VYSOKÁ ŠKOLA DOPRAVY A SPOJOV ŽILINA
Vojenská fakulta

Vladislav KAŠPAR

ZÁKLADNÉ METÓDY OPERAČNEJ ANALÝZY VO VOJENSKEJ DOPRAVE

(DOPRAVNÁ A PRIRAĎOVACIA ÚLOHA)

ŽILINA 1995

Oponenti: Doc.Ing. Pavel Poledňák,CSc.
Doc.Ing. Ivo Milata,CSc
Doc.RNDr. Jaroslav Janáček,CSc.

Obsah

Ú V O D

Tieto skriptá boli spracované pre výučbu predmetov "Algoritmizácia a metódy riadenia", "Automatizácia velenia a riadenia vo vojenskej doprave" a "Základné metódy riadenia" študentov študijných odborov Vojenská automobilová doprava, Vojenská železničná doprava a vo všetkých špecializáciach študijného odboru Vojenské staviteľstvo, ako aj na doplnenie vedomostí študentov v Akademickom kurze č.I.

Cieľom ich spracovania bolo podať študentom ucelený súhrn informácií v oblasti riešenia niektorých distribučných úloh špeciálnymi metódami na riešenie dopravných úloh so zameraním na praktické použitie a správnu prípravu vstupných dát na riešenie.

Vzhľadom na to, že táto problematika sa preberá aj v iných, ako uvedených, študijných odboroch na VF VŠDS, sú skriptá použiteľné pre všetkých študentov Vojenskej fakulty. Využiť ich môžu všetci tí, ktorí sa s danou problematikou zoznamujú v oblasti vojenskej aj civilnej.

Jednotlivé časti problematiky sú spracované nasledujúcim spôsobom: formulácia úlohy, popis algoritmu, vzorový príklad. Algoritmus maďarskej metódy riešenia dopravnej úlohy je spracovaný až do podrobného vývojového diagramu pre aplikáciu na výpočtovú techniku.

Svojim obsahom skriptá spĺňajú požiadavky, ktoré sú na uvedené predmety kladené v profiloch absolventov jednotlivých študijných odborov.

Autor s povďakom príjme všetky pripomienky od čitateľov a použije ich pri prípadnej inovácii skrípt.

DOPRAVNÁ ÚLOHA

Kategória dopravných úloh je najčastejšie charakterizovaná určením optimálneho plánu prepravy tovaru od zdrojov, kde sa tovar nachádza, k spotrebiteľom, ktorí ho požadujú. Táto charakteristika však nevystihuje všetky typy úloh, ktoré je možné riešiť pomocou algoritmov pre dopravnú úlohu. Názov úlohy i jej charakteristika je spojená s jej historickým vznikom, kedy pôvodná formulácia úlohy vychádzala z riešenia optimálneho plánu prepravy tovaru.

Dopravná úloha má široké použitie v optimalizáciách rozhodnutí, vykonávaných pri plnení úloh vojenskej dopravy a cestného zabezpečenia. Okrem optimalizácie dovozu materiálu je možné optimalizovať nasadenie strojov a techniky, rozmiestnenie špecialistov, pridelenie úloh jednotkám a útvarom atď.

Svojimi vlastnosťami patrí dopravná úloha medzi úlohy lineárneho programovania. Jej riešenie by bolo možné vykonať napr. simplexovou metódou. Existujú však efektívnejšie algoritmy.

Špeciálne metódy na riešenie dopravných úloh môžme z hľadiska charakteru dosahovaných výsledkov rozdeliť do dvoch skupín:

Približné metódy - sú to jednoduché a pomerne rýchle metódy, ktoré však dávajú iba približné výsledky, ktoré sa viacej, alebo menej približujú optimálnemu riešeniu.

Presné metódy - sú to metódy, ktoré postupným zlepšovaním počiatočného riešenia dávajú optimálne výsledky. Vyžadujú však, počiatočné riešenie získané spravidla niektorou približnou metódou.

1. FORMULÁCIA DOPRAVNEJ ÚLOHY

Ak chceme riešiť dopravnú úlohu, je treba najskôr vlastný problém formulovať.

Formulácia dopravnej úlohy:

Rovnorodý materiál (tzn. výrobok rovnakých vlastností) sa nachádza v **m** miestach zdrojov **Z(i)** v známych množstvách **a(i)** a chceme ho dopraviť do každého z **n** miest spotreby **S(j)** v množstvách **b(j)**. Poznáme ohodnotenie prepravnej náročnosti (sadzby) na jednotku množstva príslušného materiálu **c(i,j)** zo všetkých zdrojov k všetkým spotrebiteľom.

Úlohou je určiť množstvá materiálu **x(i,j)** prepravovaného od jednotlivých zdrojov k jednotlivým spotrebiteľom tak, aby celkové náklady na prepravu, vyjadrené účelovou funkciou (1.1), boli **optimálne (minimálne, maximálne)**.

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j) \qquad (1.1)$$

Pritom musia byť splnené tieto podmienky:

a) Nezápornosť riešenia

Podmienka nezápornosti riešenia je logická a vyplýva z prirodzenej požiadavky, vyjadrenej napr. pri riešení dovozu stavebného materiálu tým, že nie je možné prepraviť záporné množstvo materiálu. Musí platiť:

$$x(i,j) \geq 0 \quad \text{pre} \quad i \in \{1,2,...m\}, \; j \in \{1,2,...n\} \qquad (1.2)$$

b) Vyrovnanosť úlohy (vybilancovanosť)

Aby úloha bola jednoznačne riešiteľná je nutné, aby množstvo materiálu vo všetkých zdrojoch odpovedalo množstvu požiadaviek na materiál všetkých spotrebiteľov.
Musí platiť:

$$\sum_{i=1}^{m} a(i) = \sum_{j=1}^{n} b(j) \qquad (1.3)$$

c) **Kapacitné ohraničeni**

Podmienky ohraničenia požiadaviek spotrebiteľov a kapacít zdrojov sú opäť prirodzeným vyjadrením reálnych podmienok. Nie je možné zo zdroja rozviesť viac materiálu ako je kapacita zdroja. Rovnako spotrebiteľ nebude odoberať väčšie množstvo materiálu ako požaduje.

Z uvedeného vyplýva, že musia byť splnené tieto podmienky:

$$\sum_{j=1}^{n} x(i,j) = a(i) \qquad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x(i,j) = b(j) \qquad (1.5)$$

Matematický model dopravnej úlohy môžme potom zapísať v matici tabuľkovou formou takto (tab. 1.1).

Z\S	S1	...	Sj	...	Sn	a(i)
Z1	c(1,1)		c(1,j)		c(1,n)	a(1)
Zi	c(i,1)		c(i,j)		c(i,n)	a(i)
Zm	c(n,1)		c(m,j)		c(m,n)	a(m)
b(j)	b(1)		b(j)		b(n)	

Tab. 1.1 Matica sadzieb

Pri predpokladoch, že

$$\sum_{i=1}^{m} a(i) = \sum_{j=1}^{n} b(j) \quad ; \quad a(i) \geq 0 \quad ; \quad b(j) \geq 0$$

je cieľom riešenia nájsť maticu prepravy (tab. 1.2), ktorá spĺňa podmienky

$$\sum_{j=1}^{n} x(i,j) = a(i) \quad ; \qquad \sum_{i=1}^{m} x(i,j) = b(j) \quad ; \qquad x(i,j) \geq 0$$

a ktorá minimalizuje (maximalizuje) účelovú funkciu:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j)$$

Z\S	S1	...	Sj	...	Sn	a(i)
Z1	x(1,1)		x(1,j)		x(1,n)	a(1)
Zi	x(i,1)		x(i,j)		x(i,n)	a(i)
Zm	x(n,1)		x(m,j)		x(m,n)	a(m)
b(j)	b(1)		b(j)		b(n)	

Tab. 1.2 Matica prepravy x(m,n)

Pre výpočet sa úloha spravidla zadáva aj rieši maticovou formou v jednej tabuľke, pričom sadzby sa zapisujú v pravom hornom rohu jednotlivých políček tabuľky (tab.1.3).

Z\S	S1	......	Sj	......	Sn	a(i)
Z1	c(1,1) x(1,1)		c(1,j) x(1,j)		c(1,n) x(1,n)	a(1)
Zi	c(i,1) x(i,1)		c(i,j) x(i,j)		c(i,n) x(i,n)	a(i)
Zm	c(n,1) x(n,1)		c(m,j) x(m,j)		c(m,n) x(m,n)	a(m)
b(j)	b(1)	......	b(j)	......	b(n)	

Tab. 1.3 Tabuľka pre riešenie dopravnej úlohy

2. PRÍPRAVA VSTUPNÝCH DÁT PRE RIEŠENIE DOPRAVNEJ ÚLOHY

Príprava vstupných dát pre riešenie dopravnej úlohy patrí medzi dôležité činnosti. Na ich správnosti závisí aj správnosť výsledkov riešenia a tým aj jeho použitie pre riešenie konkrétnej situácie.

Prípravu dát si popíšeme pre riešenie úlohy minimalizácie nákladov na prepravu materiálu.

a) Definícia zdrojov materiálu

Prvou úlohou je určiť zdroje materiálu a ich potrebné charakteristiky. Pre klasickú dopravnú úlohu postačuje jediná charakteristika zdroja, ktorou je množstvo materiálu, ktoré je v tomto zdroji k dispozícii. Vo formulácii dopravnej úlohy sme množstvá pre jednotlivé zdroje označili **a(i)**. Očíslujeme si zdroje materiálu a do premenných **a(i)** zapíšeme zistené množstvá v jednotlivých zdrojoch.

Fyzikálny rozmer, v ktorom budeme tieto množstvá uvádzať, volíme podľa potreby. Môžu to byť kilogramy, tony, ale napr. aj počet vozidiel apod.

Z\S					a(i)
Z1					50
Z2					40
Z3					60
					\150

Tab. 2.1 Kapacity zdrojov

b) Definícia požiadaviek spotrebiteľov

Pri spotrebiteľoch, rovnako ako pri zdrojoch, nás bude zaujímať ich určenie a charakteristika. Charakteristikou budú opäť množstvá materiálu, tentoraz vyjadrujúce požiadavky jednotlivých spotrebiteľov. Po očíslovaní spotrebiteľov si tieto hodnoty zapíšeme (v súlade s definíciou dopravnej úlohy) do premenných **b(j)**.

Pri ohodnotení požiadaviek na materiál musíme použiť rovnaké jednotky ako pri kapacitách zdrojov.

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1					50
Z2					40
Z3					60
b(j)	30	70	30	20	150\150

Tab. 2.2 Doplnenie požiadaviek spotrebiteľov

c) Definícia sadzieb

Veľmi dôležitou úlohou je stanovenie sadzieb. Vo formulácii úlohy sme uviedli, že sadzbou rozumieme ohodnotenie prepravy jednotkového množstva materiálu od zdroja ku spotrebiteľovi. Tieto sadzby je potrebné stanoviť od všetkých zdrojov k všetkým spotrebiteľom. Ich hodnoty sú určované cieľom, ktorý sme si stanovili pre vlastnú optimalizáciu. Keď je našim cieľom minimalizácia celkového prebehu kilometrov, potom v matici sadzieb musíme uvádzať ako ohodnotenie vzdialenosti medzi zdrojmi a spotrebiteľmi.

Tieto vzdialenosti musia odpovedať skutočným parametrom trás pri preprave materiálu. V tomto prípade môžme použiť na vytvorenie matice sadzieb algoritmy pre vyhľadanie minimálnych ciest v grafe.

Optimalizovať môžme napr. aj spotrebu pohonných hmôt, celkový čas nasadenia dopravných prostriedkov na splnenie úloh prepravy materiálu, finančné náklady apod. Sadzby musia obsahovať príslušné ohodnotenia.

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1	50	45	35	50	50
Z2	25	60	40	60	40
Z3	30	40	35	45	60
b(j)	30	70	30	20	150\150

Tab. 2.3 Doplnenie sadzieb

Prohibitívna sadzba

Pri riešení niektorých úloh môže nastať prípad, keď nie je možné realizovať prepravu medzi niektorým zdrojom a spotrebiteľom. Aby sa toto obmedzenie dalo akceptovať v algoritme výpočtu, tzn. že algoritmus v žiadnom prípade nesmie priradiť materiál (dávku) z uvedeného zdroja k príslušnému spotrebiteľovi, upravíme sadzbu medzi týmito partnermi.

Úprava spočíva v nahradení pôvodnej sadzby ohodnotením **+∞** (pri maximalizácii **-∞**). Pri spracovaní na výpočtovej technike čo najväčšou (najmenšou) hodnotou použitého typu premennej). Takýmto sadzbám hovoríme **prohibitívne**.

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1	50	45	35	50	50
Z2	25	60	nek	60	40
Z3	30	40	35	45	60
b(j)	30	70	30	20	150\150

Tab. 2.4 Prohibitívna sadzba v prvku c(2,3)

2.1 Prevod riešenia maximalizácie na riešenie problému minimalizácie - transponovanie sadzieb

Niektoré metódy pre riešenie dopravných úloh je možné použiť iba na riešenie problému minimalizácie. Ak chceme tieto metódy použiť aj na riešenie maximalizácie, je potrebné zmeniť znamienka v matici sadzieb, alebo použiť tzv. **transponované sadzby**.

Transponované sadzby sú výsledkom jednak zmeny znamienok a jednak odstránením záporných sadzieb odčítaním najnižšej sadzby od všetkých sadzieb matice. [4]

<u>Transponované sadzby sa vypočítajú takto:</u>

- v matici určenej na riešenie maximalizácie sa zistí najvyššia sadzba **k**, kde:

$$\mathbf{k = max\{c(i,j)\}} \quad \text{pre} \quad \mathbf{i} \in \{1,2,...m\}, \ \mathbf{j} \in \{1,2,...n\} \qquad (2.1)$$

- sadzby v jednotlivých políčkach sa od tejto sadzby odčítajú, tým sa dostanú transponované sadzby $\mathbf{c_t(i,j)}$

$$\mathbf{c_t(i,j) = k - c(i,j)} \qquad (2.2)$$

Účelovú funkciu (po vyriešení úlohy) je potrebné v tomto prípade počítať s použitím pôvodnej matice sadzieb (podľa vzťahu 1.1), alebo s použitím transponovanej matice sadzieb podľa vzťahu:

$$\mathbf{z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * (k - c_t(i,j))} \qquad (2.3)$$

Výpočet transponovaných sadzieb (a tým prevod problému maximalizácie na problém minimalizácie) je znázornený v tabuľkách 2.5 a 2.6. Z tabuľky 2.5 vyplýva, že k=60.

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1	50	45	35	50	50
Z2	25	60	40	60	40
Z3	30	40	35	45	60
b(j)	30	70	30	20	150\150

Tab. 2.5 Pôvodná matica sadzieb (k=60)

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1	10	15	25	10	50
Z2	35	0	20	0	40
Z3	30	20	25	15	60
b(j)	30	70	30	20	150\150

Tab. 2.6 Transponovaná matica sadzieb

Keďže týmto spôsobom vieme previesť úlohu maximalizácie na problém minimalizácie, budeme sa ďalej (pri jednotlivých metódach riešenia dopravnej úlohy) zaoberať najmä problematikou minimalizácie. Tým dospejeme k určitému zjednodušeniu problematiky a tiež, ako už bolo uvedené, niektorými metódami môžme riešiť iba problém minimalizácie.

2.2 Nevyrovnanosť (nevybilancovanosť) zdrojov a potrieb

Ako sme už uviedli vo formulácii úlohy, musí byť úloha vyrovnaná (vzťah 1.3). To znamená, že množstvá materiálu vo všetkých zdrojoch musia odpovedať množstvám požiadaviek všetkých spotrebiteľov. Vo väčšine praktických úloh však táto podmienka nebude splnená. Aby bolo možné úlohu riešiť, musíme splnenie podmienky vyrovnanosti zabezpečiť.
Môžu nastať celkom tri prípady:

a) <u>Úloha je vyrovnaná</u> - *platí vzťah (1.3)*

V tomto prípade nie je potrebné vykonať žiadnu úpravu, dáta pre výpočet z hľadiska vyrovnanosti úlohy sú pripravené (pozri tab. 2.3, 2.4).

b) <u>V zdrojoch je prebytok materiálu, ponuka prevyšuje dopyt</u>

$$\sum_{i=1}^{m} a(i) > \sum_{j=1}^{n} b(j) \qquad (2.4)$$

V tomto prípade je potrebné úlohu vyrovnať vytvorením tzv. **fiktívneho spotrebiteľa** (budeme ho označovať **Sf**). Tohto fiktívneho spotrebiteľa zaradíme medzi skutočných spotrebiteľov. Jeho požiadavka na materiál sa bude rovnať množstvu prebytku materiálu v zdrojoch.

$$b(f) = \sum_{i=1}^{m} a(i) - \sum_{j=1}^{n} b(j) \qquad (2.5)$$

Zároveň musíme stanoviť sadzby za prepravu jednotkového množstva materiálu k tomuto fiktívnemu spotrebiteľovi. Vzhľadom na to, že ide o spotrebiteľa fiktívneho, materiál pridelený tomuto spotrebiteľovi zo zdrojov sa v skutočnosti prepravovať nebude, ale ostane nevyužitý v príslušnom zdroji. Preto môžme sadzby od všetkých zdrojov k fiktívnemu spotrebiteľovi stanoviť rovné nule (tab. 2.7).

$$c(i,f) = 0 \quad \text{pre} \quad i \in \{1,2,...m\} \qquad (2.6)$$

V tomto prípade algoritmus priradí fiktívnemu spotrebiteľovi materiál z tých zdrojov, ktoré nemajú výhodné sadzby k skutočným spotrebiteľom. V praxi to znamená, že zdroj, z ktorého bude priradený materiál k fiktívnemu spotrebiteľovi, v skutočnosti nebude vyčerpaný a ostane mu "na sklade" to množstvo, ktoré bolo fiktívnemu spotrebiteľovi priradené.

Z\S	S1	S2	S3	S4	Sf	a(i)
Z1	50	45	35	50	0	80
Z2	25	60	40	60	0	70
Z3	30	40	35	45	0	100
b(j)	30	70	30	20	100	250\250

Tab. 2.7 Fiktívny spotrebiteľ

V niektorých prípadoch sa môže vyskytnúť požiadavka, aby materiál od predom určeného zdroja bol v plnej miere vydaný. To znamená, že ide v podstate o požiadavku, aby od tohto zdroja nebol materiál priradený fiktívnemu spotrebiteľovi. Tuto požiadavku zabezpečíme tak, že nahradíme sadzbu medzi príslušným zdrojom a fiktívnym spotrebiteľom prohibitívnou sadzbou (pozri tab. 2.8).

Z\S	S1	S2	S3	S4	Sf	a(i)
Z1	50	45	35	50	0	80
Z2	25	60	40	60	nek	70
Z3	30	40	35	45	0	100
b(j)	30	70	30	20	100	250\250

Tab. 2.8 Fiktívny spotrebiteľ s prohibitívnou sadzbou u Z2

c) ***Nedostatok materiálu v zdrojoch, dopyt prevyšuje ponuku***

$$\sum_{i=1}^{m} a(i) < \sum_{j=1}^{n} b(j) \qquad (2.7)$$

Vyrovnanie úlohy v tomto prípade vykonáme vytvorením fiktívneho zdroja **Zf.** Pre jeho ohodnotenia platia obdobné vzťahy ako pre fiktívneho spotrebiteľa.

Kapacita fiktívneho zdroja:

$$a(f) = \sum_{j=1}^{n} b(j) - \sum_{i=1}^{m} a(i) \qquad (2.8)$$

Sadzby pri fiktívnom zdroji:

$$c(f,j) = 0 \quad \text{pre} \quad j \in \{1,2,...n\} \qquad (2.9)$$

Rovnako ako pri fiktívnom spotrebiteľovi, aj pri fiktívnom zdroji môžme použiť prohibitívne sadzby (pozri tab. 2.9). V tomto prípade majú význam pre zabezpečenie spotrebiteľa plným požadovaným množstvom materiálu, aj keby to z hľadiska celkovej hodnoty účelovej funkcie bolo menej výhodné.

Z\S	S1	S2	S3	S4	a(i)
Z1	50	45	35	50	50
Z2	25	60	40	60	40
Z3	30	40	35	45	60
Zf	0	0	nek	0	100
b(j)	60	80	60	50	250\250

Tab. 2.9 Fiktívny zdroj s prohibitívnou sadzbou u S3

3. PRIBLIŽNÉ METÓDY

3.1 Vogelova aproximačná metóda (VAM)

Vogelova aproximačná metóda je jednou z najjednoduchších približných metód, ktorá dáva pomerne dobré výsledky, približujúce sa do značnej miery optimu. [4]

Výber políčka, ktoré chceme obsadiť dávkou, nevykonávame iba podľa sadzby, ale berieme do úvahy aj rozdiel medzi najmenšími sadzbami v riadkoch a stĺpcoch tabuľky. Tým znižujeme riziko, že budeme musieť obsadiť políčko s veľmi vysokou sadzbou.

Algoritmus VAM:

Tabuľku pre výpočet si rozšírime o jeden riadok a stĺpec, do ktorých budeme zaznamenávať riadkové a stĺpcové rozdiely (diferencie) $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{s}_j$ (pozri tab. 3.1).

Z\S		S1	....	Sj	....	Sn	
	Ri\Sj	s(1)	....	s(j)	....	s(n)	a(i)
Z1	r(1)	c(1,1) x(1,1)		c(1,j) x(1,j)		c(1,n) x(1,n)	a(1)
Zi	r(i)	c(i,1) x(i,1)		c(i,j) x(i,j)		c(i,n) x(i,n)	a(i)
Zm	r(m)	c(n,1) x(n,1)		c(m,j) x(m,j)		c(m,n) x(m,n)	a(m)
	b(j)	b(1)	....	b(j)	....	b(n)	

Tab. 3.1 Tabuľka pre riešenie metódou VAM

Krok 1: Pre každý riadok a stĺpec stanovíme diferenciu medzi najmenšou a druhou najmenšou sadzbou v danom riadku alebo stĺpci. Ak sú dve najmenšie sadzby rovnaké, diferencia je nulová. V prípade, že ostáva v riadku (stĺpci) jediné políčko (rozdiel nie je možné vypočítať), diferenciu obsadíme prohibitívnou konštantou (∞).

Krok 2: Vyhľadáme riadok alebo stĺpec s najvyššou diferenciou.
V tomto riadky (stĺpci) vyhľadáme políčko s najnižšou sadzbou.

Krok 3: Do tohto políčka umiestnime maximálnu možnú dávku vzhľadom na okrajové podmienky $(\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{min}\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j\})$.
Z ďalšieho riešenia vypustíme riadok alebo stĺpec, kde okrajová podmienka je nulová ($\mathbf{a}_i\mathbf{=0}$ alebo $\mathbf{b}_j\mathbf{=0}$).

Ďalej pokračujeme odznova (krokom 1) v zmenšenej matici. Tento postup opakujeme dovtedy, kým nedôjde k uspokojeniu požiadaviek všetkých spotrebiteľov a vyčerpaniu všetkých zdrojov (pre všetky i,j musí platiť $\mathbf{a}_i\mathbf{=0}$, $\mathbf{b}_j\mathbf{=0}$).

Poznámka ku kroku 2:

Pri riešení praktických príkladov sa môže vyskytnúť prípad, že dva alebo viac riadkov (stĺpcov) má rovnakú najvyššiu diferenciu. V rôznych literatúrach (napr. [1,2,4]) sa v tomto prípade uvádza niekoľko postupov. Jedným z nich (podľa [4]), ktorý dáva veľmi dobré výsledky a je pomerne jednoduchý, je nasledujúci:

Vyhľadá sa stĺpec (riadok) v ktorom je políčko s najnižšou sadzbou (u riadkov a stĺpcov s najvyššou diferenciou). Pokiaľ existuje v preverovaných riadkoch a stĺpcoch s rovnakou najvyššou diferenciou niekoľko rovnakých najnižších sadzieb (prípad málo obvyklý), potom platí pre správnu voľbu najvýhodnejšieho políčka táto druhá doplňujúca podmienka:

Pre riadky a stĺpce s najnižšou rovnakou sadzbou sa určí tzv. **druhá diferencia** ako rozdiel sadzby skúmaného políčka a druhej najnižšej sadzby v príslušnom stĺpci (riadku). Pre realizáciu prepravy sa potom volí riadok (stĺpec), kde je druhá diferencia najvyššia. Ak sú aj najvyššie druhé diferencie rovnaké, zisťuje sa ďalšia diferencia, alebo sa vykoná obsadenie ľubovoľne.

Postup riešenia metódou VAM si ukážeme na príklade 3.1.

■ ■

Príklad 3.1

Má sa riešiť minimalizácia objemu prepravných výkonov podľa zadania v tabuľke 3.2, v ktorej sú uvedené všetky potrebné informácie: výška zdrojov (a_i) v tonách, požiadavky spotrebiteľov (b_j) v tonách a kilometrické vzdialenosti z miest zdrojov k spotrebiteľom (c_{ij}).

Poznámka: Druhé diferencie v riešení príkladu (tab. 3.3) sú označené v zátvorkách.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	4	6	10	15	20	23	180
Z2	6	9	15	17	18	22	130
Z3	10	11	14	9	13	18	160
Z4	15	13	23	5	8	14	280
Z5	20	22	26	7	11	10	250
b(j)	200	140	150	170	210	130	1000

Tab. 3.2 Zadanie pre riešenie príkladu 3.1

Z\S	r(i)\s(j)	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		2, 6, 5	3,(5), 5,2	4,(5)	2, 4	3, 5	4, (8)	
Z1	2	4 30	6	10 150	15	20	23	180, 30,0
Z2	3, (-)	6 130	9	15	17	18	22	130,0
Z3	1, 1	10 40	11 120	14	9	13	18	160, 120,0
Z4	3, 8, 2	15	13 20	23	5 50	8 210	14	280,70 20,0
Z5	3, 4	20	22	26	7 120	11	10 130	250, 120,0
b(j)		200, 70, 40, 0	140, 20, 0	150, 0	170, 50, 0	210, 0	130, 0	

Tab. 3.3 Riešenie príkladu 3.1 metódou VAM.

POSTUP RIEŠENIA:

Krok 1: - výpočet riadkových (stĺpcových) rozdielov:

$r_1 = c_{12} - c_{11} = 2$ $\qquad s_1 = c_{21} - c_{11} = 2$

$r_2 = c_{22} - c_{21} = 3$ $\qquad s_2 = c_{22} - c_{12} = 3$

$r_3 = c_{31} - c_{34} = 1$ $\qquad s_3 = c_{33} - c_{12} = 4$

$r_4 = c_{45} - c_{44} = 3$ $\qquad s_4 = c_{54} - c_{44} = 2$

$r_5 = c_{56} - c_{54} = 3$ $\qquad s_5 = c_{55} - c_{45} = 3$

$s_6 = c_{46} - c_{56} = 4$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $s_3 = 4$ a $s_6 = 4$
- najnižšia sadzba: v 3. stĺpci $c_{13} = 10$
  v 6. stĺpci $c_{56} = 10$
- stanovenie druhých diferencií:

$s'_3 = c_{23} - c_{13} = 5$

$s'_6 = c_{36} - c_{56} = 8$

Krok 3: - prepravu realizujeme pre políčko (5,6), ktoré obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{56} = 130$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme stĺpec 6 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme riadkové rozdiely:

$r_5 = c_{55} - c_{54} = 4$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $r_5 = 4$ a $s_3 = 4$
- najnižšia sadzba je v 5. riadku: $c_{54} = 7$

Krok 3: - políčko (5,4) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{54} = 120$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme riadok 5 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme stĺpcové rozdiely:

$s_4 = c_{34} - c_{44} = 4$

$s_5 = c_{35} - c_{45} = 5$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $s_5 = 5$
- najnižšia sadzba v 5. stĺpci: $c_{45} = 8$

Krok 3: - políčko (4,5) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{45} = 210$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme stĺpec 5 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme riadkové rozdiely:

$r_4 = c_{42} - c_{44} = 8$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $r_4 = 8$
- najnižšia sadzba v 4. riadku: $c_{44} = 5$

Krok 3: - políčko (4,4) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{44} = 50$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme stĺpec 4 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme riadkové rozdiely:

$r_3 = c_{32} - c_{31} = 1$

$r_4 = c_{41} - c_{42} = 2$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $s_3 = 4$
- najnižšia sadzba v 3. stĺpci: $c_{13} = 10$

Krok 3: - políčko (1,3) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{13} = 150$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme stĺpec 3 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme riadkové rozdiely:
ostávajú bez zmeny

Krok 2: - najvyššia diferencia: $r_2 = 3$ a $s_2 = 3$
- najnižšia sadzba v 2. riadku $c_{21} = 6$
v 2. stĺpci: $c_{12} = 6$
- druhá diferencia:
$s_2 = c_{32} - c_{31} = 5$
pre 2. riadok druhá diferencia neexistuje;
- pre realizáciu prepravy volíme riadok (stĺpec), kde nie je možné druhú diferenciu stanoviť (riadok 2);

Krok 3: - políčko (2,1) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{21} = 130$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme riadok 2 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme stĺpcove rozdiely:
$s_1 = c_{31} - c_{11} = 6$
$s_2 = c_{32} - c_{12} = 5$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $s_1 = 6$
- najnižšia sadzba v 1. stĺpci: $c_{11} = 4$

Krok 3: - políčko (1,1) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{11} = 30$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme riadok 1 a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - opravíme stĺpcové rozdiely:
$s_1 = c_{41} - c_{31} = 5$
$s_2 = c_{42} - c_{32} = 2$

Krok 2: - najvyššia diferencia: $s_1 = 5$
- najnižšia sadzba v 1. stĺpci: $c_{31} = 10$

Krok 3: - políčko (3,1) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{31} = 40$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme stĺpec 1;

Na riešenie nám ostávajú už iba dve políčka - (3,2) a (4,2). Tieto už len doplníme dávkami podľa okrajových podmienok takto:

$$x_{32} = 120$$
$$x_{42} = 20$$

Tým je riešenie rozmiestnenia dávok ukončené a ostáva už iba výpočet hodnoty účelovej funkcie podľa vzťahu 1.1.

$$\mathbf{z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j)} =$$

$$= 30*4 + 150*10 + 130*6 + 40*10 + 120*11 + 20*13 + 50*5 + 210*8 + 120*7 + 130*10 = \mathbf{8450\ tkm}$$

ZÁVER

Optimálny (minimálny) prepravný výkon 8450 tkm bude dosiahnutý pri rozmiestnení prepravných dávok od zdrojov k spotrebiteľom tak, ako je uvedené v tabuľke 3.3.

■ ■

3.2 Metóda postupných redukcií

Algoritmus tejto metódy je založený na nasledujúcej vete:

"Ak odvodíme z pôvodnej matice sadzieb C (so sadzbami c_{ij}) inú maticu C' (so sadzbami c'_{ij}) upravenými transformáciou

$$c'_{ij} = c_{ij} \pm u_i \pm v_j$$

kde u_i a v_j sú konštanty, problém optimalizácie a umiestnenie optima sa nezmení."

Metóda postupných redukcií je metódou približnou a pri jej použití sa dosahujú celkom dobré výsledky, blížiace sa optimálnym alebo priamo optimálne. [4]

Algoritmus metódy:

Krok 1: Vykoná sa redukcia matice sadzieb tak, aby v každom riadku a v každom stĺpci vznikla aspoň jedna nulová sadzba.
Redukciu je možné vykonať nasledujúcim spôsobom:
V každom riadku (stĺpci) matice sa zistí najnižšia sadzba a o jej hodnotu sa znížia všetky sadzby v danom riadku (stĺpci).
V každom stĺpci (riadku) matice sa zistí najnižšia sadzba (prípadne už redukovaná) a o jej hodnotu sa znížia všetky sadzby daného stĺpca (riadku).
Redukciu je možné vykonať počnúc riadkami alebo stĺpcami postupne, poprípade počnúc ľubovoľným riadkom alebo stĺpcom aj striedavo.
Pri rozdielnych okrajových podmienkach sa odporúča vykonať redukciu postupne po riadkoch a stĺpcoch s najvyššími okrajovými podmienkami (toto nie je podmienkou).

Krok 2: V riadkoch a stĺpcoch s jedinou nulovou sadzbou sa zistia riadkové (stĺpcové) rozdiely (diferencie) r_i, s_j (ako u metódy VAM) a tieto sa poznamenajú do pomocného stĺpca (riadku).
Na realizáciu prepravy (obsadenie dávkou) sa volí nulové políčko riadku (stĺpca) s najvyššou diferenciou.

Krok 3: Toto políčko sa obsadí maximálnou možnou dávkou vzhľadom na okrajové podmienky. Z ďalšieho riešenia sa vypustí riadok (stĺpec), v ktorom sú už okrajové podmienky splnené a prejde sa na krok 1.

Tento postup sa opakuje do vyčerpania kapacít všetkých zdrojov a uspokojenia požiadaviek všetkých spotrebiteľov.

Poznámka ku kroku 2:

Ak existuje viac rovnakých najvyšších diferencií, je možné postupovať rovnako ako pri metóde VAM, to znamená zistením druhej diferencie pri týchto riadkoch a stĺpcoch (pozri kap. 3.1).

Postup riešenia metódou postupných redukcií si ukážeme na príklade 3.2.

■ ■

Príklad 3.2

Stavebný útvar si má vlastnými dopravnými prostriedkami zabezpečiť dopravu stavebného materiálu (štrk) na 6 stavieb, pričom k dispozícii je 5 zdrojov materiálu.

Úlohou je vyriešiť odber materiálu od jednotlivých zdrojov tak, aby celkový prepravný výkon bol minimálny.

Vstupné údaje pre riešenie - kapacity zdrojov a požiadavky stavieb (v tonách) a kilometrické vzdialenosti medzi zdrojmi a stavbami sú uvedené v tabuľke 3.4.

Riešenie je znázornené postupne v tabuľkách 3.5 až 3.9.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	30	20	2	4	18	32	160
Z2	4	42	26	0	7	30	130
Z3	16	54	37	14	4	24	170
Z4	42	14	12	37	30	11	290
Z5	32	47	30	24	12	4	250
b(j)	220	120	140	180	230	110	1000

Tab. 3.4 Vstupné údaje pre riešenie príkladu 3.2

POSTUP RIEŠENIA:

Tabuľku na riešenie si rozšírime o stĺpec a riadok na zaznamenávanie riadkových a stĺpcových rozdielov $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{s}_j$ a o stĺpec a riadok na zaznamenávanie hodnôt $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_j$ používaných pri redukcii matice sadzieb (pozri tab. 3.5).

Z\S			S1	S2	S3	S4	S5	S6	
	u\v		-4	-3	0	0	-4	0	
		r\s							a(i)
Z1	-2		24 26 30	15 18 20	0 2	2 4	12 14 18	30 32	160
Z2	0		0 4	39 42	26	0	3 7	30	130
Z3	0		12 16	51 54	37	14	0 4	24	170
Z4	-11		27 31 42	0 3 14	1 12	26 37	15 19 30	0 11	290
Z5	-4		24 28 32	40 43 47	26 30	20 24	4 8 12	0 4	250
		b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 3.5 Matica pôvodných a redukovaných sadzieb

Krok 1: - redukcia matice sadzieb tak, aby v každom riadku a stĺpci bola aspoň jedna nulová sadzba. Redukciu vykonáme podľa výšky okrajových podmienok, hodnoty, o ktoré budeme redukovať, zaznamenáme v pomocnom stĺpci a riadku $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_j$ (tab. 3.5).

- najvyššia okrajová podmienka $a_4 = 290$, najnižšia sadzba v 4. riadku $c_{46} = 11$; sadzby celého riadku znížime o $u_4 = -11$.

- ďalšie redukcie:

$a_5 = 250$; $u_5 = -4$
$b_5 = 230$; $v_5 = -4$
$b_1 = 220$; $v_1 = -4$
$b_4 = 180$; $v_4 = 0$
$a_3 = 170$; $u_3 = 0$
$a_1 = 160$; $u_1 = -2$
$b_3 = 140$; $v_3 = 0$
$a_2 = 130$; $u_2 = 0$
$b_2 = 120$; $v_2 = -3$
$b_6 = 110$; $v_6 = 0$

1. pokračovanie riešenia - tabuľka 3.6

Z\S			S1	// S2 ////	S3	S4	S5	S6	
	u\v		-12	//////////					
		r\s	12, (24), 12, (12)	15 ////// //////////	1	2, 12, (18)	3, 4		a(i)
Z1 / /////	/////// ///////	2, 0 ///////	/// 12 24 //////////	////// 15 //////////	/////// 0 //////////	///// 0 2 / 160 ////	////// 12 //////////	////// 30 //////////	/////// 160,0
Z2 / /////	/////// ///////	/////// ///////	/////// 0 / 130 ////	////// 39 //////////	////// 26 //////////	/////// 0 //////////	/////// 3 //////////	////// 30 //////////	/////// 130,0
Z3		12,(14) 0	0 12	////// 51 //////////	37	12 14	0	24	170
Z4		1	15 27	/////// 0 / 120 ////	1	24 26	15	0	290, 170
Z5		4	12 24	////// 40 //////////	26	18 20	4	0	250
		b(j)	220, 90	120, 0 //	140	180, 20	230	110	

Tab. 3.6 1. pokračovanie riešenia príkladu 3.2

Krok 2: - riadkové rozdiely: $r_1 = 2$, $r_3 = 12$, $r_5 = 4$,
- stĺpcové rozdiely: $s_1 = 12$, $s_2 = 15$, $s_3 = 1$, $s_4 = 2$, $s_5 = 3$
- maximálny rozdiel: $s_2 = 15$

Krok 3: - políčko (4,2) obsadíme maximálnou možnou dávkou $x_{42} = 120$;
- z ďalšieho riešenia vypustíme 2. stĺpec a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: nie je potrebná, v každom riadku a stĺpci je aspoň jedna nulová sadzba;

Krok 2: - riadkové a stĺpcové rozdiely: (kontrola) $r_4 = 1$,
- maximálny rozdiel: $r_3 = 12$, $s_1 = 12$
- druhé rozdiely : $r'_3 = 14$, $s'_1 = 24$
- maximálny druhý rozdiel: $s'_1 = 24$

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{21} = 130$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 2. riadok a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: $v_1 = -12$, $v_4 = -2$

Krok 2: - riadkové a stĹpcové rozdiely:
$r_1 = 0$, $r_3 = 0$
$s_1 = 12$, $s_4 = 12$, $s_5 = 4$
- maximálny rozdiel: $s_1 = 12$, $s_4 = 12$
- druhé rozdiely : $s'_1 = 12$, $s'_4 = 18$
- maximálny druhý rozdiel: $s'_4 = 18$

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{14} = 160$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 1. riadok a prejdeme na krok 1;

----

2. pokračovanie riešenia - tabuľka 3.7

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: $v_3 = -1$, $v_4 = -12$

Krok 2: - riadkové a stĹpcové rozdiely:
$r_5 = 4$,
$s_1 = 12$, $s_3 = 25$, $s_4 = 6$, $s_5 = 4$
- maximálny rozdiel: $s_3 = 25$

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{43} = 140$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 3. stĹpec a prejdeme na krok 1;

Z\S			// S1 ////	// S2 ////	// S3 ////	S4	S5	S6	
	u\v		//////////	//////////	-1 //////	-12			
		r\s	12, (15)	//////////	25 //////	6	4		a(i)
Z1 / /////	/////// ///////	/////// ///////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// / 160 ////	////////// //////////	////////// //////////	/////// ///////
Z2 / /////	/////// ///////	/////// ///////	////////// / 130 ////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	/////// ///////
Z3			/////// 0 / 90 ////	////////// //////////	/// 36 37 //////////	0 12	0	24	170, 80
Z4 / /////	/////// ///////	12, // (15) /	////// 15 //////////	////////// / 120 ////	///// 0 1 / 140 ////	/// 12 24 //////////	////// 15 //////////	/////// 0 / 30 ////	170,// 30,0 /
Z5		4	////// 12 //////////	////////// //////////	/// 25 26 //////////	6 18	4	0	250
		b(j)	/ 90, 0 //	//////////	140, 0 //	20	230	110, 80	

Tab. 3.7 2. pokračovanie riešenia príkladu 3.2

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: nie je potrebná, v každom riadku a stĺpci je aspoň jedna nulová sadzba;

Krok 2: - riadkové a stĺpcové rozdiely:
$r_4 = 12$, ostatné ostávajú bez zmien
- maximálny rozdiel: $s_1 = 12$, $r_4 = 12$
- druhé rozdiely : $s'_1 = 15$, $r'_4 = 15$
- druhé rozdiely sú rovnaké, môžme vybrať ľubovoľne medzi 4. riadkom a 1. stĺpcom - vyberieme 1. stĺpec;

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{31} = 90$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 1. stĺpec a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: nie je potrebná, v každom riadku a stĺpci je aspoň jedna nulová sadzba;

Krok 2: - riadkové a stĺpcové rozdiely: ostávajú bez zmien
- maximálny rozdiel: $r_4 = 12$

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{46} = 30$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 4. riadok a prejdeme na krok 1;

<u>3. pokračovanie riešenia - tabuľka 3.8</u>

Z\S			S1	S2	S3	S4	S5	S6	
	u\v		//////////	//////////	//////////			//////////	
		r\s	//////////	//////////	//////////	6, 2	4	24 //////	a(i)
Z1 / /////	/////// ///////	/////// ///////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// / 160 ////	////////// //////////	////////// //////////	/////// ///////
Z2 / /////	/////// ///////	/////// ///////	////////// / 130 ////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	/////// ///////
Z3			////////// / 90 ////	////////// //////////	////////// //////////	0 20	0 60	////// 24 //////////	80, 60, 0
Z4 / /////	/////// ///////	/////// ///////	////////// //////////	////////// / 120 ////	////////// / 140 ////	////////// //////////	////////// //////////	////////// / 30 ////	/////// ///////
Z5	-4	4, 2	////////// //////////	////////// //////////	////////// //////////	2 6	0 4 170	/////// 0 / 80 ////	250, 170,0
		b(j)	//////////	//////////	//////////	20, 0	230,170,0	80, 0 ////	

Tab. 3.8 3. pokračovanie riešenia príkladu 3.2

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: nie je potrebná, v každom riadku a stĺpci je aspoň jedna nulová sadzba;

Krok 2: - riadkové a stĺpcové rozdiely:
$r_5 = 4$,
$s_4 = 6$, $s_5 = 4$, $s_6 = 24$,
- maximálny rozdiel: $s_6 = 24$

Krok 3: - obsadenie dávkou: $x_{56} = 80$
- z ďalšieho riešenia vypustíme 6. stĺpec a prejdeme na krok 1;

Krok 1: - redukcia matice sadzieb: $u_5 = -4$

Na riešenie nám ostávajú už iba 4 políčka, z ktorých tri sú ohodnotené redukovanou sadzbou 0. Vzhľadom na okrajové podmienky je obsadenie jednoznačné:

$$x_{34} = 20$$
$$x_{35} = 60$$
$$x_{55} = 170$$

Tým je rozmiestnenie dávok vyriešené a riešenie je optimálne.

Celkové riešenie (aj s pôvodnými sadzbami) je uvedené v tabuľke 3.9.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	30	20	2	4 160	18	32	160
Z2	4 130	42	26	0	7	30	130
Z3	16 90	54	37	14 20	4 60	24	170
Z4	42	14 120	12 140	37	30	11 30	290
Z5	32	47	30	24	12 170	4 80	250
b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 3.9 Výsledné riešenie príkladu 3.2 metódou postupných redukcií.

Ostáva už iba vyčísliť hodnotu účelovej funkcie podľa vzťahu (1.1).

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j) =$$

$$= 160*4 + 130*4 + 90*16 + 20*14 + 60*4 + 120*14 + 140*12 + 30*11 + 170*12 + 80*4 = \mathbf{9170\ tkm}$$

Tým je riešenie príkladu ukončené.

ZÁVER

Optimálny (minimálny) prepravný výkon 9170 tkm bude dosiahnutý pri preprave materiálu stavebnými útvarmi od jednotlivých zdrojov tak, ako je uvedené vo výslednom riešení - tabuľka 3.9.

4. PRESNÉ METÓDY

Princípom získania optimálneho riešenia týmito metódami je postupné zlepšovanie východiskového (prípustného) riešenia presunovaním dávok. Pritom sa využíva princíp cyklov a to (podľa metódy) ako na zistenie políčka, na ktoré je výhodné vykonať presun určitej dávky, tak aj na samotný jej presun.

Pri použití týchto metód je preto potrebné východiskové riešenie dopravnej úlohy získané niektorou približnou metódou.

Ak východiskové riešenie spresňovania spĺňa podmienku

$$\mathbf{p}_{obs} = \mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{1} \qquad (4.1)$$

kde:

p_{obs} ... počet obsadených políčok dávkami x_{ij}

m ...... počet zdrojov (vrátane fiktívneho)

n ...... počet spotrebiteľov (vrátane fiktívneho)

potom je možné pre každé neobsadené políčko vytvoriť **cyklus**, ktorý vychádza z neobsadeného políčka a uzatvára sa cez obsadené políčka naspäť do políčka východiskového (neobsadeného).

Poznámka: Východiskové riešenie musí byť získané niektorou z približných metód. Takéto riešenie je vždy **základné**, tzn. počet obsadených políček je maximálne **m + n - 1**, pričom sú tieto nezávislé. Situácia, kedy počet obsadených políček je menší ako **m + n - 1** bude rozobratá v kapitole 4.3.

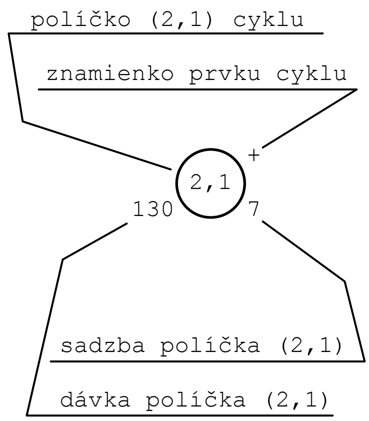
Pri vytváraní cyklu možno vykonať obrat o 90° iba na obsadenom políčku, pričom existuje jediná a iba jediná cesta pri vytváraní cyklu pre ktorékoľvek neobsadené políčko.

Každé políčko cyklu, v ktorom sa mení smer, si striedavo označíme znamienkami "**+**" a "**-**", pričom východiskové (neobsadené) políčko označujeme znamienkom "**+**".

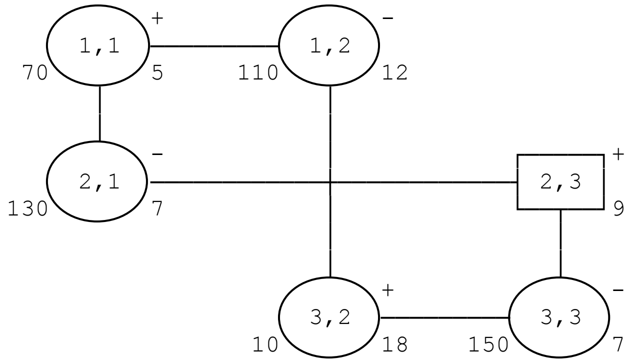
Princíp vytvárania cyklu a označovania políčok do cyklu zaradených je uvedený pre príklad východiskového riešenia (tab. 4.1) na obrázkoch 4.2, 4.3, 4.4 a 4.5. Obsadené políčka sú znázornené krúžkom, neobsadené políčko, pre ktoré sa cyklus vytvára, je znázornené obdĺžnikom. Význam hodnôt rohových prvkov cyklu je znázornený na obr. 4.1.

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
Z1	5 70	12 110	3	14	7	9	180
Z2	7 130	4	9	21	5	11	130
Z3	3	18 10	7 150	8	9	6	160
Z4	2	10 20	5	9 50	8 210	4	280
Z5	8	6	10	12 120	15	17 130	250
	200	140	150	170	210	130	

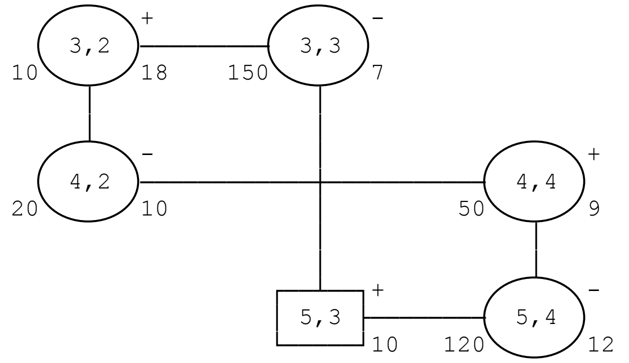
Tab. 4.1 Východisková tabuľka pre znázornenie tvorby cyklov



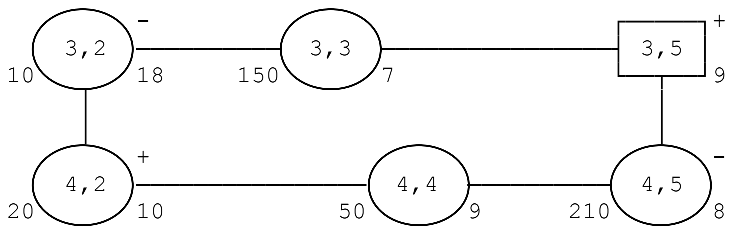
Obr. 4.1 Význam hodnôt rohových prvkov cyklu pre obr. 4.2 až 4.5



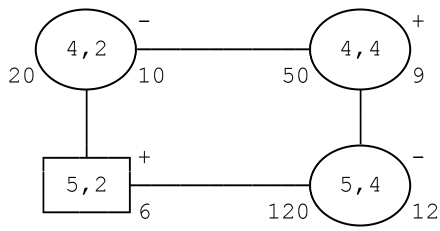
Obr. 4.2 Cyklus pre políčko (2,3) tab. 4.1



Obr. 4.3 Cyklus pre políčko (5,3) tab. 4.1



Obr. 4.4 Cyklus pre políčko (2,3) tab. 4.1



Obr. 4.5 Cyklus pre políčko (5,2) tab. 4.1

4.1 Metóda presunu v cykloch

Pri riešení dopravnej úlohy metódou presunu v cykloch sa preverujú jednotlivé neobsadené políčka východiskového, prípadne už zlepšeného riešenia, a zisťuje sa, či obsadenie niektorých, doposiaľ neobsadených políčok, neprinesie zlepšenie účelovej funkcie.

Možnosť presunu dávky medzi obsadenými a neobsadenými políčkami je daná pri dodržaní týchto podmienok:

- musia byť dodržané okrajové podmienky uvedené v kapitole 1 (pozri vzťahy 1.4 a 1.5);
- žiadna dávka nesmie byť záporná (vzťah 1.2);
- políčka obsadené dávkami musia byť nezávislé (nie je možné vytvoriť cyklus iba cez obsadené políčka) a ich počet musí spĺňať podmienku podľa vzťahu 4.1 (pri nedodržaní tejto podmienky nie je možné vytvoriť cyklus pre všetky neobsadené políčka).

Na posúdenie výhodnosti presunu dávky na neobsadené políčko sa využíva **kritérií výhodnosti - k_{ij}**, ktoré nám **udávajú o koľko by sa zmenila hodnota účelovej funkcie presunom jednotkovej dávky v príslušnom cykle.**

Výpočet kritérií výhodnosti pre jednotlivé neobsadené políčka sa vykoná týmto spôsobom:

- pre neobsadené políčko sa vytvorí cyklus, v ktorom sa označia jeho rohové prvky znamienkami "**+/-**" spôsobom ako už bolo uvedené v úvodnej časti kapitoly 4;
- kritérium výhodnosti $\mathbf{k}_{ij}$ sa potom rovná sume sadzieb rohových prvkov cyklu s príslušným priradeným znamienkom; výpočet je možné zapísať vzťahom:

$$\mathbf{k}_{ij} = \sum_{p=1}^{pc} \pm \mathbf{c(i,j)}_p \qquad (4.2)$$

kde:

$\mathbf{k}_{ij}$ .... kritérium výhodnosti neobsadeného políčka (i,j)

$\pm\mathbf{c(i,j)}_p$ .... **p**-tý rohový prvok cyklu predstavujúci sadzbu políčka (i,j) matice sadzieb s príslušným znamienkom podľa označenia v cykle (pozri obr. 4.1 až 4.5);

pc .... počet rohových prvkov príslušného cyklu (s východiskovým neobsadeným políčkom).

Napr.: - pre políčko (5,3) podľa obrázku 4.3

$$\mathbf{k}_{53} = c_{53} - c_{54} + c_{44} - c_{42} + c_{32} - c_{33} =$$
$$= 10 - 12 + 9 - 10 + 18 - 7 = 8$$

- pre políčko (3,5) podľa obrázku 4.4

$$\mathbf{k}_{35} = c_{35} - c_{32} + c_{42} - c_{45} =$$
$$= 9 - 18 + 10 - 8 = -7$$

Ďalším problémom pri zlepšovaní riešenia je samotný **vyvážený presun dávky v cykle**. Aby boli dodržané už vyššie uvedené podmienky (vzťahy 1.2, 1.4 a 1.5) je potrebné dodržať tento postup:

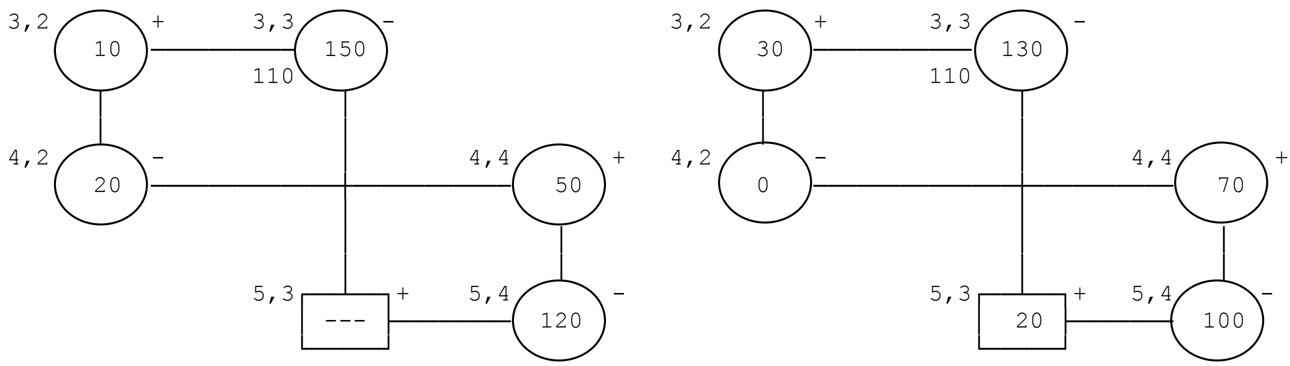
- v danom cykle sa zistí presunovaná dávka **pd** ako najnižšia dávka **x(i,j)** v rohových prvkoch s označením znamienkom "-":

$$\mathbf{pd = min \{ x(i,j)}_p{}^{(-)} \mathbf{\}} \qquad (4.3)$$

- zistenú presunovanú dávku **pd** budeme pričítať k dávkam rohových prvkov cyklu označených znamienkom "+" (vrátane neobsadeného počiatočného políčka cyklu) a odčítať od dávok rohových prvkov cyklu označených znamienkom "-".

Príklad vyváženého presunu v cykle je uvedený na obr. 4.6.

Pred presunom dávky: Po vyváženom presune dávky pd = 20:



pd = min { 120, 20 150 }
pd = 20

Obr. 4.6 Znázornenie cyklu pre políčko (5,3) z tabuľky 4.1 pred presunom a po vyváženom presune dávky pd

Hodnota kritéria výhodnosti $\mathbf{k}_{ij}$ a presunovaná dávka **pd** pre ten istý cyklus, ktorý budeme pre zlepšenie riešenia využívať, poslúži aj na vyhodnotenie zlepšenia účelovej funkcie, ktoré vypočítame podľa vzťahu:

$$\mathbf{zl} = \mathbf{pd} * \mathbf{k}_{ij} \tag{4.4}$$

kde:

zl .... zlepšenie účelovej funkcie;
pd .... presunovaná dávka;
k_{ij} ... kritérium výhodnosti pre cyklus s presunovanou dávkou.

Nová hodnota účelovej funkcie po zlepšení sa potom vypočíta podľa vzťahu

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_{pov} + \mathbf{zl} \tag{4.5}$$

kde:

z ..... nová hodnota účelovej funkcie po vykonanom presune dávky pd;
z_{pov} .. pôvodná hodnota účelovej funkcie pred presunom dávky pd;
zl .... zlepšenie účelovej funkcie.

Napr.: Pre cyklus prislúchajúci políčku (5,3) tabuľky 4.9 (ďalej pozri obr. 4.3 a 4.6), kde $\mathbf{k}_{53} = \mathbf{8}$ a $\mathbf{pd} = \mathbf{2}$ je potom $\mathbf{zl} = \mathbf{20} * \mathbf{8} = \mathbf{160}$, čo znamená, že pôvodná účelová funkcia by sa týmto presunom zvýšila o hodnotu 160.

Z uvedeného vyplýva, že vzhľadom na signum kritéria výhodnosti môžu nastať tri prípady:

$$\mathbf{k}_{ij} > \mathbf{0} \tag{4.6}$$

presun je výhodný pri maximalizácii;

$$\mathbf{k}_{ij} < \mathbf{0} \tag{4.7}$$

presun je výhodný pri minimalizácii;

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

presun dáva len iné rozloženie dávok bez zmeny účelovej funkcie.

Teraz, po vysvetlení základných úkonov, môžme pristúpiť k veľmi stručnému popisu algoritmu zlepšovania východiskového riešenia metódou presunu v cykloch.

Algoritmus metódy presunu v cykloch:

Krok 1: Pre každé neobsadené políčko zostavíme cyklus a vypočítame kritéria výhodnosti podľa vzťahu 4.2.

Krok 2: Vyberieme políčko s výhodným kritériom (pri minimalizácii so záporným, pri maximalizácii s kladným) a pre toto políčko vykonáme vyvážený presun v cyklu a prejdeme na krok 1.

Tento postup opakujeme dotiaľ, pokiaľ existuje aspoň jedno výhodné kritérium. Keď už tak nie je (ďalšie zlepšenie ne je možné), riešenie je optimálne. Pokiaľ ale existuje kritérium s hodnotou 0, je možné vyváženým presunom pre toto políčko získať ďalšie variantné optimálne riešenie.

Poznámka ku kroku 2:

Pri výbere políčka pre vyvážený presun (z viacerých s výhodným kritériom) je vhodné postupovať nie podľa výšky kritéria výhodnosti, ale podľa veľkosti zlepšenia účelovej funkcie.

Použitie metódy si znázorníme na príklade 4.1.

Príklad 4.1

Máme vyriešiť optimálne rozmiestnenie dávok od piatich zdrojov k šiestim spotrebiteľom na východiskovom riešení úlohy maximalizácie zisku.

Východiskové riešenia a postupné spresňovanie je znázornené v tabuľkách 4.2 až 4.4.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	26 180	1 24	0 20	-23 15	-25 10	-29 7	180
Z2	24 20	21 110	-3 15	-23 13	-21 12	-26 8	130
Z3	-2 20	- 19 30	+ 16 130	-13 21	-14 17	-20 12	160
Z4	2 15	7 17 +	0 7	25 170	- 22 110	-7 16	280
Z5	0 10	1 8	- 4 20	1 23	+ 19 100	20 130	250
b(j)	200	140	150	170	210	130	

Tab. 4.2 Východiskové riešenie úlohy.

POSTUP RIEŠENIA: (tabuľka 4.2)

Krok 1: - výpočet kritérií výhodnosti (budeme ich zaznamenávať v ľavom hornom rohu príslušného políčka):

$k_{12} = c_{12}-c_{11}+c_{21}-c_{22} = 24-26+24-21 = 1$

$k_{13} = c_{13}-c_{11}+c_{21}-c_{22}+c_{32}-c_{33} = 20-26+24-21+19-16 = 0$

$k_{14} = c_{14}-c_{11}+c_{21}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{55}+c_{45}-c_{44} =$
$15-26+24-21+19-16+4-19+22-25 = -23$

$k_{15} = c_{15}-c_{11}+c_{21}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{55} =$
$10-26+24-21+19-16+4-19 = -25$

$k_{16} = c_{16}-c_{11}+c_{21}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{56} =$
$7-26+24-21+19-16+4-21 = -29$

$k_{23} = c_{23}-c_{22}+c_{32}-c_{33} = 15-21+19-16 = -3$

$k_{24} = c_{24}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{55}+c_{45}-c_{44} =$
$13-21+19-16+4-19+22-25 = -23$

$k_{25} = c_{25}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{55} = 12-21+19-16+4-19 = -21$

$k_{26} = c_{26}-c_{22}+c_{32}-c_{33}+c_{53}-c_{56} = 8-21+19-16+4-20 = -26$

$k_{31} = c_{31}-c_{32}+c_{22}-c_{21} = 20-19+21-24 = -2$

$k_{34} = c_{34}-c_{33}+c_{53}-c_{55}+c_{45}-c_{44} = 21-16+4-19+22-25 = -13$

$k_{35} = c_{35}-c_{33}+c_{53}-c_{55} = 17-16+4-19 = -14$

$k_{36} = c_{36}-c_{33}+c_{53}-c_{56} = 12-16+4-20 = -20$

$k_{41} = c_{41}-c_{45}+c_{55}-c_{53}+c_{33}-c_{32}+c_{22}-c_{21} =$
$15-22+19-4+16-19+21-24 = 2$

$k_{42} = c_{42}-c_{45}+c_{55}-c_{53}+c_{33}-c_{32} = 17-22+19-4+16-19 = 7$

$k_{43} = c_{43}-c_{45}+c_{55}-c_{53} = 7-22+19-4 = 0$

$k_{46} = c_{46}-c_{45}+c_{55}-c_{56} = 16-22+19-20 = -7$

$k_{51} = c_{51}-c_{53}+c_{33}-c_{32}+c_{22}-c_{21} = 10-4+16-19+21-24 = 0$

$k_{52} = c_{52}-c_{53}+c_{33}-c_{32} = 8-4+16-19 = 1$

$k_{54} = c_{54}-c_{55}+c_{45}-c_{44} = 23-19+22-25 = 1$

Krok 2: - Pretože cieľom riešenia je maximalizácia, budú nás zaujímať iba kladné kritéria výhodnosti. Takéto sa nachádzajú v políčkach (1,2), (4,1), (4,2), (5,2) a (5,4).
- najväčšie zlepšenie účelovej funkcie (pozri vzťah 4.4) dosiahneme presunom maximálneho možného množstva na políčko (4,2) - cyklus je v matici zaznamenaný čiarkovane
- v naznačenom cykle je podľa vzťahu 4.3 možné presunúť dávku pd = min{110, 20, 30} = 20; presun uvedenej dávky je zaznamenaný v tab. 4.3;
- pôvodná hodnota účelovej funkcie: $z_{pov} = 21370$;
- zlepšenie účelovej funkcie: zl = 20 * 7 = 140;
- nová účelová funkcia: z = 21370 + 140 = 21510.

Tým je 1. spresnenie ukončené a prejdeme na krok 1.

Krok 1: - Pre neobsadené políčka opäť stanovíme kritéria výhodnosti (sú zaznamenané v ľavom hornom rohu jednotlivých políčok tabuľky 4.3);

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	- 26 180	1 24 +	0 20	-16 15	-18 10	-22 7	180
Z2	+ 24 20	- 21 110	-3 15	-16 13	-14 12	-19 8	130
Z3	-2 20	19 10	16 150	-6 21	-7 17	-13 12	160
Z4	-5 15	17 20	-7 7	- 25 170	+ 22 90	-7 16	280
Z5	-7 10	-6 8	-7 4	1 23 +	- 19 120	20 130	250
b(j)	200	140	150	170	210	130	

Tab. 4.3 1. spresnenie riešenia úlohy

Krok 2: - Z vypočítaných kritérií výhodnosti vyplýva, že presun je výhodný iba na políčka (1,2) a (5,4) s kritériom výhodnosti 1;

- vzhľadom na to, že cykly pre tieto políčka sa navzájom neprelínajú, je možné vykonať obidva presuny súbežne;

- presunované dávky: $pd_{12} = \min\{180, 110\} = 110$

  $pd_{54} = \min\{120, 170\} = 120$

- pôvodná hodnota účelovej funkcie: $z_{pov} = 21510$

- zlepšenie účelovej funkcie:

  $zl_{12} = 110 * 1 = 110$

  $zl_{54} = 120 * 1 = 120$

  $zl_{celk} = 110 + 120 = 230$

- nová hodnota účelovej funkcie:

  $z = 21510 + 230 = 21740$

Uvedený presun dávok v oboch cykloch je zaznamenaný v tabuľke 4.4.

Tým je 2. spresnenie ukončené a prejdeme na krok 1.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
Z1	26 70	24 110	-1 20	-17 15	-19 10	-22 7	180
Z2	24 130	-1 21	-4 15	-17 13	-15 12	-19 8	130
Z3	-1 20	19 10	16 150	-6 21	-7 17	-12 12	160
Z4	-4 15	17 20	-7 7	25 50	22 210	-6 16	280
Z5	-7 10	-7 8	-8 4	23 120	-1 19	20 130	250
b(j)	200	140	150	170	210	130	

Tab. 4.4 2. spresnenie riešenia (optimálne riešenie)

Krok 1: Pre neobsadené políčka vypočítame opäť kritéria výhodnosti (pozri tab. 4.4). Vyhodnotením kritérií výhodností zisťujeme, že presun na ktorékoľvek políčko už neprinesie ďalšie zlepšenie účelovej funkcie (žiadne kritérium výhodnosti nespĺňa pre maximalizáciu podmienku $k_{ij} > 0$). Ide preto o optimálne riešenie.

Konečná hodnota účelovej funkcie: $z = 21740$

ZÁVER

Optimálne rozmiestnenie dávok od zdrojov k spotrebiteľom, s maximálnym ziskom $z = 21740$, je uvedené v tab. 4.4.

4.2 Modifikovaná distribučná metóda (MODI)

Výpočet kritérií výhodnosti jednotlivých neobsadených políčok metódou presunu v cykloch je veľmi pracný, aj keď poznanie tejto metódy je účelné pre plné pochopenie vyvážených presunov. Vyhodnocovanie neobsadených políčok je jednoduchšie pri **"modifikovanej distribučnej metóde"**, nazývanej skráteno **metóda MODI**.

Modifikovaná distribučná metóda je, rovnako ako metóda presunu v cykloch, spresňujúcou metódou, ktorá vyžaduje opäť východiskové riešenie, spĺňajúce podmienky ako u metódy presunu v cykloch. Kritéria výhodnosti pri metóde MODI sa zisťujú pomocou **riadkových** a **stĺpcových čísel (duálnych premenných)** $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v}_j$, ktoré sa stanovia podľa vzťahu

$$\mathbf{c}_{ij} \text{ (obsadeného políčka) } = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_j \qquad (4.9)$$

Aby bolo možné vykonať výpočet riadkových a stĺpcových čísiel, je potrebné v niektorom riadku alebo stĺpci stanoviť prvú východiskovú hodnotu $\mathbf{u}_i$ alebo $\mathbf{v}_j$. Touto hodnotou môže byť ľubovoľné číslo, výhodné však je (z hľadiska uľahčenia výpočtov) voliť východiskovú hodnotu rovnú nule a to v tom riadku alebo stĺpci, v ktorom je najviac obsadených políčok.

Riadkové a stĺpcové čísla je možné vypočítať za predpokladu splnenia podmienky počtu obsadených políčok - vzťah (4.1). V prípade neplatnosti tejto podmienky dochádza k degenerácii riešenia a nie je možné vypočítať všetky riadkové a stĺpcové čísla (odstránenie degenerácie bude uvedené ďalej).

Výpočet kritérií výhodnosti pre neobsadené políčka sa vykoná podľa vzťahu

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{c}_{ij} - (\mathbf{u}_i + \mathbf{v}_j) \qquad (4.10)$$

Pre použitie kritérií výhodnosti platia rovnaké podmienky ako pri metóde presunu v cykloch (pozri vzťahy 4.4, 4.6, 4.7 a 4.8).

Algoritmus metódy MODI:

Tabuľka pre výpočet sa rozšíri o jeden riadok a jeden stĺpec pre zaznamenávanie duálnych premenných $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v}_j$.

Krok 1: Výpočet duálnych premenných:
- pre riadok (stĺpec) v ktorom je najviac obsadených políčok sa stanoví východisková duálna premenná u_i (v_j) rovná 0;
- ostatné duálne premenné sa postupne vypočítajú podľa vzťahu 4.9.

Krok 2: Pre neobsadené políčka sa podľa vzťahu 4.10 vypočítajú kritéria výhodnosti.

Krok 3: Za použitia vzťahov 4.3, 4.4, 4.6, 4.7 a 4.8 sa vyberie výhodné políčko a vykoná vyvážený presun ako pri metóde presunu v cykloch (kapitola 4.1).

Po vykonaní presunu sa prejde na krok 1.

Poznámka: Pre výber políčka k vyváženému presunu a ukončenie riešenia platia rovnaké zásady ako pri metóde presunu v cykloch (kapitola 4.1).

Použitie metódy MODI si znázorníme na príklade 4.2.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

Príklad 4.2

Máme vyriešiť optimálne rozmiestnenie dávok od piatich zdrojov k šiestim spotrebiteľom vo východiskovom riešení úlohy minimalizácie prepravných výkonov. Kapacity zdrojov a požiadavky spotrebiteľov sú v tonách, matica sadzieb predstavuje kilometrické vzdialenosti spotrebiteľov od zdrojov. Východiskové riešenie a ďalšie spresňovanie úlohy je znázornené postupne v tabuľkách 4.5 až 4.9. Hodnota účelovej funkcie východiskového riešenia je 17790 tkm.

Tabuľka východiskového riešenia je pre potreby metódy MODI rozšírená o jeden riadok a jeden stĺpec pre zaznamenávanie hodnôt u_i a v_j.

Z\S	u\v	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		2	-23	-2	0	-12	-26	
Z1	10	24 36	36 26	- 8 140	+ 10 20	26 24	54 38	160
Z2	8	10 130	63 48	26 32	-2 6	17 13	54 36	130
Z3	20	22 90	63 60	25 43	20 80	2 10	36 30	170
Z4	43	3 48	20 120	-23 18 +	- 43 60	5 36	17 110	290
Z5	30	6 38	46 53	8 36	30 20	18 230	6 10	250
	b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 4.5 Východiskové riešenie minimalizácie.

POSTUP RIEŠENIA: (tabuľka 4.5)

Krok 1: - Výpočet duálnych premenných u_i, v_j:

- východiskovú duálnu premennú s hodnotou 0 volíme v 4. stĺpci ... $v_4 = 0$
- podľa vzťahu 4.9 vypočítame ostatné duálne premenné:

$$u_1 = c_{14} - v_4 = 10 - 0 = 10$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 20 - 0 = 20$$
$$u_4 = c_{44} - v_4 = 43 - 0 = 43$$
$$u_5 = c_{54} - v_4 = 30 - 0 = 30$$
$$v_1 = c_{13} - u_3 = 22 - 20 = 2$$
$$u_2 = c_{21} - u_1 = 10 - 2 = 8$$
$$v_2 = c_{42} - u_4 = 20 - 43 = -23$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 8 - 10 = -2$$
$$v_5 = c_{55} - u_5 = 18 - 30 = -12$$
$$v_6 = c_{46} - u_4 = 17 - 43 = -26$$

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti pre neobsadené políčka podľa vzťahu 4.10:

$$k_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 36 - (10 + 2) = 24$$
$$k_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 26 - (10 - 23) = 36$$
$$k_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 24 - (10 - 12) = 26$$
$$k_{16} = c_{16} - (u_1 + v_6) = 38 - (10 - 26) = 54$$

$$
\begin{aligned}
k_{22} &= c_{22} - (u_2 + v_2) = 48 - (8 - 23) = 63\\
k_{23} &= c_{23} - (u_2 + v_3) = 32 - (8 - 2) = 26\\
k_{24} &= c_{24} - (u_2 + v_4) = 6 - (8 + 0) = -2\\
k_{25} &= c_{25} - (u_2 + v_5) = 13 - (8 - 12) = 17\\
k_{26} &= c_{26} - (u_2 + v_6) = 36 - (8 - 26) = 54\\
k_{32} &= c_{32} - (u_3 + v_2) = 60 - (20 - 23) = 63\\
k_{33} &= c_{33} - (u_3 + v_3) = 43 - (20 - 2) = 25\\
k_{35} &= c_{35} - (u_3 + v_5) = 10 - (20 - 12) = 2\\
k_{36} &= c_{36} - (u_3 + v_6) = 30 - (20 - 26) = 36\\
k_{41} &= c_{41} - (u_4 + v_1) = 48 - (43 + 2) = 3\\
k_{43} &= c_{43} - (u_4 + v_3) = 18 - (43 - 2) = -23\\
k_{45} &= c_{45} - (u_4 + v_5) = 36 - (43 - 12) = 5\\
k_{51} &= c_{51} - (u_5 + v_1) = 38 - (30 + 2) = 6\\
k_{52} &= c_{52} - (u_5 + v_2) = 53 - (30 - 23) = 46\\
k_{53} &= c_{53} - (u_5 + v_3) = 36 - (30 - 2) = 8\\
k_{56} &= c_{56} - (u_5 + v_6) = 10 - (30 - 26) = 6
\end{aligned}
$$

Krok 3: - Výhodný presun (podľa kritérií výhodnosti) je:

. na políčko (2,4) kde: $k_{24} = -2$
$pd = \min\{130, 80\} = 80$
$zl = -2 * 80 = -160$

. na políčko (4,3) kde: $k_{43} = -23$
$pd = \min\{60, 140\} = 60$
$zl = -23 * 60 = -1380$

- vykonáme presun dávky pd=60 na políčko (4,3)
  . pôvodná hodnota úč. funkcie: $z_{pov} = 17790$
  . zlepšenie účelovej funkcie: zl = -1380
  . nová hodnota úč. funkcie:
  $z = 17790 - 1380 = 16410$

Uvedený presun dávky je vykonaný v tabuľke 4.6.
Tým je 1. spresnenie ukončené - prechod na krok 1.

Krok 1: (tabuľka 4.6) - výpočet premenných u_i, v_j:
- prvú hodnotu volíme ... $u_4 = 0$, ďalej výpočet podľa vzťahu 4.9;

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti pre neobsadené políčka podľa vzťahu 4.10 (v tabuľke 4.6 sú uvedené iba výhodné kritéria);
- výhodné kritéria sú: $k_{24} = -2$
$k_{56} = -17$

Z\S	u\v	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		22	20	18	20	8	17	
Z1	-10	36	26	- 8 80	+ 10 80	24	38	160
Z2	-12	10 130	48	32	-2 6	13	36	130
Z3	0	22 90	60	43	20 80	10	30	170
Z4	0	48	20 120	+ 18 60	43	36	- 17 110	290
Z5	10	38	53	36	- 30 20	18 230	-17 10 +	250
	b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 4.6   1. spresnenie riešenia minimalizácie

Krok 3: - Výhodný presun (podľa kritérií výhodnosti) je:

. na políčko (2,4) kde: $k_{24} = -2$
$pd = \min\{130, 80\} = 80$
$zl = -2 * 80 = -160$

. na políčko (5,6) kde: $k_{56} = -17$
$pd = \min\{20, 80, 110\} = 20$
$zl = -17 * 20 = -340$

- vykonáme presun dávky pd=20 na políčko (5,6)
  . pôvodná hodnota úč. funkcie: $z_{pov} = 16410$
  . zlepšenie účelovej funkcie: $zl = -340$
  . nová hodnota úč. funkcie:
  $z = 16410 - 340 = 16070$

Uvedený presun dávky je vykonaný v tabuľke 4.7.
Tým je 2. spresnenie ukončené - prechod na krok 1.

Krok 1: (tabuľka 4.7) - výpočet premenných u_i, v_j:
- prvú hodnotu volíme ... $u_4 = 0$, ďalej výpočet
  podľa vzťahu 4.9;

Z\S	u\v	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		22	20	18	20	25	17	
Z1	-10	36	26	- 8 60	+ 10 100	24	38	160
Z2	-12	10 130	48	32	-2 6	13	36	130
Z3	0	22 90	60	43	- 20 80	-15 10 +	30	170
Z4	0	48	20 120	+ 18 80	43	36	- 17 90	290
Z5	-7	38	53	36	30	- 18 230	+ 10 20	250
	b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 4.7   2. spresnenie riešenia minimalizácie

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti pre neobsadené políčka podľa vzťahu 4.10 (v tabuľke 4.7 sú uvedené iba výhodné kritéria);
- výhodné kritéria sú: $k_{24} = -2$
$k_{35} = -15$

Krok 3: - Výhodný presun (podľa kritérií výhodnosti) je:

. na políčko (2,4) kde: $k_{24} = -2$
pd = min{130, 80} = 80
zl = -2 * 80 = -160

. na políčko (3,5) kde: $k_{35} = -15$
pd = min{80,60,90,230} = 60
zl = -15 * 60 = -900

- vykonáme presun dávky pd=60 na políčko (3,5)
. pôvodná hodnota úč. funkcie: $z_{pov} = 16070$
. zlepšenie účelovej funkcie: zl = -900
. nová hodnota úč. funkcie:
z = 16070 - 900 = 15170

Uvedený presun dávky je vykonaný v tabuľke 4.8.
Tým je 3. spresnenie ukončené - prechod na krok 1.

Z\S		S1	S2	S3	S4	S5	S6	
	u\v	22	5	3	20	10	2	a(i)
Z1	-10	36	26	8	10 160	24	38	160
Z2	-12	- 10 130	48	32	-2 6 +	13	36	130
Z3	0	+ 22 90	60	43	- 20 20	10 60	30	170
Z4	15	48	20 120	18 140	43	36	17 30	290
Z5	8	38	53	36	30	18 170	10 80	250
	b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 4.8 3. spresnenie riešenia minimalizácie

Krok 1: (tabuľka 4.8) - výpočet premenných u_i, v_j:
- prvú hodnotu volíme ... $u_3 = 0$, ďalej výpočet podľa vzťahu 4.9;

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti pre neobsadené políčka podľa vzťahu 4.10 (v tabuľke 4.8 sú uvedené iba výhodné kritéria);
- výhodné kritérium je iba jedno: $k_{24} = -2$

Krok 3: - Presun na políčko (2,4) kde: $k_{24} = -2$

$pd = \min\{130, 20\} = 20$

. zlepšenie účelovej funkcie: $zl = -2 * 20 = -40$

. pôvodná hodnota úč. funkcie: $z_{pov} = 15170$

. nová hodnota úč. funkcie:

$z = 15170 - 40 = 15130$

Uvedený presun dávky je vykonaný v tabuľke 4.9.
Tým je 4. spresnenie ukončené - prechod na krok 1.

Z\S		S1	S2	S3	S4	S5	S6	
	u\v	37	20	18	33	25	17	a(i)
Z1	-23	36	26	8	10 160	24	38	160
Z2	-27	10 110	48	32	6 20	13	36	130
Z3	-15	22 110	60	43	20	10 60	30	170
Z4	0	48	20 120	18 140	43	36	17 30	290
Z5	-7	38	53	36	30	18 170	10 80	250
	b(j)	220	120	140	180	230	110	

Tab. 4.9 4. spresnenie - optimálne riešenie

Krok 1: (tabuľka 4.9) - výpočet premenných u_i, v_j:
- prvú hodnotu volíme ... $u_4 = 0$, ďalej výpočet podľa vzťahu 4.9;

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti - žiadne kritérium nie je záporné, ďalšie zlepšenie účelovej funkcie už neexistuje.

ZÁVER

Optimálne riešenie rozloženia prepravovaných dávok od zdrojov k spotrebiteľom je uvedené v tabuľke 4.9.
Minimálny prepravný výkon je 15130 tkm.

■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■

4.3 Degenerácia pri riešení dopravných úloh

Pri riešení dopravných úloh približnými metódami, aj pri spresňovaní riešenia metódami spresnenia približného riešenia, môže dôjsť k porušeniu podmienky počtu obsadených políčok (vzťah 4.1) tak, že platí $\mathbf{p}_{obs} < \mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{1}$. Pri menšom počte obsadených políčok nie je možné vykonať vyhodnotenie všetkých neobsadených políčok kritériami výhodnosti (pri metóde presunu v cykloch) ani výpočet všetkých premenných $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v}_j$ (pri metóde MODI).

Dochádza tu k tzv. **degenerácii riešenia**. Degenerácia, respektíve jej odstránenie, sa rieši obvykle zavedením malej kladnej dávky, alebo priamo zavedením nulovej hodnoty ako dávky do riešenia tak, aby bola splnená podmienka podľa vzťahu 4.1.

Dosadením tejto pomocnej nulovej dávky do niektorého vhodného políčka sa toto políčko považuje za obsadené a zachádza sa s ním rovnako ako s ostatnými obsadenými políčkami.

Nulové obsadenie sa vykoná v niektorom neobsadenom políčku riadku (stĺpca), tak aby bolo možné pokračovať pri vytváraní cyklu (pri metóde presunu v cykloch), alebo aby bolo možné pokračovať vo výpočte riadkových a stĺpcových hodnôt (pri metóde MODI).

Pri obidvoch postupoch odstránenia degenerácie riešenia je výhodné hľadať pre obsadenie nulovou dávkou políčko s najvýhodnejšou sadzbou (pri maximalizácii s najvyššou, pri minimalizácii s najnižšou). Tým sa obvykle zníži počet potrebných krokov, ktoré by bolo nutné vykonať presunom nulovej dávky.

Postup riešenia pri degenerácii úlohy si ukážeme na príklade 4.3.

Príklad 4.3

K dispozícii je východiskové riešenie maximalizácie zisku s všetkými potrebnými údajmi (znázornené v tab. 4.10). Úlohou je spresniť riešenie až do optimálneho použitím metódy MODI. Hodnota účelovej funkcie východiskového riešenia z = 45220.

Počet obsadených políčok by mal byť podľa vzťahu 4.1

$$P_{obs} = m + n - 1 = 5 + 6 - 1 = 10$$

V skutočnosti je iba 8, čo znamená, že k tomu aby úloha nebola degenerovaná, chýbajú dve obsadené políčka.

Z\S	u\v	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		18	22	24	22	42	50	
Z1	28	24	34	+ 52 0	- 50 160	36	22	160
Z2	32	- 50 130	12	28	+ 54 0	47	24	130
Z3	8	12 38 +	0	17	10 40	- 50 170	30	170
Z4	18	12	40 210	42 80	17	24	43	290
Z5	0	4 22	7	- 24 60	8 30	+ 42 60	50 130	250
	b(j)	130	210	140	160	230	130	

Tab. 4.10 Degenerácia východiskového riešenia, jej odstránenie a spresnenie (MODI)

POSTUP RIEŠENIA

Krok 1: - výpočet stĺpcových hodnôt u_i a v_j;
. prvú hodnotu volíme: $u_5 = 0$

Postupným výpočtom hodnôt u_i a v_j dôjdeme k stavu, kedy už nie je možné vypočítať riadkové a stĺpcové hodnoty u_1, u_2, v_1, v_4.

V políčkach riadkov so známou hodnotou u(i) a zároveň neznámou hodnotou v(j) a v políčkach stĺpcov so známou hodnotou v(j) a zároveň neznámou hodnotou u(i) vyhľadáme najvýhodnejšiu sadzbu.

Takáto najvyššia sadzba je c_{13}=52. Políčko (1,3) obsadíme dávkou 0 a vypočítame hodnoty u_1 a v_4.

Ďalej nie je možné vypočítať hodnoty u_2 a v_1. V príslušnom riadku a stĺpci je najvyššia sadzba, cez políčko ktorej bude výpočet umožnený, c_{24}=54. Políčko (2,4) obsadíme dávkou 0 a vypočítame ostávajúce hodnoty u_2 a v_1. Tým máme k dispozícii pre výpočet kritérií všetky duálne premenné a zároveň sme odstránili degeneráciu riešenia.

Poznámka: Výber políčka pre obsadenie nulovou dávkou je možné vykonať viacerými spôsobmi, napr. ϵ-perturbačnou metódou pre dopravnú úlohu [5]

Krok 2: - výpočet kritérií výhodnosti podľa vzťahu 4.9 (v tabuľke 4.10 sú uvedené iba kritéria výhodné pre maximalizáciu ... $k_{ij} > 0$);

. výhodné kritéria: $k_{31} = 12$ $k_{34} = 10$

$k_{51} = 4$ $k_{54} = 8$

Krok 3: - výhodný presun:

. na políčko (3,1) kde: $k_{31} = 12$

pd = min{170,60,160,130} = 60

zl = 12 * 60 = 720

. na políčko (3,4) kde: $k_{34} = 10$

pd = min{170,60,160} = 60

zl = 10 * 60 = 600

. na políčko (5,1) kde: $k_{51} = 4$

pd = min{60,160,130} = 60

zl = 4 * 60 = 240

. na políčko (5,4) kde: $k_{54} = 8$

pd = min{60,160} = 60

zl = 8 * 60 = 480

- najvýhodnejší presun je na políčko (3,1)

. pôvodná hodnota úč. funkcie: $z_{pov} = 45220$

. zlepšenie účelovej funkcie: zl = 720

. nová hodnota úč. funkcie:

z = 45220 + 720 = 45940

Uvedený presun je vykonaný v tabuľke 4.11.
Tým je 1. spresnenie ukončené - prechod na krok 1.

Krok 1: (tabuľka 4.11) - výpočet premenných u_i, v_j:
- prvú hodnotu volíme ... $u_4 = 0$, ďalej výpočet podľa vzťahu 4.9;

Z\S	u\v	S1	S2	S3	S4	S5	S6	a(i)
		36	40	42	40	48	56	
Z1	10	24	34	52 60	50 110	36	22	160
Z2	14	50 70	12	28	54 60	47	24	130
Z3	2	38 60	0	17	40	50 110	30	170
Z4	0	12	40 210	42 80	17	24	43	290
Z5	-6	22	7	24	30	42 120	50 130	250
	b(j)	130	210	140	160	230	130	

Tab. 4.11 1. spresnenie - optimálne riešenie

Krok 2: - Výpočet kritérií výhodnosti - žiadne kritérium nie je väčšie ako 0, ďalšie zlepšenie účelovej funkcie už neexistuje.

<u>ZÁVER</u> Riešenie je optimálne s konečnou hodnotou účelovej funkcie 45940 a rozložením dávok tak, ako je uvedené v tabuľke 4.11.

5. MAĎARSKÁ METÓDA

Jednu z najefektívnejších metód na riešenie dopravnej úlohy navrhol Kuhn. Vo svojom algoritme vychádzal z práce maďarského matematika Egerváryho. Kuhn jeho metódu zovšeobecnil a nazval ju "maďarskou metódou" (v niektorej literatúre sa môžme stretnúť aj s názvom "Kuhnov algoritmus").

Maďarská metóda nereaguje na degeneráciu riešenia, ktorá je slabým miestom iných algoritmov a nevyžaduje ani počiatočné riešenie získané inou (približnou) metódou. Pokiaľ sa ďalej budeme zmieňovať o počiatočnom riešení, pôjde o špecifický prípad východiskového stavu, ktorého vytvorenie je súčasťou samotného maďarského algoritmu.

Základný postup riešenia (za predpokladu vyrovnanej úlohy - pozri kap. 2.2) je možné popísať takto:

Najskôr sa vytvorí počiatočné riešenie, ktoré všeobecne nevyhovuje obmedzujúcim podmienkam úlohy - vzťahy (1.4) a (1.5). Z niektorých zdrojov sa neprepravuje všetok materiál a nie všetky požiadavky spotrebiteľov sú uspokojené.

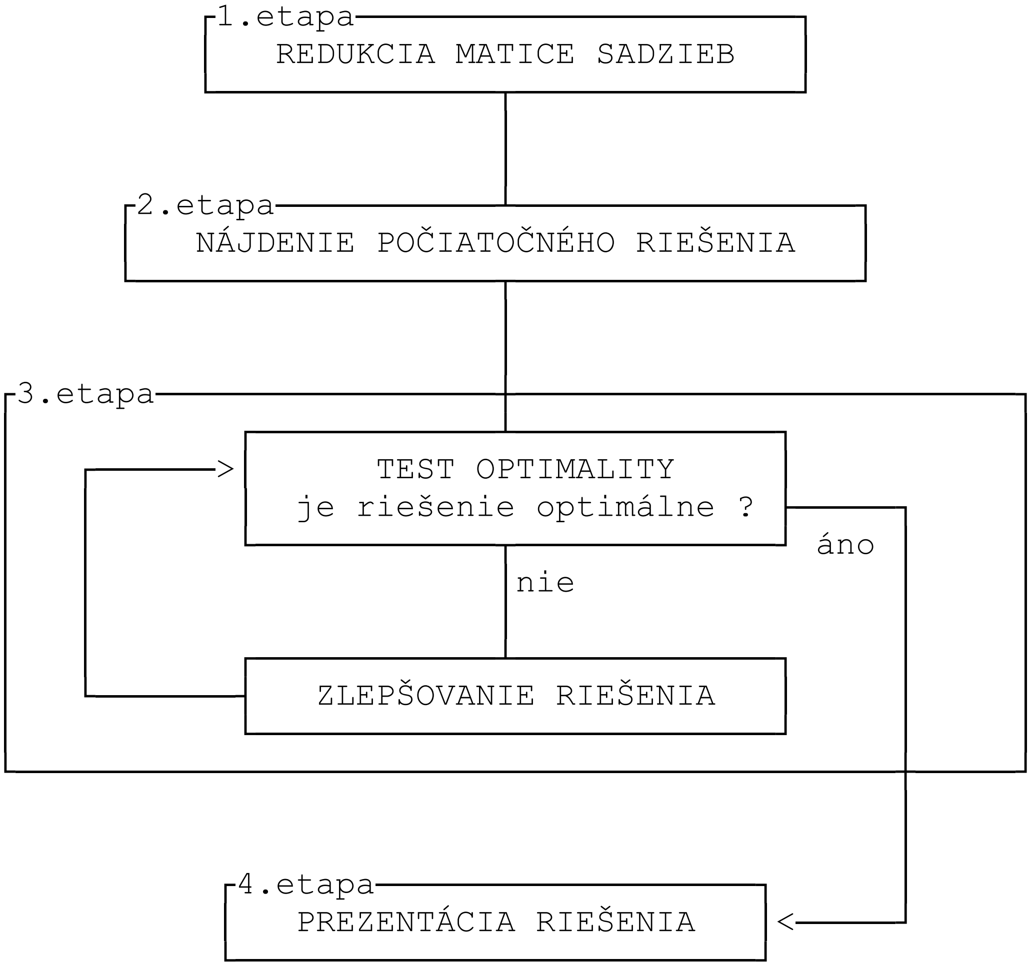
Pre toto riešenie je možné zapísať obmedzujúce podmienky v tvare:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x(i,j)} \leq \mathbf{a(i)} \qquad \textbf{pre} \quad \mathbf{i} \in \{\mathbf{1,2,....,m}\} \qquad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x(i,j)} \leq \mathbf{b(j)} \qquad \textbf{pre} \quad \mathbf{j} \in \{\mathbf{1,2,....,n}\} \qquad (5.2)$$

Toto počiatočné riešenie postupne zlepšujeme, dokiaľ vo vzťahoch (5.1) a (5.2) neplatia iba podmienky rovnosti. Tým sú obmedzujúce podmienky (1.4) a (1.5) splnené; všetok materiál zdrojov je pridelený spotrebiteľom a všetky požiadavky spotrebiteľov sú uspokojené. V tomto prípade algoritmus končí a nájdené riešenie je optimálne.

Celý algoritmus maďarskej metódy môžme rozdeliť do štyroch etáp. Schematické znázornenia a nadväznosť etáp je uvedená na obr. 5.1.



Obr. 5.1 Schéma etáp riešenia dopravnej úlohy maďarským algoritmom

Ďalej si podrobnejšie rozoberieme jednotlivé etapy riešenia.

<u>REDUKCIA MATICE SADZIEB</u> - (1. etapa) - sa vykoná rovnakým spôsobom ako je uvedené v 1. kroku riešenia dopravnej úlohy metódou postupných redukcií (kap. 3.2).

5.1 Počiatočné riešenie - (2. etapa)

Obsahom počiatočného riešenia je priradenie maximálneho možného množstva materiálu medzi zdrojmi a spotrebiteľmi s využitím iba výhodných sadzieb (c(i,j) = 0) a pri dodržaní obmedzujúcich podmienok (5.1) a (5.2). Priradené dávky x(i,j) budeme zapisovať priamo do redukovanej matice sadzieb.

Aby sme rozlíšili v tejto matici sadzby od dávok, budeme dávky označovať (napr. hviezdičkou...120*, zakrúžkovaním a pod.). Potom sa v matici sadzieb budú nachádzať tri typy prvkov:

c(i,j)	**> 0**	**bez označenia** ..	nevýhodné sadzby	
c(i,j)	**= 0**	**bez označenia** ..	nulové sadzby	výhodné
c*(i,j)	**> 0**	**s označením**	označené prvky	sadzby

Označené prvky vlastne predstavujú priradené dávky materiálu a ďalej ich budeme označovať v texte hviezdičkou "c*(i,j)" a v tabuľkách, pre lepšiu prehľadnosť, zakrúžkovaním. Priraďovanie materiálu môžme vykonať v ľubovoľnom poradí, výhodné je ale začať priraďovanie v tých riadkoch a stĺpcoch, v ktorých je najmenej výhodných sadzieb.
Aby sme pri priraďovaní dodržali podmienky (5.1) a (5.2) budeme aplikovať tieto vzťahy:

$$\mathbf{c^{*}(i,j) = \min\{a(i),b(j)\}} \tag{5.3}$$
$$\mathbf{a(i) = a(i) - \min\{a(i),b(j)\}} \tag{5.4}$$
$$\mathbf{b(j) = b(j) - \min\{a(i),b(j)\}} \tag{5.5}$$

Príklad možného variantu počiatočného riešenia v redukovanej matici sadzieb je uvedený v tabuľkách 5.1 a 5.2.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	a(i)
Z1	20	0	10	10	30	50
Z2	0	40	0	0	0	40
Z3	30	10	0	0	10	60
b(j)	20	30	30	50	20	

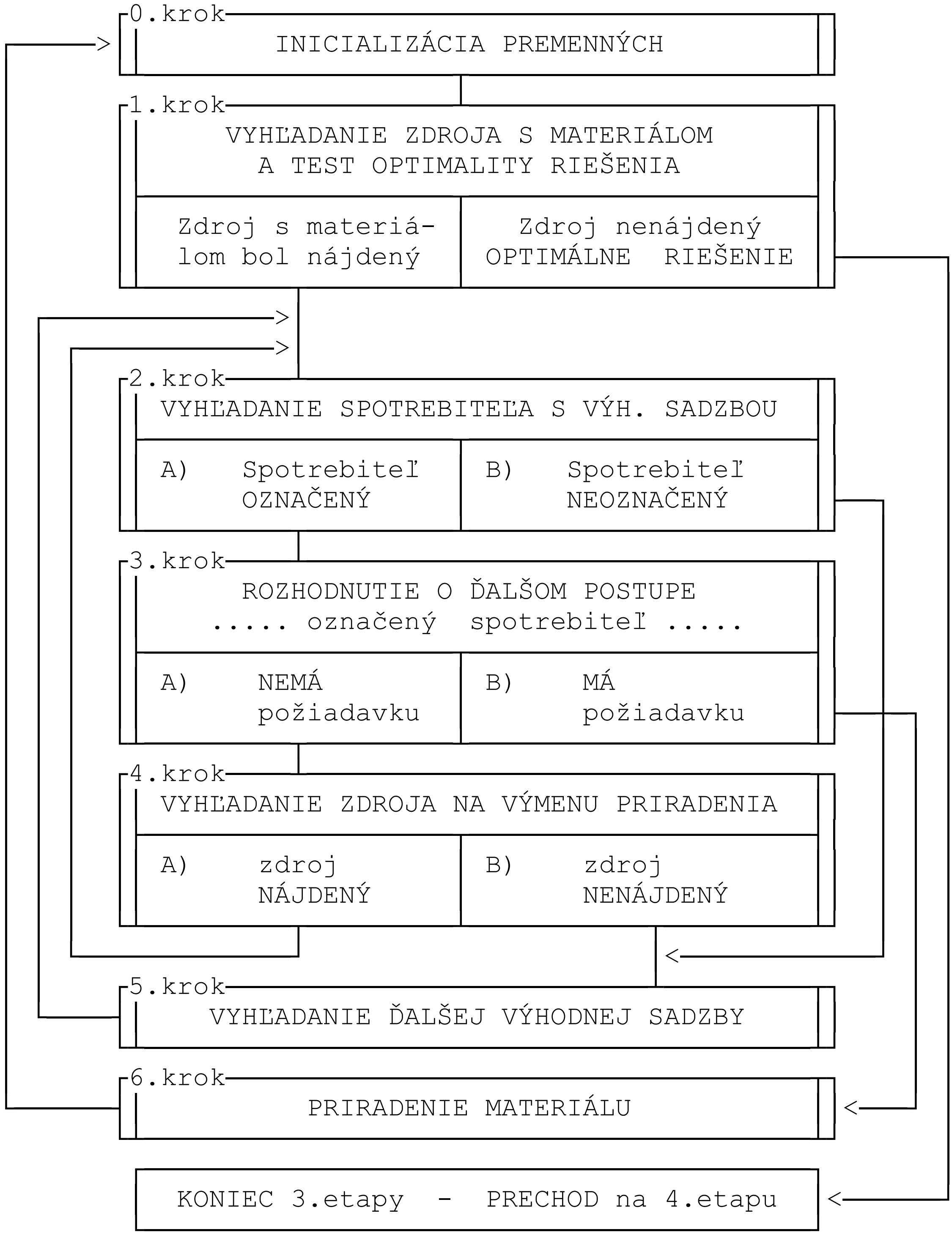
Tab. 5.1 Redukovaná matica sadzieb

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5	a(i)
Z1	20	30	10	10	30	20
Z2	20	40	20	0	0	0
Z3	30	10	10	50	10	0
b(j)	0	0	0	0	20	

Tab. 5.2 Počiatočné riešenie

5.2 Test optimality a zlepšovanie riešenia - (3. etapa)

Táto etapa je srdcom celého algoritmu a skladá sa z niekoľkých krokov, ktorých nadväznosť je znázornená na obrázku 5.2.



Obr. 5.2 Schéma 3. etapy riešenia dopravnej úlohy maďarským algoritmom

0.krok - inicializácia pomocných premenných

Celá 3.etapa algoritmu používa pomocné premenné, tzv. značky riadkov (zdrojov) a stĺpcov (spotrebiteľov), ktoré slúžia na zaznamenanie vzájomných väzieb medzi riadkami a stĺpcami na realizáciu priradenia. Tieto väzby sa v literatúre uvádzajú aj pod názvom **"maďarský strom"**. Ich význam bude zrejmý z ďalších krokov. Tieto premenné realizujeme ako vektory, vektor na označenie riadkov R={r(i)} a vektor na označenie stĺpcov S={s(j)}. Počiatočná hodnota týchto premenných signalizuje stav, kedy žiadny zdroj ani odberateľ nebol dosiaľ označený, tzn. že nebol vybratý pre prípadné priradenie. Pokiaľ riešime úlohu ručne, postačuje, keď v inicializovanom stave v týchto premenných nie je uvedená žiadna hodnota. Pri realizácii algoritmu na výpočtovej technike sa najčastejšie používa nastavenie na hodnotu "-1", pretože prvky v týchto vektoroch pri vytváraní "maďarského stromu" môžu nadobúdať iba nezáporné hodnoty.

Riadky (stĺpce) ktoré budú mať r(i)≥0, s(j)>0 budeme volať **"označené riadky (stĺpce)"**.

Doplnenie o vektory R, S pre náš príklad je znázornené v tabuľke 5.3.

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1	-1	-1	-1	-1	a(i)
Z1	-1,0	20	30	10	10	30	20
Z2	-1	20	40	20	0	0	0
Z3	-1	30	10	10	50	10	0
	b(j)	0	0	0	0	20	

Tab. 5.3 Tabuľka počiatočného riešenia doplnená po krokoch 0 a 1.

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

V tomto kroku prehľadávame vektor s kapacitami zdrojov, a prvý nájdený zdroj, ktorý má k dispozícii materiál, označíme vo vektore R hodnotou **r(i)=0**. Nulová hodnota nám bude signalizovať, že ide o **východiskový zdroj**, ktorého materiál sa budeme snažiť priradiť odberateľovi.

Ak už žiadny zdroj nemá voľnú kapacitu, všetky **a(i) = 0**, potom je riešenie optimálne a prejdeme na 4.etapu.
Ak sme našli zdroj s materiálom a označili riadok, pokračujeme 2.krokom.

V našom prípade zdroj Z1 má kapacitu a(1)=20, preto označíme 1.riadok ... r(1)=0 (označenie je zaznačené v tabuľke 5.3) a pokračujeme 2.krokom.

2.krok - vyhľadanie spotrebiteľa s výhodnou sadzbou

Cieľom tohto kroku je vyhľadať pre zdroj, ktorý má k dispozícii materiál (označený značkou r(i)=0), spotrebiteľa, ktorý materiál požaduje. Medzi spotrebiteľom a zdrojom musí byť ale výhodná sadzba (nulová sadzba alebo označený prvok).

Na to uplatníme tento postup:

V označených riadkoch a súčasne neoznačených stĺpcoch hľadáme výhodnú sadzbu (tj. nulovú sadzbu alebo označený prvok) a príslušný stĺpec označíme vo vektore S číslom riadku, v ktorom sa výhodná sadzba nachádza.

Vykonáme teda:

```
pre  i = {{1,2,....,m} | r(i)≥0}
     keď  (s(j)=-1) AND (c(i,j)=0 OR c(i,j)=c*(i,j))
          potom polož  s(j)=i     (označ stĺpec)
```

Po ukončení preverovania môžu nastať 2 prípady:

a)	výhodnú sadzbu sme našli spotrebiteľ bol označený	[pokračujeme 3. krokom]
b)	žiadnu výhodnú sadzbu sme nenašli spotrebiteľ nebol označený	[pokračujeme 5. krokom]

Pre náš prípad: (tab. 5.4)

označený riadok je Z1, kde r(1)=0
neoznačené stĺpce sú všetky (všetky s(j)=-1)
v príslušných políčkach je jedna výhodná sadzba $c(1,2)=30^*$
označenie stĺpec 2 číslom riadku výh. sadzby ..... s(2)=1
pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe

Ďalší postup algoritmom po označení spotrebiteľov bude ovplyvnený ich požiadavkami. Môžu nastať 2 prípady:

a) žiadny označený spotrebiteľ nemá požiadavku s(j)>0 AND b(j)=0 [pokračujeme 4. krokom]

b) existuje označený spotrebiteľ, ktorý má požiadavku s(j)>0 AND b(j)>0; našli sme spotrebiteľa pre priradenie (cieľový spotrebiteľ) [pokračujeme 6. krokom]

Pre náš prípad: (tab. 5.4)
označený stĺpec : j = {2}
spotrebiteľ S2 nemá požiadavku .... b(2) = 0
pokračujeme 4.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1	-1,1	-1	-1	-1	a(i)
Z1	0	20	30	10	10	30	20
Z2	-1	20	40	20	0	0	0
Z3	-1	30	10	10	50	10	0
	b(j)	0	0	0	0	20	

Tab. 5.4 Postup riešenia - krok 2,3

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia

Cieľom tohto kroku je vyhľadať a označiť zdroje, ktoré zásobujú označených spotrebiteľov a s ktorými sa dá vykonať zmena priradenia tak, aby sa mohli využiť ďalšie výhodné sadzby. Za tým účelom prehľadáme všetky označené stĺpce, či sa v ich neoznačených riadkoch nenachádza označený prvok.

Ak označený prvok nájdeme, označíme riadok, v ktorom sa nachádza, číslom stĺpca, v ktorom tento prvok leží.

Po preverení všetkých označených stĺpcov môžu nastať 2 prípady:

a) označili sme aspoň jeden zdroj - zdroj na výmenu bol nájdený - pokračujeme 2.krokom;

b) nepodarilo sa nám označiť žiadny riadok - zdroj na výmenu nebol nájdený - pokračujeme 5.krokom.

Pre náš prípad (tab. 5.4)

- označené stĺpce : j={2}
- neoznačené riadky : i={2,3}
- v príslušných políčkach nie je žiadny označený prvok, tabuľka ostane bez zmien, prechod na 5.krok

5.krok - vyhľadanie ďalšej výhodnej sadzby

Doterajšie výhodné sadzby buď už boli použité na priradenie, alebo ich nie je možné použiť. Pretože však všetok materiál zdrojov musí byť priradený, je potrebné vytvoriť ďalšie výhodné sadzby, ktoré by bolo možné na priradenie využiť. Tieto budeme hľadať v políčkach označených riadkov a neoznačených stĺpcov.

Zo všetkých týchto prvkov vyhľadáme **najnižšiu sadzbu** a tu od všetkých týchto prvkov **odčítame.** Naopak, rovnakú hodnotu **pripočítame** k sadzbám, ktoré ležia v neoznačených riadkoch a súčasne v označených stĺpcoch.

Zachováme značenie riadkov a stĺpcov a vrátime sa na 2. krok.

6.krok - priradenie materiálu

V tomto kroku završime úsilie o priradenie ďalšieho materiálu od zdroja k spotrebiteľovi.

V prvej časti kroku najskôr určíme množstvo materiálu, ktoré bude priradené a v druhej časti realizujeme samotné priradenie.

Množstvo priraďovaného materiálu je obmedzené kapacitným ohraničením príslušného zdroja a spotrebiteľa. Ak ale dochádza aj k zmene v priradení, je toto množstvo obmedzené aj podmienkou nezápornosti riešenia $c^*(i,j) = x(i,j) \geq 0$.

Maximálne množstvo pre priradenie vyhľadáme v "maďarskom strome" na ceste od cieľového spotrebiteľa k východiskovému zdroju, ktorá je tvorená postupnosťou týchto prvkov: **cieľový spotrebiteľ, prvky z matice sadzieb, východiskový zdroj.**

Cestu v maďarskom strome vyhľadáme takto:

Počiatočným prvkom je požiadavka cieľového spotrebiteľa, ktorý bol označený v 1.kroku.

Ďalším prvkom je prvok matice sadzieb v aktuálnom stĺpci ležiaci na riadku, na ktorý nás odkazuje stĺpcová hodnota aktuálneho stĺpca.

Ďalším prvkom je prvok matice sadzieb v aktuálnom riadku ležiaci na stĺpci, na ktorý nás odkazuje riadková hodnota aktuálneho riadku.

Tento postup opakujeme dovtedy, dokiaľ platí **r(i)>0**. Keď r(i)=0, ide o cieľový zdroj a ďalším (a zároveň posledným) prvkom sa stáva momentálna kapacita cieľového zdroja.

Jednotlivé prvky **cesty** "maď. stromom", v poradí od počiatočného ku koncovému, si pre ďalšie použitie označíme striedavo znamienkami "-/+". Prvý prvok značíme znamienkom "-" (pre kontrolu: posledný prvok, tzn. kapacita zdroja, musí vychádzať tiež "-").

Príklad: Pre prípad, že v 1. kroku bol ako východiskový zdroj označený 3. riadok (r(3)=0) a v 3. kroku potvrdený ako cieľový spotrebiteľ 5. riadok (s požiadavkou na materiál), potom pre aktuálny stav riadkových a stĺpcových hodnôt je vytvorenie maďarského stromu uvedené v tabuľke 5.5.

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	2	1	3	3	2	a(i)
Z1	3	10	300	200	0	20	0
Z2	4	200	50	30	– 200	+ 0	0
Z3	0	30	20	100	+ 300	10	– 200
	b(j)	0	0	0	0	– 200	

koncový prvok

počiatočný prvok

Tab. 5.5 Vytvorenie cesty maďarským stromom

Políčka označené "+" predstavujú prvky, ku ktorým budeme pripočítavať dávku a políčka označené "-" prvky od ktorých budeme dávku odčítať. Pri rešpektovaní podmienky nezápornosti riešenia to znamená, že **maximálnou priraďovanou dávkou pd** bude **minimálna hodnota z prvkov** označených **"-"**.

$$\mathbf{pd = \min\{b(j), c^{*}(i,j)^{-}, a(i)\}} \tag{5.5}$$

V našom prípade (tab. 5.5)

$$pd = \min\{b(5), c^*(2,4), a(3)\} = \min\{200,200,200\} = 200$$

Priradenie materiálu (zistenej priraďovanej dávky pd) vykonáme už uvedeným spôsobom ... k políčkam "+" pripočítame pd, a od políčok "-" odčítame pd. Ak pri odčítaní dávky vznikne nulová hodnota, pre ďalšie riešenie už tuto nepovažujeme za označený prvok, ale za sadzbu (neoznačený prvok).

Po priradení sa vraciame na 0.krok.

Stav po vykonanom priradení podľa vyššie znázornenej cesty maďarským stromom (tab. 5.5) je uvedený v tabuľke 5.6.

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	2	1	3	3	2	a(i)
Z1	3	10	300	200	0	20	0
Z2	4	200	50	30	0	200	0
Z3	0	30	20	100	500	10	0
	b(j)	0	0	0	0	0	

Tab. 5.6 Stav po priradení dávky pd=200

5.3 Prezentácia výsledkov riešenia - (4. etapa)

Po ukončení práce algoritmu nasleduje posledná etapa - prezentácia výsledkov riešenia.
Ako výsledok riešenia prezentujeme vlastné hodnoty priradeného materiálu a hodnotu účelovej funkcie.

Priradené množstvá materiálu medzi jednotlivými zdrojmi a spotrebiteľmi predstavujú označené prvky matice ($c^*(i,j)$).

Hodnotu účelovej funkcie získame dosadením do vzťahu (1.1), kde za sadzby berieme pôvodné hodnoty z matice sadzieb pred jej redukciou a za dávky hodnoty priradenia z matice sadzieb po ukončení riešenia.

Príklad 5.1

Ako vzorový príklad uvedieme riešenie optimalizácie dovozu stavebného materiálu od 3 zdrojov k 4 stavbám.

Matica vzdialeností s kapacitami zdrojov, požiadavkami spotrebiteľov, vrátane vyrovnania úlohy (doplnenia o fiktívneho spotrebiteľa) je uvedená v tabuľke 5.7.

Poznámka: Pri jednotlivých krokoch riešenia budeme používať tieto symbolické značenia:

I^+ (I^-) ... označený (neoznačený) riadok - zdroj
J^+ (J^-) ... označený (neoznačený) stĺpec - spotrebiteľ
PMS^- ...... prvky cesty maďarským stromom so znamienkom "-"
pd .... priraďovaná dávka (množstvo materiálu)

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5(F)	a(i)
Z1	8	40	38	46	0	400
Z2	5	35	33	41	0	300
Z3	44	30	46	54	0	500
b(j)	150	300	400	150	200	

Tab. 5.7 Zadanie úlohy a jej vyrovnanie

1. ETAPA - REDUKCIA MATICE SADZIEB

Redukcia matice sadzieb bola podrobne vysvetlená v kapitole 3.2, preto už len výsledky - tab. 5.8.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5(F)	a(i)
Z1	3	10	5	5	0	400
Z2	0	5	0	0	0	300
Z3	39	0	13	13	0	500
b(j)	150	300	400	150	200	

Tab. 5.8 Matica sadzieb po redukcii

2. ETAPA - NÁJDENIE POČIATOČNÉHO RIEŠENIA

Počiatočné riešenie zostavíme podľa vzťahov:

$c^*(i,j) = \min\{a(i), b(j)\}$ pre $c(i,j) = 0$

po každom obsadení upravíme okrajové podmienky:

$a(i) = a(i) - c^*(i,j)$

$b(j) = b(j) - c^*(i,j)$

Pri postupu po riadkoch dôjdeme k počiatočnému riešeniu, ktoré je uvedené v tabuľke 5.9.

Z\S	S1	S2	S3	S4	S5(F)	a(i)
Z1	3	10	5	5	200	200
Z2	150	5	150	0	0	0
Z3	39	300	13	13	0	200
b(j)	0	0	250	150	0	

Tab. 5.9 Počiatočné riešenie

3. ETAPA - TEST OPTIMALITY A ZLEPŠOVANIE RIEŠENIA

0.krok - inicializácia premenných (tab. 5.10)

$r(i) = -1$ pre $i=\{1,..,3\}$

$s(j) = -1$ pre $j=\{1,..,5\}$

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

hľadáme $a(i) > 0$ (tab. 5.10)

$a(1) > 0 \Rightarrow r(1) = 0$ (východiskový zdroj)

zdroj bol označený, riešenie nie je optimálne, pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.10)

pre $c(i,j)=0$ OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^-

označ $s(j)=i$

označené riadky : $I^+ = \{1\}$

neoznačené stĺpce : $J^- = \{1,2,3,4,5\}$

výhodná sadzba : $c(1,5) = 200^* \Rightarrow s(5) = 1$

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.10)

hľadáme b(j) > 0 pre J^+

označené stĺpce : $J^+ = \{5\}$

nie je žiadne b(j) > 0

nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1	-1	-1	-1	-1,1	a(i)
Z1	-1,0	3	10	5	5	200	200
Z2	-1	150	5	150	0	0	0
Z3	-1	39	300	13	13	0	200
	b(j)	0	0	250	150	0	

Tab. 5.10 Postup riešenia - krok 0,1,2,3

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.11)

pre $c^*(i,j)$ ležiace v J^+ AND I^- označ r(i) = j

$J^+ = \{5\}$

$I^- = \{2,3\}$

nie je žiadne $c^*(i,j)$

nastal prípad b), pokračujeme 5.krokom

5.krok - hľadanie ďalšej výhodnej sadzby (tab. 5.11)

hľadáme minimálne c(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

$I^+ = \{1\}$

$J^- = \{1,2,3,4\}$

min c(i,j) = min {3,10,5,5} = 3

zmena c(i,j) pre I^+ AND J^- na c(i,j)=c(i,j)-min c(i,j)

c(1,1) = 3 - 3 = 0

c(1,2) = 10 - 3 = 7

c(1,3) = 5 - 3 = 2

c(1,4) = 5 - 3 = 2

zmena c(i,j) pre I^- AND J^+ na c(i,j)=c(i,j)+min c(i,j)

c(2,5) = 0 + 3 = 3

c(3,5) = 0 + 3 = 3

pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotrebiteľa s výhodnou sadzbou (tab. 5.11)

pre c(i,j)=0 OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

$I^+ = \{1\}$

$J^- = \{1,2,3,4\}$

$c(1,1) = 0 \quad => \quad s(1) = 1$

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.11)

hľadáme $b(j) > 0$ pre J^+

$J^+ = \{1,5\}$

nie je žiadne $b(j) > 0$

nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.11)

pre $c^*(i,j)$ ležiace v J^+ AND I^- označ $r(i) = j$

$J^+ = \{1,5\}$

$I^- = \{2,3\}$

$c(2,1) = 150^* \quad => \quad r(2) = 1$

nastal prípad a), pokračujeme 2.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1,1	-1	-1	-1	1	a(i)
Z1	0	3,0	10,7	5,2	5,2	200	200
Z2	-1,1	150	5	150	0	0,3	0
Z3	-1	39	300	13	13	0,3	200
	b(j)	0	0	250	150	0	

Tab. 5.11 Postup riešenia - krok 4,5,2,3,4

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.12)

pre $c(i,j)=0$ OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^- označ $s(j)=i$

$I^+ = \{1,2\}$; $J^- = \{2,3,4\}$

$c(2,3) = 150^* \quad => \quad s(3) = 2$

$c(2,4) = 0 \quad => \quad s(4) = 2$

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.12)

hľadáme $b(j) > 0$ pre J^+

$J^+ = \{1,3,4,5\}$

$b(3) > 0$ ..... cieľový spotrebiteľ

nastal prípad b), pokračujeme 6.krokom

6.krok - priradenie materiálu (tab. 5.12, tab. 5.13)

cieľový spotrebiteľ: S3 východiskový zdroj: Z1

cesta maďarským stromom:

$b(3)^-, c(2,3)^+, c(2,1)^-, c(1,1)^+, a(1)^-$

pd = min{PMS⁻} = min{250,150,200} = 150

priradenie :

b(3) = 250-150 = 100 c(2,3) = 150+150 = 300

c(2,1) = 150-150 = 0 c(1,1) = 0+150 = 150

a(1) = 200-150 = 50

pokračujeme 0.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	1	-1	-1,2	-1,2	1	a(i)
Z1	0	+ $\boxed{0}$	7	2	2	200	− $\boxed{200}$
Z2	1	− 150	5	+ 150	0	3	0
Z3	-1	39	300	13	13	3	200
	b(j)	0	0	− $\boxed{250}$	150	0	

Tab. 5.12 Postup riešenia - krok 2,3,6

0.krok - inicializácia premenných (tab. 5.13)

r(i) = -1 pre i={1,..,3}

s(j) = -1 pre j={1,..,5}

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1,1	-1	-1	-1	-1,1	a(i)
Z1	-1,0	150	7,5	2,0	2,0	200	50
Z2	-1	0,2	5	300	0	3,5	0
Z3	-1	39,41	300	13	13	3,5	200
	b(j)	0	0	100	150	0	

Tab. 5.13 Postup riešenia - krok 0,1,2,3,4,5

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

hľadáme a(i) > 0 (tab. 5.13)

a(1) > 0 => r(1) = 0 (východiskový zdroj)

zdroj bol označený, riešenie nie je optimálne,

pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.13)

pre c(i,j)=0 OR c(i,j)=c^*(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

I^+ = {1}

J^- = {1,2,3,4,5}

c(1,1) = 150^* => s(1) = 1

c(1,5) = 200^* => s(5) = 1

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.13)

hľadáme b(j) > 0 pre J^+

J^+ = {1,5}

nie je žiadne b(j) > 0

nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.13)

pre c^*(i,j) ležiace v J^+ AND I^- označ r(i) = j

J^+ = {1,5}

I^- = {2,3}

nie je žiadne c^*(i,j)

nastal prípad b), pokračujeme 5.krokom

5.krok - hľadanie ďalšej výhodnej sadzby (tab. 5.13)

hľadáme minimálne c(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

I^+ = {1}

J^- = {2,3,4}

min c(i,j) = min {7,2,2} = 2

zmena c(i,j) pre I^+ AND J^- na c(i,j)=c(i,j)-min c(i,j)

c(1,2) = 7 - 2 = 5

c(1,3) = 2 - 2 = 0

c(1,4) = 2 - 2 = 0

zmena c(i,j) pre I^- AND J^+ na c(i,j)=c(i,j)+min c(i,j)

c(2,1) = 0 + 2 = 2

c(2,5) = 3 + 2 = 5

c(3,1) = 39 + 2 = 41

c(3,5) = 3 + 2 = 5

pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.14)

pre c(i,j)=0 OR c(i,j)=c^*(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

I^+ = {1}

$J^- = \{2,3,4\}$

c(1,3) = 0 => s(3) = 1

c(1,4) = 0 => s(4) = 1

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	1	-1	-1,1	-1,1	1	a(i)
Z1	0	150	5	+ $\boxed{0}$	0	200	− $\boxed{50}$
Z2	-1	2	5	300	0	5	0
Z3	-1	41	300	13	13	5	200
	b(j)	0	0	− $\boxed{100}$	150	0	

Tab. 5.14 Postup riešenia - krok 2,3,6

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.14)

hľadáme b(j) > 0 pre J^+

$J^+ = \{1,3,4,5\}$

b(3) > 0 ..... cieľový spotrebiteľ

nastal prípad b), pokračujeme 6.krokom

6.krok - priradenie materiálu (tab. 5.14, tab. 5.15)

cieľový spotrebiteľ : S3

východiskový zdroj : Z1

cesta maďarským stromom : $b(3)^-$, $c(1,3)^+$, $a(1)^-$

pd = min{PMS^-} = min{100,50} = 50

priradenie : b(3) = 100 - 50 = 50

c(1,3) = 0 + 50 = 50

a(1) = 50 - 50 = 0

pokračujeme 0.krokom

0.krok - inicializácia premenných (tab. 5.15)

r(i) = -1 pre i={1,..,3}

s(j) = -1 pre j={1,..,5}

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

hľadáme a(i) > 0 (tab. 5.15)

a(3) > 0 => r(3) = 0 (východiskový zdroj)

zdroj bol označený, riešenie nie je optimálne,

pokračujeme 2.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1	-1,3	-1	-1	-1	a(i)
Z1	-1	150	5,10	50	0	200	0
Z2	-1	2	5,10	300	0	5	0
Z3	-1,0	41,36	300	13,8	13,8	5,0	200
	b(j)	0	0	50	150	0	

Tab. 5.15 Postup riešenia - krok 0,1,2,3,4,5

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.15)

pre c(i,j)=0 OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

$I^+ = \{3\}$

$J^- = \{1,2,3,4,5\}$

$c(3,2) = 300^*$ => s(2) = 3

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.15)

hľadáme b(j) > 0 pre J^+

$J^+ = \{2\}$

b(2) = 0

nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.15)

pre $c^*(i,j)$ ležiace v J^+ AND I^- označ r(i) = j

$J^+ = \{2\}$

$I^- = \{1,2\}$

nie je žiadne $c^*(i,j)$

nastal prípad b), pokračujeme 5.krokom

5.krok - hľadanie ďalšej výhodnej sadzby (tab. 5.15)

hľadáme minimálne c(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

$I^+ = \{3\}$

$J^- = \{1,3,4,5\}$

min c(i,j) = min {41,13,13,5} = 5

zmena c(i,j) pre I^+ AND J^- na c(i,j)=c(i,j)-min c(i,j)

c(3,1) = 41 - 5 = 36
c(3,3) = 13 - 5 = 8
c(3,4) = 13 - 5 = 8
c(3,5) = 5 - 5 = 0

zmena c(i,j) pre I^- AND J^+ na c(i,j)=c(i,j)+min c(i,j)

c(1,2) = 5 + 5 = 10

c(2,2) = 5 + 5 = 10

pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.16)

pre c(i,j)=0 OR c(i,j)=c^*(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

I^+ = {3}

J^- = {1,3,4,5}

c(3,5) = 0 => s(5) = 3

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1,1	3	-1,1	-1,1	-1,3	a(i)
Z1	-1,5	150	10	+ 50	0	− 200	0
Z2	-1	2	10	300	0	5	0
Z3	0	36	300	8	8	+ $\boxed{0}$	− $\boxed{200}$
	b(j)	0	0	− $\boxed{50}$	150	0	

Tab. 5.16 Postup riešenia - krok 2,3,4,2,3,6

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.16)

hľadáme b(j) > 0 pre J^+

J^+ = {2,5}

všetky b(j) = 0

nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.16)

pre c^*(i,j) ležiace v J^+ AND I^- označ r(i) = j

J^+ = {2,5}

I^- = {1,2}

c(1,5) = 200* => r(1) = 5

nastal prípad a), pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.16)

pre c(i,j)=0 OR c(i,j)=c^*(i,j) ležiace v I^+ AND J^-

označ s(j)=i

I^+ = {1,3}

$J^- = \{1,3,4\}$

$c(1,1) = 150^*$ => $s(1) = 1$

$c(1,3) = 50^*$ => $s(3) = 1$

$c(1,4) = 0$ => $s(4) = 1$

nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.16)

hľadáme $b(j) > 0$ pre J^+

$J^+ = \{1,2,3,4,5\}$

$b(3) > 0$ ..... cieľový spotrebiteľ

nastal prípad b), pokračujeme 6.krokom

6.krok - priradenie materiálu (tab. 5.16, tab. 5.17)

cieľový spotrebiteľ : S3

východiskový zdroj : Z3

cesta maďarským stromom:

$b(3)^-,\ c(1,3)^+,\ c(1,5)^-,\ c(3,5)^+,\ a(3)^-$

$pd = \min\{PMS^-\} = \min\{50,200,200\} = 50$

priradenie : $b(3) = 50 - 50 = 0$

$c(1,3) = 50 + 50 = 100$

$c(1,5) = 200 - 50 = 150$

$c(1,3) = 0 + 50 = 50$

$a(3) = 200 - 50 = 150$

pokračujeme 0.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1,1	-1,3	-1,1	-1,1	-1,3	a(i)
Z1	-1,5	150	10	100	+ 0	− 150	0
Z2	-1	2	10	300	0	5	0
Z3	-1,0	36	300	8	8	+ 50	− 150
	b(j)	0	0	0	− 150	0	

Tab. 5.17 Postup riešenia - krok 0,1,2,3,4,2,3,6

0.krok - inicializácia premenných (tab. 5.17)

$r(i) = -1$ pre $i=\{1,..,3\}$

$s(j) = -1$ pre $j=\{1,..,5\}$

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

hľadáme $a(i) > 0$ (tab. 5.17)

$a(3) > 0$ => $r(3) = 0$ (východiskový zdroj)
zdroj bol označený, riešenie nie je optimálne,
pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.17)
pre $c(i,j)=0$ OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^-
označ $s(j)=i$
$I^+ = \{3\}$
$J^- = \{1,2,3,4,5\}$
$c(3,2) = 300^*$ => $s(2) = 3$
$c(3,5) = 50^*$ => $s(5) = 3$
nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.17)
hľadáme $b(j) > 0$ pre J^+
$J^+ = \{2,5\}$
všetky $b(j) = 0$
nastal prípad a), pokračujeme 4.krokom

4.krok - vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia (tab. 5.17)
pre $c^*(i,j)$ ležiace v J^+ AND I^- označ $r(i) = j$
$J^+ = \{2,5\}$ $I^- = \{1,2\}$
$c(1,5) = 150^*$ => $r(1) = 5$
nastal prípad a), pokračujeme 2.krokom

2.krok - vyhľadanie spotreb. s výhodnou sadzbou (tab. 5.17)
pre $c(i,j)=0$ OR $c(i,j)=c^*(i,j)$ ležiace v I^+ AND J^-
označ $s(j)=i$
$I^+ = \{1,3\}$ $J^- = \{1,3,4\}$
$c(1,1) = 150^*$ => $s(1) = 1$
$c(1,3) = 100^*$ => $s(3) = 1$
$c(1,4) = 0$ => $s(4) = 1$
nastal prípad a), pokračujeme 3.krokom

3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe (tab. 5.17)
hľadáme $b(j) > 0$ pre J^+
$J^+ = \{1,2,3,4,5\}$
$b(4) > 0$ ..... cieľový spotrebiteľ
nastal prípad b), pokračujeme 6.krokom

6.krok - priradenie materiálu (tab. 5.17, tab. 5.18)
cieľový spotrebiteľ : S4
východiskový zdroj : Z3
cesta maďarským stromom:
$b(4)^-, c(1,4)^+, c(1,5)^-, c(3,5)^+, a(3)^-$
$pd = \min\{PMS^-\} = \min\{150,150,150\} = 150$
priradenie : $b(4) = 150 - 150 = 0$
$c(1,4) = 0 + 150 = 150$
$c(1,5) = 150 - 150 = 0$

c(3,5) = 50 + 150 = 200
a(3) = 150 - 150 = 0

pokračujeme 0.krokom

	S	S1	S2	S3	S4	S5	
Z	r\s	-1	-1	-1	-1	-1	a(i)
Z1	-1	150	10	100	150	0	0
Z2	-1	2	10	300	0	5	0
Z3	-1	36	300	8	8	200	0
	b(j)	0	0	0	0	0	

Tab. 5.18 Postup riešenia - krok 0,1

0.krok - inicializácia premenných (tab. 5.18)

r(i) = -1 pre i={1,..,3}
s(j) = -1 pre j={1,..,5}

1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom a test optimality

hľadáme a(i) > 0 (tab. 5.18)

žiadny zdroj nemá voľnú kapacitu (všetky a(i)=0)
RIEŠENIE JE OPTIMÁLNE

ukončenie 3.etapy, prechod na 4.etapu riešenia

4. ETAPA - PREZENTÁCIA VÝSLEDKOV

- prepravované množstvá materiálu (dávky) od zdrojov k spotrebiteľom sú vo výslednej tabuľke riešenia znázornené ako $c^*(i,j)$ ... zakrúžkované (pozri tab. 5.18),
- hodnota účelovej funkcie sa rovná súčtu násobkov dávok z výslednej matice (tab. 5.18) a sadzieb z pôvodnej matice zadania (tab. 5.7),

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j) = 150*8 + 300*30 + 100*38 + 300*33 + 150*46 + 200*0 = 30800$$

Tým je celkové riešenie úlohy ukončené.

■ ■

5.4 Aplikácia maďarskej metódy na výpočtovú techniku

Ako už bolo povedané v úvode kapitoly 5, výhodou maďarskej metódy je skutočnosť, že nereaguje na degeneráciu riešenia a nevyžaduje počiatočné riešenie zostavené inou približnou metódou. Počiatočné riešenie uvádzané ako 2. etapa algoritmu (pozri kap. 5.1 a obr. 5.1), je iba špecifickým stavom rozmiestnenia dávok v matici sadzieb, umožňujúce zníženie počtu zlepšovaní pri ručnom riešení úlohy.

Pokiaľ v plnej miere akceptujeme vzťahy pre toto počiatočné riešenia (5.1 a 5.2), tak týmto vzťahom vyhovuje aj situácia, keď všetky dávky počiatočného riešenia sú nulové, respektíve nie sú žiadne realizované.

$$x(i,j) = 0 \qquad \text{pre} \quad i \in \{1,2,....,m\}$$
$$j \in \{1,2,....,n\}$$

To znamená, že v podstate 2.fázu riešenia môžme vynechať. Aj keď sa tým zvýši počet vykonaných krokov do dosiahnutia optimálneho riešenia, pri použití výpočtovej techniky nás táto skutočnosť vôbec nemusí znepokojovať.
Z časového hľadiska je predĺženie výpočtu zanedbateľné, a naopak štruktúra zdrojového programu sa podstatne zjednoduší.

Ďalej predpokladajme, že chceme realizovať algoritmus, ktorý bude riešiť danú problematiku vrátane vyrovnania úlohy.

Potom môžme celý výpočet rozdeliť do dvoch fáz s nasledujúcim obsahom:

I) PRÍPRAVNÁ FÁZA

A - vstupy dát a príprava datových štruktúr potrebných na prácu algoritmu;
B - prezentácia zadania;
C - vyrovnanie úlohy;
D - redukcia matice sadzieb.

II) FÁZA VÝPOČTU A PREZENTÁCIA VÝSLEDKOV RIEŠENIA

0.krok - inicializácia premenných;
1.krok - vyhľadanie zdroja s materiálom;
2.krok - vyhľadanie spotrebiteľa s výhodnou sadzbou;
3.krok - rozhodnutie o ďalšom postupe;
4.krok - vyhľadania zdroja na výmenu priradenia;
5.krok - vyhľadanie ďalšej výhodnej sadzby;
6.krok - priradenie materiálu;
7.krok - prezentácia riešenia.

Pozn.: Takto budú označené aj jednotlivé podprogramy v ďalej prezentovanom vývojovom diagramu programu.

Na zabezpečenie vetvenia medzi jednotlivými krokmi algoritmu zavedieme pomocné premenné test1, test2, test3 a test4.

Riešenie vykonáme v matici sadzieb doplnenej o vektory kapacít zdrojov, požiadaviek spotrebiteľov a riadkových a stĺpcových hodnôt.

Pretože pri riešení sa menia hodnoty sadzieb (pozri kap. 5.3) a na výpočet účelovej funkcie potrebujeme sadzby pôvodné, musíme východiskovú maticu sadzieb "uschovať" a výpočet vykonať v inej (rovnakej) matici.

Pretože výpočet budeme vykonávať v jednej matici, musíme dajakým spôsobom rozlíšiť sadzby a dávky (označené prvky). Vieme, že sadzby nemôžu nadobúdať záporné hodnoty, preto pre dávky využijeme tuto skutočnosť a ich označenie budeme realizovať záporným znamienkom (hodnotou).

napr. c(2,5) = 130 ... sadzba s hodnotou 130
c(2,5) = -130 ... dávka s hodnotou 130

Ďalšou skutočnosťou, na ktorú nesmieme zabudnúť, je vyrovnanie úlohy, respektíve príprava datových štruktúr tak, aby toto bolo umožnené. Preto "rozmer" polí musí byť o jednotku väčší.

keď je: m ... počet zdrojov
n ... počet spotrebiteľov

potom jednotlivé polia musíme deklarovať na rozmer:
maticu sadzieb .... (m+1, n+1)
vektory pre zdroje .... (m+1)
vektory pre spotrebiteľov ..... (n+1)

V ďalšom je uvedený vývojový diagram pre riešenie dopravnej úlohy maďarským algoritmom.

V tomto vývojovom diagrame sú použité tieto premenné a polia:

VSTUP DÁT

PZ .... počet zdrojov;
PS .... počet spotrebiteľov;
PZP, PSP .... počet zdrojov a spotrebiteľov (pôvodný), pre prezentáciu výsledkov bez fiktívnych
c(i,j) .... matica sadzieb (pôvodná, vstupná);
m(i,j) .... matica sadzieb (dávok) pre výpočet;
a(i) .... vektor kapacít zdrojov;
b(j) .... vektor požiadaviek spotrebiteľov;
R(i) .... vektor značenia riadkov (zdrojov);
S(j) .... vektor značenia stĺpcov (spotrebiteľov);

DEKLARÁCIA POLÍ PRE VÝPOČET

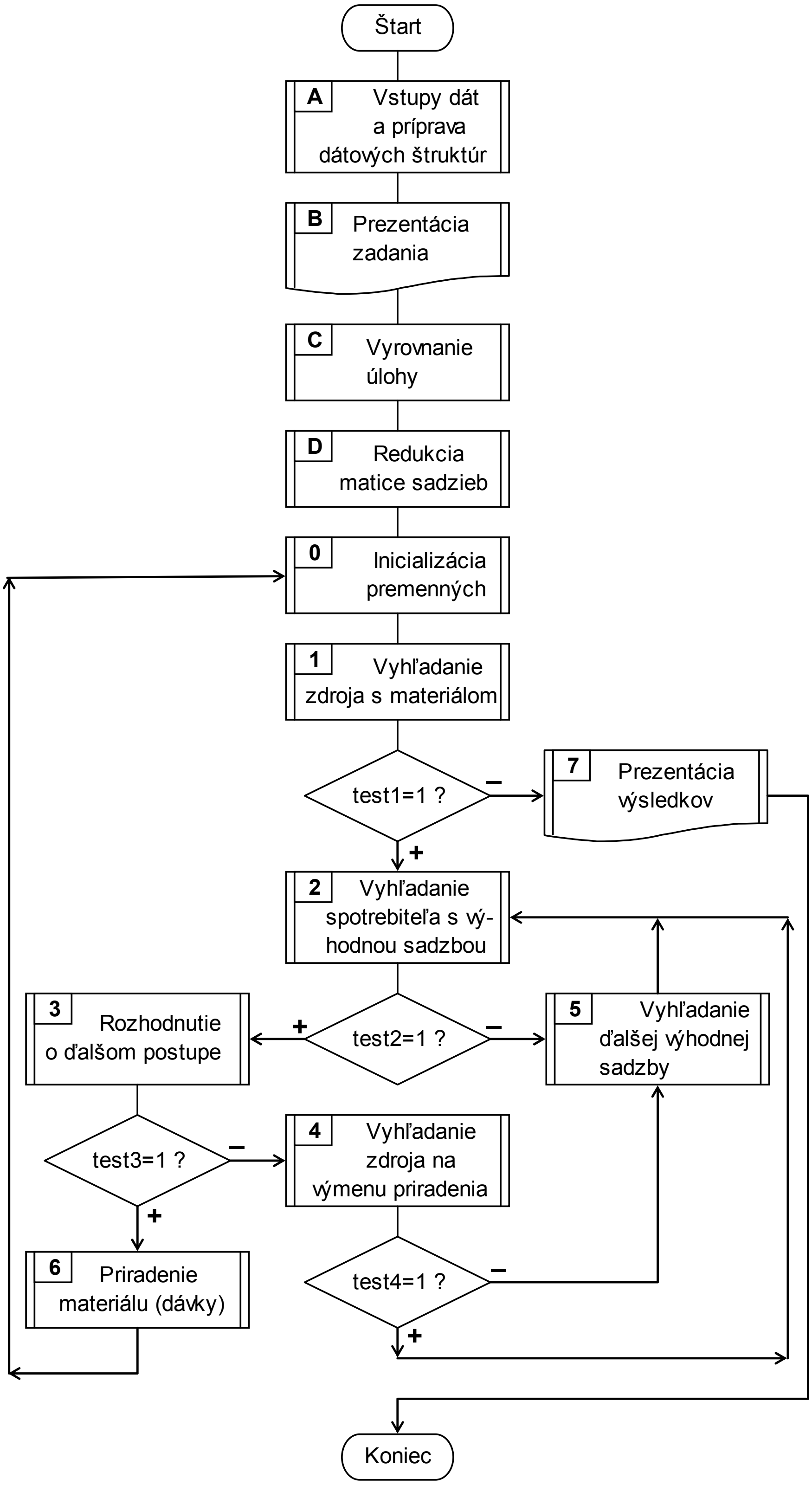
c(PZ+1, PS+1)	a(PZ+1)	R(PZ+1)
m(PZ+1, PS+1)	b(PS+1)	S(PS+1)

ĎALŠIE (POMOCNÉ) PREMENNÉ

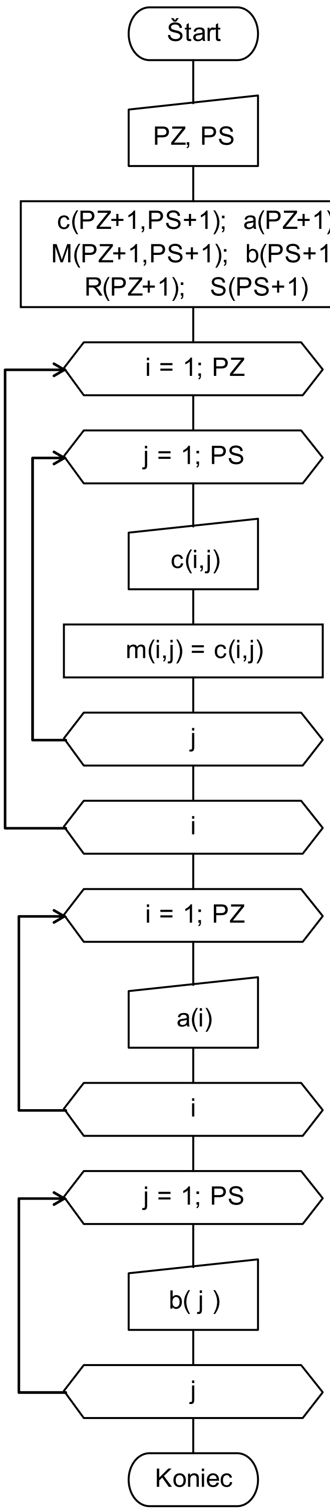
pre vyrovnanie úlohy
SZ .... súčet kapacít zdrojov (pred vyrovnaním úlohy);
SS .... súčet požiadaviek spotrebiteľov (- " -);

pre tvorbu maď. stromu a realizáciu priradenia
hs .... hľadaný stĺpec;
hr .... hľadaný riadok;
hsp ... hľadaný stĺpec (pracovný);
hrp ... hľadaný riadok (pracovný);
E ..... priraďované množstvo materiálu.

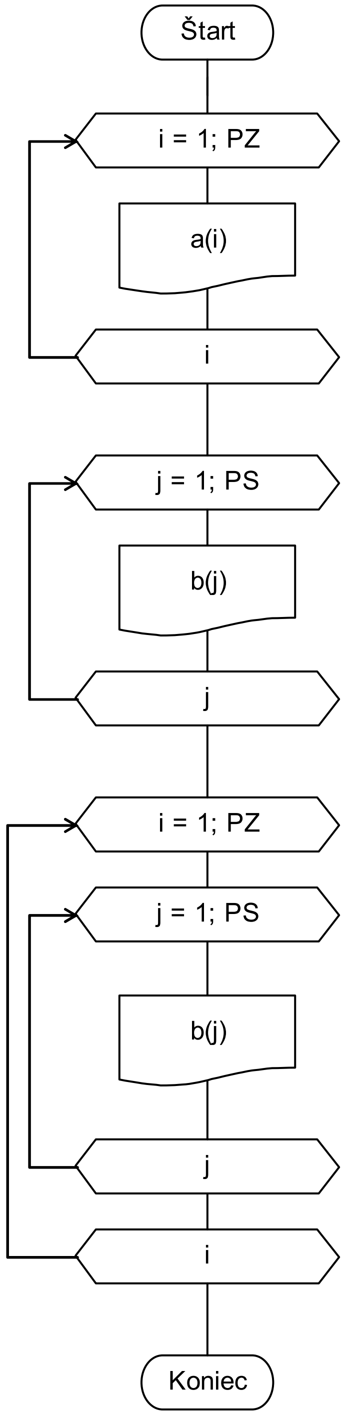
HLAVNÝ PROGRAM



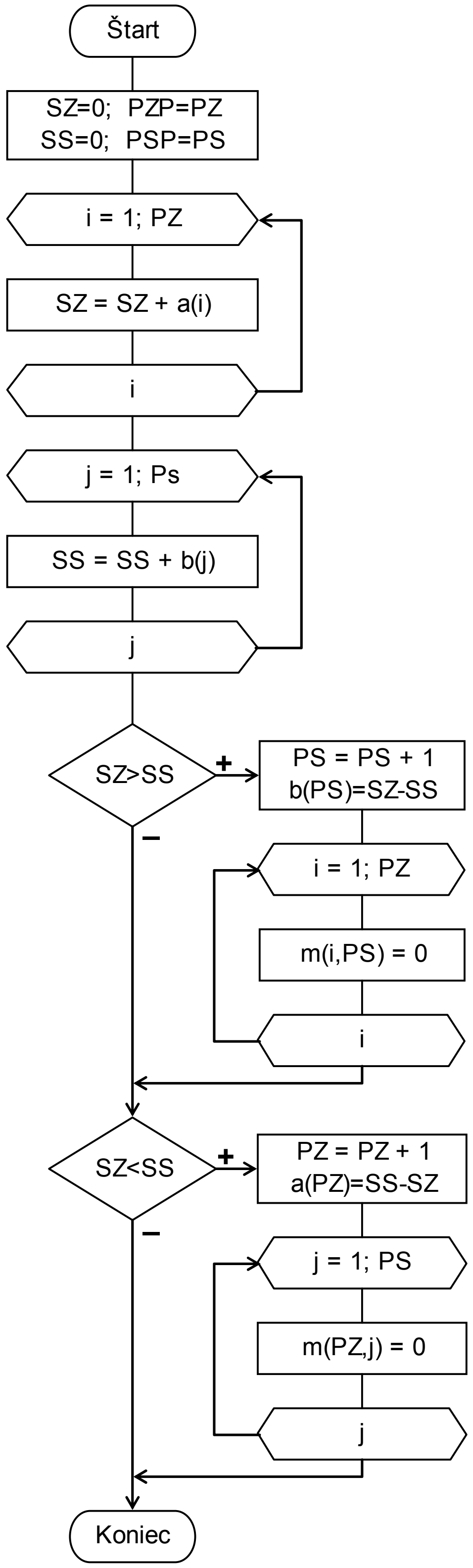
A Vstupy dát a príprava dátových štruktúr



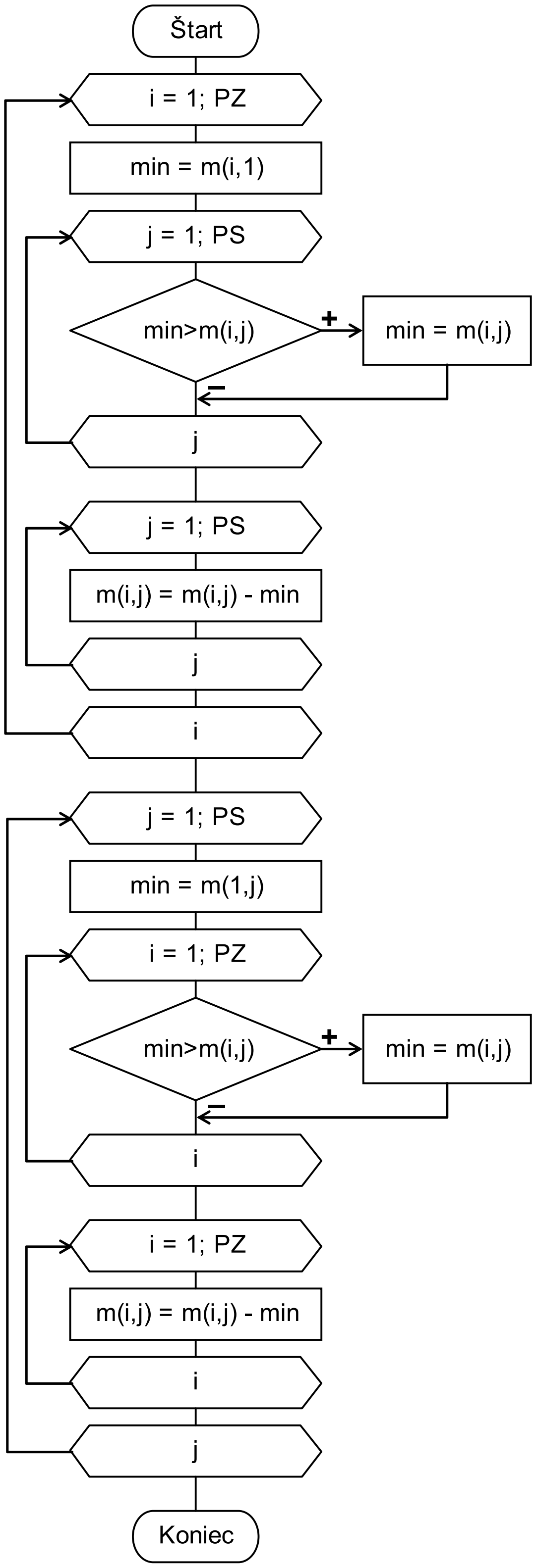
B Prezentácia zadania



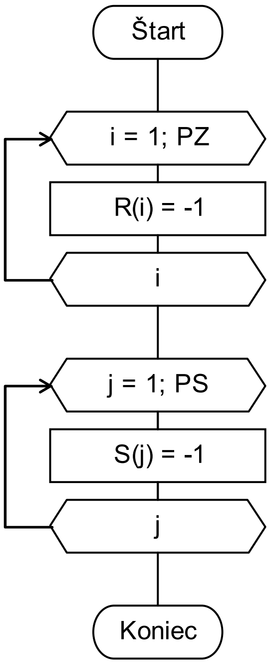
C Vyrovnanie úlohy



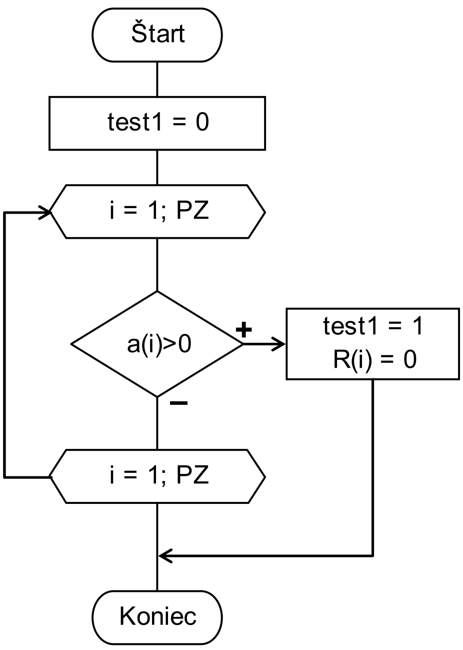
D Redukcia matice sadzieb



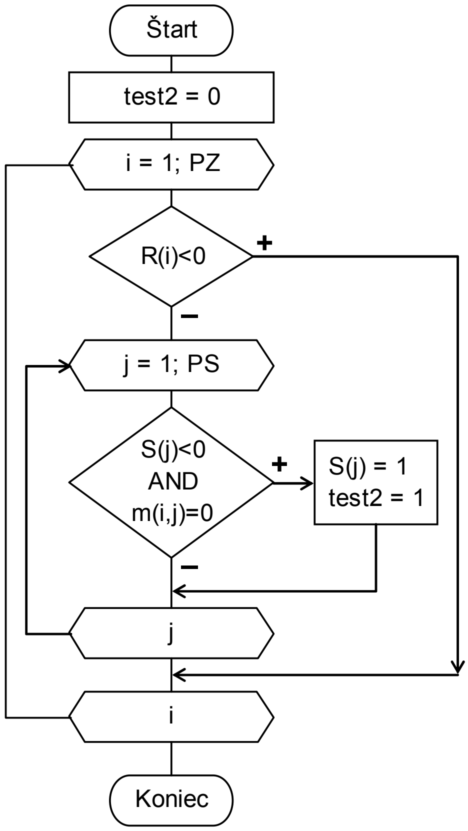
0.krok **Inicializácia premenných**



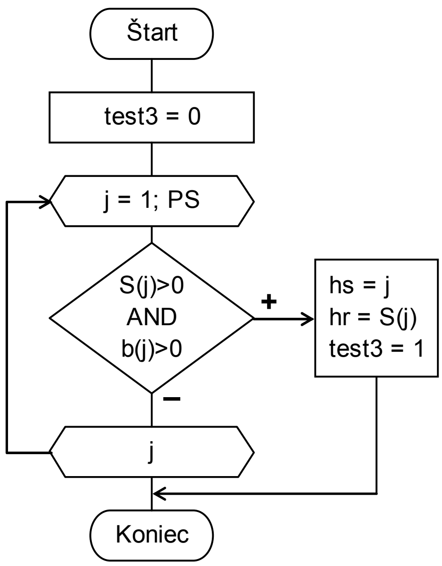
1.krok **Vyhľadanie zdroja s materiálom**



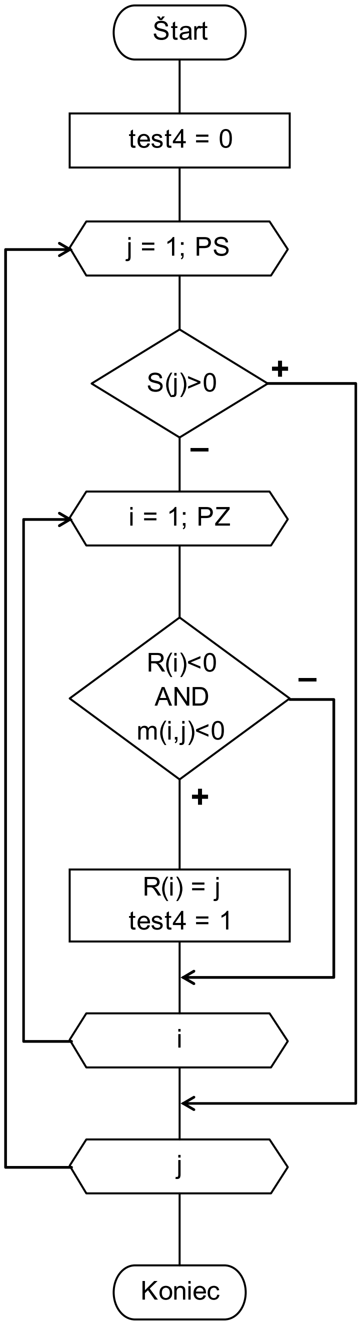
2.krok **Vyhľadanie spotrebiteľa s výhodnou sadzbou**



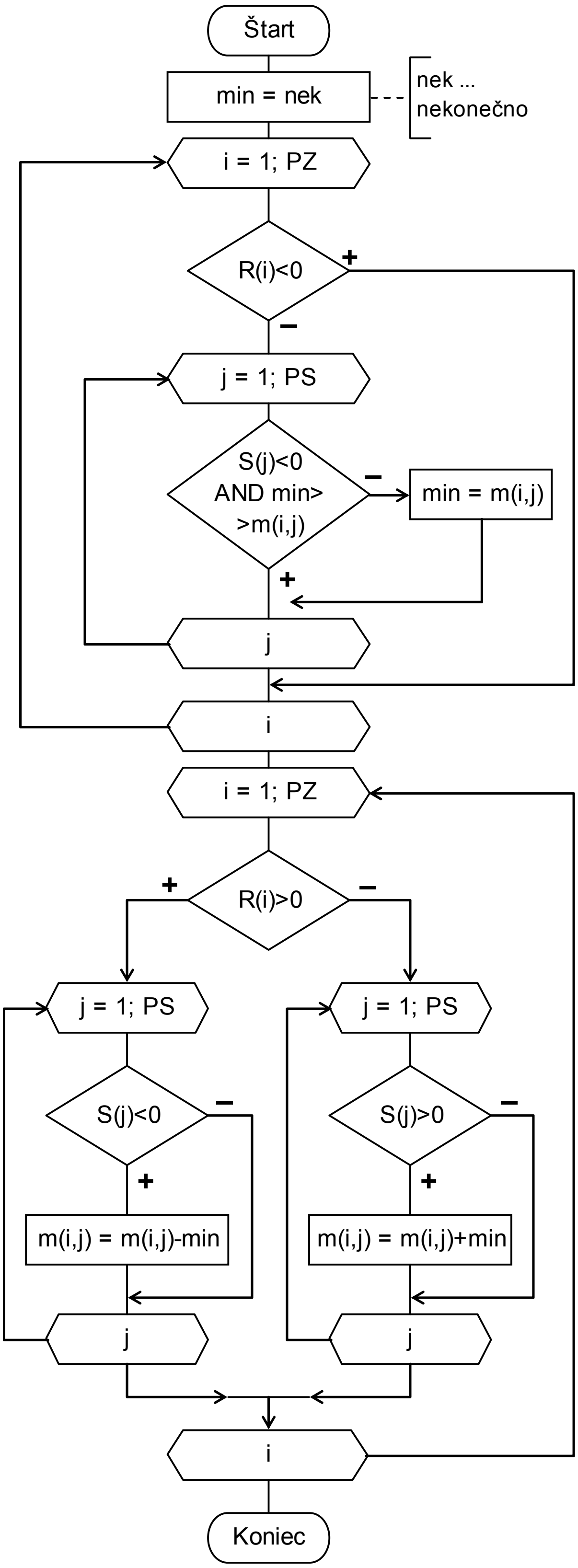
3.krok **Rozhodnutie o ďalšom postupe**



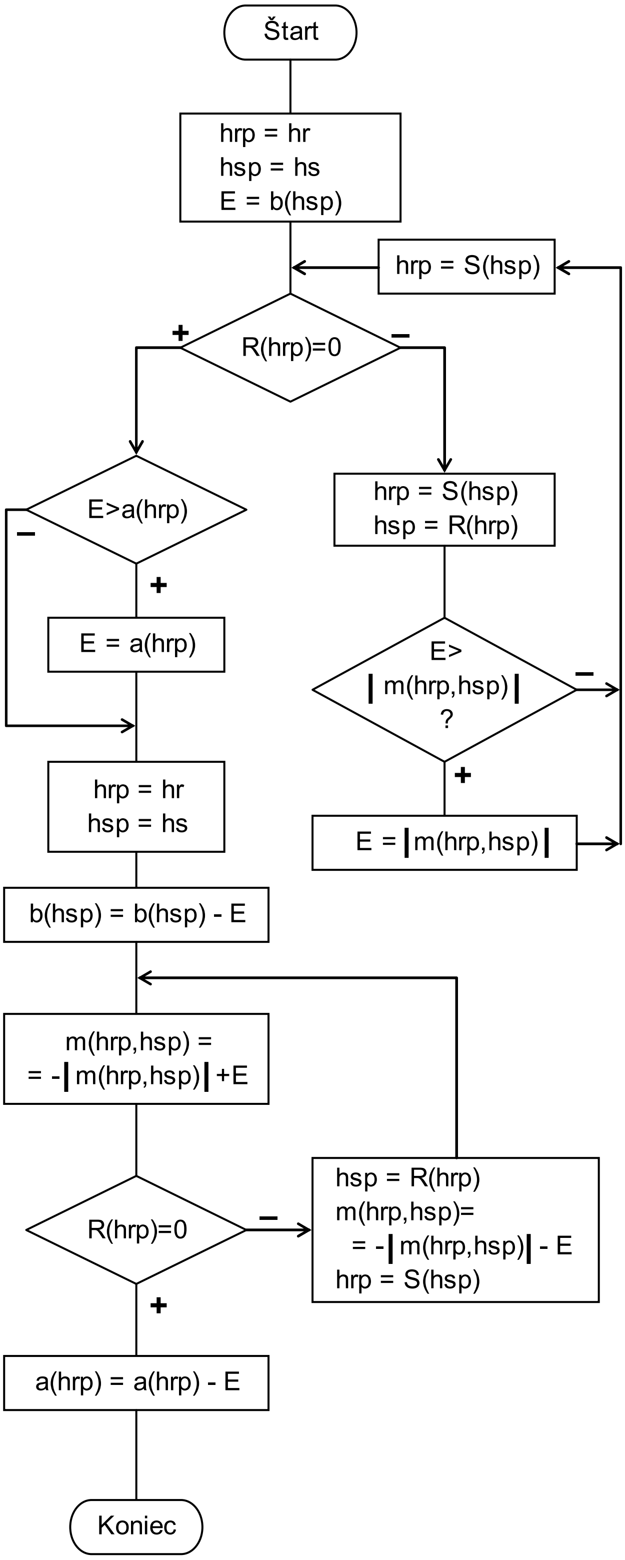
4.krok Vyhľadanie zdroja na výmenu priradenia



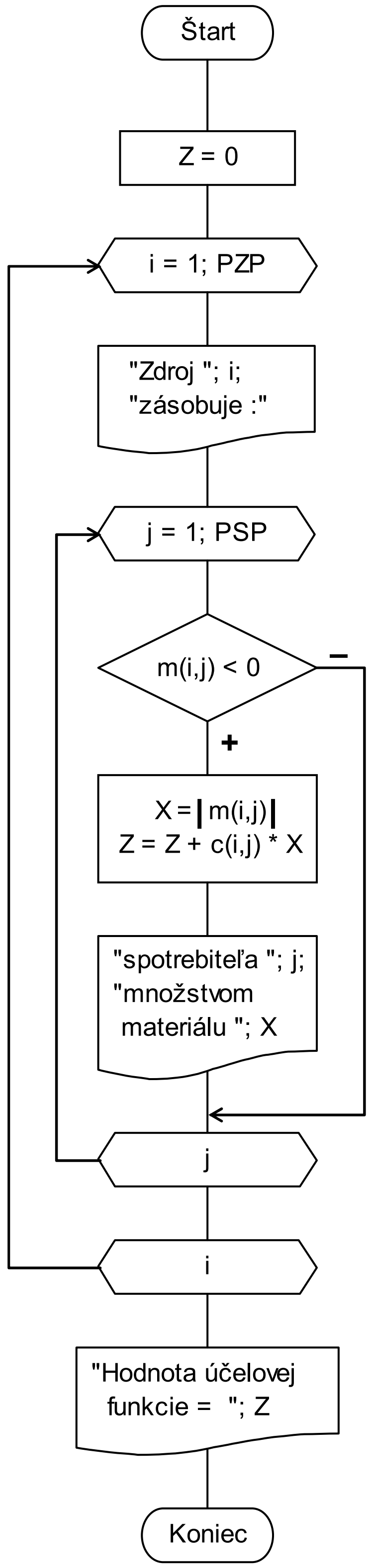
5.krok Vyhľadanie ďalšej výhodnej sadzby



6.krok Priradenie materiálu (dávky)



7.krok Prezentácia výsledkov



6. POUŽITIE DOPRAVNEJ ÚLOHY PRE NEROVNORODÝ MATERIÁL

V doposiaľ preberaných algoritmoch na riešenie dopravnej úlohy sme predpokladali (a z hľadiska formulácie úlohy je to aj podmienkou) pri všetkých zdrojoch a požiadavkách spotrebiteľov **rovnorodý materiál**, to znamená materiál rovnakého druhu a rovnakej kvality. Prvá časť podmienky (materiál rovnakého druhu) musí byť vždy zachovaná, ale pokiaľ sa jedná o rozdielnu kvalitu materiálu, čo v praxi sa pomerne často vyskytuje, je možné takúto úlohu po určitých úpravách riešiť.

Ide o situáciu, kedy zdroje nebudú mať k dispozícii materiál rovnakej kvality, ako aj všetci spotrebitelia nemusia vyžadovať z hľadiska kvality materiál rovnaký. Pričom technológia procesu, na ktorý ho budú používať, im umožňuje nahradiť ho materiálom s inou kvalitou, ale v rozdielnom množstve.

Typickým príkladom môže byť zabezpečenie niekoľkých stavieb cementom, keď zdroje ponúkajú cement rozdielnej kvality (napr. 500, 325, 250).

FORMULÁCIA ÚLOHY

V **m** zdrojoch $\mathbf{Z}_i$ je k dispozícii materiál v známych množstvách $\mathbf{a}_i$ s vlastnosťami $\mathbf{Vz}_i$. Materiál chceme prepraviť k **n** spotrebiteľom $\mathbf{S}_j$, ktorí majú požiadavky na materiál v množstvách $\mathbf{b}_j$ s vlastnosťami $\mathbf{Vs}_j$. Pritom je možné požiadavky spotrebiteľov uspokojiť aj materiálom iných vlastností, ale v zodpovedajúcom množstve tak, aby bol dosiahnutý rovnaký efekt ako s materiálom požadovaným. Ďalej poznáme ohodnotenia prepravnej náročnosti - sadzby - **c(i,j)** na jednotku množstva príslušného materiálu od všetkých zdrojov k jednotlivým spotrebiteľom.

Úlohou je určiť množstvá materiálu **x(i,j)** prepravovaného od jednotlivých zdrojov k spotrebiteľom tak, aby celkové náklady na prepravu boli optimálne, a to aj s prihliadnutím na rôznorodosť prepravovaného materiálu.

PREPOČET VSTUPNÝCH ÚDAJOV PRE RIEŠENIE

Koeficient ekvivalentnosti

Aby bolo umožnené riešenie úlohy, musíme vykonať transformáciu vstupných dát na hodnoty, ktoré zmenia úlohu pre fázu výpočtu na prípad rovnorodého materiálu.

Na tento účel zvolíme jeden z materiálov (zdrojov alebo spotrebiteľov) za **štandardný** (so štandardnými vlastnosťami **Vs**) a hodnoty zadania úlohy zmeníme, ako by zdroje aj spotrebitelia operovali iba s týmto štandardným materiálom.
Za štandardný materiál môžme zvoliť ktorýkoľvek, výhodné je vybrať materiál zdrojov alebo spotrebiteľov s najlepšími vlastnosťami.

Na vzájomné porovnanie materiálov používame **koeficient ekvivalentnosti - k(i)**, ktorý udáva koľkokrát väčšie množstvo materiálu i-tej kvality, ako materiálu štandardného, je potrebné použiť na dosiahnutie rovnakého efektu. Koeficient ekvivalentnosti je teda funkciou i-teho a štandardného materiálu:

$$k(i) = f(V_i, Vs) \qquad (6.1)$$

a môžme ho vypočítať podľa vzťahu

$$k(i) = \frac{h(i)}{h(s)} \qquad (6.2)$$

kde: h(i) ... množstvo i-teho materiálu kvality V(i)
h(s) ... množstvo štandardného materiálu kvality V(s) na dosiahnutie rovnakého efektu

Koeficienty ekvivalentnosti budeme ďalej označovať:

- u zdrojov .... kz(i),
- u spotrebiteľov ..... ks(j).

Vstupné údaje sú znázornené v tabuľke 6.1.

Z\S	S1	...	Sn	a(i)	kz(i)
Z1	c(1,1)		c(1,n)	a(1)	kz(1)
. .	c(2,1)	c(i,j)		. .	. .
Zm			c(m,n)	a(m)	kz(m)
b(j)	b(1)	...	b(n)		
ks(j)	ks(1)	...	ks(n)		

Tab. 6.1 Tabuľka na riešenie dopravnej úlohy pre nerovnorodý materiál (vstupné údaje)

<u>Prepočet kapacít zdrojov a požiadaviek spotrebiteľov</u>

Kapacity zdrojov a požiadavky spotrebiteľov prepočítame na množstvá štandardného materiálu podľa vzťahu:

$$\mathbf{as(i)} = \frac{\mathbf{a(i)}}{\mathbf{kz(i)}} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{bs(j)} = \frac{\mathbf{b(j)}}{\mathbf{ks(j)}} \tag{6.4}$$

kde: as(i) ... kapacita zdroja vyjadrená v štandardnom materiáli
bs(j) ... požiadavka spotrebiteľa vyjadrená v štandardnom materiáli
a(i), b(j) .... pôvodné hodnoty v neštandardnom type materiálu
kz(i), ks(j) .. koeficienty ekvivalentnosti materiálu zdrojov a spotrebiteľo

<u>Prepočet matice sadzieb</u>

Pred riešením úlohy je nutné prepočítať aj maticu sadzieb, ktorá v pôvodnom stave odpovedá preprave nerovnorodého, neštandardného materiálu, na sadzby, ktoré budú zohľadňovať prepravu vo zvolenom type štandardného materiálu. Prepočet vykonáme podľa vzťahu:

$$\mathbf{cs(i,j) = c(i,j) * kz(i)} \tag{6.5}$$

kde: cs(i,j) ... sadzby pre štandardný materiál

c(i,j) .... sadzby pôvodné pre nerovnorodý materiál
kz(i) ..... koeficient ekvival. materiálu zdroja i

Tým dostávame novú maticu na riešenie úlohy v štandardnom type materiálu. Jej forma je znázornená v tabuľke 6.2.

Z\S	S1	...	Sn	as(i)
Z1	cs(1,1)		cs(1,n)	as(1)
. .	cs(2,1)	cs(i,j)		. .
Zm			cs(m,n)	as(m)
bs(j)	bs(1)	...	bs(n)	

Tab. 6.2 Tabuľka vstupných dát po prepočte na štandardný materiál

Po vykonaní týchto prepočtov môžme pristúpiť k riešeniu úlohy použitím ktorejkoľvek z metód.

Výsledné dávky (prepravované množstvá materiálu) vo výslednom riešení potom budú v množstvách štandardného materiálu. Pre praktické použitie nás ale budú zaujímať skutočné množstvá podľa pôvodného typu materiálu príslušného zdroja.

Prepočet dávok na pôvodný typ materiálu vykonáme podľa vzťahu :

$$\mathbf{x(i,j) = xs(i,j) * kz(i)} \qquad (6.6)$$

kde: x(i,j) .... priradená dávka neštandardného (skutočného) materiálu
xs(i,j) ... priradená dávka štandardného materiálu
kz(i) ..... koeficient ekvivalentnosti zdroja i

Obmedzujúce podmienky pre nové zadanie (štandardný materiál) môžme zapísať v tvare:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{as(i)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{bs(j)} \qquad (6.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{xs(i,j) = as(i)} \qquad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{xs(i,j) = bs(j)} \qquad (6.9)$$

$$\mathbf{xs(i,j) \geq 0} \qquad (6.10)$$

Hodnotu účelovej funkcie po ukončení riešenia môžme s využitím vzťahov (6.5) a (6.6) vyčísliť tromi spôsobmi:

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x(i,j) * c(i,j)} \qquad (6.11)$$

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{cs(i,j) * xs(i,j)} \qquad (6.12)$$

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c(i,j) * kz(i) * xs(i,j)} \qquad (6.13)$$

ZHRNUTIE POSTUPU RIEŠENIA PRE NEROVNORODÝ MATERIÁL

Príprava a riešenie dopravnej úlohy pre nerovnorodý materiál pozostáva z postupnosti týchto krokov:

1) Zostavenie tabuľky vstupných dát pre nerovnorodý materiál.

2) Voľba štandardného materiálu a určenie koeficientov ekvivalentnosti pre jednotlivé zdroje a spotrebiteľov (vzťah 6.1, 6.2).

3) Prepočet kapacít zdrojov a požiadaviek spotrebiteľov na štandardný materiál (vzťah 6.3, 6.4)

4) Prepočet sadzieb pre štandardný materiál (vzťah 6.5).

5) Riešenie zvolenou metódou (vrátanie vyrovnania úlohy).

6) Prepočet výsledkov riešenia (dávok) na pôvodný typ materiálu (vzťah 6.6).

7) Výpočet hodnoty účelovej funkcie (vzťah 6.11) a prezentácia výsledkov riešenia.

Príklad 6.1

Máme vyriešiť spôsob prepravy cementu zo štyroch zdrojov na 3 stavby mostov. Jednotlivé zdroje ponúkajú cement rozdielnych kvalít (500, 400, 325, 250). Technológia umožňuje použiť na stavbách všetky ponúkané druhy cementov, pričom skúškami pevnosti boli zistené koeficienty ekvivalentnosti voči cementu "500". Úlohou je vyriešiť odber materiálu od zdrojov tak, aby celkový prepravný výkon bol minimálny.
Vstupné údaje (kapacity zdrojov /t/, požiadavky stavieb /t/, vzdialenosti /km/ a koeficienty ekvivalentnosti) sú uvedené v tabuľke 6.3.

Z\S	S1	S2	S3	ponuka	kvalita	kz(i)
Z1	20	8	10	50	250	2
Z2	36	18	14	30	325	1.5
Z3	16	8	12	20	400	1.25
Z4	10	23	16	15	500	1
dopyt	36	40	30			
kvalita	325	400	500			
ks(j)	1.5	1.25	1			

Tab. 6.3 Vstupné údaje pre riešenie úlohy

Po prepočte kapacít zdrojov, požiadaviek spotrebiteľov a matice sadzieb (použitím vzťahov 6.3, 6.4 a 6.5) dostávame hodnoty uvedené v tabuľke 6.4.

Z\S	S1	S2	S3	a(i)
Z1	40	16	20	25
Z2	54	27	21	20
Z3	20	10	15	16
Z4	10	23	16	15
b(j)	24	32	30	86\76

Tab. 6.4 Prepočet na štandardný materiál

Keď porovnáme ponuku a dopyt v tabuľke 6.3, zdá sa, akoby ponuka prevyšovala dopyt. Záver o tomto môžme ale vysloviť až po prepočte kapacít zdrojov a požiadaviek spotrebiteľov (tab. 6.4), kde pri štandardnom (porovnateľnom) type materiálu je nedostatok ponuky. Preto aj vyrovnanie úlohy môžme vykonať až po tomto kroku zavedením fiktívneho zdroja s kapacitou 10t štandardného materiálu (cement 500).

Tým máme pripravené vstupné údaje na aplikáciu ktorejkoľvek metódy pre riešenie dopravnej úlohy.

Výsledky riešenia pre štandardný materiál sú uvedené v tabuľke 6.5. (Bol použitý maďarský algoritmus).

Z\S	S1	S2	S3	a(i)
Z1		16	9	25
Z2			20	20
Z3		16		16
Z4	15			15
Zf	9		1	10
b(j)	24	32	30	86

Tab. 6.5 Výsledné rozmiestnenie dávok
pre štandardný materiál

Situácia po prepočte vypočítaných štandardných dávok na pôvodný typ materiálu (vzťah 6.6) a dosadení do pôvodnej tabuľky, ja znázornená v tab. 6.6.

Hodnota účelovej funkcie Z = 1166 tkm (vzťah 6.11). Tým je riešenie ukončené.

Z\S	S1	S2	S3	a(i)
Z1		32	18	50
Z2			30	30
Z3		20		20
Z4	15			15
b(j)	36	40	30	**Z=1166 tkm**

Tab. 6.6 Výsledné rozmiestnenie dávok
pre nerovnorody materiál

■ ■

7. ĎALŠIE KRITÉRIA OPTIMALITY RIEŠENIA DOPRAVNÝCH ÚLOH PRI NEVYROVNANOSTI ZDROJOV A POTRIEB

Doposiaľ sme riešili dopravnú úlohu iba z hľadiska prepravných nákladov, a iba z tohto hľadiska boli riešenia optimálne. V prípadoch, v ktorých nie sú v rovnováhe ponuka a požiadavky, nemusí byť výška prepravných nákladov jediným a rozhodujúcim kritériom optimality i. Pri riešení takýchto úloh môže mať význam aj rad iných momentov, ako sú vlastné náklady, náklady na údržbu nevyužitých kapacít zdrojov, zmluvná zaistenosť dodávok a pod.

V prípade nevyrovnanosti úlohy môžu nastať (ako už bolo ukázané v kapitole 2.2) dva prípady:

A) **Ponuka prevyšuje dopyt ... $\sum a(i) > \sum b(j)$**

V tomto prípade nevyrovnanosti úlohy sa riešenie dotýkalo aj otázky, ktoré kapacity sa majú prednostne využiť (tzn. ktorému zdroju ostanú zvyšné zásoby "na sklade").

B) **Dopyt prevyšuje ponuku ... $\sum a(i) < \sum b(j)$**

V tomto prípade nevyrovnanosti úlohy sa riešenie dotýkalo aj otázky prednostného poradia zásobovania spotrebiteľov (tzn. ktorý spotrebiteľ vlastne nebude uspokojený).

Majme pre uvedené varianty A), B) nasledujúce príklady:

Dvaja dodávatelia D1,D2 skladujú určité množstvá výrobkov a(1), a(2) a majú zásobovať dvoch spotrebiteľov S1,S2, ktorí požadujú výrobky v množstvách b(1),b(2).

Prepravné náklady na jednotku množstva, kapacity dodávateľov a požiadavky odberateľov pre jednotlivé varianty sú uvedené v tabuľkách označených [A]1 a [B]1.

[A]1 $\sum a(i) > \sum b(j)$

D\S	S1	S2	a(i)
D1	20	22	1200
D2	19	20	1200
b(j)	1000	1000	

[B]1 $\sum a(i) < \sum b(j)$

D\S	S1	S2	a(i)
D1	20	22	1000
D2	19	20	1000
b(j)	1200	1200	

V oboch prípadoch ide o klasickú nevyrovnanú dopravnú úlohu, ktorú prevedieme na vyrovnanú zavedením fiktívneho spotrebiteľa (v prípade [A]) a fiktívneho dodávateľa (v prípade [B]). Výsledky ich riešenia sú uvedené v tabuľkách označených [A]2 a [B]2.

[A]2

D\S	S1	S2	Sf	a(i)
D1	20 / 800	22	0 / 400	1200
D2	19 / 200	20 / 1000	0	1200
b(j)	1000	1000	400	2400

[B]2

D\S	S1	S2	a(i)
D1	20 / 1000	22	1000
D2	19 / 200	20 / 800	1000
Df	0	0 / 400	400
b(j)	1200	1200	2400

Uvedené príklady riešia optimálne rozmiestnenie dávok iba z hľadiska prepravných nákladov.

Ďalej skúsime rozšíriť zadania o ďalšie obmedzenia.

Obmedzenia premietajúce sa do reálnych sadzieb:

Pre obidva varianty nevyrovnanosti - A) i B) - môžu byť ďalšie obmedzenia, ktoré sa budú premietať do prepravných nákladov (tzn. do matice sadzieb, okrem fiktívneho riadku alebo stĺpca). Takými môžu byť rozdielne vlastné náklady zdrojov (napr. cena za výrobok) alebo aj rozdielne náklady súvisiace so spotrebiteľmi (napr. rozdielne náklady na vykládku). V tomto prípade sa tieto premietnu do sadzieb príslušného riadku (stĺpca) okrem fiktívneho zdroja alebo spotrebiteľa.

Predpokladajme napr., že v príklade [A] sa vlastné náklady u jednotlivých dodávateľov líšia. Dodávateľ D1 preto predáva výrobok za 100.- Sk a dodávateľ D2 za 110.- Sk. Z toho vyplýva, že pre spotrebiteľa nebudú rozhodujúce iba prepravné náklady, ale aj nákupná cena. Celkové náklady na jednotku množstva (sadzby) preto budú predstavovať súčet nákupnej ceny výrobku a náklady na jeho prepravu. Takto rozšírená úloha aj s výsledkami riešenia je uvedená v tabuľke označenej [A]3.

Obmedzenia premietajúce sa do fiktívnych sadzieb:

Pre obidva varianty nevyrovnanosti - A) i B) - je potrebná určitá modifikácia fiktívnych sadzieb, keď nevyužitie kapacít zdrojov je spojené s určitými nákladmi, alebo nesplnenie dodávky niektorým spotrebiteľom sa penalizuje. V takýchto prípadoch namiesto nulových sadzieb pri fiktívnom zdroji alebo spotrebiteľovi budú náklady súvisiace s nevyužitím zdroja alebo s nerealizovaním dodávky.

Treba podotknúť, že tieto hodnoty môžu nadobúdať charakter až prohibitívnej sadzby (pozri kap. 2.2).

Predpokladajme napr., že dodávka 1200 jednotiek v príklade [B] spotrebiteľovi S2 (ktorého dopyt v riešení podľa tabuľky [B]2 nie je uspokojený) je zmluvne zaručená a jej nesplnenie je penalizované sumou 1,50 Sk za každú nedodanú jednotku. V tomto prípade aj obsadenie dávkou od fiktívneho dodávateľa k spotrebiteľovi S2 bude vykazovať náklady vo výške penále. Riešenie v upravenej matici je uvedené v tabuľke označenej [B]3.

[A]3

D\S	S1	S2	Sf	a(i)
D1	120 1000	122 200	0	1200
D2	129	130 800	0 400	1200
b(j)	1000	1000	400	2400

[B]3

D\S	S1	S2	a(i)
D1	20 1000	22	1000
D2	19	20 1000	1000
Df	0 200	1.5 200	400
b(j)	1200	1200	2400

Je zaujímavé, že požiadavka spotrebiteľa S2 nebude podľa optimálneho riešenia plne uspokojená, aj keď jej nesplnenie je penalizované. Celkové penále je totiž vyvážené nižšími prepravnými nákladmi k spotrebiteľovi S1.

Podobným spôsobom, ako je riešený príklad v tabuľke [B]3, by sme postupovali aj v prípade dodatočných nákladov súvisiacich s nevyužitím zdrojov.

Príklad 7.1

Máme premiestniť materiál rovnakého druhu z 5-tich teritoriálnych skladov do troch novozriadených skladov na teritóriu SR. Množstvá materiálu v pôvodných skladoch (zdrojoch), požiadavky na naplnenie nových skladov (spotrebitelia) a ich vzájomné kilometrické vzdialenosti sú uvedené v tabuľke 7.1. V novovytváraných skladoch je na prepravu k dispozícii automobilová technika podľa tabuľky 7.2.

Z brannobezpečnostných dôvodov musí byť nový sklad S3 naplnený materiálom v plnej požadovanej výške.

Úlohou je vyriešiť prepravu materiálu tak, aby celková spotreba PH bola minimálna.

nový sklad / pôvodný sklad	S1	S2	S3	množstvo materiálu
Z1	90	135	140	2000 t
Z2	75	70	138	1800 t
Z3	100	80	120	2300 t
Z4	140	90	60	1680 t
Z5	125	40	110	1720 t
požiadavka na navezenie	3500 t	3600 t	3300 t	9500 t 10400 t

Tab. 7.1 Kapacity skladov a vzájomné vzdialenosti v km

nový sklad	automobilová technika	celková užit. hmotnosť	priemerná spotreba PH [l/100km]
S1	ANT + PVT	20 t	28
S2	ANT + PVS	15 t	24
S3	TN + náves	22 t	33

Tab. 7.2 Údaje o automob. technike na prepravu materiálu

PRÍPRAVA VSTUPNÝCH DÁT

Chceme minimalizovať spotrebu PH, ale v matici sadzieb máme kilometrické vzdialenosti. Okrem toho u jednotlivých spotrebiteľov máme k dispozícii techniku s rozdielnou spotrebou PH aj rozdielnou užitočnou hmotnosťou. Z tohto dôvodu je potrebné prepočítať maticu sadzieb na hodnoty odpovedajúce spotrebe PH na prepravu 1t materiálu.

Keď označíme:

Hu(j) ..... užitočná hmotnosť súpravy v t;
Ss(j) ..... spotreba PH súpravy v l/100km;
L(i,j) .... vzdialenosť prepravy v km;
Sph1(j) ... spotreba PH na prepravu 1t na vzdialenosť 1km;
c(i,j) .... spotreba PH na prepravu 1t

Potom:

$$\mathrm{Sph1}(j) = \frac{\mathrm{Ss}(j)}{100 * \mathrm{Hu}(j)} \tag{7.1}$$

$$c(i,j) = L(i,j) * \mathrm{Sph1}(j) \tag{7.2}$$

Zo vzťahu (7.1) vypočítame spotrebu PH na prepravu 1t na vzdialenosť 1km, ktorá bude:

- pre nový sklad č.1: Sph1(1) = 28/(100*20) = 0.014 l
- pre nový sklad č.2: Sph1(2) = 24/(100*15) = 0.016 l
- pre nový sklad č.3: Sph1(3) = 33/(100*22) = 0.015 l

Celkovú spotrebu PH na prepravu 1t materiálu od zdroja Z(i) ku spotrebiteľovi S(j) vypočítame podľa vzťahu 7.2.

Pri riešení spotreby PH nesmieme zabudnúť na "prázdne jazdy" bez materiálu. Pre rozmiestnenie dávok toto nie je potrebné, ale pre vyčíslenie celkovej spotreby PH (pre výslednú hodnotu účelovej funkcie) sa nám ponúkajú dve možnosti:

a) výsledné sadzby c(i,j) získané výpočtom podľa vzťahu (7.2) zdvojnásobíme [c'(i,j) = c(i,j) * 2]; účelová funkcia potom bude predstavovať reálnu spotrebu PHh;

b) alebo použijeme vypočítané c(i,j) a až hodnotu účelovej funkcie zdvojnásobíme.

Pre naše riešenie zvolíme variant b).

Hodnoty matice sadzieb po prepočte, vrátane vyrovnania úlohy, sú uvedené v tabuľke 7.3.

Z \ S	S1	S2	S3	a(i)
Z1	1.26	2.16	2.1	2000
Z2	1.05	1.12	2.07	1800
Z3	1.4	1.28	1.8	2300
Z4	1.96	1.44	0.9	1680
Z5	1.75	0.64	1.65	1720
Zf	0	0	0	900
b(j)	3500	3600	3300	10400

Tab. 7.3 Výsledky prepočtu matice sadzieb a vyrovnanie úlohy

Ďalšou podmienkou, ktorú sme doposiaľ nezohľadnili, je skutočnosť, že spotrebiteľ S3 musí dostať plnú výšku materiálu, ktorú požaduje. V tomto prípade ide vlastne o špecifický druh penále za nedodanie materiálu, nadobúdajúci výšku prohibitívnej sadzby. Preto sadzbu c(f,3)=0 nahradíme c(f,3)=∞.

Na takto upravené vstupné údaje už môžme aplikovať ktorúkoľvek metódu na riešenie dopravnej úlohy.

Matica s prohibitívnou sadzbou a výsledky riešenia sú uvedené v tabuľke 7.4. (Úloha bola riešená maďarskou metódou).

Po ukončení výpočtu nesmieme zabudnúť na úpravu hodnoty účelovej funkcie podľa vyššie prijatého variantu.

$$Zvýsl = Z * 2 = 10830{,}2 * 2 = 21660{,}4\ l$$

Poznámka.:

Určité rozpory v spotrebe PH nastanú v prípadoch, kedy jednotlivé dávky nie sú celočíselnými násobkami príslušných ložných kapacít. V našom prípade sú to dávky x(3,2)=680, x(5,2)=1720, x(3,3)=1620 a x(4,3)=1680). V súvislosti s týmito dávkami je zarátaná spotreba iba na prevážaný materiál, ale nie na voľnú ložnú kapacitu pri poslednej jazde. Po prerátaní rozdielu by sme dostali hodnotu 86 l, čo predstavuje celkovú spotrebu PH nie 21660.4 litra, ale 21746.4 litra. V porovnaní s celkovou spotreboue predstavuje tento rozdiel necelých 0.4% .

Z \ S	S1	S2	S3	a(i)
Z1	1.26 2000	2.16	2.1	2000
Z2	1.05 1500	1.12 300	2.07	1800
Z3	1.4	1.28 680	1.8 1620	2300
Z4	1.96	1.44	0.9 1680	1680
Z5	1.75	0.64 1720	1.65	1720
Zf	0	0 900	nek	900
b(j)	3500	3600	3300	10400

Tab. 7.4 Výsledné riešenie úlohy. Z=10830.2 l

PRIRAĎOVACIA ÚLOHA

Priraďovacia úloha je v podstate špecifickým prípadom dopravnej úlohy, v ktorej okrajové podmienky (kapacity zdrojov a požiadavky spotrebiteľov) sa rovnajú 1. Niekedy, pri rovnakých požiadavkách alebo zdrojoch, je možné použiť aj vyššie obmedzenia. Je to v podstate najjednoduchšia distribučná úloha, v ktorej sa počet riadkov rovná počtu stĺpcov.

8. RIEŠENIE PRIRAĎOVACEJ ÚLOHY METÓDAMI PRE DOPRAVNÚ ÚLOHU

Ako sme uviedli, pri priraďovacej úlohe sú kapacity zdrojov a požiadavky spotrebiteľov dané jednotkami a pri zachovaní podmienky vyrovnanosti úlohy sa potom počet zdrojov rovná počtu spotrebiteľov (m = n).

FORMULÁCIA ÚLOHY

Máme **m** zdrojov **Z(i)** a **n** spotrebiteľov **S(j)**, kde počet zdro-
jov sa rovná počtu spotrebiteľov **m = n**. Kapacity zdrojov aj požiadavky spotrebiteľov majú hodnotu **1** (a_i**=1,** b_j**=1)**. Poznáme ohodnotenia priraďovacej (prepravnej) náročnosti **c(i,j)** zo všetkých zdrojov k všetkým spotrebiteľom.

Úlohou je priradiť jednotlivé zdroje spotrebiteľom tak, aby hodnota účelovej funkcie (celková náročnosť priradenia) bola optimálna (minimálna alebo maximálna).

Keďže okrajové podmienky v danej úlohe majú hodnoty 1, je jednoznačné, že aj priraďované množstvá sa budú rovnať 1.

Obmedzujúce podmienky môžme potom zapísať podobne ako pri dopravnej úlohe:

Nezápornosť riešenia sa zúži na jeden konkrétny prípad:

$$\mathbf{x(i,j) = 1} \qquad (8.1)$$

Pozn.: Pri neobsadení uvažujeme, že x(i,j)=0

Vyrovnanosť úlohy: za predpokladu, že $m = n$

$$\sum_{i=1}^{m} a(i) = \sum_{j=1}^{n} b(j) = m = n \qquad (8.2)$$

Kapacitné ohraničenie

keď $a(i) = 1$

$$\sum_{j=1}^{n} x(i,j) = a(i) = 1 \qquad (8.3)$$

pre $i \in \{1,2,...m\}$

keď $b(j) = 1$

$$\sum_{i=1}^{m} x(i,j) = b(j) = 1 \qquad (8.4)$$

pre $j \in \{1,2,...n\}$

Úlohou je nájsť optimálne rozmiestnenie jednotkových dávok tak, aby účelová funkcia **z** bola minimálna:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x(i,j) * c(i,j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c(i,j) \qquad (8.5)$$

Problém budeme, ako pri dopravnej úlohe riešiť tabuľkovou formou (jej obsah je uvedený v tabuľke 8.1).

Z\S	S1	...	Sj	...	Sn	ai
Z1	c(1,1) x(1,1)		c(1,j) x(1,j)		c(1,n) x(1,n)	1
Zi	c(i,1) x(i,1)		c(i,j) x(i,j)		c(i,n) x(i,n)	1
Zm	c(n,1) x(n,1)		c(m,j) x(m,j)		c(m,n) x(m,n)	1
bj	1	...	1	...	1	

Tab. 8.1 Tabuľka na riešenie priraďovacej úlohy

SPÔSOB RIEŠENIA

Pretože každé riešenie bude mať iba **m** obsadených polí jednotkovými dávkami, namiesto **m+n-1**, ide vždy o silne degenerované riešenie. Preto pri použití metód na riešenie dopravnej úlohy je vhodné vybrať takú, ktorej silná degenerácia neprekáža (napr. maďarská metóda). Pri použití iných metód musíme rátať s väčším počtom "mŕtvych" krokov (napr. na presun nulových dávok). Napriek tomu, použitím akejkoľvek metódy na riešenie dopravnej úlohy, sa dopracujeme k správnemu výsledku.

Výhodou riešenia priraďovacej úlohy metódami pre dopravnú úlohu je skutočnosť, že zvolený algoritmus môžme použiť bez akejkoľvek úpravy. Ak máme k tomu algoritmus na riešenie obecnej dopravnej úlohy spracovaný na výpočtovú techniku (napr. maďarský algoritmus prezentovaný vývojovým diagramom v kapitole 5.4), je použitie iných metód bezpredmetné.

Našou úlohou je v tomto prípade iba pripraviť správne vstupné údaje pre riešenie.

Príprava zodpovedajúcej štruktúry vstupných údajov na riešenie priraďovacej úlohy metódami pre dopravnú úlohu je prezentovaná na príkladoch 8.1, 8.2 a 8.3.
Výsledné priradenia v týchto príkladoch sú riešené maďarským algoritmom na výpočtovej technike.

Príklad 8.1

Stavebný útvar má na piatich stavbách mechanizmy, ktoré po skončení prác má presunúť na 5 nových stavieb. Sú známe kilometrické vzdialenosti medzi jednotlivými stavbami. Úlohou je priradiť, z ktorej stavby V(i), kde boli ukončené práce, na ktorú stavbu S(j), kde sa budú práce začínať, mechanizmy presunúť tak, aby celková vzdialenosť, a tým aj náklady na prepravu mechanizmov, boli minimálne.

RIEŠENIE

Ide o jednoduchý príklad priraďovacej úlohy, kde počet zdrojov sa rovná počtu spotrebiteľov a okrajové podmienky sa rovnajú 1.

Východiskové údaje s kilometrickými vzdialenosťami medzi stavbami a výsledné priradenie sú znázornené v tabuľke 8.2.

V\S	S1	S2	S3	S4	S5	a(i)
V1	50	29 1	32	34	28	1
V2	46	48	36 1	42	38	1
V3	38 1	32	30	32	30	1
V4	42	36	40	35 1	25	1
V5	37	35	36	44	18 1	1
b(j)	1	1	1	1	1	z = 156 km

Tab. 8.2 Vstupné údaje a riešenie príkladu 8.1

V úvode priraďovacej úlohy je uvedené, že pri rovnakých požiadavkách alebo zdrojoch nemusia byť okrajové podmienky rovné 1. Mohli by sme ich síce rozpísať do samostatných riadkov (stĺpcov) s okrajovou podmienkou 1, ale pri použití algoritmov na riešenie dopravnej úlohy to nie je potrebné. Navyše sa tým zmenší matica sadzieb a tým aj uľahčí výpočet. Toto platí aj pri nevyrovnanosti úlohy pre fiktívny riadok (stĺpec).

Príklad 8.2

6 pracovníkov P(i) má byť pridelených na 8 strojov S(j), pričom každý pracovník môže byť pridelený maximálne na 2 stroje. Zvládnutie obsluhy strojov jednotlivými pracovníkmi je ohodnotené trestnými bodmi v rozsahu 0-10 (0..najlepšie zvládnutie, 10..najhoršie zvládnutie). Ďalším obmedzením je, že pracovník P3 nemá vôbec kvalifikáciu na obsluhu stroja S6. Nie je podmienkou, aby všetci pracovníci boli zaradení do pracovného procesu.

Úlohou je prideliť pracovníkov na jednotlivé stroje tak, aby celkový počet trestných bodov bol minimálny.

RIEŠENIE

Keďže každý pracovník môže byť priradený na 2 stroje, okrajové podmienky pre pracovníkov budú a(i)=2. Na každý stroj môže byť priradený iba jeden pracovník, preto okrajové podmienky pre stroje budú b(j)=1. Úloha bude nevyrovnaná ($\sum a(i)=12$, $\sum b(j)=8$). Preto musíme maticu sadzieb doplniť o fiktívny stroj so sadzbami 0, na ktorý budú zaradení nevýhodní pracovníci. Ďalej sadzba $c(3,6)=\infty$, pretože pracovník P3 nemá na stroj S6 vôbec kvalifikáciu (tým zamedzíme obsadeniu tohto políčka dávkou).
Vstupné údaje s riešením úlohy sú uvedené v tabuľke 8.3.

PS	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	Sf	ai
P1	8	4	7	4	2 1	0 1	8	4	0	2
P2	3	2	2	5	4	1	3	8	0 2	2
P3	5	0 1	7	6	5	nek	1 1	0	0	2
P4	2	1	0 1	2	2	5	3	1 1	0	2
P5	0 1	3	10	1 1	1	6	5	3	0	2
P6	3	2	1	3	7	8	10	9	0 2	2
bj	1	1	1	1	1	1	1	1	4	z = 5 bodov

Tab. 8.3 Vstupné údaje a riešenie príkladu 8.2

Z riešenia vyplýva, že na 2 stroje budú zaradení pracovníci P1, P3, P4 a P5, a vôbec do pracovného procesu nebudú zaradení pracovníci P2 a P6.

■ ■

Príklad 8.3

Máme rovnaké zadanie úlohy ako v príklade 8.2, ale s tým rozdielom, že požadujeme, aby všetci pracovníci boli zaradení do pracovného procesu (každý bol pridelený na niektorý stroj).

RIEŠENIE

Rozoberme problém vzhľadom na príklad 8.2. Vyrovnaním úlohy o fiktívny stĺpec, v ktorom boli v podstate 4 neexistujúce stroje, sme umožnili vzhľadom na okrajové podmienky pracovníkov obsadiť jednotlivé polia fiktívneho stĺpca dávkami 2.

Dávkami 2 boli vo fiktívnom stĺpci obsadení pracovníci P2 a P6. Aby sme zabezpečili ich zaradenie do pracovného procesu, pokúsime sa zaistiť u nich obsadenie fiktívneho stĺpca iba dávkami 1. Na tento účel rozpíšeme pôvodný fiktívny stĺpec s okrajovou podmienkou 4 na tri fiktívne stĺpce s okrajovými podmienkami b(f1)=1, b(f2)=1 a b(f3)=2.

Aby sme zabezpečili u pracovníkov P2 a P6 pridelenie na fiktívne stroje iba hodnotou 1, ohodnotíme sadzby fiktívnych stĺpcov hodnotami:

$c(2,f1)=0$	$c(2,f2)=\infty$	$c(2,f3)=\infty$
$c(6,f1)=\infty$	$c(6,f2)=0$	$c(6,f3)=\infty$

Ostatné sadzby fiktívnych stĺpcov ohodnotíme hodnotami 0.
Takto upravenú maticu riešime.

Na vyriešenie príkladu 8.3 sme museli vykonať dve riešenia:
----

1) riešenie neupravenej matice, na zistenie či daktorí pracovníci nebudú vyradení z pracovného procesu;

2) riešenie v upravenej matici sadzieb (u fiktívnych spotrebiteľov), ktorou sme zabezpečili nevyradenie v prvom riešení zistených pracovníkov z prac. procesu.

Upravené vstupné údaje s riešením sú uvedené v tabuľke 8.4.

PS	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	Sf1	Sf2	Sf3	ai
P1	8	4	7	4	2 1	0	8	4	0	0	0 1	2
P2	3	2	2	5	4	1 1	3	8	0 1	nek	nek	2
P3	5	0	7	6	5	nek	1 1	0 1	0	0	0	2
P4	2	1	0 1	2	2	5	3	1	0	0	0 1	2
P5	0 1	3	10	1 1	1	6	5	3	0	0	0	2
P6	3	2 1	1	3	7	8	10	9	nek	0 1	nek	2
bj	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	z = 7 bodov

nek = prohibitívna sadzba (nekonečno)

Tab. 8.4 Upravené vstupné údaje a riešenie príkladu 8.3

Z riešenia (tab. 8.4) nám vyplýva, že sme odstránili vyradenie pracovníkov P2 a P6 z pracovného procesu.
Pri riešení nám nenastal žiadny ďalší prípad nezaradenia niektorého pracovníka na stroj.

Na dva stroje budú zaradení pracovníci P3 a P5.
Celková hodnota účelovej funkcia sa nám zvýšila, vzhľadom na riešenie príkladu 8.2, na hodnotu 7 bodov.

ZÁVER

Charakteristickým znakom mnohých súdobých činností je časový tlak, pri ktorom sa realizuje rozhodovacia činnosť riadiacich a štábov všetkých stupňov. V tomto rozhodovacom procese je potrebné postihnúť veľké množstvo faktorov a informácií a výsledkom tohto procesu je spravidla rad možných variantov rozhodnutia, z ktorých musí príslušný riadiaci pracovník zvoliť ten, ktorý spĺňa danú úlohu a pri tom najlepšie vyhovuje podmienkam konkrétnej situácie.

V oblasti vojenskej dopravy, ale nielen v nej, sú jedným z prostriedkov získania vierohodných podkladov pre fundované rozhodnutie metódy lineárneho programovania, a v ich rámci metódy na riešenie distribučných úloh.

V tomto duchu sú distribučné úlohy využiteľné najmä na riešenie problémov organizácie a riadenia logistickej podpory a logistického zabezpečenia. V súlade s tým sú v skriptách rozobraté vybrané algoritmy na riešenie distribučných úloh so zameraním na možnosť aplikácie algoritmov na výpočtovú techniku a na zvládnutie niektorých princípov potrebných ako základ pre ďalšie štúdium.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1.] Beck,J. - Lagasová,M. - Zelinka,J.: Lineární modely v ekonomii. Praha, SNTL/ALFA 1982.

[2.] Knezovič,M. - Jindra,V. - Kraclík,J. - Řeřucha,V.: Operační analýza ve vojenství. Brno, VAAZ 1988.

[3.] Korda,B. a kol.: Matematické metody v ekonomii. Praha, SNTL 1967.

[4.] Partyk,J.: Řízení, provoz a ekonomika silniční dopravy. Bratislava, ALFA 1977.

[5.] Slezák,E. - Kocúrová,M.: Operačná analýza. Bratislava, SVŠT 1974

Názov	:	Základné metódy operačnej analýzy vo vojenskej doprave (dopravná a priraďovacia úloha)
Autor	:	Ing.Vladislav Kašpar,CSc.
Vydavateľ	:	VF VŠDS Žilina
Vydanie	:	prvé
Rok vydania	:	1995
Tlač	:	VF VŠDS Žilina