 - 4,29| = 4,71$$

$$\text{VP: } |7 - 4,29| = 2,71$$

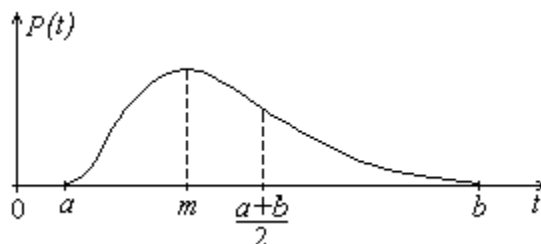
Maximálny nárok na zdroj:

$$\text{LP: } 9 \qquad \text{PP: } 9 \qquad \text{VP: } 7.$$

Potreba uvedeného zdroja vo vyrovnanom pláne v žiadnom okamihu neprekračuje stanovené obmedzenie 7 jednotiek.

5.3 ČASOVÁ ANALÝZA SIEŤOVÉHO GRAFU METÓDOU PERT

Metóda PERT je modifikáciou metódy CPM. a preto sa pri nej používajú mnohé z už uvedených postupov. Podstatný rozdiel je v tom, že pri metóde PERT nie je trvanie jednotlivých činností zadávané deterministicky, ale ako náhodná veličina, ktorej parametre sú vypočítané na základe odhadov expertov. Pri väčšine činností nie sú známe teoretické rozdelenia náhodných dĺžok trvania. Pri metóde PERT sa preto používa rozdelenie β , ktoré najlepšie vyhovuje požiadavke zhody s empirickými veličinami a tiež umožňuje určiť strednú hodnotu a rozptyl trvania činnosti z údajov, ktoré možno pomerne ľahko získať ako expertné odhady. Rozdelenie β je asymetrické rozdelenie, definované na uzavretom intervale (a, b) , kde modus m neleží v strede tohto intervalu a nie je totožný ani so strednou hodnotou μ (obr. 5.30).



Obr. 5.30

Na výpočet stredného trvania činností (strednej hodnoty rozdelenia β) a rozptylu sa používajú tieto údaje:

a_{ij} – **optimistický odhad trvania činnosti (i, j)** - je to časový interval, v ktorom možno danú činnosť zrealizovať za najpriaznivejších podmienok,

b_{ij} – **pesimistický odhad trvania činnosti (i, j)** - je to časový interval, v ktorom možno danú činnosť zrealizovať za bežných najnepriaznivejších podmienok; neberú sa do úvahy neobvyklé prekážky vykonania činnosti ako napr. živelné pohromy,

m_{ij} – **najpravdepodobnejšie trvanie činnosti (i, j)**, modus – je to také trvanie, ktoré by sa pri opakovanom vykonávaní činnosti vyskytovalo najčastejšie.

Po zavedení empiricky vyhovujúcich predpokladov možno odvodiť vzťahy na výpočet strednej hodnoty rozdelenia μ_{ij} , ktorá sa označuje ako **stredné trvanie činnosti t_{eij}** a **rozptylu (disperzie) $D_{t_{eij}}$** :

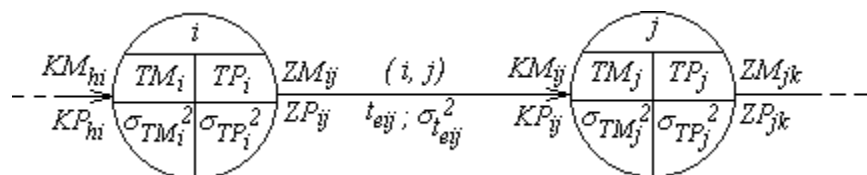
$$\mu_{ij} = t_{eij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6} \qquad D_{t_{eij}} = \sigma_{t_{eij}}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2.$$

Pre činnosti na kritickej ceste platí, že pravdepodobnosť, že sa činnosť stihne vykonať za čas t_{eij} , je 50%, rovnako ako pravdepodobnosť, že sa činnosť v tomto čase zrealizovať nepodarí. Takisto aj pravdepodobnosť, že celý projekt bude zrealizovaný za čas kratší, ako je vypočítané stredné trvanie projektu, je 50%.

5.3.1 Výpočet v grafe

Prvým krokom riešenia SG metódou PERT je výpočet stredného trvania a rozptylu všetkých činností.

Druhým krokom je nakreslenie SG podľa rovnakých pravidiel ako pri metóde CPM. Rozdiel je v tom, že sa uvažuje vypočítané trvanie činností t_{eij} . Pri prekresľovaní grafu do podoby vhodnej na riešenie sa ku hranám pripisujú okrem hodnôt t_{eij} aj hodnoty rozptylov jednotlivých činností a uzly sa nakreslia tak, aby bolo možné do nich vpísať aj údaje o rozptyle najskôr možného času uzla $\sigma_{TM_i}^2$ a najneskôr prípustného času uzla $\sigma_{TP_i}^2$ (obr. 5.31).



Obr. 5.31

Tretím krokom je vlastné riešenie. Rovnako ako pri metóde CPM sa pri postupe od počiatocného uzla ku koncovému určujú najskôr možné termíny uzlov, začiatky a konce činností a pri postupe od koncového uzla k počiatocnému sa určujú najneskôr prípustné termíny uzlov, začiatky a konce činností. Údaj $TM_n = TP_n = T_e$ koncového uzla udáva čas, do ktorého by mal byť projekt zrealizovaný s pravdepodobnosťou 50%.

Štvrtým krokom je výpočet rozptylov $\sigma_{TM_i}^2$ a $\sigma_{TP_i}^2$. Postupuje sa pri tom opäť v dvoch fázach. V prvej fáze sa zapíše do východiskového uzla hodnota $\sigma_{TM_i}^2 = 0$ a potom sa postupuje po kritickej ceste k ďalším uzlom, pričom hodnota $\sigma_{TM_j}^2$ každého nasledujúceho uzla sa vypočíta: $\sigma_{TM_j}^2 = \sigma_{TM_i}^2 + \sigma_{t_{eij}}^2$. Rovnako možno vypočítat' uvedené hodnoty aj pre uzly na nekritickej ceste, avšak po nekritickej ceste sa postupuje len dovtedy, kým sa nepripojí späť ku kritickej ceste. V druhej fáze sa zapíše do koncového uzla hodnota $\sigma_{TP_n}^2 = 0$ a ďalej sa postupuje po kritickej ceste smerom k východiskovému uzlu, pričom hodnota $\sigma_{TP_i}^2$ každého nasledujúceho uzla sa vypočíta: $\sigma_{TP_i}^2 = \sigma_{TP_j}^2 + \sigma_{t_{eij}}^2$. Rovnako možno vypočítat' uvedené hodnoty aj pre uzly na nekritickej ceste, avšak po nekritickej ceste (proti orientácii hrán) sa postupuje zasa len dovtedy, kým sa nepripojí späť ku kritickej ceste.

Rezervy jednotlivých činností možno vypočítat' rovnako ako pri metóde CPM.

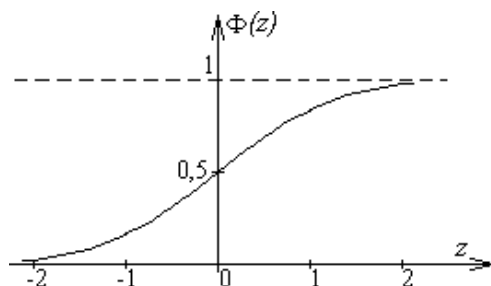
Trvanie projektu je náhodná veličina, ktorá má približne normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou T_e a rozptylom $\sigma_{TM_n}^2$. Z toho vyplýva možnosť riešiť nasledujúce úlohy:

- odhadnúť pravdepodobnosť $P(T < T_p)$ dodržania určitého termínu realizácie projektu T_p , kde T je skutočné trvanie projektu,

b) odhadnúť termín ukončenia projektu T_p , ktorý možno dodržať s určitou zadanou pravdepodobnosťou $P(T < T_p)$.

V oboch prípadoch využijeme distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti (obr. 5.32), ktorá je tabelovaná (tabuľka 5.8) a vzťah:

$$z \cdot \sigma_{TM_n} = T_p - T_e.$$



Obr. 5.32

Tab. 5.8

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,0	0,5000	0,7	0,7580	1,4	0,9192	2,1	0,9821	2,8	0,9974
0,1	0,5398	0,8	0,7881	1,5	0,9332	2,2	0,9861	2,9	0,9981
0,2	0,5793	0,9	0,8159	1,6	0,9452	2,3	0,9893	3,0	0,9987
0,3	0,6179	1,0	0,8413	1,7	0,9554	2,4	0,9918	3,1	0,9990
0,4	0,6554	1,1	0,8643	1,8	0,9641	2,5	0,9938	3,2	0,9993
0,5	0,6915	1,2	0,8849	1,9	0,9713	2,6	0,9953	3,5	0,9998
0,6	0,7257	1,3	0,9032	2,0	0,9773	2,7	0,9965	4,0	0,99997

Ak je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia tabelovaná len v intervale pre $z > 0$, využijeme skutočnosť, že táto funkcia je súmerná podľa bodu $(0;0,5)$ a platí: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

V prípade riešenia úlohy a) vypočítame pomocou uvedeného vzťahu hodnotu z a pravdepodobnosť $P(T < T_p)$ dodržania termínu T_p určíme z tabuľky distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia: $P(T < T_p) = \Phi(z)$.

Pri riešení úlohy b) najprv nájdeme v tabuľke hodnotu z , ktorá zodpovedá zadanej pravdepodobnosti $P(T < T_p) = \Phi(z)$ a potom pomocou uvedeného vzťahu vypočítame hodnotu T_p , čo je odhadovaný termín, do ktorého by mal byť projekt zrealizovaný s pravdepodobnosťou $P(T < T_p)$.

Príklad č. 5.6

Zadanie príkladu vychádza zo zadania príkladu 5.1. Činnosti a ich nadväznosti sú špecifikované v tabuľke 5.1. Rozdiel oproti príkladu 5.1 je v tom, že trvanie činností bolo teraz určené expertnými odhadmi tak, ako je uvedené v tabuľke 5.9. Cieľom riešenia metódou PERT je vypočítať strednú hodnotu trvania projektu a rozptyl tejto hodnoty. Ďalšou úlohou je zistiť:

- s akou pravdepodobnosťou môže byť projekt zrealizovaný v čase o 1 týždeň kratšom, ako je vypočítané stredné trvanie,
- do akého termínu (za koľko týždňov) možno zrealizovať projekt s pravdepodobnosťou 90%.

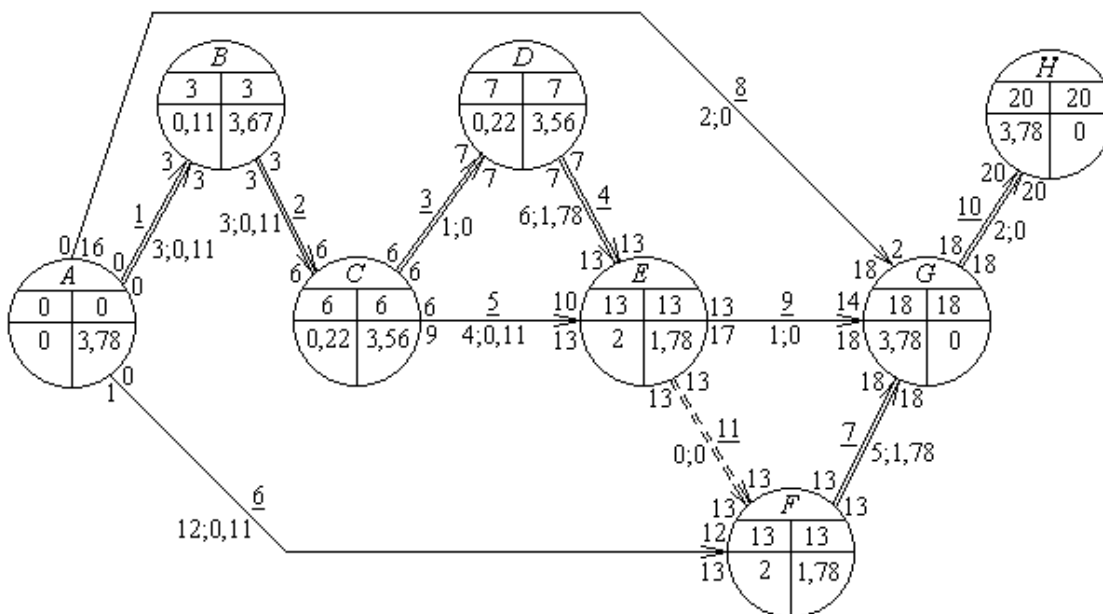
Riešenie

Trvanie každej činnosti bolo určené pomocou pesimistického odhadu, optimistického odhadu a odhadu najpravdepodobnejšieho trvania činností, ktoré sú zapísané v tabuľke 5.9. Do tej istej tabuľky zapíšeme vypočítané hodnoty stredného trvania a rozptylu pre každú činnosť.

Tab. 5.9

Činnosť	a	m	b	t_{eij}	$\sigma_{t_{eij}}^2$
1	2	3	4	3	0,11
2	2	3	4	3	0,11
3	1	1	1	1	0
4	4	5	12	6	1,78
5	3	4	5	4	0,11
6	11	12	13	12	0,11
7	3	4	11	5	1,78
8	2	2	2	2	0
9	1	1	1	1	0
10	2	2	2	2	0

Výsledok riešenia v grafe je uvedený na obr. 5.33:



Obr. 5.33

Z obrázka je zrejmé, že stredné trvanie projektu je $T_e = 20$ týždňov, rozptyl $\sigma_{TM_n}^2 = 3,78$.

Riešenie úlohy a)

Treba zistiť, s akou pravdepodobnosťou môže byť projekt zrealizovaný v čase 19 týždňov. Vo vzťahu na výpočet hodnoty z vystupuje štandardná odchýlka, ktorá je druhou odmocninou rozptylu. Po dosadení vypočítame hodnotu z :

$$z = \frac{19 - 20}{\sqrt{3,78}} = -0,51435.$$

Z tabuľky 5.10 (výber z podrobnejšej tabuľky hodnôt distribučnej funkcie normalizovaného normálneho rozdelenia) určíme približnú hodnotu $\Phi(-z)$:

$$\Phi(-z) = \Phi(0,51435) = 0,696$$

a z nej vypočítame hodnotu $P(T < T_p)$:

$$P(T < T_p) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z) = 1 - 0,696 = 0,304.$$

Tab. 5.10

z	$\Phi(z)$
0,50	0,691462
0,51	0,694974
0,52	0,698468
0,53	0,701914

z	$\Phi(z)$
1,26	0,896165
1,27	0,897958
1,28	0,899727
1,29	0,901475

Projekt môže byť teda zrealizovaný za 19 týždňov s pravdepodobnosťou približne 30%.

Riešenie úlohy b)

V tabuľke 5.10 nájdeme hodnotu z , ktorá zodpovedá hodnote $\Phi(z) = 0,9$. Je to približne $z = 1,28$. Plánované trvanie projektu T_p , ktoré možno dosiahnuť s pravdepodobnosťou $P(T < T_p) = 0,9$, vypočítame dosadením do vzťahu:

$$T_p = 20 + 1,28 \cdot \sqrt{3,78} = 22,4886.$$

S pravdepodobnosťou 90% môže byť projekt zrealizovaný približne za 22,5 týždňa.

Ak je pravdepodobnosť:

- $P = 0,3-0,6$ situácia sa považuje za normálnu,
- $P < 0,3$ kritická situácia z hľadiska dodržania zadaných termínov,
- $P > 0,6$ rezervy z hľadiska dodržania zadaných termínov.

V podkapitolách 5.2 a 5.3 sme sa zaoberali časovou analýzou HDSG metódami CPM a PERT. Pri týchto príkladoch sme brali do úvahy len hranovo definované konjuktívno deterministické SG. Ďalej si uvedieme časovú analýzu HDSG, ktoré sú konjuktívno deterministické (metódy CPM a MPM) a taktiež ukážeme časovú analýzu zovšeobecneného (hranovo definovaného) SG metódou GERT.

5.4 ČASOVÁ ANALÝZA UZLOVO DEFINOVANÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU CPM

Aby sme mohli robiť časovú analýzu uzlovo definovaných SG (UDSG) pomocou metódy CPM musíme mať zadané nasledovné vstupné údaje:

T_0 - začiatok realizácie projektu,

t_i - trvanie činnosti i , $i = 1, 2, 3, \dots$

Potom počítame časové ukazovatele:

ZM_i - najskôr možný začiatok i - teho uzla

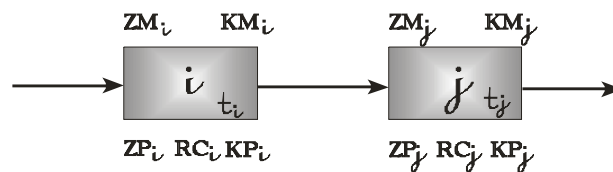
ZP_i - najneskôr prípustný začiatok i - teho uzla

KM_i - najskôr možný koniec i - teho uzla

KP_i - najneskôr prípustný koniec i - teho uzla

RC_i - celková rezerva i - teho uzla

Ak vykonáme časovú analýzu priamo v SG, uzly označujeme nasledovne:



Obr. 5.34

Pri výpočte hodnôt ZM , KM postupujeme od 1 uzla SG až po koncový:

$$ZM_1 = 0$$

$$KM_1 = ZM_1 + t_1$$

$$ZM_j = \max(KM_i)$$

$$KM_j = ZM_j + t_j$$

$\vdots$

$$ZM_n$$

$$KM_n = ZM_n + t_n = T_n$$

Aby sme mohli určiť dĺžku kritickej cesty (T_n), musíme vypočítať aj hodnoty ZP , KP - začíname od posledného uzla SG a postupujeme k prvému, a následne počítame RC_i pre každý uzol v SG:

$$KP_n = KM_n$$

$$ZP_i = KP_i - t_i$$

$$KP_i = \min_j(ZP_j)$$

$\vdots$

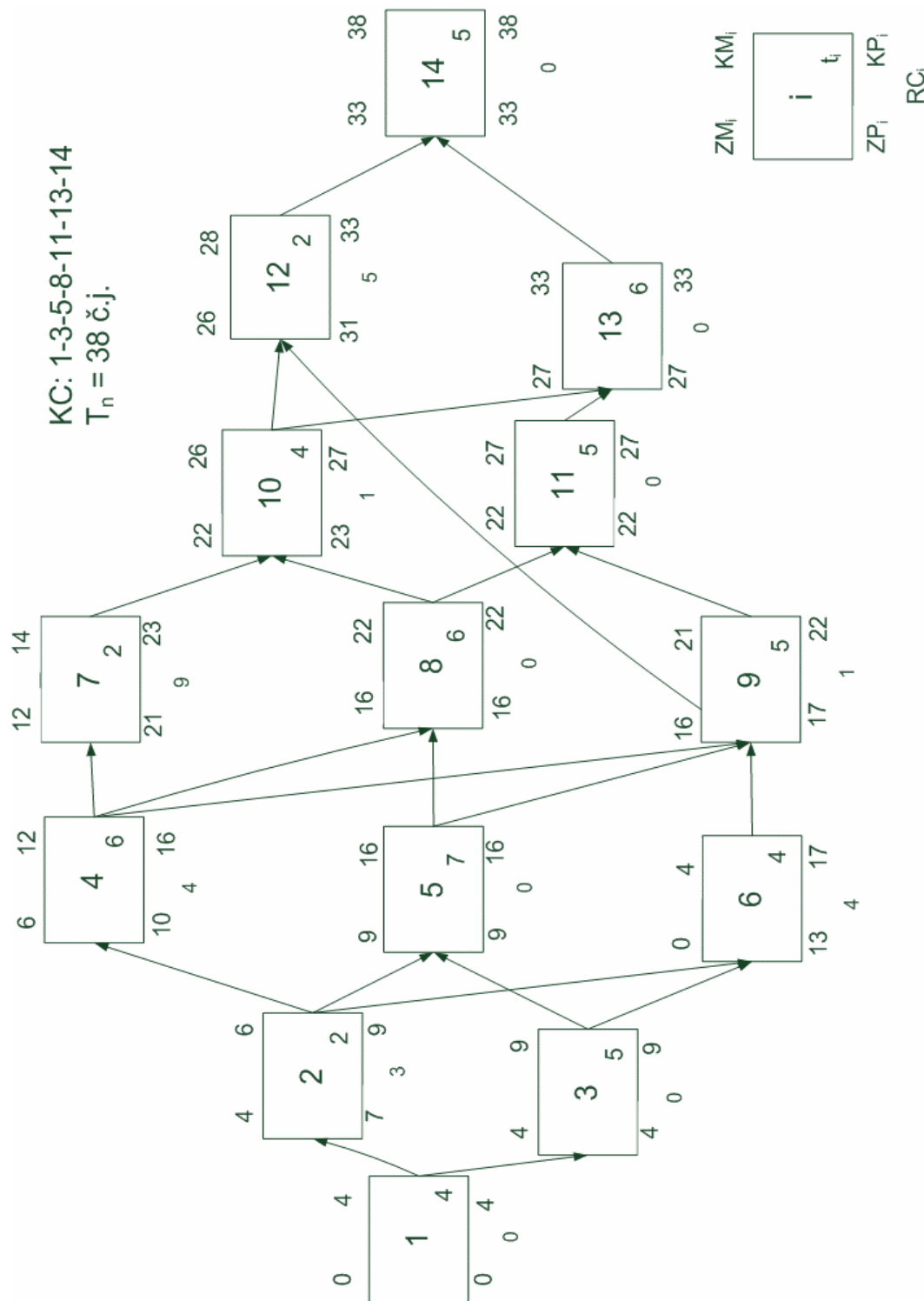
$$KP_1$$

$$ZP_1 = KP_1 - t_1 = 0$$

$$RC_i = ZP_i - ZM_i$$

Príklad č. 5.7

Na obr. 5.35 je znázornený výpočet priamo v uzlovo definovanom sieťovom grafe.



Zdroj: Sakál, 1990

Obr. 5.35

5.5 ČASOVÁ ANALÝZA UZLOVO DEFINOVANÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU MPM

Metóda MPM (Metra Potencial Method) – metóda potenciálov, pracuje s UDSG, pričom sú ohodnotené nie len činnosti, ale aj väzby (hrany) medzi činnosťami. Orientované hrany UDSG sú ohodnotené počtom časových jednotiek a_{ij} (hodnotou nadväznosti, trvania väzby), ktorý udáva minimálnu hodnotu odstupeu začiatkov (najskôr možných, najneskôr prípustných) dvoch po sebe bezprostredne nasledujúcich činností i a j . Hodnota a_{ij} (potenciál väzby) udáva, o koľko časových jednotiek môžeme najskôr začať činnosť j po začiatku činnosti i , bez ohľadu na trvanie činnosti i (Sakál, 1990).

Pri metóde MPM sa používajú aj opačné väzby – b_{ji} , ktoré udávajú maximálnu hodnotu odstupeu (najskôr možných, najneskôr prípustných) začiatkov dvoch po sebe bezprostredne nasledujúcich činností i a j .

Musí platiť:

$$a_{ij} \leq ZM_j - ZM_i \leq b_{ji}$$

Postup pri časovej analýze metódou MPM:

ZM , ZP vypočítame priamo v SG:

1. **ZM**- začneme od 1 uzla a postupujeme k poslednému uzlu SG, nasledovne:

$$\begin{aligned} ZM_1 &= 0 \\ &\vdots \\ ZM_j &= \max_i (ZM_i + a_{ij} \quad ; \quad i < j) \\ &\vdots \\ ZM_n & \end{aligned} \quad [5.1]$$

Potom musíme vykonať kontrolu, či vypočítané hodnoty spĺňajú nerovnosti pri všetkých uzloch.

$$ZM_j - ZM_i \leq |b_{ji}|$$

Kontrolu robíme od 1. k poslednému uzlu SG.

Ak medzi uzlami nastane situácia, že $ZM_j - ZM_i > |b_{ji}|$, tak vypočítame hodnotu $\varepsilon = ZM_j - ZM_i - b_{ji}$ a na základe hodnoty ε vypočítame nové ZM_i' , a to $ZM_i' = ZM_i + \varepsilon$.

Všetky hodnoty, ktoré boli vypočítané na základe ZM_i musíme vypočítať na základe ZM_i' . Ak je kontrola vyhovujúca, po úprave vo všetkých uzloch, potom prejdeme na výpočet hodnôt ZP .

2. ZP - pri výpočte postupujeme od posledného uzla k 1. uzlu SG nasledovne:

$$\begin{aligned} ZP_n &= ZM_n \\ ZP_i &= \min_j [ZP_j - a_{ij}] \quad , \quad i < j \\ ZP_1 & \end{aligned} \quad [5.2]$$

Musíme vykonať kontrolu, či platí: $ZP_j - ZP_i \leq |b_{ji}|$

Ak nastane situácia, že $ZP_j - ZP_i > |b_{ji}|$, vypočítame hodnotu $\gamma = ZP_j - ZP_i - b_{ji}$ a vypočítame nové hodnoty $ZP_j' = ZP_j - \gamma$. Všetky hodnoty, ktoré boli vypočítané na základe ZP_j , musíme vypočítať na základe ZP_j' . Nakoniec počítame hodnoty RC_i a tam, kde $RC_i = 0 \Rightarrow$, uzly sú kritické. V tabuľke si môžeme dopočítať hodnoty $KM_i = ZM_i + t_i$ a $KP_i = ZP_i + t_i$, taktiež hodnoty $RC_i = ZP_i - ZM_i = KP_i - KM_i$.

Príklad č. 5.8

Na základe údajov v tabuľke 5.11:

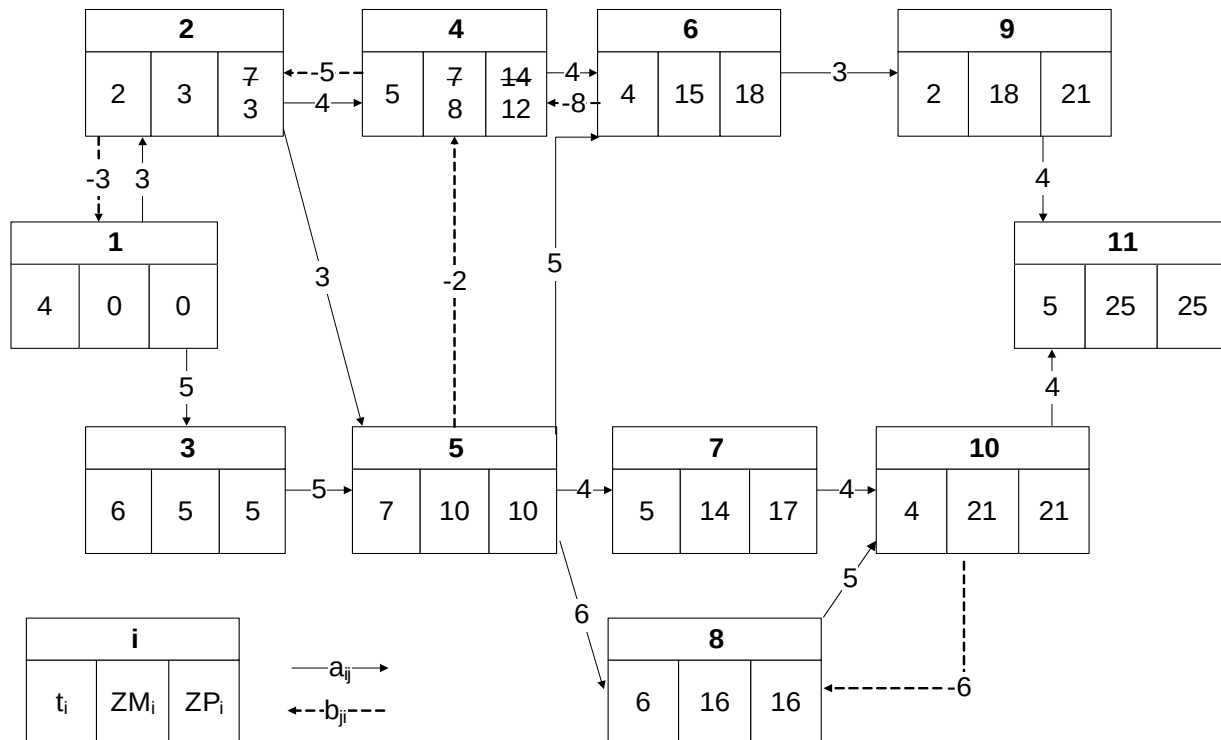
- zostrojte UDSG,
- urobte časovú analýzu UDSG metódou MPM,
- zostrojte tabuľku na výpočet časov činností KM_i a KP_i vrátane celkovej rezervy RC_i ,
- uved'te nekritické, kritické činnosti a dĺžku kritickej cesty (T_n).

Tab. 5.11

Činnosť i	Trvanie činnosti t_i	Väzby činností i,j	Trvanie väzby	
			a_{ij}	$-b_{ji}$
1	4	1,2	3	-3
2	2	1,3	5	-
3	6	2,4	4	-5
4	5	2,5	3	-
5	7	3,5	5	-
6	4	4,5	-	-2
7	5	4,6	4	-8
8	6	5,6	5	-
9	2	5,7	4	-
10	4	5,8	6	-
11	5	6,9	3	-
		7,10	4	-
		8,10	5	-6
		9,11	4	-
		10,11	4	-

Riešenie

ad a) a b) UDSG a časová analýza UDSG metódou MPM sú urobené na obr. 5. 36.



Obr. 5.36

Pri výpočte termínov ZM_i a ZP_i sa postupuje obdobne ako pri UDSG s tým rozdielom, že nepracujeme s trvaním činností, ale s trvaním väzieb a_{ij} a $-b_{ji}$ vo dvoch fázach.

V prvej fáze, začínajúcej od začiatkovej činnosti (uzla) SG, určujeme najskôr možné začiatky ZM_i činností na základe a_{ij} spôsobom CPM (podľa 5.1). Vypočítané hodnoty ZM_i treba upraviť (zvýšiť) tak, aby vyhovovali aj maximálnym väzbám činností formulovaným hodnotami $-b_{ji}$. Pri úprave začíname znova od začiatkového uzla 1. SG, v ktorom sú celkom 4 záporné väzby $-b_{ji}$:

- Väzba $-b_{2,1} = -3$, ktorá znamená, že činnosť 2 sa musí začať najneskoršie o 3 časové jednotky (č.j.) po začiatku činnosti 1, je splnená, $ZM_1 = 0$, $ZM_2 = 3$.
- Väzba $-b_{4,2} = -5$, ktorá znamená, že činnosť 4 sa musí začať najneskoršie o 5 č.j. po začiatku činnosti 2 je splnená, $ZM_2 = 3$, $ZM_4 = 7$.
- Väzba $-b_{5,4} = -2$, ktorá znamená, že činnosť 5 sa musí začať najneskoršie o 2 č.j. po začiatku činnosti 4, nie je splnená. Činnosť 4 sa môže začať 7 č.j. po začiatku projektu ($ZM_4 = 7$) a činnosť 5 sa môže začať 10 č.j. po začiatku projektu ($ZM_5 = 10$). Tieto termíny sú v spore s požiadavkou $-b_{5,4} = -2$. Upravíme (zväčšíme teda $ZM_4' = ZM_4 + \varepsilon = 7 + 1 = 8$ (kde $\varepsilon = ZM_5 - ZM_4 - |-b_{5,4}| = 10 - 7 - 2 = 1$) miesto pôvodných 7. Túto úpravu v SG začíname preškrtnutím pôvodnej hodnoty 7 a napísaním novej hodnoty 8 do príslušného políčka ZM_4 . Musíme ďalej prekontrolovať, či sa nezmenia ďalšie hodnoty najskôr možných začiatkov po tejto zmene hodnoty v uzle 4 (kontrolu vykonáme v smere ku koncovému uzlu SG).
- Väzba $-b_{6,4} = -8$, ktorá znamená, že činnosť 6 sa musí začať najneskoršie o 8 č.j. po začiatku činnosti 4, je splnená, $ZM_4 = 8$, $ZM_6 = 15$.
- Väzba $-b_{10,8} = -6$, ktorá znamená, že činnosť 10 sa musí začať najneskoršie o 6 č.j. po začiatku činnosti 8, je splnená, $ZM_8 = 10$, $ZM_{10} = 21$.

Pri všetkých úpravách ZM_i treba zároveň kontrolovať aj ďalšie hodnoty ZM_i , ktoré sa z upravených vypočítajú! Takto získané hodnoty ZM_i uvedené v SG na obr. 5.32, vyhovujú ako minimálnym, tak aj maximálnym väzbám a z hľadiska výpočtu MPM sú konečné!

V druhej fáze, začínajúcej od koncovkej činnosti (uzla) 11 SG, určujeme najneskôr prípustné začiatky ZP_i činností na základe a_{ij} spôsobom CPM (podľa 5.2). Vypočítané hodnoty ZP_i treba znovu upraviť (znížiť) vzhľadom na požiadavky, formulované hodnotami $-b_{ji}$ (od koncového uzla):

- Väzba – $b_{10,8} = -6$ je splnená, $ZP_8 = 16$, $ZP_{10} = 21$.
- Väzba – $b_{6,4} = -8$ je splnená, $ZP_4 = 14$, $ZP_6 = 18$.
- Väzba – $b_{5,4} = -2$ je splnená, $ZP_4 = 14$, $ZP_5 = 10$.
- Väzba – $b_{4,2} = -5$ nie je splnená. Činnosť 2 sa musí začať 7 č.j. po začiatku projektu a činnosť 4 sa musí začať 14 č.j. po začiatku projektu. Tieto termíny sú v spore s požiadavkou – $b_{4,2} = -5$. Upravíme (znížime) preto ZP_4 , a to na $ZP_4' = ZP_4 - \gamma = 14 - 2 = 12$ (kde $\gamma = ZP_4 - ZP_2 - b_{5,4} = 14 - 7 - 5 = 2$) miesto pôvodných 14. Túto úpravu v SG zaznačíme preškrtnutím pôvodnej hodnoty 14 a napísaním novej hodnoty 12 do príslušného políčka pre ZP_4 .
- Väzba – $b_{2,1} = -3$ nie je splnená. Činnosť 1 sa musí začať 0 č.j. po začiatku projektu a činnosť 2 sa musí začať 7 č.j. po začiatku projektu. Tieto termíny sú v spore s požiadavkou – $b_{2,1} = -3$. Upravíme (znížime) preto ZP_2 , a to na $ZP_2' = ZP_2 - \gamma = 7 - 4 = 3$ (kde $\gamma = ZP_2 - ZP_1 - b_{2,1} = 7 - 0 - 3 = 4$) miesto pôvodných 7. Túto úpravu v SG zaznačíme preškrtnutím pôvodnej hodnoty 7 a napísaním novej hodnoty 3 do príslušného políčka pre ZP_2 .

ad c) tabuľka výsledkov časovej analýzy UDSG metódou MPM, tabuľka 5.12:

Tab. 5.12

Činnosť i	t_i	ZM_i	KM_i	ZP_i	KP_i	RC_i
1	4	0	4	0	4	0
2	2	3	5	3	5	0
3	6	5	11	5	11	0
4	5	8	13	12	17	4
5	7	10	17	10	17	0
6	4	15	19	18	22	3
7	5	14	19	17	22	3
8	6	16	22	16	22	0
9	2	18	20	21	23	3
10	4	21	25	21	25	0
11	5	25	30	25	30	0

Hodnoty ZM_i a ZP_i sme prevzali zo SG. Pri výpočte hodnôt KM_i , KP_i a RC_i sme použili vzťahy:

$$KM_i = ZM_i + t_i \quad a \quad KP_i = ZP_i + t_i$$

$$RC_i = ZP_i - ZM_i = KP_i - KM_i.$$

- ad d) – nekritické činnosti: 4, 6, 7, 9 ($RC_i \neq 0$),
 – kritické činnosti: 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11 ($RC_i = 0$),
 – dĺžka kritickej cesty $T_n = 30$ č.j.

5.6 ČASOVÁ ANALÝZA ZOVŠEOBECNENÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU GERT

Medzi MSA zaraďujeme aj metódu **GERT**, ktorá sa používa na analýzu zovšeobecnených SG. Zovšeobecnený SG je taký HD SG, ktorý obsahuje aspoň jeden uzol s interpretáciou inou ako konjunktívno deterministickou.

Metóda GERT (Graphical Evalution and Review Technique) je grafická metóda vyhodnocovania a kontroly zložitých projektov (najčastejšie riadenia výskumu a vývoja), pri ktorých nedokážeme dopredu jednoznačne určiť ich deterministický priebeh z hľadiska nadväznosti a realizácie činností.

SG typu GERT obsahuje uzly s disjunktívnymi alebo konjunktívnymi vstupmi a stochastickými alebo deterministickými výstupmi. Hrany SG predstavujú činnosti ohodnotené časovo alebo nákladovo s podmienkami pravdepodobnosťou $p_{ij} = p((i,j)/i)$, tzn. pravdepodobnosťou realizácie činnosti (i,j) za predpokladu, že bol realizovaný uzol i .

Pre SG typu GERT uskutočňujeme najprv *pravdepodobnostnú analýzu SG* a na ňu nadväzuje *časová analýza SG*. Výpočty realizované pri SG typu GERT sú znázornené v tabuľke 5.13 podľa typu vstupu do uzla a počtu vstupujúcich činností do uzla.

Pri tejto metóde sa používa taký zovšeobecnený SG, ktorý väčšinou obsahuje nasledovné tri typy uzlov (tab. 5.1):

- konjunktívno – deterministické uzly,
- disjunktívno – deterministické uzly,
- konjunktívno – stochastické uzly.

SG zostavený z takýchto uzlov má stochastickú topológiu. Ak riešime SG s deterministickou topológiou pomocou metód CPM, PERT môžeme znázorniť **iba jeden variant realizácie projektu**. Ak má SG stochastickú topológiu môžeme realizáciu projektu takéhoto grafu znázorniť **viac variantne**. Umožňujú nám to takzvané **rozhodovacie uzly (uzly konjuktívno stochastické)**, v ktorých sa rozhodujeme, ktorou cestou budeme ďalej pokračovať v realizácii.

PREPOČTY REALIZOVANÉ PRI METÓDE GERT

Tab. 5.13

Typ uzla a počet vchádzajúcich činností	Pravdepodobnostné prepočty	Výpočty hodnôt TM
konjuktívny 1 činnosť	$p_j = P_{ij}$ podmienené pravdepodobnosti $P_{ij} = p_{ij} \cdot p_i$ kde p_i je pravdepodobnosť i-teho uzla	$TM_j = KM_{ij}$ $KM_{ij} = TM_i + t_{ij}$
konjuktívny n-činností	$p_j = P_{1j} \cdot P_{2j} \cdot P_{3j} \cdots P_{nj} = \prod_{i=1}^n P_{ij}$	$TM_j = \max_i (KM_{ij})$
disjunktívny n-činností	$p_j = P_{1j} + P_{2j} + P_{3j} + \cdots + P_{nj} = \sum_{i=1}^n P_{ij}$	$TM_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \cdot KM_{ij}$

kde:

- p_i – pravdepodobnosť realizácie uzla i , ktorú obyčajne pre začiatočný uzol zadávame $p_1 = 1$, a pre ostatné uzly ich vypočítame podľa typu vstupu uzla,
- p_{ij} – pravdepodobnosť realizácie činnosti (i,j) za predpokladu, že uzol i bol dosiahnutý,
- P_{ij} – nepodmienená pravdepodobnosť činnosti (i,j) ,
- TM_i – najskôr možný termín (jeho stredná hodnota) uzla i .

Poznámka: Z uzla so stochastickým výstupom vystupujú činnosti:

- deterministickej povahy, potom s pravdepodobnosťou $p_{ij} = 1$,
- stochastickej povahy s $p_{ij} < 1$. Súčet podmienených pravdepodobností činností vystupujúcich z daného uzla sa musí rovnať 1!

Aby sme mohli uskutočniť časovú analýzu pomocou metódy GERT musí byť udaný :

- začiatok realizácie projektu T_0 ,
- podmienené pravdepodobnosti realizácie jednotlivých činností p_{ij} (pravdepodobnosť realizácie činnosti (i, j) za predpokladu, že uzol i bol dosiahnutý,
- trvanie jednotlivých činností t_{ij} .

Výsledkom časovej analýzy je výpočet TM (najskôr možný termín jednotlivých uzlov) a TM_n (najskôr možný termín pre celý projekt), ktorý predstavuje strednú hodnotu realizácie projektu.

Príklad č.5.9

Určitý projekt možno rozdeliť na nasledovné činnosti. Ide o projekt, ktorý nie je z hľadiska realizácie jednoznačný. Z určitých uzlov sa možno pohybovať viacerými cestami, pričom iba jedna z ciest je realizovateľná. Z tohto dôvodu sú pre jednotlivé činnosti zadane podmienené pravdepodobnosti p_{ij} realizácie týchto činností. Začiatkový a koncový uzol činnosti, podmienené pravdepodobnosti a časové trvanie je uvedené v tabuľke 5.14.

Tab. 5.14

P.č.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
i, j	1,2	1,3	2,5	2,4	3,9	3,10	4,6	4,7	5,8	6,8	7,8	8,12	9,11	10,11	11,12
p_{ij}	1	1	0,2	0,8	0,4	0,6	0,3	0,7	1	1	1	1	1	1	1
t_{ij}	5	4	6	5	5	6	6	5	5	4	5	5	7	8	6

Úloha: Zo získaných údajov zostrojte model projektu (zovšeobecnený SG) a metódou GERT urobte:

- pravdepodobnostnú analýzu SG,
- časovú analýzu SG.

Riešenie

Obr. 5.37 znázorňuje model projektu – zovšeobecnený SG typu GERT.

Ad a) pravdepodobnostná analýza SG, využijeme vzťahy z tabuľky 5.13.:

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = P_{1,2} = p_1 \cdot p_{1,2} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$p_3 = P_{1,3} = p_1 \cdot p_{1,3} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$p_4 = P_{2,4} = p_2 \cdot p_{2,4} = 1 \cdot 0,8 = 0,8$$

$$p_5 = P_{2,5} = p_2 \cdot p_{2,5} = 1 \cdot 0,2 = 0,2$$

$$p_6 = P_{4,6} = p_4 \cdot p_{4,6} = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$$

$$p_7 = P_{4,7} = p_4 \cdot p_{4,7} = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$$

$$p_8 = P_{5,8} + P_{6,8} + P_{7,8} = p_5 \cdot p_{5,8} + p_6 \cdot p_{6,8} + p_7 \cdot p_{7,8} = 0,2 \cdot 0,1 + 0,24 \cdot 1 + 0,56 \cdot 1 = 1$$

$$p_9 = P_{3,9} = p_3 \cdot p_{3,9} = 1 \cdot 0,4 = 0,4$$

$$p_{10} = P_{3,10} = p_3 \cdot p_{3,10} = 1 \cdot 0,6 = 0,6$$

$$p_{11} = P_{9,11} + P_{10,11} = p_9 \cdot p_{9,11} + p_{10} \cdot p_{10,11} = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 1 = 1$$

$$p_{12} = P_{8,12} \cdot P_{11,12} = p_8 \cdot p_{8,12} + p_{11} \cdot p_{11,12} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

ad b) časová analýza SG, využijeme vzťahy z tabuľky 5.13.:

$$TM_1 = 0$$

$$TM_2 = KM_{1,2} = TM_1 + t_{1,2} = 0 + 5 = 5$$

$$TM_3 = KM_{1,3} = 4$$

$$TM_4 = KM_{2,4} = 5 + 5 = 10$$

$$TM_5 = KM_{2,5} = 5 + 6 = 11$$

$$TM_6 = KM_{4,6} = 10 + 6 = 16$$

$$TM_7 = KM_{4,7} = 10 + 5 = 15$$

$$TM_8 = KM_{5,8} \cdot P_{5,8} + KM_{6,8} \cdot P_{6,8} + KM_{7,8} \cdot P_{7,8} = 16 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,24 + 20 \cdot 0,56 = 19,2$$

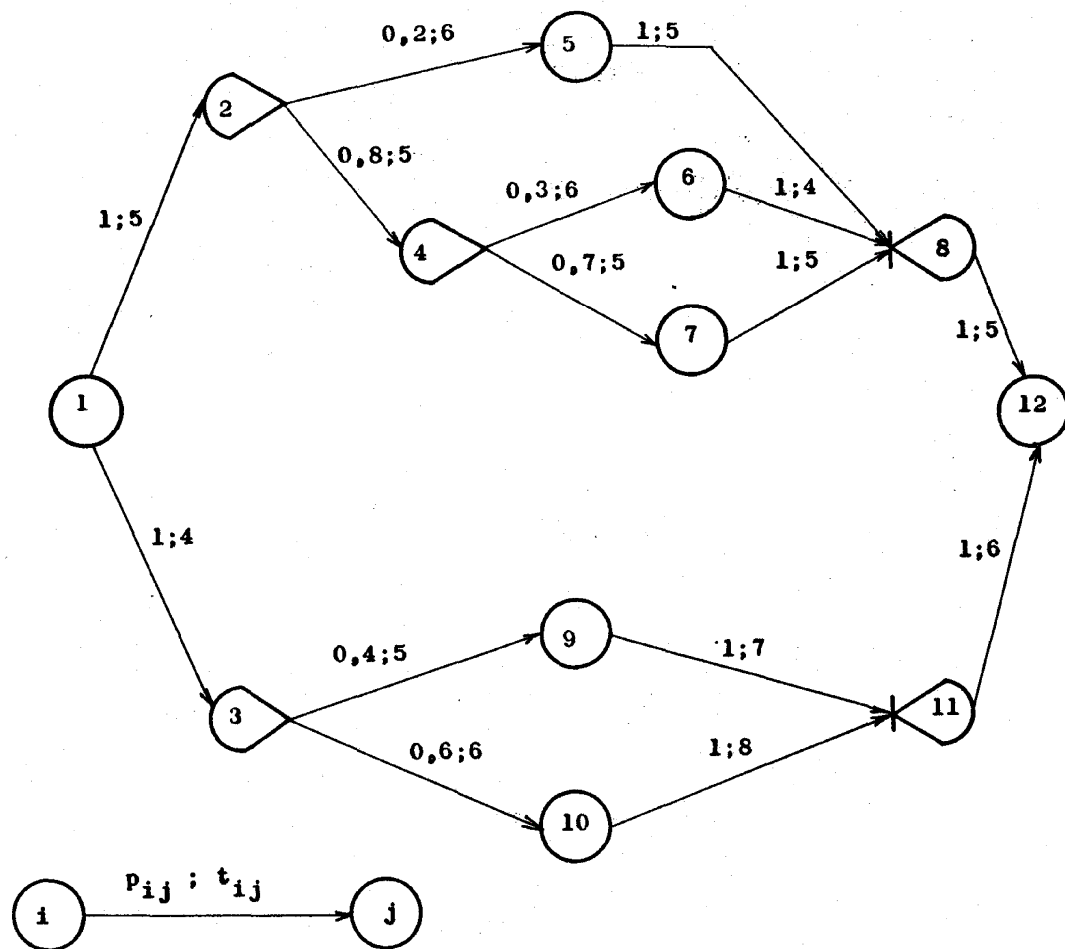
$$TM_9 = KM_{3,9} = 4 + 5 = 9$$

$$TM_{10} = KM_{3,10} = 4 + 6 = 10$$

$$TM_{11} = KM_{9,11} \cdot P_{9,11} + KM_{10,11} \cdot P_{10,11} = 16 \cdot 0,4 + 18 \cdot 0,6 = 17,2$$

$$TM_{12} = \max(KM_{8,12}; KM_{11,12}) = \max(19,2 + 5; 17,2 + 6) = \max(24,2; 23,2) = 24,2$$

Stredná hodnota realizácie projektu (najskôr možný termín pre celý projekt) je 24,2 č.j.



Zdroj: Sakál, 1990

Obr. 5.37

ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE

1. Čo viete o metóde CPM?
2. Čo viete o metóde PERT?
3. Porovnajte metódy CPM a PERT.
4. Napíšte vzťahy pre výpočet strednej hodnoty a rozptylu (smerodajnej odchýlky) trvania činností.
5. Na aké tri otázky odpovedajú pravdepodobnostné výpočty v metóde PERT? Napíšte príslušné výpočtové vzťahy.
6. Čím sa líšia HD a UD SG?
7. Čo viete o metóde CPM v UD SG?

8. Čo viete o metóde MPM?

9. Čo viete o metóde GERT?

Riešené príklady a príklady na precvičenie nájdete v literatúre: (Sakál, 2003), (Sakál, 1990), (Ivaničová, 2002) a (Ivaničová, 1999) a pod..

Literatúra k 5. kapitole

- [1] DOLANSKÝ, V., MĚKOTA, V., NĚMEC V. *Projektový management*. Praha: Grada Publishing, 1996.
- [2] HRABLIK CHOVANOVÁ, H. – ŠUJANOVÁ, J. *Vyššie formy projektového manažmentu*. Trnava: AlumniPress, 2009. Zverejnené na <https://is.stuba.sk>.
- [3] IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačný výskum*. Bratislava: Iura Edition, 2002. 287 s. + 1 CD-ROM. - (Ekonomía).
- [4] IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Prípadové štúdie z operačného výskumu*. Bratislava: Ekonóm, 1999.
- [5] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra*. Trnava: SP SYNERGIA, 2003.
- [6] SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra II*. Trnava: SP SYNERGIA, 2005.
- [7] SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza*. Bratislava: SVŠT, 1983.
- [8] TRÁVNIK, I. – VLACH, J. *Sieťová analýza*. Bratislava: ALFA, 1974. 63-057-74.
- [9] UNČOVSKÝ, L. a kol. *Modely sieťovej analýzy*. Bratislava, Alfa 1991.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV

1. BAŠTA, A.- ROLLO, J. *Metody operační analýzy II.*. Praha: ČVUT, 1969.
2. CHURCHMAN, C.W., ACKOFF, R.L., ARNOFF, E.L. *Úvod do operačního výskumu.* Bratislava: Alfa, 1968.
3. DOLANSKÝ, V. – MĚKOTA, V. – NĚMEC V. *Projektový management.* Praha: Grada Publishing, 1996.
4. FAJMON, B. – KOLÁČEK, J. *Pravděpodobnost, statistika a operační výskum.* Elektronické skriptum FEKT VUT, Brno 2005.
5. GROS, I. *Kvantitativní metody v manažérském rozhodování.* Praha: Grada Publishing, 2003.
6. HANUŠ, F. – MOLNÁR, Z.- ŠTRPKA, A. *Operační a systémová analýza.* Praha: ČVUT, 1981.
7. HRABLIK CHOVANOVÁ, H. – ŠUJANOVÁ, J. *Vyššie formy projektového manažmentu.* Trnava: AlumniPress, 2009. Zverejnené na <https://is.stuba.sk>.
8. HRABLIK CHOVANOVÁ, H. - HRABLIK, M. - ČERNÁ, Ľ. *Metódy operačnej analýzy na vysokých školách a v priemyselných podnikoch.* In: Matematika v ekonomickej praxi. Jihlava: Vysoká škola polytechnická, 2010.
9. IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Operačný výskum.* Bratislava: Iura Edition, 2002. 287 s. + 1 CD-ROM. - (Ekonomía).
10. IVANIČOVÁ, Z. - BREZINA, I. – PEKÁR, J. *Prípadové štúdie z operačného výskumu.* Bratislava: Ekonóm, 1999.
11. JABLONSKÝ, J. *Programy pro matematické modelování.* Praha: VŠE, 2007.
12. JAKÁBOVÁ, M. - HRABLIK CHOVANOVÁ, H. - URDZIKOVÁ, J. *Project management in environmentally oriented business.* In Environmental Economics, Policy and International Environmental Relations. Prague: University of Economics, 2010.
13. KUBÁTOVÁ, J. *Kvantitativní manažerské metody.* Olomouc, 2000.
14. LANGOVÁ, M – JABLONSKÝ, J. *Lineární modely.* Praha: VŠE, 2009.
15. LAŠČIAK, A. a kol. *Optimálne programovanie.* Bratislava: Alfa, 1990.
16. LINCZÉNYI, A. – ŠTRPKA, A. *Operačná analýza.* Bratislava: SVŠT, 1978.
17. MÁCA, J. - LEITNER, B. *Operačná analýza I. Deterministické metódy operačnej analýzy.*

- Žilina: FŠI ŽU, 2002. [online].[cit. 2010-02-25] Dostupné na <http://fsi.uniza.sk/ktvi/publikacie/11_operanal1_u_2002.pdf>.
18. MANUELIANC, A.T. *Modelování problému řízení*. Praha: IŘ, 1977.
 19. Metódy ekonomickej analýzy- skriptá. [online].[cit. 2010-07-30] Dostupné na <http://ep.tuke.sk/pdata/11195/documents/metody_ekonomickej_analyzy__pomocne_materi_aly_/metody_ekonomickej_analyzy-skripta.doc>.
 20. PLESNÍK, J. - DUPAČOVÁ, J. - VLACH, M. *Lineárne programovanie*. Bratislava: Alfa, 1990.
 21. SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra*. Trnava: SP SYNERGIA, 2003.
 22. SAKÁL, P. – JERZ, V. *Operačná analýza v praxi manažéra II*. Trnava: SP SYNERGIA, 2006.
 23. SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza*. Bratislava: SVŠT, 1989.
 24. SAKÁL, P. – ŠTRPKA, A. *Operačná a systémová analýza. Zbierka príkladov I*. Bratislava: SVŠT, 1990.
 25. ŠTRPKA, A. - SAKÁL, P. *Operačná a systémová analýza. Zbierka príkladov II*. Bratislava: ES SVŠT, 1991.
 26. SMEJKAL, V. - RAIS, K. *Řízení rizik ve firmách a jiných organizacích*. Praha: Grada, 2009.
 27. ROZENBERG, V. J. – PROCHOROV, A. I. *Čo je teória hromadnej obsluhy*. Bratislava, SVTL 1965.
 28. UNČOVSKÝ, L. *Stochastické modely operačnej analýzy*. Bratislava, Alfa 1980.
 29. VODÁČEK, L. – PICEK, K. – ŠANDERA, O. *Operační analýza v podnikové racionalizaci*. Praha, SNTL 1977.
 30. WALTER, J. *Stochastické modely v ekonomii*. Praha, SNTL 1970.
 31. WALTER, J. a kol. *Operační výzkum*. Praha, SNTL 1973.
 32. WALTER, J. – LAUBER, J. *Simulační modely ekonomických procesu*. Praha, SNTL 1975.
 33. ZIMOLA, B. *Operační výzkum*. Brno: VUT, 2000.

OBSAH

PREDSLOV	3
1 ÚVOD DO OPERAČNEJ ANALÝZY	5
2 ŠTRUKTÚRNA ANALÝZA	13
2.1 KONŠTRUKCIA LEONTJEVOVHO OTVORENÉHO STATICKÉHO ŠM	15
2.2 ZOSTAVENIE ROZŠÍRENÉHO LEONTJEVOVHO OTVORENÉHO STATICKÉHO ŠM	22
2.3 ŠTRUKTÚRNY MODEL OPERATÍVNEHO PLÁNU VÝROBY PODNIKU	25
RIEŠENÉ PRÍKLADY	28
ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE	40
LITERATÚRA K 2. KAPITOLE	42
3 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE.....	43
3.1 MATEMATICKÉ PROGRAMOVANIE	43
3.2 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE.....	46
3.3 MATEMATICKÁ FORMULÁCIA ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA.....	52
3.4 KLASICKÉ ÚLOHY LOM	53
3.5 VLASTNOSTI RIEŠENIA ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA	66
3.6 SITUÁCIE, KTORÉ MÔŽU NASTAŤ PRI RIEŠENÍ ÚLOH LP	69
3.7 RIEŠENIE LOM.....	70
3.7.1 Grafické riešenie LOM- geometrická interpretácia úloh LP.....	70
3.7.2 Numerické riešenie LOM – úloh LP.....	76
3.7.2.1 Nájdenie 1. základného prípustného riešenia (východiskového) a úprava úlohy do kanonického tvaru	79
3.7.2.2 Vecná interpretácia prídavných a pomocných premenných	88
3.7.2.3 Ohodnotenie nájdeného riešenia kritériom (testom) optimality	89
3.7.2.4 Prechod na nové – lepšie základné riešenie	93
3.7.2.5 Simplexová tabuľka	95
3.7.2.6 Maticovo – vektorová interpretácia výpočtu v simplexovej tabuľke.....	104
3.9 DUALITA ÚLOH LP	107
3.9.1 Symetrické duálne úlohy	108
3.9.2 Nesymetrické duálne úlohy.....	110
3.9.3 Vlastnosti riešenia duálnych úloh	114
3.9.4 Duálne riešenie v simplexovej tabuľke.....	115
3.9.5 Vecná interpretácia duálnych úloh.....	116
3.9.6 Duálne simplexová metóda	119
3.10 POSTOPTIMALIZAČNÉ ÚVAHY (POOPTIMALIZAČNÉ)	123

3.11 PARAMETRICKÉ LINEÁRNE PROGRAMOVANIE	136
ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE	139
LITERATÚRA K 3. KAPITOLE	139
4 DISTRIBUČNÉ PROBLÉMY	141
4.1 METÓDY NA RIEŠENIE DOPRAVNÝCH ÚLOH.....	141
4.1.1 Matematická formulácia dopravnej úlohy.....	141
4.1.2 Spôsoby riešenia dopravnej úlohy	143
4.1.2.1 Metódy na získanie východiskového alebo vyhovujúceho riešenia.....	144
Metóda severozápadného rohu	145
Indexová metóda.....	147
Frekvenčná metóda	147
Vogelova aproximačná metóda (VAM).....	148
4.1.2.2 Presné metódy	149
Metóda riadkových a stĺpcových čísiel – Modifikovaná metóda	149
4.1.3 Degenerácia.....	157
4.1.4 Riešenie nevyváženej úlohy.....	162
4.1.5 Paradox – viac za menej.....	164
4.2 PRIRAĐOVACIE PROBLÉMY	166
ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE	171
LITERATÚRA K 4. KAPITOLE	173
5 METÓDY SIEŤOVEJ ANALÝZY	175
5.1 SIEŤOVÝ GRAF PROJEKTU	177
5.1.1 Základné zásady pri zostavovaní hranovo definovaných konjuktívno deterministických SG	179
5.1.2 Ohodnotenie SG	183
5.1.3 Klasifikácia hranovo definovaných sieťových grafov.....	184
5.1.4 Formalizácia sieťových grafov	186
5.2 ČASOVÁ ANALÝZA SIEŤOVÉHO GRAFU METÓDOU CPM	192
5.2.1 Základné charakteristiky – definície a výpočty	192
5.2.2 Výpočet v grafe	196
5.2.3 Výpočet v tabuľke.....	198
5.2.4 Náklady v sieťovej analýze.....	202
5.2.5 Zdroje v sieťovej analýze.....	211
5.3 ČASOVÁ ANALÝZA SIEŤOVÉHO GRAFU METÓDOU PERT	218
5.3.1 Výpočet v grafe	219
5.4 ČASOVÁ ANALÝZA UZLOVO DEFINOVANÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU CPM	224
5.5 ČASOVÁ ANALÝZA UZLOVO DEFINOVANÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU MPM	227

5.6 ČASOVÁ ANALÝZA ZOVŠEOBECNENÝCH SIEŤOVÝCH GRAFOV METÓDOU GERT	232
ÚLOHY/OTÁZKY NA SAMOSTATNÉ RIEŠENIE	236
LITERATÚRA K 5. KAPITOLE	237
ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ODKAZOV	238

EDÍCIA VYSOKOŠKOLSKÝCH SKRÍPT

Autori: Ing. Henrieta Hrablík-Chovanová, PhD.,
prof. Ing. Peter Sakál, CSc.

Názov: Operačná analýza časť I.
Operational Research I.

Miesto vydania: Trnava
Vydavateľ: AlumniPress
Rok vydania: 2011
Vydanie: prvé
Rozsah : 242 strán
Edičné číslo: 11/AP/2011

ISBN 978-80-8096-151-0
EAN 9788080961510

zverejnené na <https://is.stuba.sk>