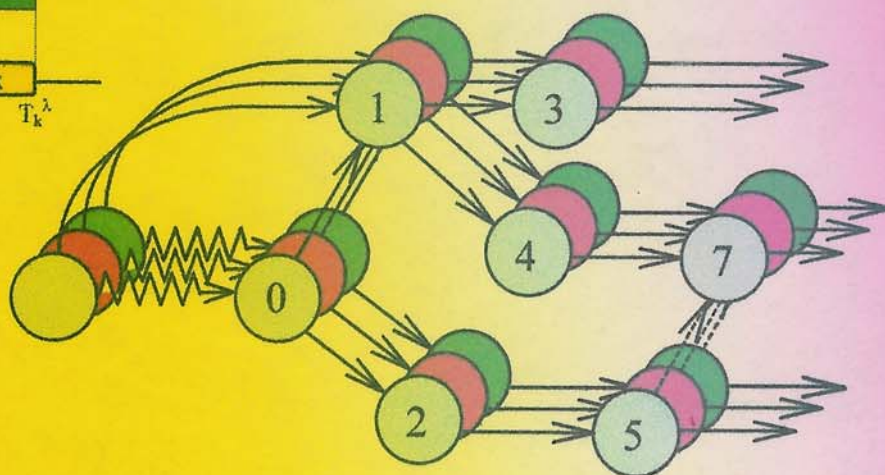
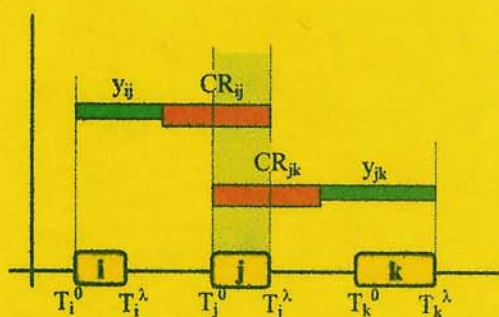




Vladislav Kašpar

VYBRANÉ METÓDY OPERAČNEJ ANALÝZY VO VOJENSKEJ DOPRAVE A VOJENSKOM STAVITELSTVE

(metódy sieťovej analýzy - CPM, PERT)



Učebnica je určená pre študentov vysokoškolského inžinierskeho štúdia
Fakulty špeciálneho inžinierstva Žilinskej univerzity a pre poslucháčov
účelových kurzov.

Recenzenti: prof. Ing. Ján Mikolaj, DrSc.
 prof. Ing. Norbert Szúttor, DrSc.
 prof. Ing. Jaromír Máca, CSc.
 doc. RNDr. Jaroslav Janáček, CSc.

© V. Kašpar, 1998

ISBN 80-88829-27-5

OBSAH

ÚVODOM	5
1. METÓDY SIEŤOVEJ ANALÝZY	7
1.1 Základné pojmy sieťovej analýzy	8
1.2 Charakteristika a význam metód sieťovej analýzy.....	10
1.3 Tvorba projektu	14
2. HRANOVO ORIENTOVANÝ, OHODNOTENÝ SIEŤOVÝ GRAF	15
2.1 Základné pravidlá zostavovania sieťových diagramov	17
2.2 Spôsob a postup zostavovania sieťového diagramu.....	29
2.3 Číslovanie vrcholov sieťového diagramu.....	31
3. ČASOVÁ ANALÝZA NADVÄZNÉHO PROCESU (METÓDA CPM, PERT)....	49
3.1 Formulácia modelu (úlohy)	49
3.2 Ohodnotenie činností.....	50
3.2.1 Ohodnotenie činností – CPM.....	50
3.2.2 Ohodnotenie činností – PERT.....	51
3.3 Výpočet termínových ukazovateľov - metóda CPM.....	56
3.3.1 Časové rezervy	60
3.3.2 Výpočet v sieti	65
3.3.3 Výpočet v tabuľke	67
3.4 Výpočet sieťového grafu typu PERT	77
3.4.1 Výpočet termínových ukazovateľov.....	77
3.4.2 Pravdepodobnostné výpočty.....	82
4. VÝPOČET SIEŤOVÉHO GRAFU TYPU PERT POUŽITÍM METÓDY MONTE CARLO	89
4.1 Výhody použitia metódy Monte Carlo	89
4.2 Mechanizmus výpočtu metódou Monte Carlo	90
4.3 Porovnanie metódy PERT a Monte Carlo	98
Príloha A Výsledky riešenia príkladov	101
Príloha B Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$	109
Literatúra	115

ÚVODOM

Jedným zo základných atribútov rozvoja spoločnosti je zákonitý rast nárokov na kvalitu riadiacej a organizátorskej práce od najvyšších až po najnižšie stupne riadenia. Táto požiadavka nie je imanentná každej oblasti spoločnosti a v plnej miere sa dotýka aj riadenia procesov v mimoriadnych situáciách.

Na vypracovanie, alebo posúdenie už existujúcich technologických postupov riešenia nadväzných procesov, aplikovaných na špecifické situácie vyžadujúce riešenie a riadenie najmä z hľadiska času, kedy ostatné ukazovatele sú druhoradé, je výhodné použiť metódy sieťovej analýzy. Z hľadiska spomínaných špecifik riešenia mimoriadnych situácií ide o metódy, ktoré sa zaoberajú časovou analýzou nadväzných procesov. Takými metódami sú metóda CPM a metóda PERT, ktorých problematika je obsahom prezentovanej publikácie.

Metódy časovej analýzy sietí umožňujú modelovať zložité procesy, optimalizovať ich a prispôbovať ich vonkajším aj vnútorným podmienkam a dosahovať stanovené ciele pri racionálnom vynaložení času.

Cieľom publikácie je poskytnúť potrebné vedomosti o sieťovej analýze, resp. o metódach CPM a PERT na účelnú aplikáciu v procese plánovania a operatívneho riadenia zložitých nadväzných procesov.

Uvedené metódy sieťovej analýzy, popri iných oblastiach operačného výskumu, rozširujú vedomosti ich užívateľov, čím zvyšujú kvality technických i riadiacich pracovníkov.

1. METÓDY SIEŤOVEJ ANALÝZY

Metódy sieťovej analýzy prenikli do riadenia hospodárskej činnosti aj do riadenia činnosti vojsk. Spoločný základ týchto metód tvorí teória grafov a teória pravdepodobnosti. Používajú sa na plánovanie, operatívne riadenie, koordináciu a kontrolu zložitých nadväzných procesov.

Základ jednotlivých metód sieťovej analýzy tvorí metóda kritickej cesty - CPM (Critical Path Method) a metóda vyhodnocovania a kontroly projektu - PERT (Program Evaluation and Review Technique). Ostatné metódy sieťovej analýzy sú (v podstate) modifikáciou oboch základných postupov.

Metódy sieťovej analýzy využívajú zvláštny spôsob grafického zobrazovania, aby sa znázornila časová postupnosť a technologická závislosť čiastkových operácií zložitých projektov alebo iných podobných úloh podobného charakteru. Využívajú softwarové vybavenie na to, aby vyhľadali minimálny čas potrebný na realizáciu celého projektu a určili činnosti, na hladkom priebehu ktorých závisí dodržanie termínu stanoveného pre celý projekt (činnosti ležiace na kritickej ceste). Sieťová analýza je v tomto zmysle nástrojom na rozbor štruktúry zložitých činností, zložitých dynamických nadväzných systémov.

Pri analýze kritickej cesty transformujeme zostrojený graf siete na matematický model, ktorý je možné riešiť určitým algoritmom (ručne alebo pomocou výpočtovej techniky). V súlade s vyššie uvedenými metódami môžu byť zostavené modely deterministického typu (CPM) a stochastického typu (PERT).

Použitie analýzy kritickej cesty v riadiacich procesoch umožňuje riadiacim pracovníkom zamerať pozornosť na hlavné činnosti, núti ich logicky zostavovať operácie v projektoch, uľahčuje im riadiť deľbu práce, umožňuje zostavovať harmonogramy prác pre jednotlivé pracoviská v nadväznosti na celkový projekt, poprípade stanoviť metodiky činností pracovísk a jednotlivcov. Predpokladom úspešného

uplatnenia analýzy kritickej cesty je sústava s dostatočnou úrovňou organizácie, disciplíny a zásobou zdrojov, ktorá je schopná realizovať plánované termíny operácií.

Analýza kritickej cesty dáva riadiacemu pracovníkovi obraz o činnostiach, ktoré do značnej miery časovo limitujú splnenie úlohy ako celku, a je jednou z metód vyhľadania hlavného článku. Pri skracovaní činností, ktoré ležia na kritickej ceste, možno optimalizovať proces ako celok vylučovaním časových rezerv a prestojov, dokonalým využitím pracovných síl, strojov a zariadení. V ozbrojených silách dáva možnosť kvalitnejšie rozložiť a využívať sily a prostriedky v mieri i počas brannej pohotovosti štátu.

1.1 Základné pojmy sieťovej analýzy

V modeloch sieťovej analýzy sa stretávame so špeciálnymi termínmi. Je účelné sa s nimi stručne zoznámiť.

Sieť je konečný, orientovaný, súvislý a acyklický graf.

Konečnosť siete je daná ohraničeným počtom uzlov a hrán (činností). Takouto sieťou môžeme znázorniť iba konečné procesy, ktoré sú vyjadrené jednotlivými na seba nadväzujúcimi činnosťami.

Orientácia vyjadruje, že každá činnosť má svoj počiatkový uzol „i“, koncový uzol „j“, ktoré nemožno zameniť. Rovnako celý graf nadväzného procesu má jediný počiatkový a jediný koncový uzol.

Ohodnotenie siete znamená, že každá činnosť - i jednotlivá samostatne označená časť - má kvantitatívne ukazovatele s jednoznačne vymedzeným fyzikálnym rozmerom. V tomto smere sú všetky metódy analýzy sietí metódami kvantitatívnej analýzy.

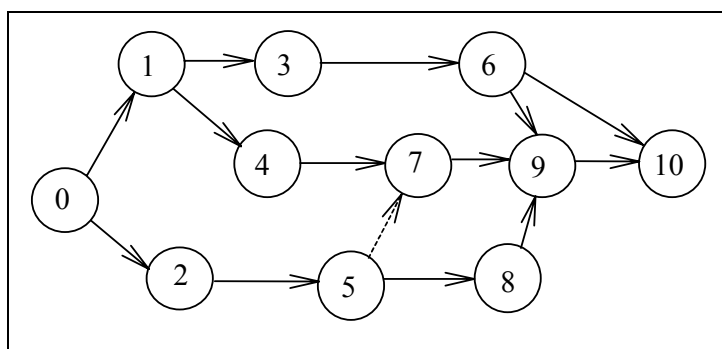
Súvislosť znamená, že všetky možné cesty v danom projekte spájajú vždy počiatočný a koncový uzol celého projektu. To znamená, že v sieti sa jednotlivé operácie rozdeľujú a spájajú. Platí však zásada, že akonáhle niektorá hrana vo vnútri siete končí, okamžite vzniká hrana nová a nevzniká žiadna izolovaná hrana alebo uzol.

Acyklikosť je daná tým, že v celej sieti možno jednoznačne číslovať uzly podľa vzťahu $i < j$ (číslo počiatočného uzla operácie je menšie ako číslo koncového uzla operácie). Kontrola acyklickosti v sieti je jednou z najdôležitejších fáz zostavenia modelu nadväzného procesu a vykonáva sa pomocou usporiadavacích algoritmov.

Projekt je akákoľvek rozsiahla akcia, skladajúca sa z veľkého počtu čiastkových operácií, ktoré je nevyhnutné koordinovať, aby sa dosiahol spoločný cieľ.

Uzlové body (vrcholy grafu, uzly) označujú v grafe počiatok a ukončenie jednotlivých činností. Spravidla ich znázorňujeme kruhmi a čísloujeme. Číslo uzla na počiatku činnosti je vždy nižšie ako číslo uzla na konci činnosti. Zvláštnymi uzlovými bodmi sú počiatočný a koncový uzlový bod sieťového grafu.

Sieťový diagram (graf) je grafické znázornenie projektu, v ktorom sú jednotlivé činnosti (operácie, aktivity, práce) zobrazené orientovanými hranami grafu, pričom dĺžka hrany (čiary) nemá žiadny vzťah k dobe trvania činnosti. Smer priebehu činnosti je pri hranách znázornený šípkou, preto hovoríme o hranovo orientovanom grafe. Príklad jednoduchého sieťového grafu je uvedený na Obr. 1.1.



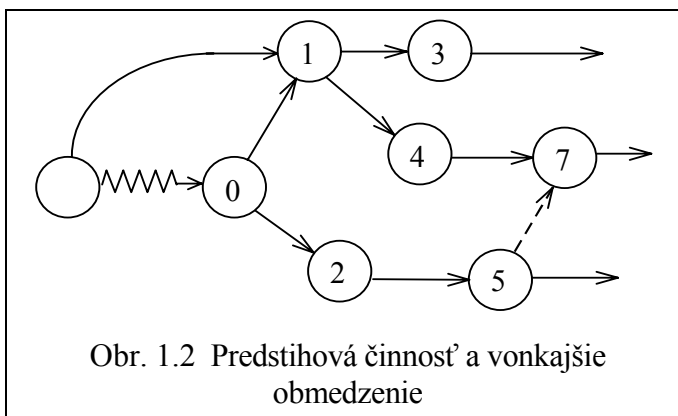
Obr. 1.1 Jednoduchý sieťový graf.

Reálne činnosti sú znázorňované v grafe plnou čiarou. Označujú sa dvojicou čísiel (i,j) , pričom prvé číslo označuje uzol, z ktorého činnosť vychádza; druhé označuje uzol, v ktorom sa činnosť končí. Napríklad v grafe na Obr. 1.1 je činnosť

(3,6) činnosťou začínajúcou sa v uzle 3 a končiacou sa v uzle 6. V grafe je orientácia priebehu činnosti označovaná šípkou. Každá reálna činnosť je spojená so spotrebou času a s vynaložením nákladov.

Fiktívne činnosti sa v grafe zakresľujú prerušovanou čiarou a znázorňujú buď vzájomnú závislosť niektorých činností, alebo ich súbežnosť. Na Obr. 1.1 je fiktívnou činnosťou činnosť (5,7) a označuje, že činnosť vychádzajúca z uzla 7 sa nemôže započat' skôr, kým bude ukončená činnosť (2,5). Fiktívne činnosti v skutočnosti neexistujú a neznamenia žiadny vznik nákladov, ani spotrebu času.

Predstihové činnosti a vonkajšie obmedzenia. Okrem hore uvedených spôsobov, používaných pri znázorňovaní činností v sieťovom grafe, sa (niekedy) pre ostatné výnimočné (obvykle predstihové činnosti a vonkajšie obmedzenia) používa špeciálne označovanie vlnovkou (alebo lomenou čiarou) a oblúkom, pričom vlnovka označuje spravidla predstihovú činnosť a oblúk vonkajšie obmedzenie. Podrobnejšie o týchto činnostiach vid' ďalší text. Príklad zakreslenia predstihovej činnosti a vonkajšieho obmedzenia je znázornený na Obr. 1.2.



1.2 Charakteristika a význam metód sieťovej analýzy

Metódy sieťovej analýzy sa rýchlo rozšírili. Bol vypracovaný celý rad ich modifikácií a úprav. Ako už bolo uvedené, základom sú metódy CPM a PERT.

Súčasný vývoj smeruje ku kombinácii obidvoch základných postupov, pričom sa viacej presadzujú hlavné rysy metódy kritickej cesty (CPM).

Metódu CPM vyvinula v roku 1957 spoločnosť E. I. Du Pont de Nemours & Co. v spolupráci so spoločnosťou Sperry-Rand Corporation pri hľadaní účinných nástrojov riadenia zložitých procesov vo výstavbe výrobných zariadení, v oblasti údržby a rekonštrukcie výrobných zariadení a vo vývoji nových chemických výrobkov. Autormi tejto metódy sú James E. Kelley a Morgan R. Walker.

Pri metóde CPM sa zadáva:

1. súbor operácií, ktoré je potrebné vykonať, a ich časová postupnosť;
2. pre každú operáciu jeden časový údaj, charakterizujúci jej trvanie;
3. počiatok celej akcie alebo termín jej ukončenia.

Vypočítava sa:

1. minimálny čas nutný na ukončenie celej akcie (resp. termín ukončenia celej akcie);
2. termíny najneskoršieho začatia a ukončenia čiastkových operácií, ktorých dodržanie je nutné pre dodržanie termínu ukončenia celej akcie;
3. postupnosť činností ležiacich na kritickej ceste, pri ktorých akékoľvek oneskorenie znamená oneskorenie ukončenia celého projektu (postupnosť týchto činností nemá časové rezervy).

Metódu PERT vyvinul tím operačnej analýzy Úradu vojnového námorníctva USA v roku 1958 ako novú riadiacu metódu v súvislosti s vývojom raketových systémov; špeciálne šlo vtedy o vývoj systému rakety Polaris. Veľký efekt novej metódy spôsobil, že sa rýchlo rozšírila aj na ostatné vojenské projekty a štátny departement pre obranu dokonca rozhodol o určitej normalizácii metódy, ktorá umožnila jej široké použitie v tejto oblasti. V priebehu krátkej doby sa metóda ujala aj v ostatných nevojenských oblastiach riadenia zložitých procesov. Za autorov metódy sú považovaní D. G. Malcolm, J. H. Roseboom, C. E. Clark a W. Fazar.

Metóda PERT rozpracúva metódu kritickej cesty a zdokonaľuje ju v týchto smeroch:

1. Na rozdiel od metódy CPM sú pri metóde PERT doby trvania činností považované za náhodné veličiny s určitou hustotou pravdepodobnosti. Metóda PERT teda obsahuje rys, ktorý metóde CPM chýba - umožňuje v plánovaní počítať aj s určitými prvkami náhodnosti.
2. Pre každú operáciu (činnosť) sa určujú tri rôzne doby jej trvania, a to:
 - ⇒ najpravdepodobnejšia doba trvania činnosti;
 - ⇒ optimistický odhad doby trvania činnosti;
 - ⇒ pesimistický odhad doby trvania činnosti.
3. Na základe svojho stochastického charakteru je doplnená možnosťou pravdepodobnostných výpočtov, týkajúcich sa realizácie celého projektu a vybraných míľnikov (dôležitých fáz) projektu.

Metóda PERT sa používa najmä pri akciách, pri ktorých je možné určiť dobu trvania jednotlivých operácií iba s väčšou či menšou pravdepodobnosťou, nie však s istotou. Z tohto dôvodu sa metóda osvedčuje najmä pri plánovaní výskumných a vývojových prác a v takých projektoch, ktorých činnosti sa uskutočňujú pod vplyvom premenlivých činiteľov (napr. poveternostných podmienok, v nie presne známom a meniacom sa teréne a pod.).

Hlavnými oblasťami použitia metód sieťovej analýzy sú predovšetkým:

- ⇒ plánovanie rozsiahlych investičných akcií a zložitých úloh;
- ⇒ plánovanie vývojových a výskumných prác;
- ⇒ plánovanie generálnych oprav a rekonštrukcií;
- ⇒ plánovanie rozsiahlych organizačných prác;
- ⇒ výrobné programovanie vo výrobných, kde je potrebné zabezpečiť časovú nadväznosť komplikovaných montážnych a výrobných prác, a iné.

Prednosti a výhody metód sieťovej analýzy

Grafické znázornenie postupu prác v projekte pomocou sieťového diagramu a využitie metód analýzy sietí má rad výhod a predností:

- ⇒ umožňuje priebeh akcie nielen graficky znázorniť, ale aj prepočítať;
- ⇒ umožňuje určiť činnosti ležiace na kritickej ceste;
- ⇒ sieťový diagram poskytuje, lepšie ako iné grafické znázornenia, prehľad o rozsahu projektu, o nadväznosti čiastkových operácií, o ich podmienenosti a o tom, ktoré z nich môžu byť vykonávané súčasne;
- ⇒ lepšie umožňuje posúdiť komplexnosť všetkých prác nutných na dohotovenie akcie; tým zabraňuje vypusteniu niektorých z nich, ktoré sú zdanlivo menej dôležité, ale ich splnenie je pre dokončenie celej akcie nevyhnutné;
- ⇒ pri prípadných úpravách projektu (napr. zmeny trvania či obsahu operácií) umožňuje sieťová analýza lepšie posúdiť dôsledky týchto zmien;
- ⇒ umožňuje vniesť poriadok a súlad do plánovania a riadenia procesov;
- ⇒ umožňuje odhaliť také oblasti, v ktorých sú zdroje a prostriedky v nadbytočnom množstve.

Metódy sieťovej analýzy prinášajú ešte celý rad ďalších výhod podľa konkrétnych podmienok aplikácie.

Význam metód sieťovej analýzy pre prax

Metódy sieťovej analýzy sú teoreticky dobre prepracované, pomerne jednoduché a zrozumiteľné. Náklady na konštrukciu sieťového diagramu a na jeho prepočet (aj pri prípadných zmenách v dobe realizácie projektu) sú - pri porovnaní s nákladmi na projekt - takmer zanedbateľné. Výhody, ktoré sieťová analýza prináša, viedli k jej rýchlemu rozšíreniu.

V praxi sa objavuje zreteľný rozdiel medzi dvomi oblasťami použitia týchto metód, a to:

- ⇒ medzi použitím na vypracovanie projektu rozsiahlej akcie a
- ⇒ medzi použitím na riadenie prác pri realizácii projektu (pri kontrole plnenia plánovaných úloh projektu).

Dobré výsledky sa dosahujú predovšetkým v prvej z uvedených oblastí. V nej je doposiaľ ťažisko používania metód sieťovej analýzy. Hlavný ekonomický prínos metód možno očakávať až pri ich použití na riadenie prác pri realizácii projektu.

1.3 Tvorba projektu

Príprava projektu, resp. jeho tvorba, zahŕňa tieto hlavné etapy:

- ⇒ vymedzenie hlavných činností, ktoré musia byť v projekte obsiahnuté, a určenie osôb zodpovedných za riadny priebeh každej činnosti;
- ⇒ príprava zoznamu všetkých činností nutných na ukončenie projektu;
- ⇒ vypracovanie detailného sieťového diagramu;
- ⇒ očíslovanie uzlov sieťového diagramu a kontrola správnosti očíslovania;
- ⇒ revízia a schválenie sieťového diagramu;
- ⇒ určenie termínov pre ukončenie najdôležitejších čiastkových etáp projektu;
- ⇒ určenie doby trvania jednotlivých činností;
- ⇒ zapísanie údajov do príslušných formulárov, ich kontrola a príprava na strojové spracovanie;
- ⇒ spracovanie údajov (výpočet požadovaných ukazovateľov) a analýza výsledkov;
- ⇒ vykonanie prípadných opráv (ladenie projektu) s následným novým prepočtom;
- ⇒ príprava vhodných formulárov a vypracovanie návrhu, ako organizačne zabezpečiť využívanie výsledkov riešenia v riadení a kontrole prác pri realizácii projektu.

2. HRANOVO ORIENTOVANÝ, OHODNOTENÝ SIEŤOVÝ GRAF

Jednou zo základných fáz použitia metód analýzy sietí je grafické znázornenie nadväzného procesu. Na analýzu je nutné poznať jeho logické a technologické závislosti, presne definovať všetky čiastkové činnosti potrebné na dosiahnutie určeného cieľa a vymedziť zodpovednosť za vykonanie jednotlivých častí procesu.

Celý komplex prác a činností, potrebných na dosiahnutie určeného cieľa, bude v ďalšom označovaný ako **projekt P**. Projekt P (bez ohľadu na konkrétnu aplikáciu) sa skladá z dvoch základných súborov elementov, a to:

- ⇒ z množiny činností;
- ⇒ z množiny časových uzlov.

Grafickým modelom takéhoto projektu je potom **hranovo orientovaný sieťový graf**. V tomto zmysle môžeme (z hľadiska grafického znázornenia) stotožniť pojmy **sieťový graf**, **projekt**, resp. **sieťový diagram**.

Orientovaný graf je daný ako konečná množina **uzlov U** (resp. vrcholov **V**) a **hrán** (činností) **H**. Matematicky sa graf spravidla označuje

$$G = (U, H) \quad \text{alebo} \quad G = (V, H) \quad (2.1)$$

Týmto zápisom vyjadrujeme, že graf je definovaný usporiadanou dvojicou (U,H) resp. (V,H), kde

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) = (u_i) & \text{pre } i = 1, 2, \dots, n, \dots & \\ \text{resp. } V &= (v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) = (v_i) & & \end{aligned} \quad (2.2)$$

je množina uzlov a

$$\begin{aligned} H &= (u_i, u_j) = (h_{ij}) & \text{pre } i, j = 1, 2, \dots, n, \dots & \\ \text{resp. } H &= (v_i, v_j) = (h_{ij}) & & \end{aligned} \quad (2.3)$$

je množina jeho hrán, t.j. množina dvojprvkových množín (u_i, u_j) resp. (v_i, v_j) .

Pre uzly a hrany platí:

$$u_i \in U \quad \text{resp.} \quad v_i \in V \quad (2.4)$$

$$(u_i, u_j) \in H \quad \text{resp.} \quad (v_i, v_j) \in H \quad \text{alebo} \quad h_{ij} \in H \quad (2.5)$$

kde h_{ij} je len iný (stručnejší) zápis pre dvojicu uzlov, a túto orientovanú dvojicu nazývame orientovanou hranou h_{ij} .

Pozn.: Pojem vrchol a uzol a tým aj označovanie písmenami „U“ a „V“ sa v rôznych literatúrach bežne používa. V súvislosti s tým aj v nasledujúcom texte ich treba chápať ako rovnocenné, označujúce jednu a tú istú skutočnosť.

Sieť projektu P (hranovo orientovaný sieťový graf) je zložená z činností (hrán), ktoré znázorňujeme pomocou orientovaných úsečiek (orientovaných hrán grafu); každá hrana je ohraničená vždy dvomi uzlovými bodmi (uzlami, vrcholmi) grafu, ktoré sú spravidla zobrazované kruhmi (používajú sa aj obdĺžniky, elipsy a pod.). Každá spojnica medzi dvoma uzlami odpovedá určitej **činnosti**, a to **reálnej**, znázornenej plnou čiarou, alebo **fiktívnej**, spravidla znázornenej prerušovanou úsečkou.

Reálna činnosť vykazuje vždy spotrebu času a vynaloženie určitých nákladov. Pri popise postupu prác však len s reálnymi činnosťami nevystačíme. Na úplný popis postupu prác, respektíve nadväznosti jednotlivých činností, slúžia tzv. **fiktívne činnosti**. Tieto neprebiehajú v čase (ani nespotrebovávajú žiadne náklady), slúžia iba na zachytenie väzieb a závislostí medzi niektorými reálnymi činnosťami.

Ak teda máme zostrojiť sieť projektu (graf), je nutné jeho rozlíšenie na činnosti a uzly.

Uzly grafu, ako druhý základný prvok grafického znázornenia projektu, predstavujú časové okamihy, v ktorých dochádza k ukončeniu, resp. začiatku činností. V tejto súvislosti bývajú uzly nazývané tiež **kontrolnými bodmi** projektu a je možné na nich pokladať za ohraničenie jednotlivých činností, ale aj niektorých dôležitých etáp projektu. V tomto druhom poňatí sa vybrané uzly nazývajú tiež **míľnikmi**.

Pomocou jednoduchých prostriedkov, tj. orientovaných hrán a uzlov, môžeme popísať a graficky znázorniť každý nadväzný proces v ktorejkoľvek oblasti ľudskej činnosti.

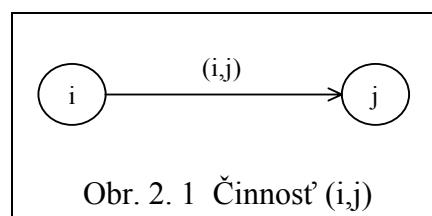
2.1 Základné pravidlá zostavovania sieťových diagramov

Sieťový graf projektu musí spĺňať niektoré predpoklady. Hovoríme o tzv. **sieťovom diagrame**, čím rozumieme **konečný, súvislý, orientovaný, acyklický a ohodnotený graf**, s jediným počiatočným a jediným koncovým uzlom.

① Každá činnosť má vždy jeden uzol počiatočný a

jeden uzol koncový.

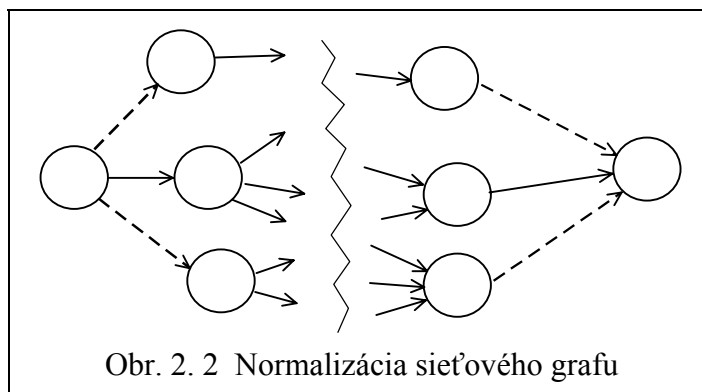
Pomocou nich je každá činnosť jednoznačne určená. Počiatočný uzol činnosti označujeme indexom „i“, koncový uzol indexom „j“, takže každá činnosť je určená usporiadanou dvojicou čísiel **(i,j)**. Samotná činnosť v grafe sa zakresľuje orientovanou úsečkou, pričom jej dĺžka nie je v žiadnom vzťahu k dobe trvania činnosti a riadi sa iba potrebami grafického znázornenia. Šípkou je znázornený smer priebehu činnosti (viď Obr. 2. 1).



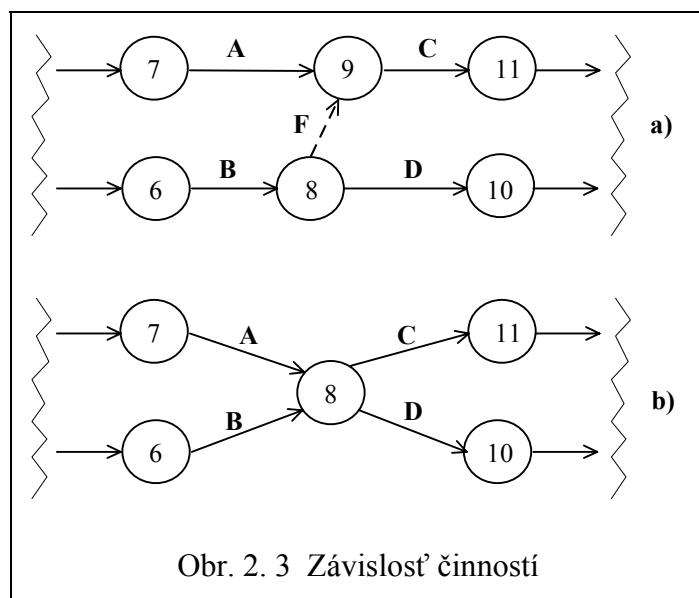
② Sieťový diagram má vždy jeden uzol počiatočný a jeden uzol koncový.

Pokiaľ by daný projekt mal niekoľko východiskových, prípadne koncových uzlových bodov, **normalizujeme** diagram tak, že vyberieme jediný počiatočný uzol, ktorý spojíme s ostatnými východiskovými uzlami fiktívnymi činnosťami.

Rovnako postupujeme aj v prípade niekoľkých koncových uzlov (viď Obr. 2. 2).



- ③ **Žiadna činnosť sa nemôže začať skôr, ako sú dokončené všetky činnosti, ktoré jej bezprostredne predchádzajú.** Za bezprostredne predchádzajúce činnosti



považujeme nielen činnosti, ktorých hrany do daného uzlového bodu vyúsťujú, ale aj tie, ktoré sú s týmto bodom spojené fiktívnou činnosťou.

Napr. činnosť „C“, vid' Obr. 2. 3 a), sa môže začať nielen iba až po ukončení činnosti „A“, ale súčasne aj až po ukončení činnosti „B“, čo je znázornené pomocou

fiktívnej činnosti „F“.

- ④ **Sieťový diagram musí správne popisovať závislosť jednotlivých činností.**

Závislé činnosti oddeľujeme od činností nezávislých pomocou fiktívnych činností. Závislosť činností sa vyskytuje všade tam, kde dve alebo viac činností končí alebo vychádza z jedného spoločného uzlového bodu. Ak iba určitá časť následných činností závisí od ukončenia predchádzajúcich, potom tieto závislé činnosti oddelíme od ostatných, nezávislých, pomocou fiktívnej činnosti. Takáto jednoduchá situácia je znázornená na Obr. 2. 3 a). Činnosť „D“ závisí od ukončenia činnosti „B“, nezávisí však od činnosti „A“. Naopak, činnosť „C“ závisí od činnosti „A“, ale aj od činnosti „B“, čo je vyjadrené fiktívnou činnosťou „F“.

Nesprávne znázornenie tohto prípadu je uvedené na Obr. 2. 3 b). Bolo by správne iba v tom prípade, ak by obe činnosti „C“ a „D“ boli závislé od činností „A“ a „B“, ale to už je iná situácia.

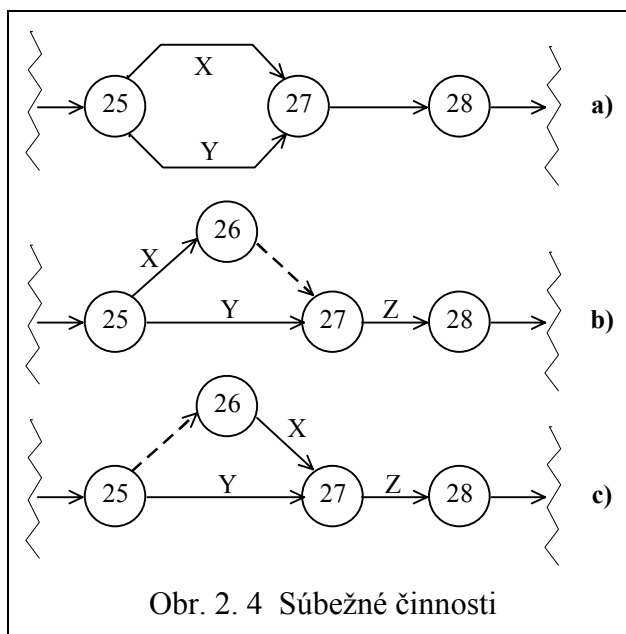
Pre správne znázornenie závislostí medzi činnosťami je dôležitá **orientácia úsečiek**. Ak by sme napr. fiktívnu činnosť „F“ Obr. 2. 3 a) úsečka (8,9), orientovali obrátene (museli by sme zmeniť aj číslovanie vrcholov), vznikla by nová situácia, pri ktorej činnosť „D“ by závisela od ukončenia činnosti „B“, ale aj od ukončenia činnosti „A“, a naopak činnosť „C“ by závisela len od ukončenia činnosti „A“.

Pri závislých činnostiach tiež hovoríme, že sú medzi nimi **elementárne väzby** a zapisujeme ich pomocou šípky. Tak napr. na Obr. 2. 3 b) sú medzi činnosťami A, B, C, D celkom štyri elementárne väzby (závislosti) a to: $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$, $B \rightarrow D$.

⑤ Súbežné činnosti oddeľujeme v sieťovom diagrame činnosťami fiktívnymi

V praxi sa môžu vyskytnúť aj také situácie, kedy úspešné splnenie určitej čiastkovej operácie je spojené so značnou neistotou, čo by mohlo nepriaznivo ovplyvniť ďalšie nadväzujúce operácie. Zaraďuje sa preto ďalšia podporná činnosť, resp. činnosti, ktorých cieľom je znížiť stupeň neistoty dosiahnutia čiastkového cieľa. Znázornenie súbežných činností nesmie byť v rozpore s prvým pravidlom o jednoznačnom určení každej činnosti prostredníctvom ich počiatočného a koncového uzla.

Nesprávnym grafickým znázornením dvoch súbežných činností by bol napr. spôsob uvedený na Obr. 2. 4 a). Takéto znázornenie by bolo chybné, pretože obe súbežné činnosti by mali rovnaké číselné označenie (počiatočný a koncový uzol). Z grafického znázornenia musí jasne vyplývať, že činnosti „X“ i „Y“ prebiehajú síce navzájom nezávisle, ale ich ukončenie je predpokladom



pre začiatok nasledujúcej činnosti „Z“. Toto dosiahneme zavedením fiktívnej činnosti, pričom nezáleží na tom, či predchádza alebo nadväzuje na reálnu súbežnú činnosť.

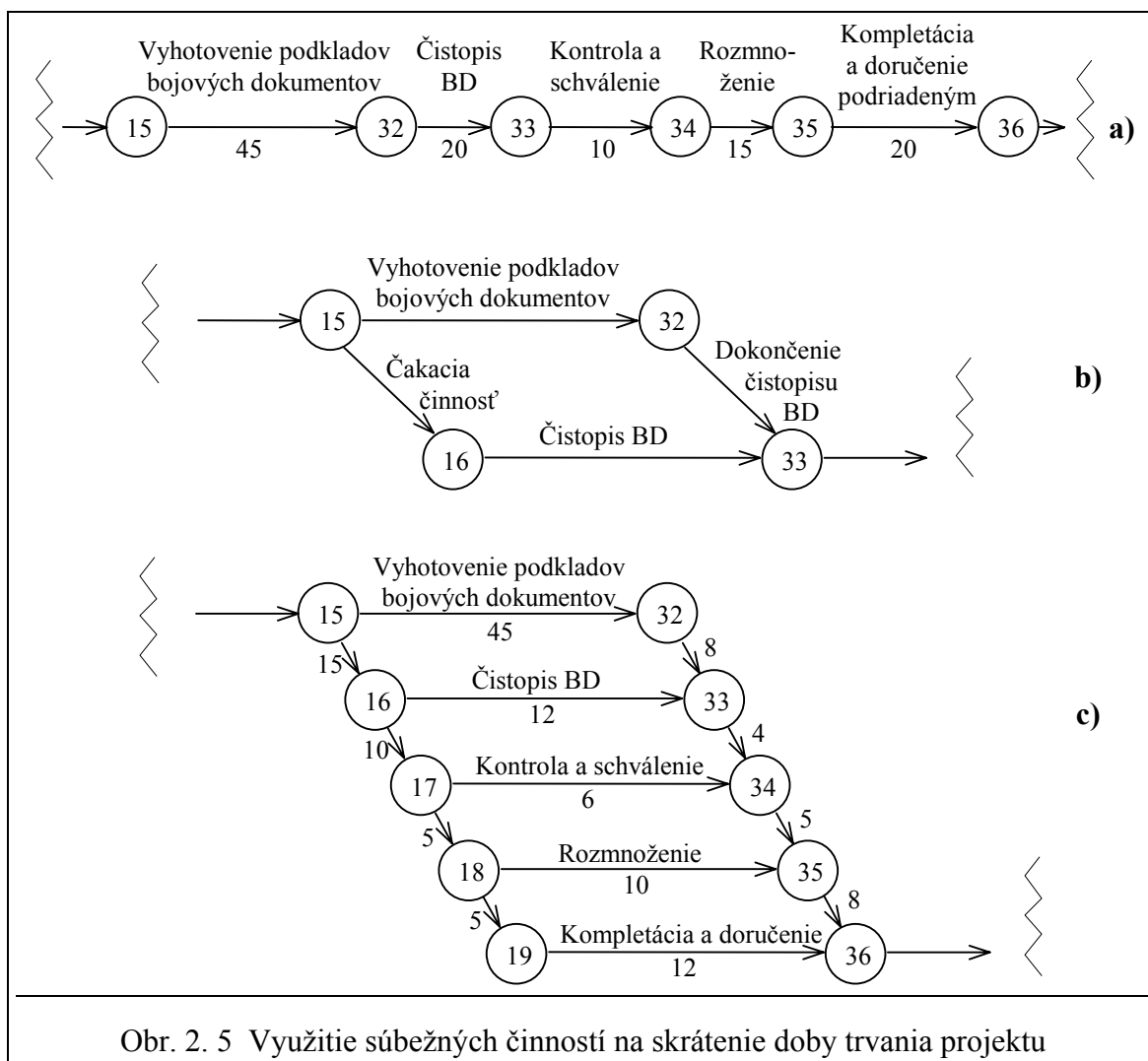
Prípad znázornený na Obr. 2. 4 a) je možné upraviť jedným zo spôsobov uvedených na Obr. 2. 4 b)c). Pri n súbežne prebiehajúcich reálnych činnostiach musí $(n-1)$ z nich byť doplnených fiktívnymi činnosťami, aby vznikol zreteľný obraz o časovej a technologickej, prípadne organizačnej podmienenosti jednotlivých prác zaradených v rámci celého projektu.

Dôležitou príčinou zavádzania súbežných činností je skracovanie doby trvania projektu, prípadne niektorej jeho časti. Súbežné činnosti zaradujeme s úspechom vtedy, ak nasledujúca činnosť môže byť započatá ešte pred úplným ukončením bezprostredne predchádzajúcej činnosti.

Na Obr. 2. 5 a) je v hrubých rysoch znázornený možný postup časti procesu pri plánovaní úlohy štábom. Ide o postupnosť piatich činností idúcich za sebou; pokiaľ budeme považovať číselné údaje uvedené pod jednotlivými úsečkami za doby trvania jednotlivých činností, potom je zrejmé, že uvedený postup nemôže byť ukončený skôr ako po uplynutí 110 časových jednotiek. Spracovanie bojových dokumentov sa dá podstatne skrátiť, ak budeme podklady odovzdávať po častiach a tým súbežne spracovávať podklady aj vyhotovenie čistopisu. Schematicky sú tieto dve súbežné činnosti znázornené na Obr. 2. 5 b).

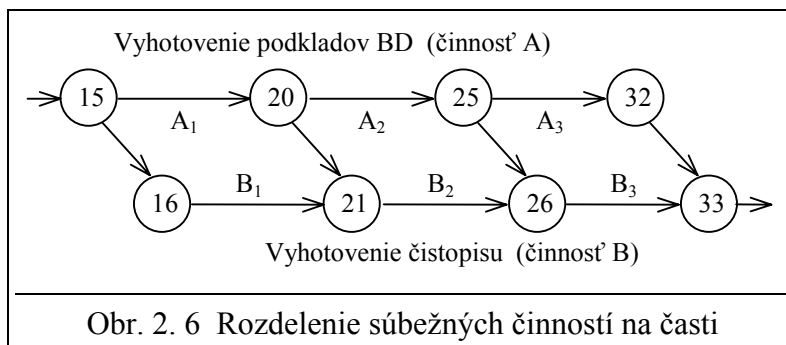
Činnosť (15,16) - Obr. 2. 5 b) - predstavuje čakanie na prvú časť podkladov pre vyhotovenie čistopisu; nejde teda o činnosť v pracovnom zmysle slova, ale iba o grafické znázornenie čakacej doby, o ktorú je posunutý začiatok spracovania čistopisu (tzv. čakacia činnosť). Činnosť (32,33) predstavuje prepísanie poslednej časti podkladov, tj. dokončenie čistopisu.

Podobným spôsobom môžeme znázorniť i ostatné operácie. V sieťovom diagrame vzniká tzv. „rebríček činností“, ako je znázornený na Obr. 2. 5 c).

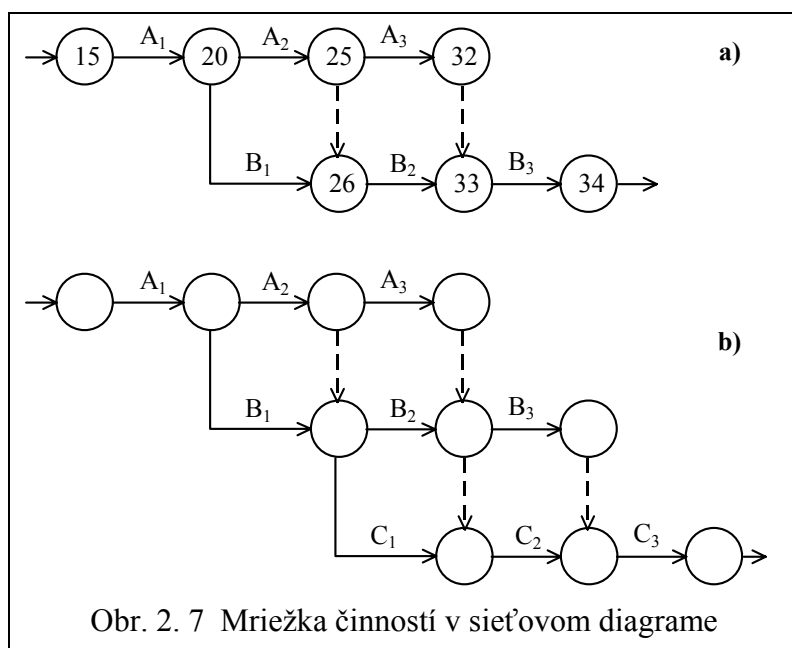


Z obrázku je zrejmé, že doba potrebná na vykonanie prezentovaného postupu bola skrátená zo 110 na 70 časových jednotiek.

Ďalšie spresnenie postupu práce môžeme dosiahnuť, ak danú úlohu rozdelíme ďalej na časti, v akých bude odovzdávaná na ďalšie spracovanie a v tomto členení zakreslíme v sieťovom diagrame rebríček činností, tak ako je



zachytený na Obr. 2. 6. Začiatky súbežných činností sú opäť posunuté o príslušné čakacie lehoty.



Odlišný pracovný postup (Obr. 2. 7 a) predpokladá posun začiatkov čiastkových činností B_1 , B_2 , B_3 o celú dobu príslušných činností A_1 , A_2 , A_3 (každá činnosť B_n je viazaná na úplné ukončenie činnosti A_n).

Na sieťovom diagrame potom vzniká takzvaná „**mriežka činností**“, ako je uvedené na Obr. 2. 7 b).

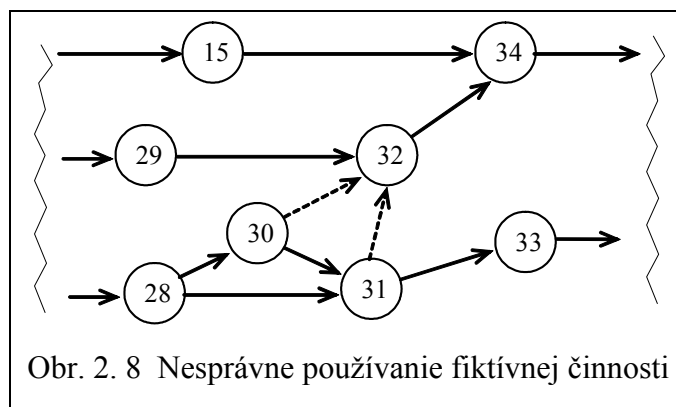
⑥ Z uvedeného je zrejmé, že **fiktívne činnosti používame**:

- ⇒ na oddelenie závislých a nezávislých činností;
- ⇒ na oddelenie činností súbežných;
- ⇒ na vytvorenie jediného počiatočného a jediného koncového uzlového bodu grafu (normalizáciu grafu).

Fiktívne činnosti teda používame, ako už bolo uvedené, **ako pomocný nástroj grafického znázornenia projektu. Tieto nie sú nikdy spojené so spotrebou času, ani s vynaložením nákladov**, pretože reálne neexistujú. Naproti tomu všetky ostatné -reálne- činnosti skutočne existujú a vykazujú vždy určitú dobu trvania (spotrebu času) a vyžadujú vynaloženie určitých nákladov.

Akokoľvek sú fiktívne činnosti užitočné, nesmieme ich používať nadmerne. Príklad prebytočnej fiktívnej činnosti je uvedený na Obr. 2. 8; ide o činnosť (30,32), pretože závislosť činnosti (32,34) od činnosti (28,30) je už daná fiktívnou činnosťou (31,32).

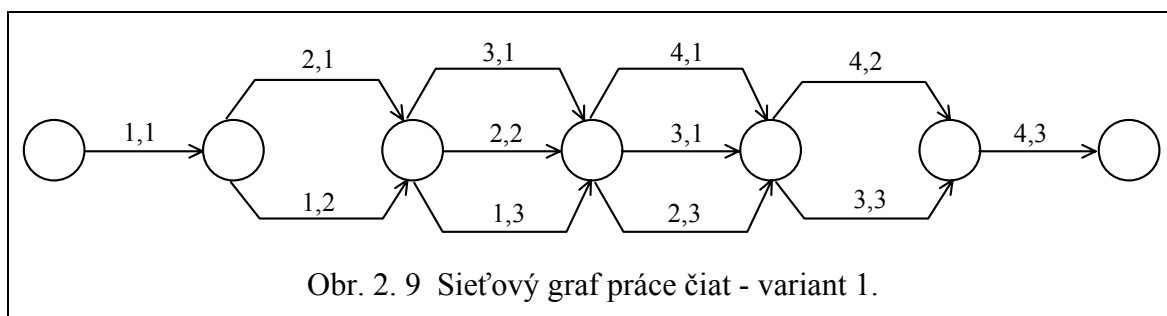
Nadmerným používaním fiktívnych činností znižujeme celkovú prehľadnosť sieťového diagramu. Užitočné je používať fiktívne činnosti na dokončovanie sieťového diagramu, najmä pri kontrole závislosti medzi čiastkovými činnosťami. Pri takejto revízii zistíme, že niektoré závislosti chýbajú, čo je možné odstrániť práve zavedením fiktívnej činnosti.



Obr. 2. 8 Nesprávne používanie fiktívnej činnosti

Podrobnejšie vysvetlenie používania fiktívnych činností pre správny popis priamych závislostí reálnych činností (elementárnych väzieb) si zaslúži nasledujúci príklad, často sa vyskytujúci v praxi (budeme ho demonštrovať na postupe prác na viacpodlažnom - v našom prípade štvorpodlažnom - dome). Predpokladajme, že pri výstavbe štvorpodlažného domu postupujú tri pracovné čaty zdola nahor, pričom na každom podlaží môže pracovať iba jedna čata a jednotlivé práce musia na seba nadväzovať v poradí danom označením pracovných čiat - 1,2,3.

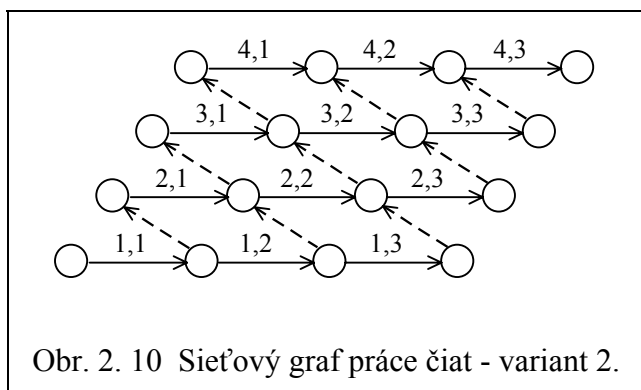
Podľa takto zadaných podmienok budeme uvažovať dva druhy väzieb a to pre čaty, ktoré budú predstavovať postup od prvého k štvrtému podlažiu a väzby zabezpečujúce postupnosť prác na jednotlivých podlažiach v poradí pracovných čiat (1,2,3). Situácia je znázornená na Obr. 2. 9, kde pre ľahšiu orientáciu sú jednotlivé činnosti označené dvojicou čísel, z ktorých prvé predstavuje podlažie a druhé pracovnú čatu (napr. 2,3 je činnosť vykonávaná 3. čatou na 2. podlaží).



Obr. 2. 9 Sieťový graf práce čiat - variant 1.

Ak pomineme zásady zakresľovania sieťového diagramu uvedené v časti ⑤ (kapitola 2.1) a zameriame sa iba na závislosť činností, je na prvý pohľad všetko v poriadku; postupnosť jednotlivých činností na seba nadväzuje tak, ako bolo uvedené. V skutočnosti sú elementárne väzby tohto grafu (Obr. 2. 9) "predimenzované", pretože uvažujú také väzby, ktoré nie sú ani žiadané, ani žiadúce. Napr. elementárna väzba $1,2 \rightarrow 3,1$ znamená, že začiatok prác 1. čaty na 3. podlaží je závislý od predchádzajúceho dokončenia prác 2. čaty na 1. podlaží, čo je zrejme nesprávne. Nesprávne sú aj väzby $2,2 \rightarrow 4,1$; $1,3 \rightarrow 4,1$; $1,3 \rightarrow 3,2$; $2,3 \rightarrow 4,2$.

Prekreslíme Obr. 2. 9 názornejšie tak, aby spĺňal aj požiadavku ⑤ (kapitola 2.1) a aby vodorovné línie predstavovali jednotlivé podlažia a zvislý pohľad pohyb pracovných čiat, ako je to uvedené na Obr. 2. 10.



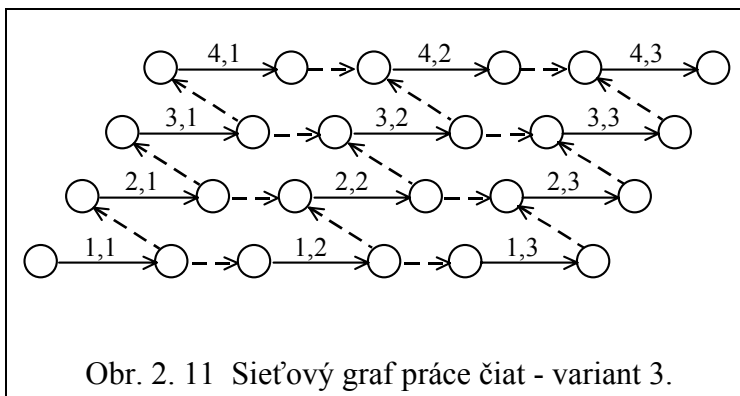
Takto názorne by to už nebolo možné bez techniky fiktívnych činností. Väzby vo vodorovných líniách predstavujú požadované nadväznosti pracovných čiat na jednotlivých podlažiach a fiktívne väzby nadväznosti prác na

podlažiach pre každú čatu. Oboje je žiadané, ale aj tak sa v tomto zákrese vyskytujú rovnaké nepožadované elementárne väzby ako na Obr. 2. 9. Uvedený zákres nás predsa len dostáva o krok ďalej. Je z neho zrejmé, kedy takéto nežiadúce väzby vznikajú. Je to vtedy, ak sa (prostredníctvom fiktívnych činností) dostávame z konca stĺpca druhého až na počiatok stĺpca prvého, alebo z konca stĺpca tretieho na počiatok druhého, alebo dokonca prvého stĺpca.

Aby sme týmto nežiadúcim väzbám zabránili, je potrebné pretrhnúť postupnosť fiktívnych činností smerujúcich doľava hore ďalšími fiktívnymi činnosťami. Toto je

znázornené na Obr. 2. 11, kde sa už nevyskytujú žiadne nežiadúce elementárne väzby. Táto úprava si ale vyžiadala aj pridanie vrcholov do grafu.

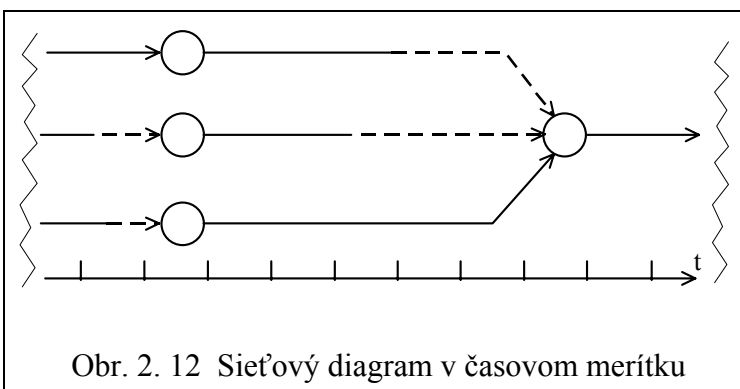
Uvedenému príkladu sa venovala zvýšená pozornosť preto, lebo popísaný postup prác sa vyskytuje pomerne často, najmä v stavebnej praxi (ale aj v iných nadväzných procesoch) a často sa zobrazuje nesprávne.



Obr. 2. 11 Sieťový graf práce čiat - variant 3.

Na záver pojednania o fiktívnych činnostiach je namieste upozorniť, že prerušované orientované úsečky sa niekedy používajú tiež na znázornenie časových rezerv v prípadoch, kedy sa sieťový diagram zakresľuje v časovej mierke.

V tomto prípade dĺžky úsečiek, resp. ich priemet na časovú os, odpovedajú dobe trvania činnosti. Uzlové body takéhoto diagramu označujú jednoznačne termíny začatia alebo



Obr. 2. 12 Sieťový diagram v časovom merítku

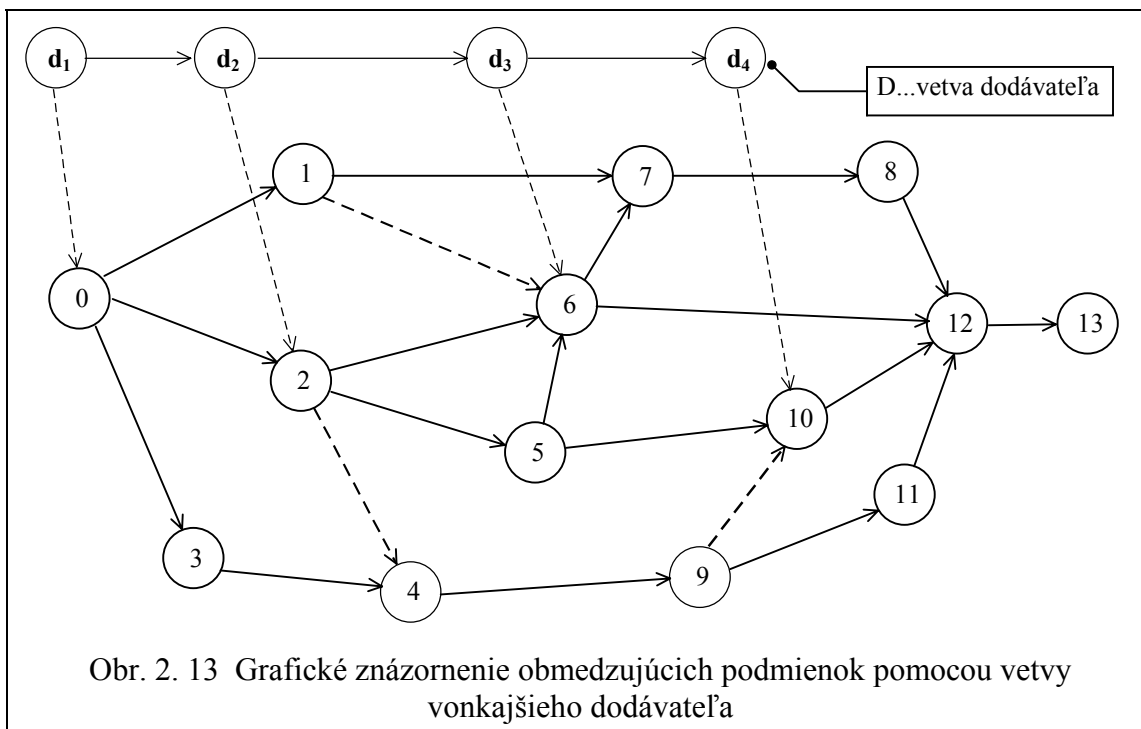
ukončenia činností, a to termíny najskôr možné, najneskôr prípustné, alebo termíny plánované (situácia je znázornená na Obr. 2. 12).

Na znázornenie časových rezerv sa potom používajú prerušované úsečky, podobne ako pri fiktívnych činnostiach. Výhodou tohto zakresu sieťového diagramu je, že sú graficky znázornené rezervy, čo je užitočné najmä pri súbežných činnostiach, ktoré využívajú rovnaké zdroje. Táto prednosť je však anulovaná nevýhodami. Je to predovšetkým problém udržiavania aktuálnosti grafu. Stačí, aby sa ešte v štádiu plánovania alebo aj v štádiu vykonávania projektu zmenila časová

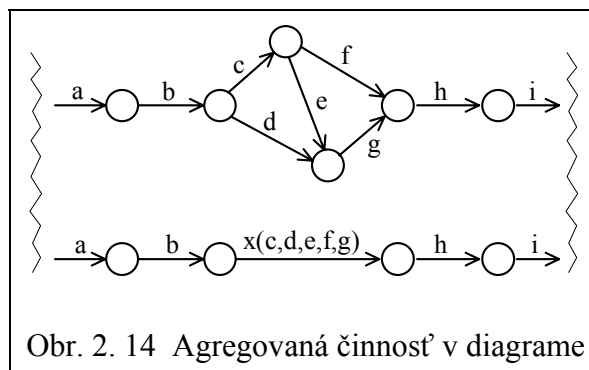
pozícia niektorej činnosti (resp. uzla), čo vyvolá nutnosť prekreslenia radu činností na všetkých cestách, ktoré sú týmto posunom ovplyvnené. Najmä v priebehu vykonávania projektu môže byť takýchto zmien väčší počet. Z týchto dôvodov sa v praxi sieťové diagramy v časovej mierke neujali. Snaha kresliť sieťové diagramy v časovom merítku vychádza však z praktickej potreby mať názornú predstavu a stály prehľad o veľkosti časových rezerv ale aj o vzájomných časových reláciách jednotlivých uzlov, resp. dôležitých míľnikov projektu.

- ⑦ Pri grafickom zobrazovaní niektorých akcií zaraďujeme do sieťového grafu tzv. **predstihové (prípravné)** a prípadne **následné činnosti**, ktoré predradíme počiatočnému uzlovému bodu, prípadne zaraďujeme za koncový uzol projektu. Pomocou predstihovej činnosti vyjadrujeme skutočnosť, že vlastné začatie akcie je viazané na ukončenie niektorých prác, prípadne na prijatie rozhodnutia; alebo po ukončení akcie musia byť vykonané niektoré následné činnosti, na ktoré riadiaci orgán, zodpovedný za danú akciu, nemá priamy vplyv. Graficky bývajú tieto činnosti znázornené lomenou čiarou alebo vlnovkou a spravidla sa do časových výpočtov ani do výpočtov kritickej cesty nezahŕňajú, bývajú však nevyhnutnou súčasťou celého projektu.

V sieťových diagramoch je možné výhodne znázorňovať aj niektoré **okrajové podmienky** a **vonkajšie obmedzenia**. Napr. začiatok niektorých prác sa môže viazať na splnenie určitých právnych predpisov, dodávateľských a odberateľských povinností a pod. Vonkajšie obmedzenia znázorňujeme v grafe pomocou orientovaného oblúku (príklad zákresu predstihovej činnosti a vonkajšieho obmedzenia bol uvedený v prvej kapitole) vychádzajúceho z prvého uzlového bodu grafu (prípadne pri kolízii si pomôžeme zavedením predstihovej činnosti). Ďalšou výhodnou možnosťou (Obr. 2. 13), najmä pri dodávateľsko-odberateľských povinnostiach, je zavedenie samostatnej vetvy **vonkajšieho dodávateľa** s postupnosťou zmluvne zabezpečených dodávateľských termínov.



- ⑧ Ak je projekt príliš zložitý a rozsiahly, je možné upraviť diagram prehľadne tak, že celý projekt „P“ rozdelíme na niekoľko čiastkových projektov $(P_1, P_2, \dots, P_n)$, pre ktoré vypracujeme samostatné diagramy (**subdiagramy**). Tieto jednotlivé



čiastkové diagramy v celkovej sieti projektu „P“ znázorňujeme **agregovanou činnosťou**, (situácia agregovanej činnosti je znázornená na Obr. 2. 14, kde „x“ je agregovaná činnosť).

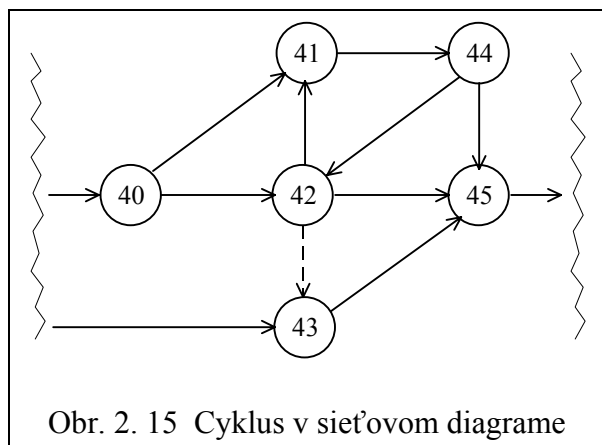
V tejto súvislosti vystupuje do popredia pojem **stupeň agregácie grafu**. V podstate každá činnosť v grafe sa môže považovať za agregovanú. Vyplýva to z toho, že v prípade potreby ju môžeme prakticky vždy rozčleniť na čiastkové činnosti.

Stupeň agregácie v grafe závisí najmä:

- ⇒ od úrovne riadenia, na ktorej bude graf použitý;
- ⇒ od charakteru nadväznosti činností medzi sebou (činnosti môžu byť agregované do tej miery, aby bolo možné sledovať vzťahy majúce význam pre časovú nadväznosť agregovaných činností).

⑨ **Sieťový diagram nesmie obsahovať cyklus.** Cyklom označujeme taký orientovaný podgraf, v ktorom z každého uzlového bodu jedna hrana vychádza a do každého uzlového bodu jedna hrana vstupuje.

Príklad cyklu je uvedený na Obr. 2. 15. Cyklus tvoria činnosti (41,44), (44,42) a (42,41). Vznik cyklu v sieťovom diagrame signalizuje vždy logickú chybu; to znamená, že projekt nemôže byť v skutočnosti nikdy dokončený, pretože začatie uvedených činností je závislé od dokončenia nich samotných.



Vzhľadom na to, že uzly cyklického grafu nemôžeme očíslovať tak, aby platila nerovnosť $i < j$, postačí, ak sa všetky uzlové body sieťového diagramu podarí očíslovať tak, aby číselný index uzla na konci každej činnosti bol vyšší ako číselný index uzla, z ktorého

činnosť vychádza.

V takom prípade máme záruku, že daný graf je **acyklický**.

2.2 Spôsoby a postup zostavovania sieťového diagramu

Správne zostavenie sieťového diagramu predpokladá znalosť odpovedí na tieto otázky:

- ⇒ ktoré činnosti bezprostredne každej činnosti predchádzajú;
- ⇒ ktoré činnosti za danou činnosťou bezprostredne nasledujú;
- ⇒ ktoré činnosti sa vykonávajú (alebo je možné vykonávať) súbežne;
- ⇒ ktoré činnosti sú od seba závislé (vymedzenie závislosti, resp. nezávislosti činností).

Pri vlastnom zostavovaní sieťového diagramu môže byť východiskom počiatočný alebo koncový uzlový bod. V prvom prípade hovoríme o **postupe vpred**, v druhom prípade o **postupe vzad**. Pri postupe vpred zakreslíme prvú činnosť a odpovedáme na otázku, ktoré z ďalších činností sa môžu na základe ukončenia tejto prvej započať. Po zakreslení týchto činností skúmame možnosti započatia ďalších činností. Základným hľadiskom je ukončovanie predchádzajúcich činností, ktoré podmieňuje začiatok činností bezprostredne nasledujúcich. Pri postupe vzad je východiskom koncový uzlový bod sieťového diagramu. Zisťujeme, ktoré činnosti musíme vykonať, resp. aké úlohy splniť, ak má byť dosiahnutý stav, ktorý je charakterizovaný uzlovým bodom, pri ktorom sa práve nachádzame. Týmto spôsobom postupne určíme všetky činnosti sieťového diagramu.

Pri konštrukcii rozsiahlych sieťových diagramov nie je možné na prvý raz zostaviť diagram v požadovanom podrobnom členení a celú úlohu je nevyhnutné rozdeliť na niekoľko etáp. V prvej etape zostavujeme silno agregovaný sieťový graf, v ktorom zachytíme hlavné väzby a vzťahy medzi činnosťami, resp. skupinami činností. V ďalších etapách postupne tento východiskový graf dezagregujeme, pričom používame jeden z vyššie uvedených postupov. Je preto účelné, najmä v počiatočných štádiách zostavovania sieťového diagramu, kresliť graf vo väčšej mierke, aby bolo možné nadpisovať činnosti nad jednotlivé hrany. Umožňuje to ľahšiu orientáciu a

postupné dopĺňovanie činností. Niekedy sa kreslí graf súčasne z počiatočného i koncového uzla, prípadne postupujeme po relatívne samostatných vetvách, ktoré neskôr navzájom prepojíme fiktívnymi alebo aj reálnymi činnosťami.

Pri zostavovaní sieťového diagramu ide o spracovanie podrobného, logicky utriedeného pracovného postupu riešenia určitej úlohy. Preto je účelné preverovať diagram vo všetkých etapách, či je správnym zobrazením zvoleného postupu. Niekedy býva predmetom rozboru a kritiky samotný postup riešenia, pretože pri zostavovaní diagramu odhalíme i nedostatky v postupe. Na účely ďalšieho prepracovania diagramu i overovania jeho správnosti je výhodné vykonávať sústavnú revíziu všetkých základných ciest sieťového diagramu, pri ktorej skúmame predovšetkým správnosť a úplnosť všetkých technologických a organizačných závislostí i stupeň členenia činností vytvárajúcich danú cestu. Pri tejto kontrole porovnávame údaje tabuľky, obsahujúce zoznam činností, so sieťovým diagramom a najmä preverujeme:

- ⇒ či počet činností v tabuľke súhlasí s počtom hrán v grafe;
- ⇒ či sieťový diagram obsahuje jediný počiatočný a jediný koncový uzol;
- ⇒ či sieťový diagram je acyklický graf, t.j. či je splnená podmienka $i < j$ pre všetky uzly grafu.

Na účely zostavovania i používania sieťového diagramu je účelné si uvedomiť vhodné plošné usporiadanie grafu. Sieťový diagram môže byť členený horizontálne ale aj vertikálne. Vhodné členenie sieťového diagramu ukazuje dôležité úseky, medzi ktorými ľahko identifikujeme všetky podstatné vzťahy a závislosti. Z tohto hľadiska sa často odporúča samotný sieťový diagram, prípadne zoznam činností usporiadať podľa organizačného členenia tak, aby bolo zrejmé, za ktoré činnosti a za ktorú časť sieťového diagramu príslušný vedúci pracovník zodpovedá. V tomto členení sa spravidla sleduje aj realizácia celého projektu.

Zostaviť sieťový diagram, ktorý je správnym modelom daného procesu, je veľmi náročná činnosť. Uvádza sa, že etapa spracovania sieťového diagramu

spotrebuje 70% až 80% pracovnej kapacity, ktorá sa venuje celej aplikácii sieťovej analýzy. Úspešné zakončenie tejto etapy je základným predpokladom celkového úspechu. V jej priebehu sa ukážu schopnosti a skúsenosti toho, kto sieťový diagram zostavuje. Sieťový diagram poskytuje možnosti spracovať účelný a dômyselný pracovný postup tak, aby celá akcia bola účinne riadená a včas ukončená. Zostavenie sieťového diagramu, tj. naplánovanie danej akcie, ako aj jej riadenie, je do určitej miery umením a znamená plné uplatnenie osobnosti vedúceho pracovníka na danom stupni riadenia.

Treba zdôrazniť, že kreslenie sieťového diagramu sa nikdy nekončí, pretože je potrebné ho neustále aktualizovať tak, aby vždy zodpovedal práve platným podmienkam. Význam sieťového diagramu, ako nástroja riadiacej práce, nie je v tom, že by plánovacie a riadiace práce skracoval. Jeho význam spočíva v tom, že vytvára základňu na dôkladné a podrobné plánovanie priebehu prác a na účinné riadenie každej vykonávanej etapy projektu.

2.3 Číslovanie vrcholov sieťového diagramu

Číslovanie vrcholov sieťového diagramu je jednou z etáp tvorby projektu a jej význam spočíva najmä v tom, že správne očíslovanie, kedy každá hrana (i,j) spĺňa podmienku, že číslo počiatočného uzlu činnosti je menšie ako číslo uzlu koncového, dáva súčasne záruku acyklickosti grafu.

Základom číslovania uzlov grafu je určenie ich **rádu**, čo znamená každému uzlu priradenie indexu $(0,1,2,...,k)$, ktorý udáva maximálny počet hrán cesty spájajúcej daný uzol s počiatočným uzlom grafu.

METÓDA PREŠKRTÁVANIA HRÁN

Na určenie rádu jednotlivých uzlov existuje viacero metód. Jednou zo základných je metóda preškrťovania hrán.

Postup metódy budeme demonštrovať na príklade (viď *Príklad 2.1* a Obr. 2.16), kde jednotlivé kroky metódy budú znázornené zodpovedajúcim počtom preškrtnutí príslušných hrán a rád uzlu bude zaznačený v hranatých zátvorkách [].

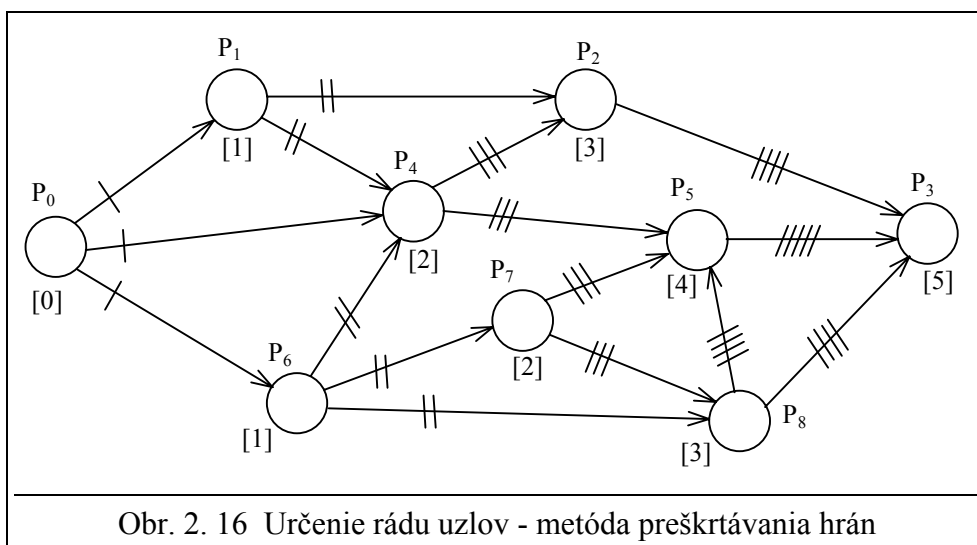
Na názornosť použijeme pomocné označenie uzlov grafu „ P_i “.

Príklad 2.1

Postup metódy preškrťovania hrán na určenie rádov uzlov

Krok 0 určenie uzlov 0. rádu: Uzlu P_0 , do ktorého nevstupuje žiadna hrana priradíme index 0 (uzol 0. rádu).

Krok 1 určenie uzlov 1. rádu: Preškrtneme všetky hrany vystupujúce z uzlov 0. rádu, t.j. z uzlu P_0 . Tým obdržíme niekoľko (minimálne jeden) uzlov bez vstupných hrán (uzly P_1, P_6). Tieto budú uzly 1. rádu; označíme ich hodnotou [1].



Krok 2 *určenie uzlov 2. rádu:* Preškrtneme všetky hrany vystupujúce z uzlov 1. rádu, tj. z uzlov P_1 a P_6 .

Uzly bez vstupných hrán budú uzlami 2. rádu (P_4, P_7).

Takto postupujeme dovtedy, kým nemáme určené rády všetkých uzlov grafu

Ďalej stručne:

Krok 3 *určenie uzlov 3. rádu:* Škrtneme vystupujúce hrany z uzlov 2. rádu (P_4, P_7); dostávame uzly 3. rádu ... P_2, P_8 .

Krok 4 *určenie uzlov 4. rádu:* Škrtneme vystupujúce hrany z uzlov 3. rádu (P_2, P_8); dostávame jeden uzol 4. rádu ... P_5 .

Krok 5 *určenie uzlov 5. rádu:* Škrtneme vystupujúce hrany z uzlov 4. rádu (P_5); uzly 5. rádu ... ostáva posledný uzol ... P_3 , ...rád všetkých uzlov je určený.

Tým máme pripravený podklad na očíslovanie uzlov grafu tak, aby toto číslovanie spĺňalo podmienku $i < j$ a súčasne dávalo istotu, že v danom grafe nie je žiadny cyklus. Keby sieťový diagram obsahoval cyklus, nepodariť sa určiť rád všetkých jeho uzlov.

Očíslovanie uzlov na základe poznania ich rádu vykonáme nasledujúcim spôsobom:

- jedinému uzlu 0. rádu pridelieme číslo **0**;
- uzlom 1. rádu pridelieme čísla **1,2,...,k₁**;
- uzlom 2. rádu pridelieme čísla **k₁ + 1, k₁ + 2,...,k₁ + k₂**; atď.

Pretože uzly rovnakého rádu nie sú navzájom prepojené žiadnou cestou, a uzly nižšieho rádu majú pridelené menšie indexy, potom v očíslovanej sieti pre ľubovoľnú hranu (P_i, P_j) vždy platí $i < j$. To znamená, že uzly rovnakého rádu sú ekvivalentné a môžeme im prideliť čísla v ľubovoľnom poradí.

Postup a výsledky očíslovania uzlov je znázornený na Obr. 2. 17 (Príklad 2.2).

Príklad 2.2

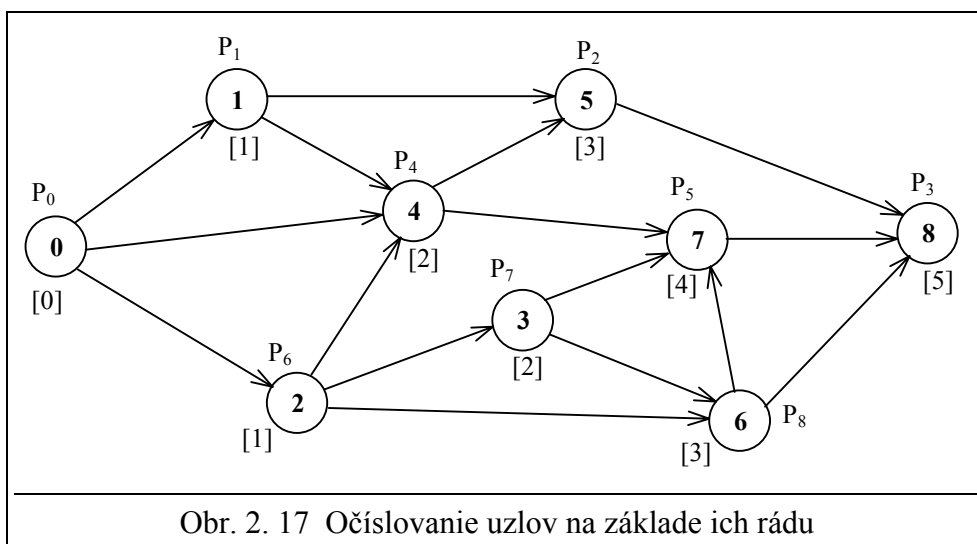
Očíslovanie uzlov grafu na základe poznania ich rádu.

Ako východiskové údaje použijeme výsledky riešenia predchádzajúceho príkladu (viď Príklad 2.1, Obr. 2. 16).

Výsledky očíslovania uzlov sú uvedené na Obr. 2. 17 vo vnútri krúžkov znázorňujúcich uzly grafu.

Postup riešenia:

uzlu 0. rádu..... P_0 pridelíme číslo 0
uzlom 1. rádu..... P_1, P_6 v ľubovoľnom poradí pridelíme čísla..... 1,2
uzlom 2. rádu..... P_4, P_7 v ľubovoľnom poradí pridelíme čísla..... 3,4
uzlom 3. rádu..... P_2, P_8 v ľubovoľnom poradí pridelíme čísla..... 5,6
uzlu 4. rádu..... P_5 pridelíme číslo 7
uzlu 5. rádu..... P_3 pridelíme číslo 8



Týmto je očíslovanie všetkých uzlov grafu ukončené.

FORDOV ALGORITMUS

Vo veľkých sieťach sa uvedený postup (metódou preškrtavania hrán) stáva neprehľadným, preto je vhodné postupovať pri určovaní rádu uzlov podľa **Fordovho algoritmu**, ktorý je základom nielen úlohy očíslovania uzlov, ale aj ďalších úloh sieťovej analýzy. Podľa určitých vzťahov budeme v podstate počítat' maximálny počet hrán, ktoré spájajú daný uzol s uzlom počiatočným.

Predpokladajme, že každá hrana má ohodnotenie $y_{ij}=1$ a každý vrchol V_i má na počiatku riešenia hodnotu 0. Potom postupom vpred (od počiatočného vrcholu grafu) budeme počítat' rád jednotlivých uzlov podľa vzťahu:

$$RV_j = \max\{RV_i + y_{ij}\} \quad \text{pre } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.6)$$

$$RV_0 = 0$$

kde: RV_j hľadaný rád uzla V_j

RV_i rád predchodcov uzla V_j

y_{ij} ohodnotenie hrany (V_i, V_j) v tomto prípade hodnota 1, udávajúca jej existenciu.

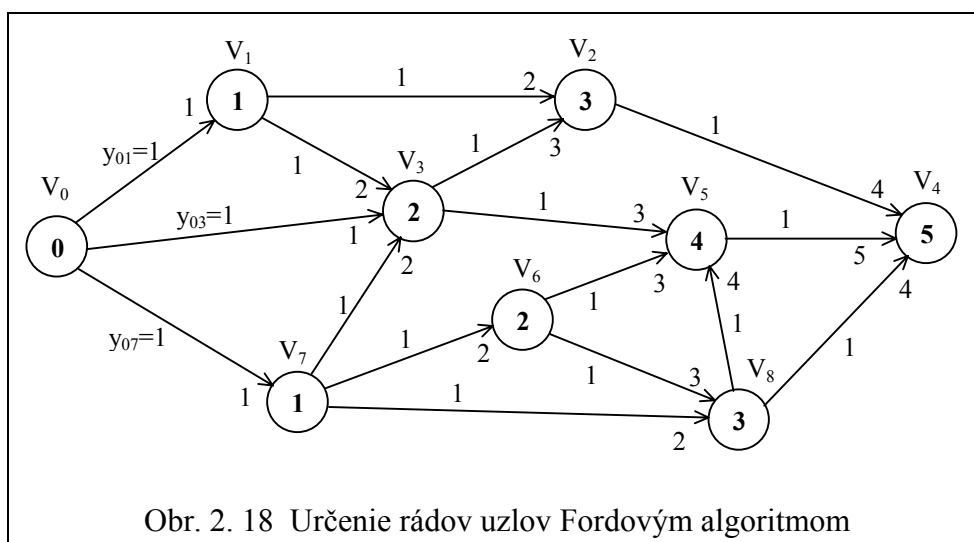
Takto popísaný algoritmus postačí na určenie rádov uzlov priamo v sieťovom grafe. Jeho postup budeme demonštrovať v sieti na Obr. 2. 18 (Príklad 2.3). Vypočítané hodnoty $RV_i + y_{ij}$ budeme zapisovať pri šípkach príslušných hrán, rád uzla RV_j vo vnútri krúžku.

Príklad 2.3

Určenie rádov uzlov na sieti - Fordov algoritmus

Postup výpočtu: (viď Obr. 2. 18):

- do počiatočného uzla V_0 nevstupuje žiadna hrana $RV_0 = 0$
- do uzla V_1 vstupuje jedna hrana $RV_1 = \max \{ RV_0 + y_{01} \} = \max \{ 0 + 1 \} = 1$



- uzlom V_2 ani V_3 nemôžeme pokračovať, majú ešte nevyhodnotených predchodcov;
môžeme pokračovať uzlom V_7 :
 $RV_7 = \max \{ RV_0 + y_{07} \} = \max \{ 0 + 1 \} = 1$
- do V_3 vstupujú 3 hrany (z uzlov V_0 , V_1 a V_7 , ktoré sú už vyhodnotené)
 $RV_3 = \max \{ RV_0 + y_{03}, RV_1 + y_{13}, RV_7 + y_{73} \} = \max \{ 1, 2, 2 \} = 2$

analogicky dostávame:

- $RV_2 = \max \{ RV_1 + y_{12}, RV_3 + y_{32} \} = \max \{ 2, 3 \} = 3$
- $RV_6 = \max \{ RV_7 + y_{76} \} = \max \{ 2 \} = 2$

- $RV_8 = \max \{ RV_6 + y_{68}, RV_7 + y_{78} \} = \max \{ 3, 2 \} = 3$
- $RV_5 = \max \{ RV_3 + y_{35}, RV_6 + y_{65}, RV_8 + y_{85} \} = \max \{ 3, 3, 4 \} = 4$
- $RV_4 = \max \{ RV_2 + y_{24}, RV_5 + y_{54}, RV_8 + y_{84} \} = \max \{ 4, 5, 4 \} = 5$

Týmto máme určené rády všetkých uzlov. Ich očíslovanie vykonáme rovnakým spôsobom ako bolo uvedené v súvislosti s metódou preškrtavania hrán.

S uvedeným popisom algoritmu ale nevystačíme v prípade potreby jeho aplikácie na výpočtovú techniku. Na tento účel je potrebné popísať algoritmus podrobnejšie. Jeden z možných spôsobov je nasledujúci (obsahuje 2 kroky):

algoritmus – začiatok

1. krok **INICIALIZÁCIA**

- Každému vrcholu i grafu priradíme dve značky h_i a r_i .
- Vytvoríme zoznam z o počtu polí koľko je vrcholov grafu.
- Počiatočnú hodnotu h_i u každého vrcholu obsadíme hodnotou udávajúcou počet hrán, ktoré do vrchola vstupujú.
- Počiatočnú hodnotu r_i u všetkých uzlov obsadíme hodnotou **0**. Po ukončení algoritmu bude r_i obsahovať hodnotu predstavujúcu **rád uzla**.
- Zavedieme pomocnú premennú **poz** (pozícia), ktorá bude udávať v zozname z pozíciu vrcholu s ktorým budeme pracovať (pracovného vrcholu) a pomocnú premennú **prv** (pracovný vrchol), udávajúcu vrchol na pozícii **poz** v zozname z (**prv** = z_{poz}).
- Vyhľadáme vrchol do ktorého nevstupuje žiadna hrana a číslo tohto vrcholu vpíšeme do prvého poľa zoznamu z .
- Premennej **poz** priradíme hodnotu **1** (**poz** = **1**).

2. krok **AKTUALIZÁCIA**

- a) Ak hodnota premennej **poz** (pozícia) sa rovná počtu vrcholov grafu, je algoritmus ukončený a obsah značiek r_i udáva rád príslušného uzla i .
- b) Ak hodnota premennej **poz** je menšia ako celkový počet vrcholov grafu, vykonáme operácie:

- ako pracovný vrchol vyberieme vrchol na pozícii **poz** v zozname **z**;

$$\mathbf{prv} = \mathbf{z}_{\mathbf{poz}}$$

- pre všetky následníky pracovného vrcholu vykonáme:

$$\mathbf{r_j} = \mathbf{max(r_j, r_i + 1)}$$

$$\mathbf{h_j} = \mathbf{h_j - 1}$$

ak po úprave $\mathbf{h_j} = \mathbf{0}$, vložíme číslo vrcholu $\mathbf{j}$ na ďalšiu voľnú pozíciu v zozname **z**;

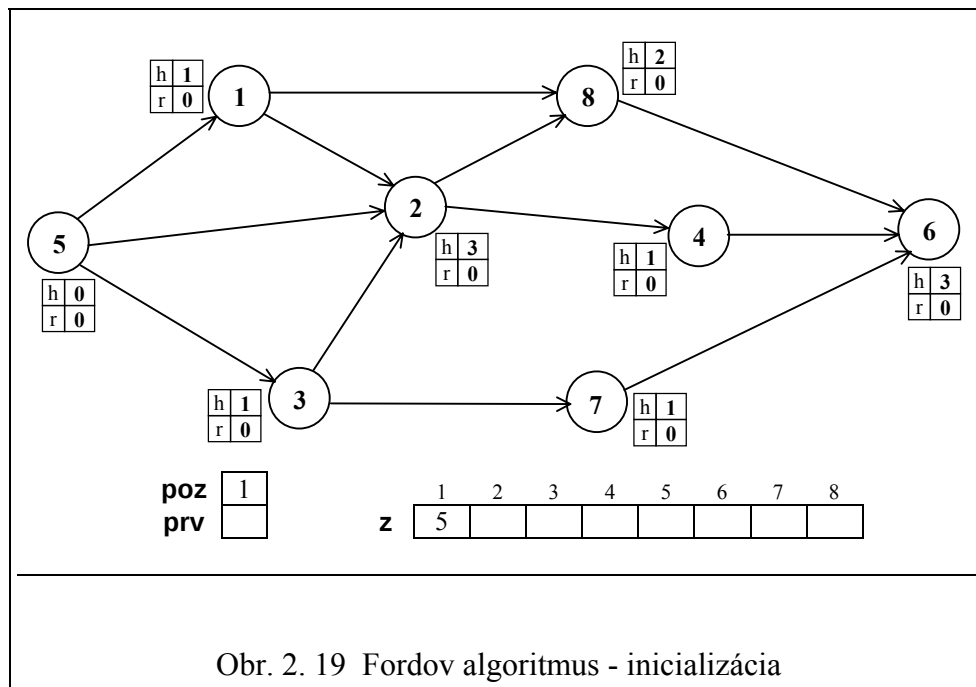
- zvýšime premennú **poz** o hodnotu **1**; ($\mathbf{poz} = \mathbf{poz} + \mathbf{1}$)
- opakujeme **krok 2** algoritmu.

algoritmus – koniec

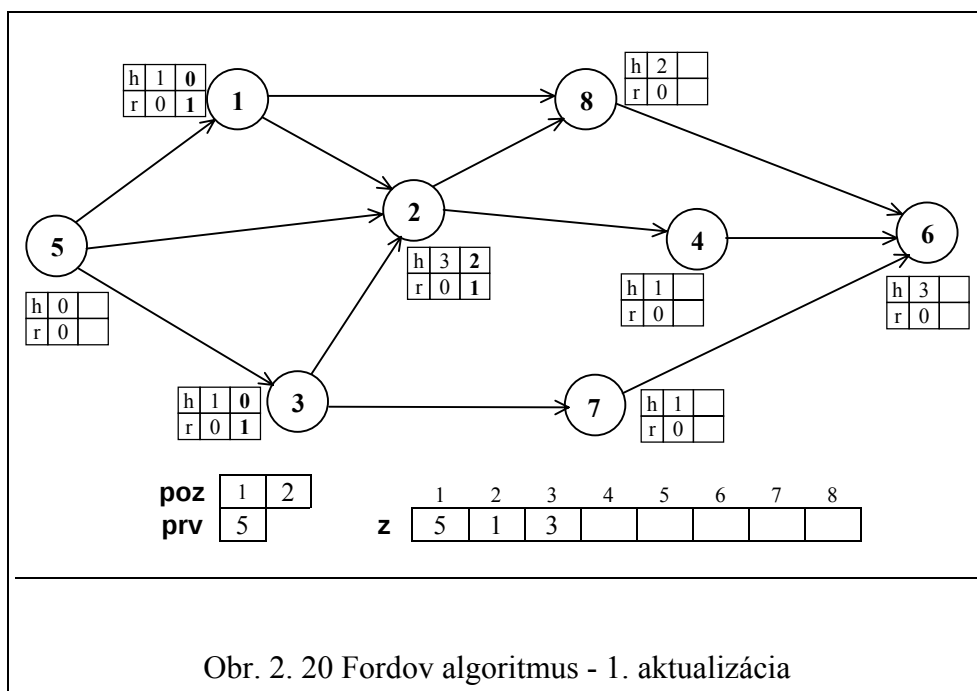
Postup výpočtu rádov uzlov podľa takto zapísaného algoritmu je znázornený na príklade 2.4.

Príklad 2.4**Výpočet rádov uzlov – Fordov algoritmus****1. krok inicializácia**

Na Obr. 2. 19 je znázornená sieť s vykonaným 1. krokom algoritmu. Do zoznamu **z** je vpísaná jediná hodnota – číslo uzla, do ktorého nevstupuje žiadna hrana (počiatočný uzol grafu). Premenná **poz** má hodnotu **1**, premenné **h** u jednotlivých uzlov majú hodnoty odpovedajúce počtu hrán vstupujúcich do príslušného uzla a premenné **r** majú hodnoty **0**.

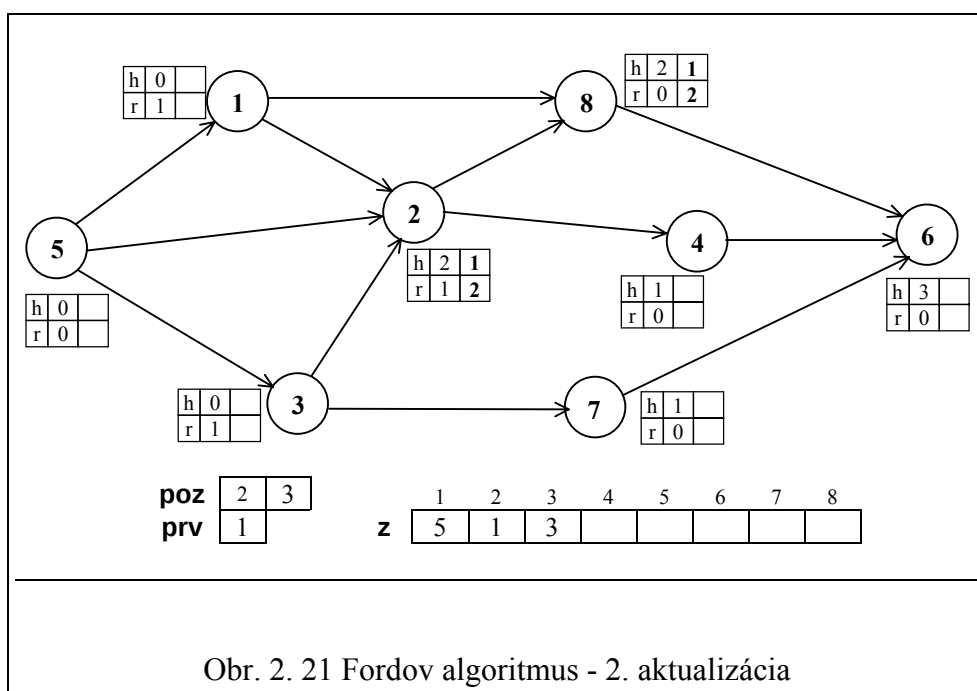
**2. krok 1. Aktualizácia** (Obr. 2. 20)

- | | |
|---|---|
| <p>a)</p> <ul style="list-style-type: none"> • počet uzlov grafu PUG = 8 • poz = 1 • poz < 8 <p>⇒ pokračujeme krokom 2b)</p> | <p>b)</p> <ul style="list-style-type: none"> • prv = $z_{poz} = z_1 = 5$ • $r_1 = \max(0; 0+1)=1$; $h_1 = 1-1=0$
⇒ V_1 na ďalšiu pozíciu do z • $r_2 = \max(0; 0+1)=1$; $h_2 = 3-1=2$ • $r_3 = \max(0; 0+1)=1$; $h_3 = 1-1=0$
⇒ V_3 na ďalšiu pozíciu do z • poz = poz + 1 = 1+1 = 2 • pokračujeme krokom 2a) |
|---|---|



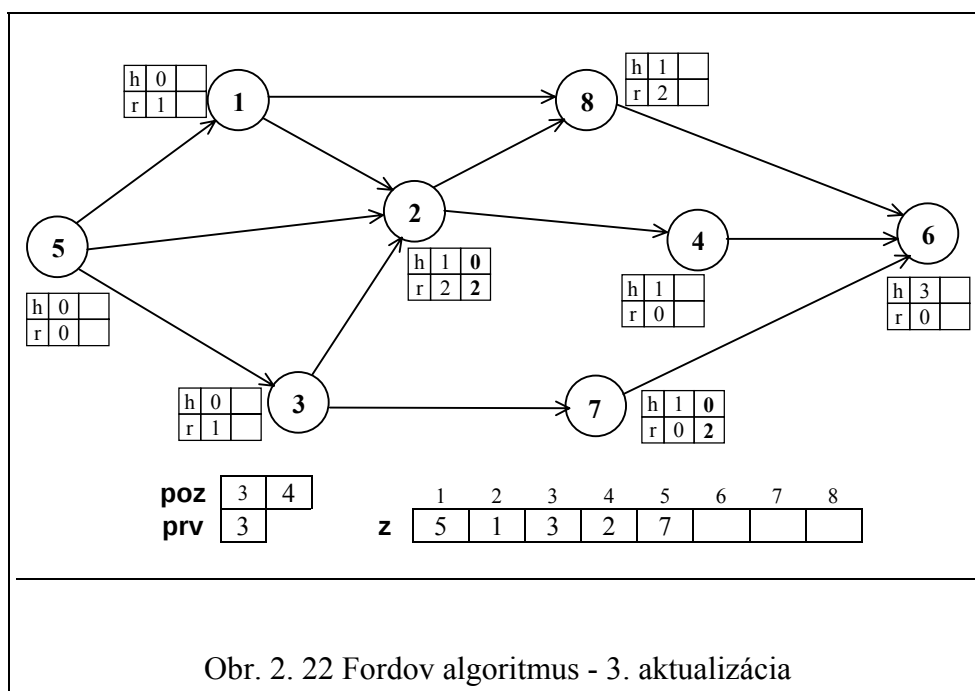
2. krok **2. Aktualizácia** (Obr. 2. 21)

- a) • PUG = 8
• poz = 2
• poz < 8
⇒ pokračujeme krokom 2b)
- b) • prv = $z_{\text{poz}} = z_2 = 1$
• $r_8 = \max(0; 1+1)=2$; $h_8 = 2-1=1$
• $r_2 = \max(1; 1+1)=2$; $h_2 = 2-1=1$
• poz = poz + 1 = 2+1 = 3
• pokračujeme krokom 2a)

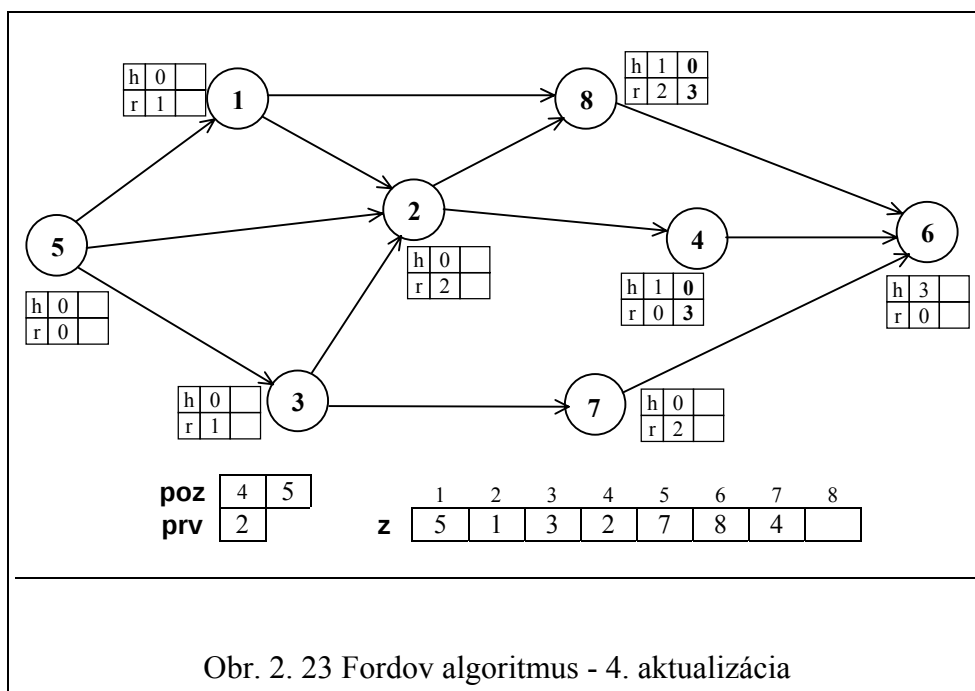


2. krok 3. aktualizácia (Obr. 2. 22)

- a)
- PUG = 8
 - poz = 3
 - poz < 8
- ⇒ pokračujeme krokom 2b)
- b)
- prv = $z_{\text{poz}} = z_3 = 3$
 - $r_2 = \max(2; 0+1)=2$; $h_2 = 1-1=0$
⇒ V_2 na ďalšiu pozíciu do z
 - $r_7 = \max(0; 1+1)=2$; $h_7 = 1-1=0$
⇒ V_7 na ďalšiu pozíciu do z
 - poz = poz + 1 = 3+1 = 4
 - pokračujeme krokom 2a)

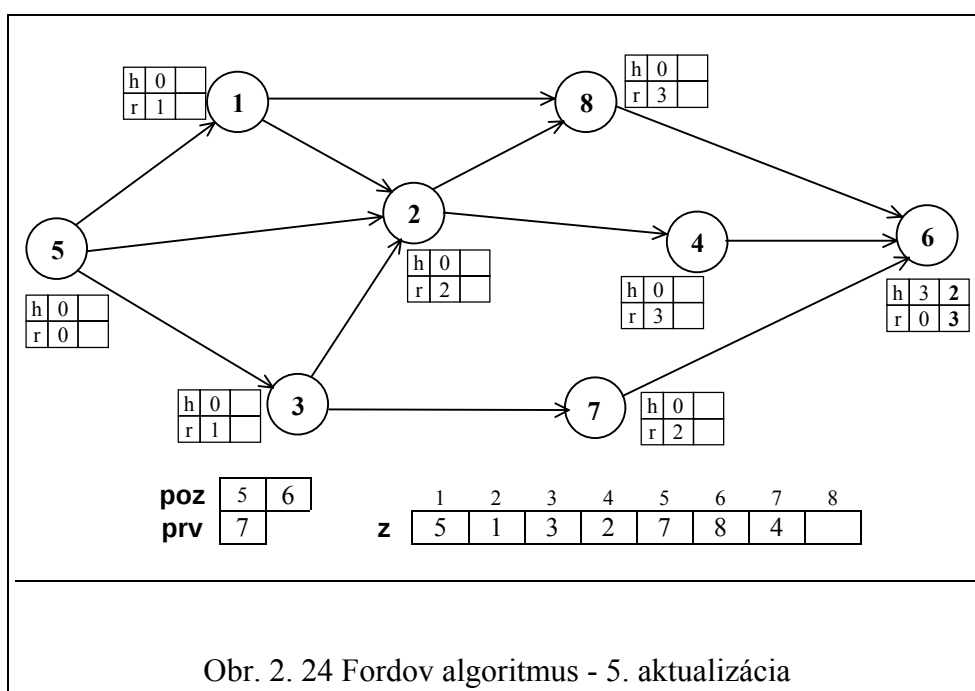

2. krok 4. aktualizácia (Obr. 2. 23)

- a)
- PUG = 8
 - poz = 4
 - poz < 8
- ⇒ pokračujeme krokom 2b)
- b)
- prv = $z_{\text{poz}} = z_4 = 2$
 - $r_8 = \max(2; 2+1)=3$; $h_8 = 1-1=0$
⇒ V_8 na ďalšiu pozíciu do z
 - $r_4 = \max(0; 2+1)=3$; $h_4 = 1-1=0$
⇒ V_4 na ďalšiu pozíciu do z
 - poz = poz + 1 = 4+1 = 5
 - pokračujeme krokom 2a)



2. krok **5. Aktualizácia** (Obr. 2. 24)

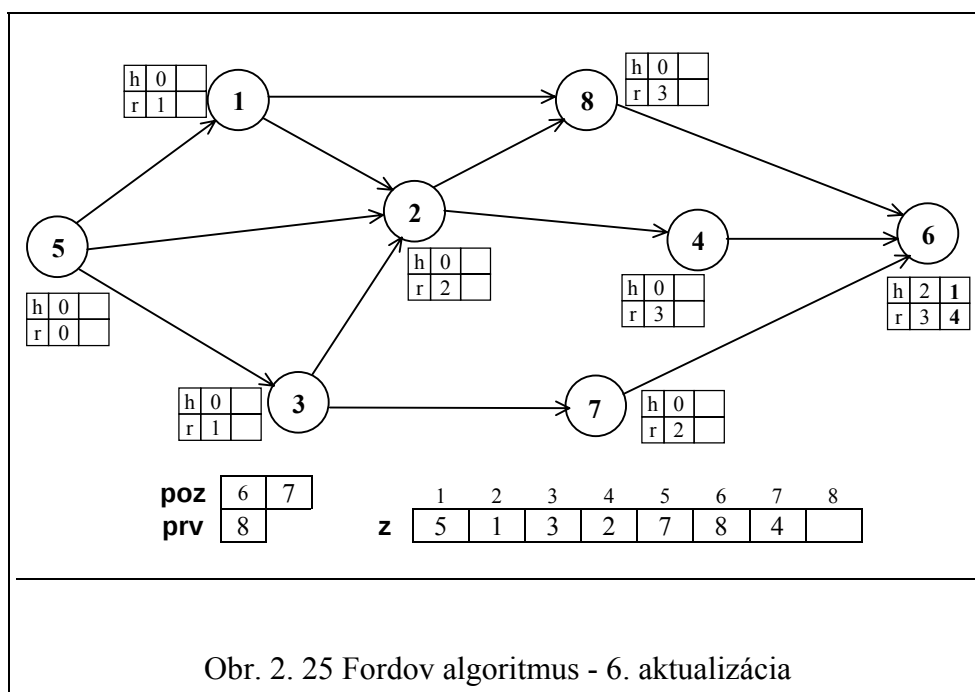
- a) • PUG = 8
• poz = 5
• poz < 8
⇒ pokračujeme krokom 2b)
- b) • prv = $z_{\text{poz}} = z_5 = 7$
• $r_6 = \max(0; 2+1)=3$; $h_6 = 3-1=2$
• poz = poz + 1 = 5+1 = 6
• pokračujeme krokom 2a)



2. krok 6. Aktualizácia (Obr. 2. 25)

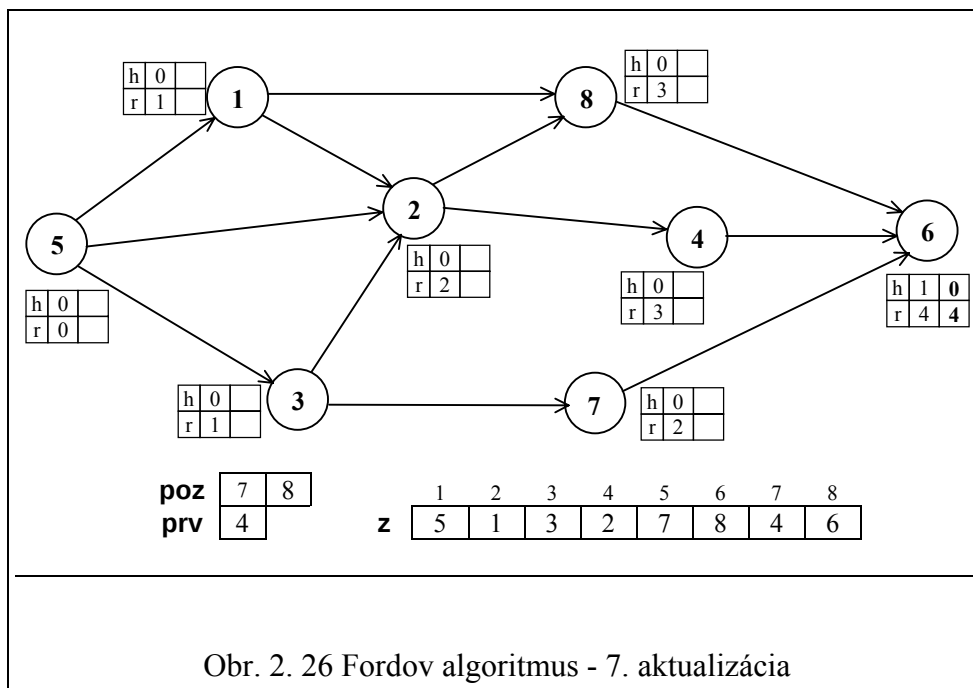
- a)
- $PUG = 8$
 - $poz = 6$
 - $poz < 8$
- $\Rightarrow$ pokračujeme krokom 2b)

- b)
- $prv = z_{poz} = z_6 = 8$
 - $r_6 = \max(3; 3+1)=4; \quad h_6 = 2-1=1$
 - $poz = poz + 1 = 6+1 = 7$
 - pokračujeme krokom 2a)

**2. krok 7. Aktualizácia** (Obr. 2. 26)

- a)
- $PUG = 8$
 - $poz = 7$
 - $poz < 8$
- $\Rightarrow$ pokračujeme krokom 2b)

- b)
- $prv = z_{poz} = z_7 = 4$
 - $r_6 = \max(4; 3+1)=4; \quad h_6 = 1-1=0$
 - $\Rightarrow V_6$ na ďalšiu pozíciu do z
 - $poz = poz + 1 = 7+1 = 8$
 - pokračujeme krokom 2a)



2. krok **8. aktualizácia**

- a)
- PUG = 8
 - poz = 8
 - premenná **poz** sa rovná počtu uzlov grafu
 $\Rightarrow$ algoritmus je ukončený; rád jednotlivých vrcholov je uložený v príslušných premenných r_i .

Výsledok:

uzol číslo	1	2	3	4	5	6	7	8
rád uzla	1	2	1	3	0	4	2	3

V nasledujúcom výklade už budeme predpokladať očíslovanie vrcholov grafu tak, že pre ľubovoľnú hranu (V_i, V_j) platí $i < j$.

V ďalšom je uvedený vývojový diagram určenia rádu uzlov Fordovým algoritmom, vrátane prečíslovania uzlov. V prezentovanom vývojovom diagrame sú použité tieto premenné a polia:

Predpoklady

- číslovanie vrcholov grafe (pôvodné aj výsledné) je od **0** krokom **1**;
- sieťový graf má iba jeden vrchol počiatkový a jeden koncový;
- graf je hranovo orientovaný a neobsahuje žiadne cykly.

Premenné a polia

pv..... počiatkový vrchol grafu
prv..... pracovný vrchol
poz..... pozícia pracovného vrcholu v zozname vrcholov
kv..... koncové (najvyššie) číslo vrcholu v grafe
volpoz..... prvá voľná pozícia v zozname vrcholov
ph počet hrán grafu
h(i)..... vektor počtu hrán vstupujúcich do vrcholu
r(i) vektor rádov uzlov
z(i) zoznam vrcholov pre prácu algoritmu
zvv(i) zoznam vrcholov – výsledné číslovanie
zh(i,j)..... zoznam hrán grafu

Deklarácia polí

- predpoklad: prvý index = 0;

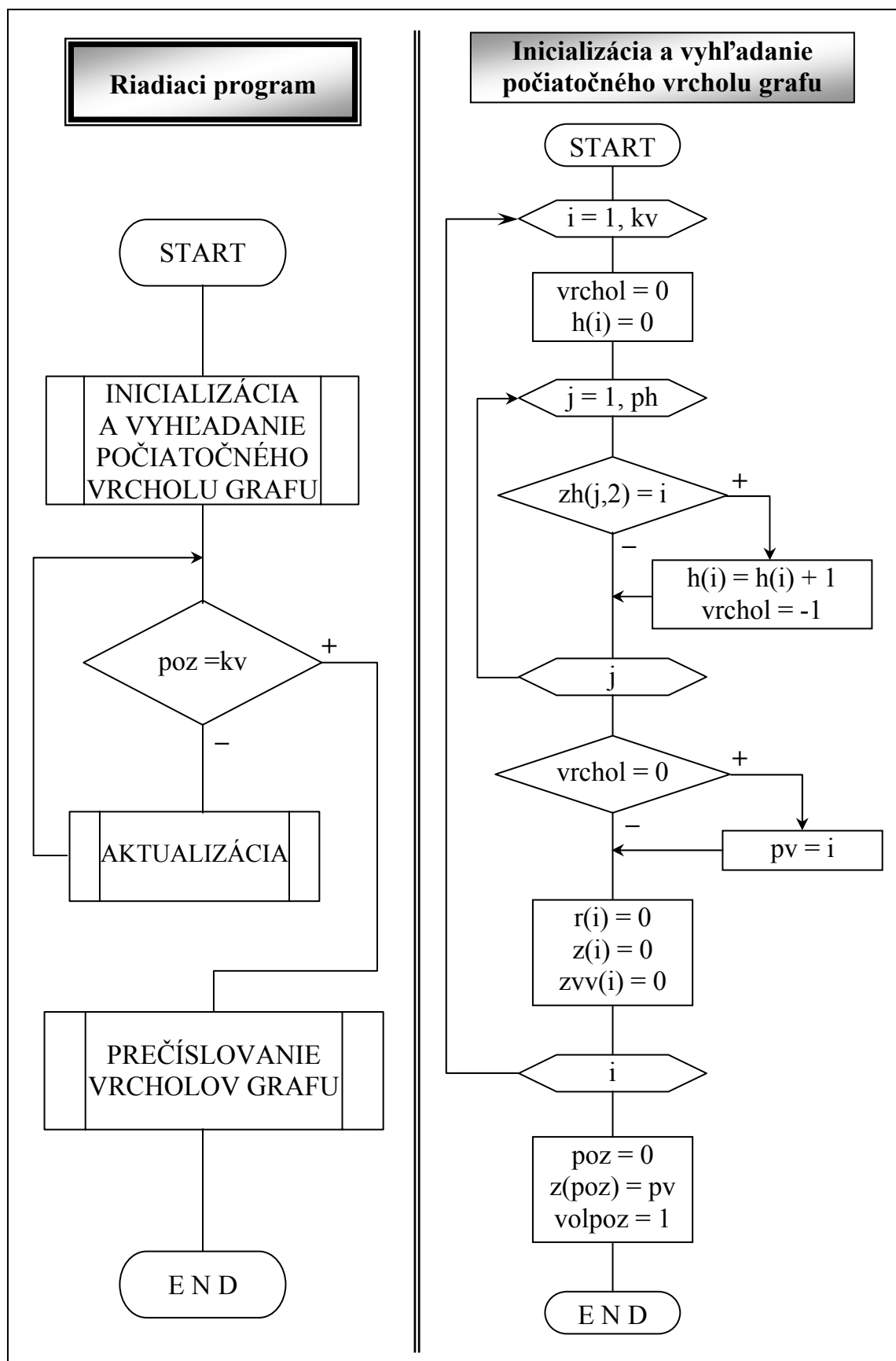
$h(kv)$ $r(kv)$ $z(kv)$ $zvv(kv)$ $zh(ph,2)$

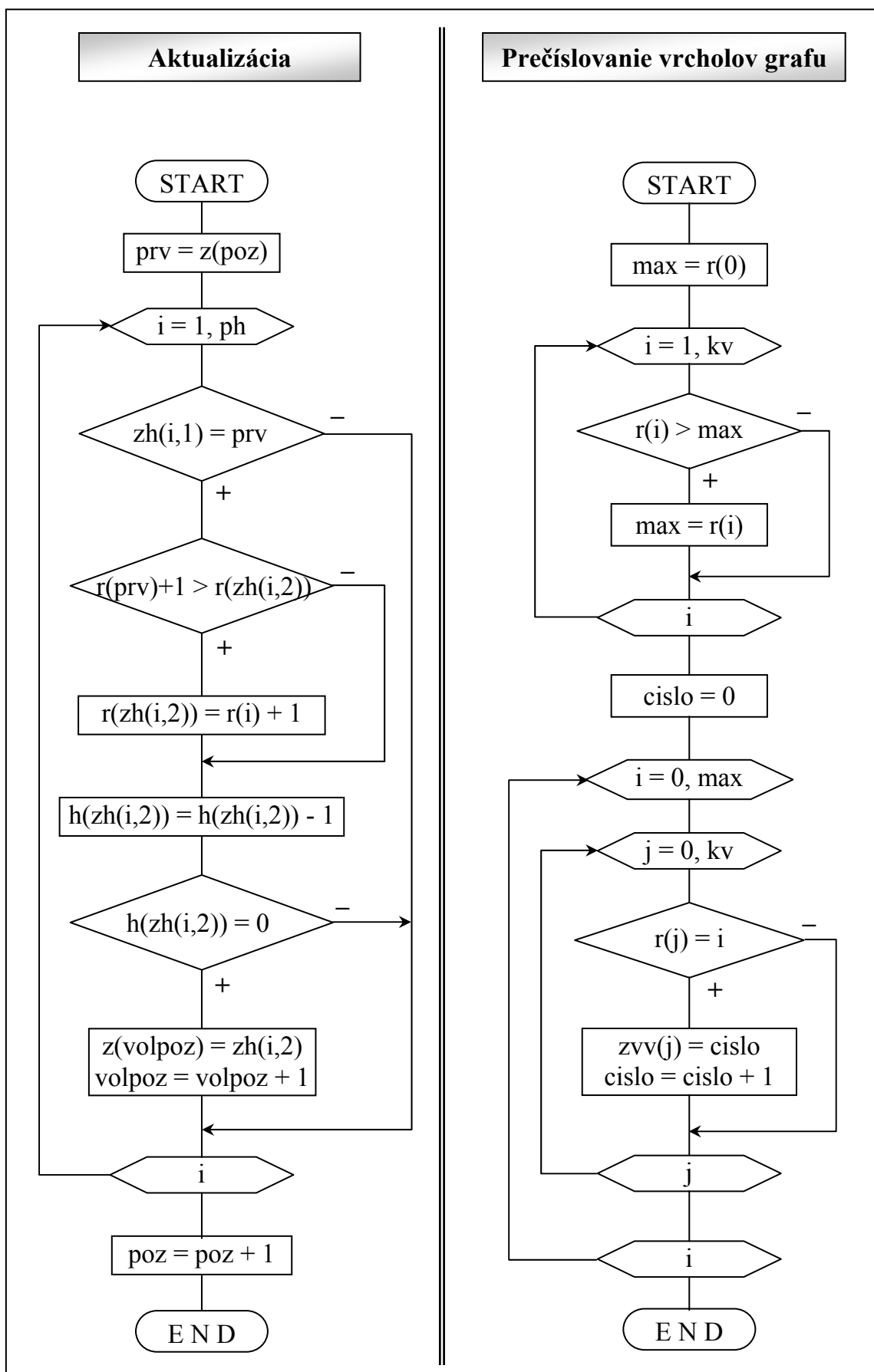
Forma zoznamu hrán a vektorov

	počiatkový vrchol	koncový vrchol
zh(i,j)	1	2
1	zh(1,1)	zh(1,2)
2		zh(2,2)
3	ZH(3,1)	
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
ph	zh(ph,1)	zh(ph,2)

	0	1	2	3		kv
h(i)						
r(i)						
z(i)						
zvv(i)						

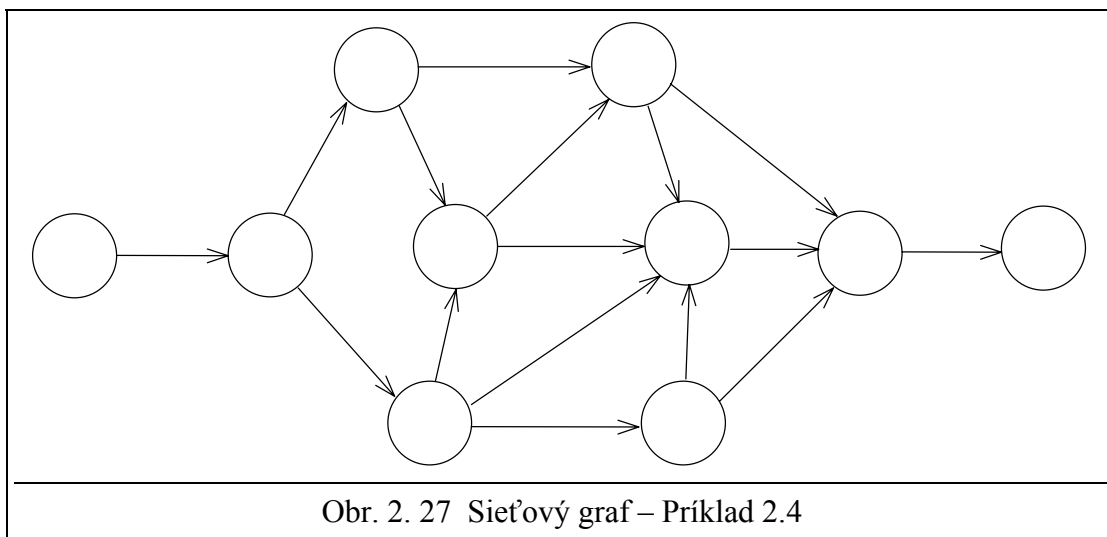
VÝVOJOVÝ DIAGRAM – FORDOV ALGORITMUS (určenie rádu uzlov a číslovanie vrcholov)





Príklad 2.5

Fordovým algoritmom stanovte rád uzlov nasledujúceho sieťového grafu a uzly očísľujte (výsledky riešenia sú uvedené v prílohe A).

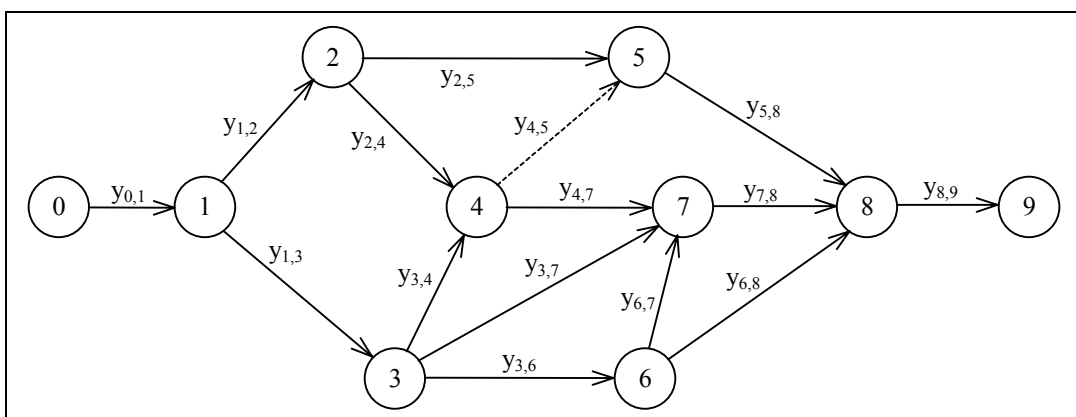


3. ČASOVÁ ANALÝZA NADVÄZNÉHO PROCESU (METÓDA CPM, PERT)

3.1 Formulácia modelu (úlohy)

V projekte **P**, znázornenom sieťovým diagramom (viď. Obr. 3. 1), máme **n+1** uzlov a **m** činností (hrán). Predpokladáme číslovanie uzlov od **0** do **n** krokom 1 pri dodržaní uvedených zásad číslovania vrcholov grafu. To znamená, že uzly ľubovoľného rádu majú pridelené čísla väčšie ako uzly rádu predchádzajúceho:

$$V_i^{R_k} < V_j^{R_{k+1}} \quad (3.1)$$



Obr. 3. 1 Sieťový diagram projektu

Každý činnosti $(i,j) \in P$ je priradené jej časové ohodnotenie y_{ij} (podrobnejšie bude problematika časového ohodnotenia činností rozobratá v kapitole 3.2).

Úlohou je vykonať časovú analýzu projektu vrátane vyhľadania kritickej cesty, stanovujúcej celkovú dobu trvania projektu.

3.2 Ohodnotenie činností

V prístupe k ohodnoteniu činností sa metódy CPM a PERT líšia.

Spoločnými znakmi obidvoch metód je z časového hľadiska znázornenie siete a s tým aj súvisiace výpočty.

Sieť (projekt) môže byť znázornená a potom aj počítaná:

- ⇒ **vo vnútornom kalendári;** čo znamená, že počiatočný uzol siete sa začína v čase 0; všetky výsledky výpočtov sú potom časovo relatívne vzhľadom na nulový čas počiatočného uzla grafu;
- ⇒ **vo vonkajšom kalendári;** tj. čas počiatočného uzla je nenulový a spravidla sa mu zadáva plánovaný čas začiatku projektu; výsledky výpočtov potom priamo odrážajú absolútne časy, do ktorého rámca je začiatok projektu postavený.

V praxi sa najčastejšie riešia projekty vo vnútornom kalendári. Takýto projekt je všeobecný a výsledky, vrátane zahájenia projektu, je možné "posadiť" do ľubovoľného časového okamihu.

3.2.1 Ohodnotenie činností - CPM

Každý činnosti $(i,j) \in P$ je pri metóde CPM priradená **očakávaná doba trvania** - y_{ij} . Je to čas (alebo priamo stanovená norma), za ktorý bude činnosť najpravdepodobnejšie vykonaná pri zohľadnení všetkých vonkajších obmedzení (napríklad kvalifikácia pracovných síl, počet a výkon nasadených strojov, zmennosť a pod.). Všetky tieto činitele zoberieme do úvahy a určíme y_{ij} . Tento čas považujeme pri metóde CPM za **pevný odhad**, prípadne normu, ktorú sa snažíme splniť.

Ak teda priradíme všetkým činnostiam siete príslušné „pevné“ y_{ij} , dostávame **matematický deterministický model** nadväzného procesu (projektu).

Metóda CPM je z hľadiska ohodnotenia hrán **deterministickým modelom** skutočnosti.

Pre doby trvania platí (vrátane dôb trvania fiktívnych činností),

$$y_{ij} \geq 0 \quad (3.2)$$

pričom pre fiktívne činnosti platí priamo $y_{ij} = 0$.

3.2.2 Ohodnotenie činností - PERT

Ako už bolo uvedené, pri metóde CPM je sústava časových ukazovateľov budovaná na predpoklade jednoznačne určených dôb trvania činností.

V bežnej praxi, a vo vojenskej najmä, musíme často počítať s určitým prvkom náhodnosti a určitým rizikom. Čím je projekt rozsiahlejší, a čím dlhšia je doba jeho realizácie, tým je väčší stupeň neistoty spojený s termínom jeho ukončenia. Charakter väčšiny nadväzných procesov vo vojenskej praxi, ktorý ovplyvňuje veľa nepredvídateľných vplyvov (ľudský činiteľ, aktivita protivníka, stupeň vycvičenosti, poveternostné podmienky, psychická a fyzická záťaž a veľa ďalších), priamo vyžaduje, aby sme explicitne brali do úvahy prvok náhody tak, aby sme stupeň neistoty mohli odhadovať a kvantitatívne vyjadrovať.

Základom metódy PERT, rovnako ako pri metóde CPM, je zostrojenie sieťového diagramu projektu. Na rozdiel od metódy CPM je PERT metódou **stochastickou**, kde doba trvania každej činnosti sa chápe ako náhodná veličina s určitým rozdelením pravdepodobnosti. To umožňuje vyjadriť mieru neistoty pomocou

odhadov pravdepodobností s akými je možné očakávať ukončenie celého projektu alebo jeho dôležitých etáp v stanovených termínoch.

Ak chceme určiť charakteristiky, respektíve samotný typ rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej, musíme pristúpiť k viacnásobnému opakovaniu náhodného procesu. V praxi nemáme vždy možnosť získať dostatočný štatistický materiál, na základe ktorého by bolo možné odhadnúť rozdelenie pravdepodobnosti a charakteristiky sledovaných veličín.

Metóda PERT preto vychádza z kvalifikovaného odhadu troch dôb trvania činnosti, a to:

- ⇒ optimistického odhadu doby trvania činnosti..... **a**;
- ⇒ pesimistického odhadu doby trvania činnosti..... **b**;
- ⇒ odhadu najpravdepodobnejšej doby trvania činnosti **m**.

Optimistický odhad je najkratšia uvažovaná doba činnosti. Predpokladá, že činnosť bude vykonaná v mimoriadne priaznivej situácii. Ak by mohla byť činnosť opakovaná v rovnakých podmienkach 100 krát, je vyhliadka, že by sa ju podarilo ukončiť v čase „**a**“ práve jedenkrát.

Pesimistický odhad je najdlhšia uvažovaná doba trvania činnosti. Činnosť v tejto dobe bude vykonaná vtedy, ak sa vyskytnú všetky možné obtiaže. V prípade hypotetického opakovania činnosti je vyhliadka na výskyt času „**b**“ približne 1:100.

Najpravdepodobnejší odhad znamená, že v prípade možnosti viacnásobného opakovania činnosti v rovnakých podmienkach bude činnosť v čase „**m**“ vykonaná najčastejšie. Je zrejmé, že odhad „**m**“ je práve „**modus**“ daného rozdelenia (čas s najväčšou hustotou pravdepodobnosti).

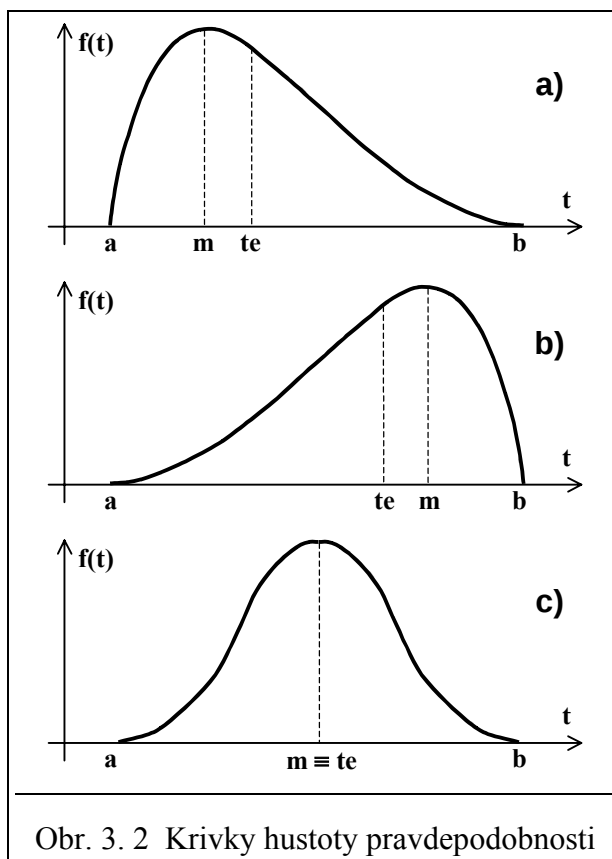
Pri časových odhadoch prihliadame na existujúce podmienky, v ktorých je činnosť vykonávaná, bez ohľadu na činnosti ostatné a bez ohľadu na plánované

termíny ukončenia celého projektu alebo jeho častí. Pri odhadoch berieme do úvahy iba tie vplyvy, ktoré je možné klasifikovať ako náhodné javy, napr. vplyv počasia, organizácie práce, vplyv kvalifikácie, pracovnej morálky výkonnosti, poruchovosti zariadení apod.

Uvedené tri odhady (a , m , b) transformujeme do jediného **odhadu strednej hodnoty doby trvania činnosti - t_e** , ktorý potom používame na výpočty termínových ukazovateľov projektu.

Získané časové odhady umožňujú konštruovať hypotetickú krivku funkcie hustoty pravdepodobnosti približne v troch základných variantoch tak, ako je znázornené na Obr. 3. 2.

Krivka hustoty pravdepodobnosti môže byť symetrická, ak $t_e = m$; v ostatných prípadoch je asymetrická vľavo alebo vpravo. V praxi sa najčastejšie vyskytuje prípad asymetrie vľavo (viď Obr. 3. 2 a).



Obr. 3. 2 Krivky hustoty pravdepodobnosti

Aj keď modus m a rozpätie $(b-a)$ sú dôležitými charakteristikami polohy a variability rozdelenia pravdepodobnosti, nemožno len s nimi ďalej pracovať, pretože iba na základe nich nemôžeme vykonávať odhady pravdepodobností ani výpočty termínových ukazovateľov projektu. Tieto odhady časov trvania činností (a, b, m) však predstavujú východiskové údaje na výpočet ďalších dvoch charakteristík, t.j. **strednej hodnoty - t_e** a **smerodajnej odchýlky - σ_{t_e}** doby trvania činnosti, ktoré už spĺňajú požiadavky, ktoré na ne z hľadiska potrieb kladieme.

Ako vyjadriť strednú hodnotu doby trvania činnosti a smerodajnú odchýlku pomocou časových odhadov a, b, m ? Na tento účel je potrebné zvoliť určitý funkčný tvar rozdelenia pravdepodobnosti pre doby trvania činností.

Metóda PERT pre svoje riešenie predpokladá **β -rozdelenie** pravdepodobnosti doby trvania činnosti, ktorého hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom:

$$f(x) = \frac{1}{(a-b)^{p+q+1}} * \frac{1}{B(p,q)} * (x-a)^{p-1} * (b-x)^{q-1} \quad (3.3)$$

$$\text{pre } a < x < b$$

$$f(x) = 0 \quad \text{pre } x < a, x > b \quad (3.4)$$

Beta rozdelenie nie je overené empirickými štúdiami, ale bolo zvolené pre niektoré svoje vlastnosti: jednoduché, spojité, unimodálne, konečné rozpätie, ľubovoľne asymetrické apod. Modus m môže zaujať ľubovoľnú polohu v rozsahu intervalu $\langle a, b \rangle$.

Tvar krivky hustoty pravdepodobnosti β -rozdelenia zhruba odpovedá krivkám uvedeným na Obr. 3. 2.

Teoreticky sa nedá dokázať, či β -rozdelenie zodpovedá skutočnosti. Možno iba empirickou cestou určiť jeho väčšie či menšie odchýlky od skutočnosti. Beta rozdelenie je iba aproximáciou skutočnosti; tak ho musíme chápať. Nemožnosť zisťovať rozdelenia pravdepodobností dôb trvania jednotlivých činností nás k zavedeniu takejto aproximácie núti.

Poznáme modus a rozpätie každej činnosti, ale na výpočty stochastického modelu PERT potrebujeme ďalšie charakteristiky a to (ako už bolo uvedené) strednú hodnotu te a smerodajnú odchýlku σ_{te} , a to za predpokladu, že pre činnosti platí β -rozdelenie pravdepodobnosti.

Stredná hodnota doby trvania a smerodajná odchýlka, resp. rozptyl, sú odvodené v teórii pravdepodobnosti a platia pre nich tieto vzťahy:

Stredná hodnota očakávanej doby trvania činnosti

$$te = \frac{a + 4m + b}{6} \quad (3.5)$$

Smerodajná odchýlka (a na základe nej potom rozptyl) sú odvodené na základe „pravidla 6σ “ ako $1/6$ rozpätia; potom:

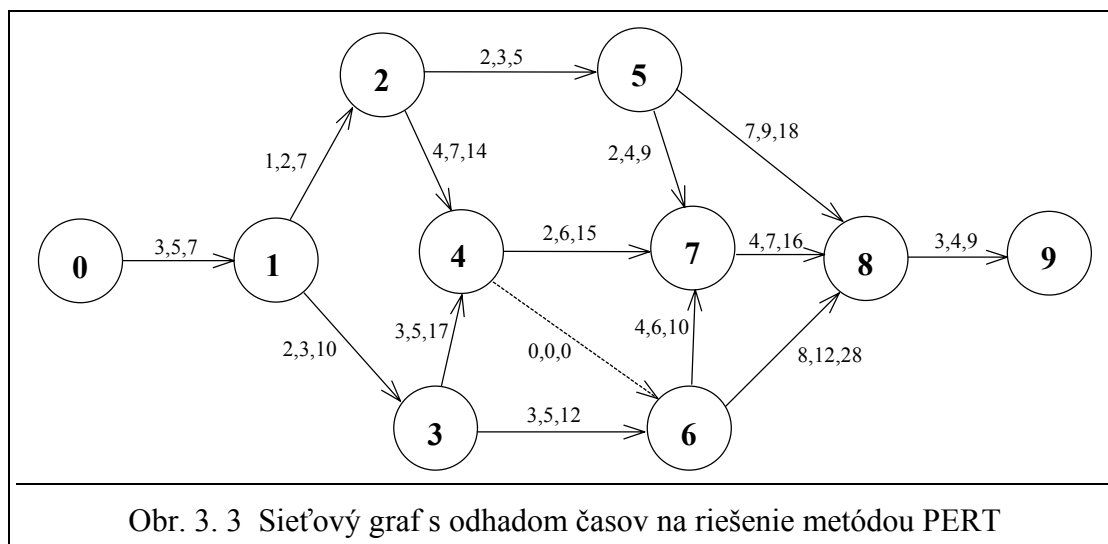
Smerodajná odchýlka

$$\sigma_{te} = \frac{b - a}{6} \quad (3.6)$$

Rozptyl

$$\sigma_{te}^2 = \frac{(b - a)^2}{36} \quad (3.7)$$

Na Obr. 3. 3 sú v sieťovom grafe uvedené tri odhady pre každú činnosť a následne v Tab. 3. 1 postupné výpočty strednej doby trvania činností, rozpätia, rozptylu a smerodajnej odchýlky.



Tieto veličiny postačujú na výpočet sieťového grafu typu PERT a samotnú analýzu je potom možné vykonať dvomi spôsobmi:

- ⇒ redukciou na deterministický model;
- ⇒ použitím metódy Monte Carlo.

Činnosť i j	a	m	b	te	b - a	σ_{te}	σ_{te}^2
0 1	3	5	7	5,0	4	0,67	0,44
1 2	1	2	7	2,67	6	1,0	1,0
1 3	2	3	10	4,0	8	1,33	1,78
2 4	4	7	14	7,67	10	1,67	2,78
2 5	2	3	5	3,17	3	0,5	0,25
3 4	3	5	17	6,67	14	2,33	5,44
3 6	3	5	12	5,83	9	1,5	2,25
4 6	0	0	0	0	0	0	0
4 7	2	6	15	6,83	13	2,17	4,69
5 7	2	4	9	4,5	7	1,17	1,36
5 8	7	9	18	10,17	11	1,83	3,36
6 7	4	6	10	6,33	6	1,0	1,0
6 8	8	12	28	14,0	20	3,33	11,11
7 8	4	7	16	8,0	12	2,0	4,0
8 9	3	4	9	4,67	6	1,0	1,0

Tab. 3. 1 Základné údaje o činnostiach v sieťovom grafe projektu

3.3 Výpočet termínových ukazovateľov - metóda CPM

Pri výpočte termínových ukazovateľov, a tým aj kritickej cesty, pracujeme so sieťou konštruovanou na základe zásad opísaných v predchádzajúcich kapitolách a pre každú činnosť máme jediný údaj o dobe jej trvania (predpokladanú dobu trvania činnosti y_{ij}).

Pre jednotlivé termínové ukazovatele zavedieme tieto symboly:

a) Termíny vzťahujúce sa na činnosti

y_{ij} doba trvania činnosti (i,j);

tz_{ij}^0 najskôr možný začiatok činnosti (i,j), (ekvivalentné značenie - **ZM** - začiatok možný);

tz_{ij}^λ najneskôr prípustný začiatok činnosti (i,j), (ekvivalentné značenie - **ZP** - začiatok prípustný);

tk_{ij}^0 najskôr možné ukončenie činnosti (i,j), (ekvivalentné značenie - **KM** - koniec možný);

tk_{ij}^λ najneskôr prípustný koniec činnosti (i,j), (ekvivalentné značenie - **KP** - koniec prípustný);

Poznámka: *Všimnime si, že všetky termíny sa vzťahujú na činnosti; dolné indexy označujú činnosť a horné indexy označujú, či ide o termín najskôr možný (0), alebo najneskôr prípustný (λ).*

b) Termíny a ďalšie značenia vzťahujúce sa na vrcholy (uzly)

T_i^0 najskôr možný termín uzla „i“, (ekvivalentné značenie - **TM** - termín možný);

T_i^λ najneskôr prípustný termín uzla „i“, (ekvivalentné značenie - **TP** - termín prípustný);

V_i^+ množina následníkov vrcholu „i“;

V_i^- množina predchodcov vrcholu „i“.

Pri úlohách analýzy kritickej cesty nás zaujíma nielen dĺžka kritickej cesty a jej priebeh, ale aj časové rezervy jednotlivých činností. Aj keď kritická cesta je v podstate maximálna cesta od počiatočného ku koncovému vrcholu projektu, vykonávajú sa, práve za účelom následného zistenia časových rezerv, výpočty podľa samostatných vzorcov odlišným spôsobom ako pri riešení optimálnych ciest v teórii grafov. S problematikou časových rezerv sa oboznámime postupne v ďalšom výklade.

Zo základných pravidiel zostavovania sieťových diagramov, ktoré sa týkajú závislostí činností je zrejmé, že žiadna činnosť, ktorá z príslušného uzla vychádza, nemôže začať skôr, ako budú ukončené všetky činnosti, ktoré do tohto uzla vstupujú. Tento časový okamih predstavuje najskôr možný termín uzla T_i^0 , z čoho vyplýva, že pre všetky činnosti vystupujúce z uzla V_i bude platiť

$$tz_{ij}^0 = T_i^0 \quad \text{pre } (V_i, V_j) \quad \text{kde } V_j \in V_i^+ \quad (3.8)$$

Podobný záver (ale z opačného pohľadu) môžeme prijať aj pre najneskôr prípustný termín uzla T_j^λ , pre ktorý platí, že všetky činnosti, ktoré do uzla vstupujú, musia byť ukončené najneskôr do termínu T_j^λ , aby nebol ohrozený celkový termín ukončenia projektu. Potom platí

$$tk_{ij}^\lambda = T_j^\lambda \quad \text{pre } (V_i, V_j) \quad \text{kde } V_i \in V_j^- \quad (3.9)$$

Úlohou potom je stanovenie termínov uzlov (T_i^0 a T_j^λ).

Výpočet sa vykonáva v dvoch fázach. Prvá predstavuje postup od počiatočného uzla siete k uzlu koncovému, a počítajú sa pri nej najskôr možné termíny ukončenia činností podľa vzťahu

$$tk_{ij}^0 = T_i^0 + y_{ij} \quad (3.10)$$

a na základe nich sa stanovujú najskôr možné termíny uzlov podľa vzťahu

$$T_j^0 = \max\{tk_{ij}^0\} = \max\{T_i^0 + y_{ij}\} \quad \text{pre činnosti } (i, j), \text{ kde } i \in V_j^- \quad (3.11)$$

V druhej fáze, ktorá sa uskutočňuje od koncového uzla siete k počiatočnému, sa vypočítavajú najneskôr prípustné termíny začatia činností podľa vzťahu

$$tz_{ij}^\lambda = T_j^\lambda - y_{ij} \quad (3.12)$$

a na základe nich sa stanovujú najneskôr prípustné termíny uzlov podľa vzťahu

$$T_i^\lambda = \min\{tz_{ij}^\lambda\} = \min\{T_j^\lambda - y_{ij}\} \quad \text{pre činnosti } (i, j), \text{ kde } j \in V_i^+ \quad (3.13)$$

Vyššie uvedené vzťahy sú vzťahy rekurentné, čo znamená, že pre možnosť ich použitia musíme vždy poznať aspoň jednu hodnotu z počítaných veličín. Na ten účel sa pre vzťahy (3.10) a (3.11) na počiatku výpočtu spravidla volí najskôr možný termín počiatočného uzla projektu. Najčastejšie sa pre tento termín (T_0^0) volí hodnota „0“ (3.14), čo zodpovedá riešeniu projektu vo vnútornom kalendári.

$$T_0^0 = 0 \quad (3.14)$$

Obdobným spôsobom, ako vzťahy (3. 10) a (3. 11), je potrebné doplniť pred začatím druhej etapy výpočtu vzťahy (3. 12) a (3. 13) zadáním jednej z počiatočných veličín. Tu sú už širšie možnosti. Najčastejšie sa po ukončení prvej etapy výpočtu použije jej výsledok uplatnením relácie

$$T_n^\lambda = T_n^0 \quad (3. 15)$$

Toto dosadenie by sa dalo vysvetliť tak, že súhlasíme s dobou trvania projektu, vypočítanú v prvej výpočtovej fáze a dosadzujeme ju ako požadovaný termín ukončenia celého projektu pre druhú výpočtovú fázu výpočtov najneskôr prípustných termínov jednotlivých uzlov.

Iná možnosť je (pri predpoklade, že máme vopred stanovenú dobu trvania celej akcie T_s), že výpočet najneskôr prípustných termínov jednotlivých uzlov podľa vzťahu (3. 13) začneme položením

$$T_n^\lambda = T_s \quad \text{kde } T_s \neq T_n^0 \quad (3. 16)$$

Potom môžu nastať dva prípady:

- a) Keď $T_s > T_n^0$, potom sa výpočet dá bez ťažkostí uskutočniť, ale s tým dôsledkom, že všetky činnosti budú mať časové rezervy.
- b) Keď $T_s < T_n^0$, potom je formálne tiež možné výpočet vykonať, ale časové rezervy budú (minimálne pri kritickej ceste) vychádzať ako záporné čísla a kritická cesta (ak je možné o nej v tomto prípade hovoriť) bude postupnosť činností s rovnako veľkými maximálnymi zápornými časovými rezervami, ktoré svedčia o tom, že akcia je v danom termíne neuskutočniteľná a na jej splnenie chýba práve tento čas. Bolo by potrebné buď prehodnotiť celý graf s cieľom dosiahnuť skrátenia kritickej cesty, alebo odsunúť požadovaný termín ukončenia T_s prinajmenšom o maximálnu hodnotu zápornej časovej rezervy.

Naše doposiaľ známe poznatky o termínoch používaných v časovom pláne projektu môžeme zhrnúť takto:

- Základom termínového plánovania projektu sú termíny T_i^0 a T_i^λ . Hodnota T_i^0 označuje termín, v ktorom *môžu byť najskôr započaté* činnosti, ktoré z uzla vystupujú. Ide o termín *najskôr možného výskytu uzla*.
- Hodnota T_i^λ naproti tomu označuje termín, v ktorom *musia najneskôr skončiť* všetky činnosti, ktoré do daného uzla vstupujú. Ide teda o termín *najneskôr prípustného výskytu uzla* tak, aby nebola narušená celková doba ukončenia projektu.
- Je potrebné rozlišovať medzi termínmi uzlov a termínmi činností, pretože najneskôr prípustné započatie činností sa vždy nezhoduje s najneskôr prípustným termínom počiatočného uzla činnosti ($tz_{ij}^\lambda \geq T_i^\lambda$) a rovnako termín najskôr možného ukončenia činnosti sa nie vždy zhoduje s najskôr možným termínom koncového uzla činnosti ($tk_{ij}^0 \leq T_j^0$). K rovnosti týchto termínov dochádza iba pri činnostiach, prostredníctvom ktorých boli termíny T_i^λ a T_j^0 určené.

3.3.1 Časové rezervy

Pre potreby dôkladného rozboru siete a praktického riadenia akcie sa vypočítavajú pri časovej analýze projektu **rezervy**.

Z hľadiska príslušnosti rezerv k objektom grafu ich môžeme rozdeliť do dvoch skupín:

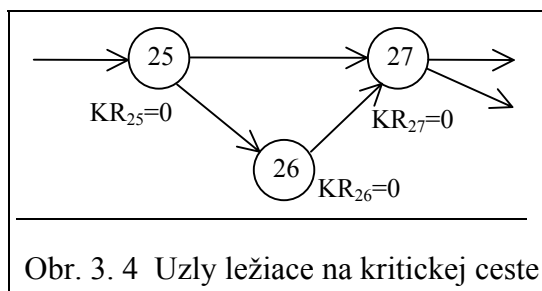
- ⇒ rezervy prislúchajúce činnostiam;
- ⇒ rezervy prislúchajúce uzlom.

Pre uzly existuje z tohoto hľadiska delenia jediná rezerva; **kritická rezerva uzla - KR_i** , označovaná tiež ako **diferencia uzla**.

$$KR_i = T_i^\lambda - T_i^0 \quad (3.17)$$

Jej praktický význam spočíva v tom, že udáva časový interval, v ktorom očakávame zakončenie činností zbiehajúcich sa v uzle. Kritickú rezervu možno považovať za **mieru subkritickosti uzla**; čím nižšia je jej hodnota, tým väčšia je pravdepodobnosť, že sa uzol dostane v priebehu realizácie projektu na kritickú cestu, resp. keď $KR_i=0$ uzol leží na kritickej ceste.

Pozn.: Samotný fakt, že poznáme uzly, ktoré ležia na kritickej ceste ($KR_i=0$), nemusí jednoznačne určovať priebeh kritickej cesty. Na Obr. 3. 4 je situácia, keď uzly 25, 26 a 27 ležia na kritickej ceste, ale iba z tejto skutočnosti nie je jasné, kadiaľ kritická cesta vedie (či je to postupnosť uzlov 25, 26, 27, alebo sa vetví a vedie cez uzly 25, 26, 27 a súčasne aj cez uzly 25, 27). Na jednoznačné určenie kritickej cesty musíme preto použiť iné ukazovatele.



Rezervy prislúchajúce činnostiam.

Celková rezerva — CR

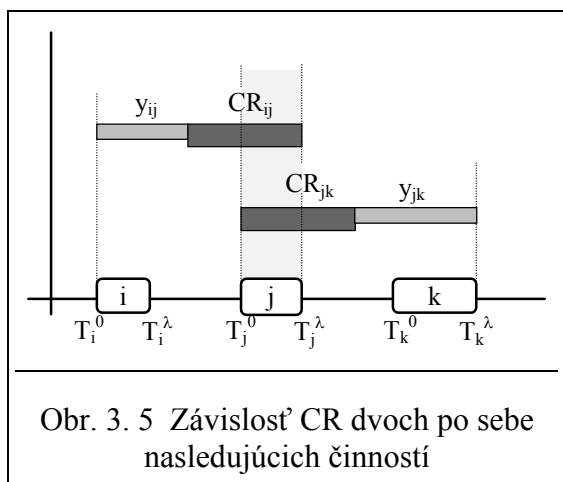
$$CR_{ij} = T_j^\lambda - T_i^0 - y_{ij} \quad (3.18)$$

CR_{ij} je rozdiel medzi maximálne prípustným rozpätím ($T_j^\lambda - T_i^0$) a dobou trvania činnosti. Jej hodnota je vždy nezáporná a udáva, o koľko časových jednotiek možno predĺžiť dobu trvania, alebo posunúť čas najskôr možného začiatku činnosti bez ohrozenia konečného termínu celého projektu. Poznanie veľkosti CR_{ij} sa využíva na určenie či daná činnosť je kritická (leží na kritickej ceste). Keď $CR_{ij}=0$, potom činnosť (i,j) je súčasťou kritickej cesty.

Poznámka.: V súvislosti s vyššie uvedeným príkladom kritických rezerv uzlov (viď. Obr. 3. 4) by potom pre celkové rezervy príslušných činností prichádzali do úvahy dva varianty:

1. $CR_{25,26}=0$, $CR_{26,27}=0$ alebo
2. $CR_{25,26}=0$, $CR_{26,27}=0$, $CR_{25,27}=0$

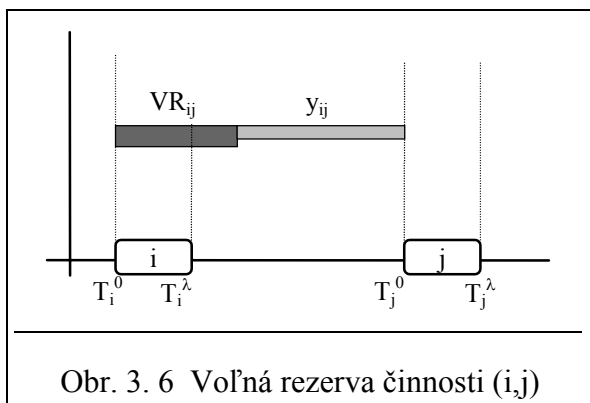
Celková rezerva činností má niektoré nepriaznivé vlastnosti. Podstatná nepriaznivá vlastnosť CR je, že jej vypočítaná hodnota sa môže vzhľadom na nadväzné činnosti využiť iba izolovane. Táto nepriaznivá vlastnosť je znázornená v časovej osi na Obr. 3. 5.



Ak sa v j-tom uzle líši T_j^0 od $T_j^λ$, započítava sa tento interval $(T_j^λ - T_j^0)$ do časového intervalu na výpočet časových rezerv ako pre činnosť (i,j), tak aj pre činnosť (j,k). Keby sme potom využili celú CR_{ij} , nebude už možné, aby činnosť (j,k) mohla využiť svoju CR_{jk} v plnom rozsahu. Z tohto dôvodu sa počítajú ďalšie rezervy činností, ktoré tuto negatívnu vlastnosť nemajú.

Voľná rezerva — VR

$$VR_{ij} = T_j^0 - T_i^λ - y_{ij} \quad (3.19)$$

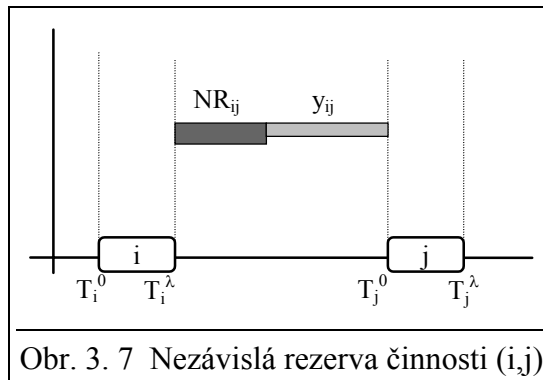


Voľná rezerva udáva, o koľko časových jednotiek možno predĺžiť dobu trvania, alebo posunúť čas najskôr možného začiatku činnosti, aby sa nezmenili najskôr možné začiatky všetkých bezprostredne nasledujúcich činností. Grafické znázornenie voľnej rezervy je uvedené na Obr. 3. 6.

Nezávislá rezerva — NR

$$NR_{ij} = T_j^0 - T_i^\lambda - y_{ij} \quad (3.20)$$

Nezávislá rezerva udáva, o koľko časových jednotiek môžeme predĺžiť dobu trvania, alebo posunúť jej začiatok, nezávisle na časových pomeroch v sieti. Tzn., že nezmení najskôr možný začiatok bezprostredne nasledujúcich a najneskôr prípustný koniec bezprostredne predchádzajúcich činností.



Obr. 3. 7 Nezávislá rezerva činnosti (i,j)

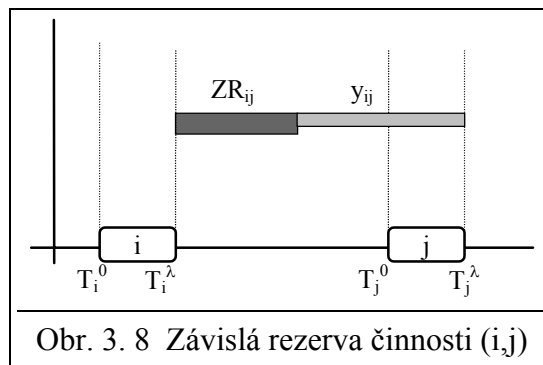
Grafické znázornenie nezávislej rezervy je uvedené na Obr. 3. 7.

Závislá rezerva — ZR

$$ZR_{ij} = T_j^\lambda - T_i^\lambda - y_{ij} \quad (3.21)$$

Závislá rezerva udáva, o koľko časových jednotiek možno predĺžiť dobu trvania činnosti, alebo posunúť jej začiatok oproti najneskôr prípustnému koncu bezprostredne predchádzajúcich činností, aby sa nezmenil najneskôr prípustný začiatok činností bezprostredne nasledujúcich.

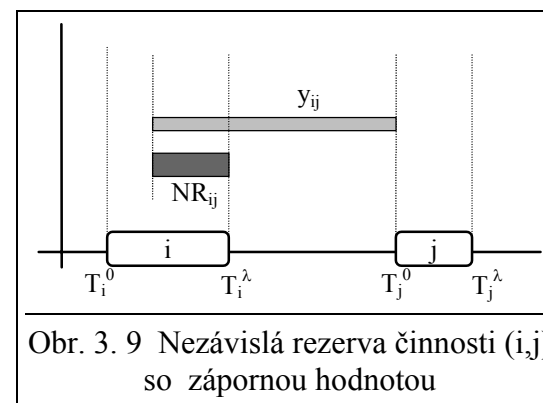
Grafické znázornenie závislej rezervy je uvedené na Obr. 3. 8



Obr. 3. 8 Závislá rezerva činnosti (i,j)

Rezervy činností celková, voľná a závislá musia vychádzať nezáporné. Naproti tomu **nezávislá rezerva** môže nadobúdať aj záporné hodnoty, ako vidieť na Obr. 3. 9.

Pretože záporná hodnota nezávislej rezervy nemá v tomto prípade zmysel, používa sa

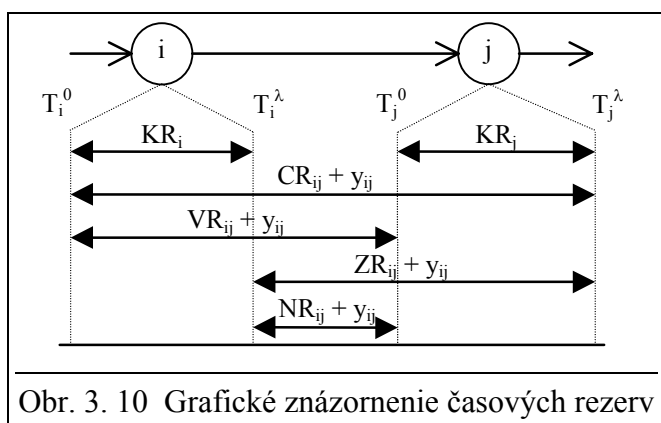


Obr. 3. 9 Nezávislá rezerva činnosti (i,j) so zápornou hodnotou

niekedy na jej určenie vzťah (3. 22), ktorý potlačí výstup záporných hodnôt a nahradí ich nulami.

$$NR_{ij} = \max\{0, T_j^0 - T_i^\lambda - y_{ij}\} \quad (3. 22)$$

Medzi všetkými uvedenými rezervami existujú dôležité vzťahy, ktoré môžeme s výhodou využiť pri výpočte rezerv. Grafické znázornenie závislostí časových rezerv od ďalších časových ukazovateľov je uvedené na Obr. 3. 10.



Obr. 3. 10 Grafické znázornenie časových rezerv

Z tohto obrázku môžeme ľahko vyčítať aj základné vzťahy medzi rezervami (s predpokladom, že poznáme kritické rezervy krajných uzlov činnosti a dobu trvania činnosti). Vzťahy závislostí sú prehľadne usporiadané v Tab. 3. 2.

	CR_{ij}	VR_{ij}	NR_{ij}	ZR_{ij}
CR_{ij}	$T_j^\lambda - T_i^0 - y_{ij}$	$VR_{ij} + KR_j$	$NR_{ij} + KR_i + KR_j$	$ZR_{ij} + KR_i$
VR_{ij}	$CR_{ij} - KR_j$	$T_j^0 - T_i^0 - y_{ij}$	$NR_{ij} + KR_i$	$ZR_{ij} + KR_i + KR_j$
NR_{ij}	$CR_{ij} - KR_i - KR_j$	$VR_{ij} - KR_i$	$T_j^0 - T_i^\lambda - y_{ij}$	$ZR_{ij} - KR_j$
ZR_{ij}	$CR_{ij} - KR_i$	$VR_{ij} - KR_i + KR_j$	$NR_{ij} + KR_j$	$T_j^\lambda - T_i^\lambda - y_{ij}$

Tab. 3. 2 Vzťahy medzi časovými rezervami

Poloha na kritickej ceste +..leží, -..neleží na krit. ceste			Vzťah závislosti medzi rezervami
uzol i	uzol j	činnosť (i,j)	
+	+	+	$CR_{ij}=VR_{ij}=ZR_{ij}=NR_{ij}=0$
+	+	-	$CR_{ij}=VR_{ij}=ZR_{ij}=NR_{ij}>0$
+	-	-	$CR_{ij}=ZR_{ij}, VR_{ij}=NR_{ij}$
-	+	-	$CR_{ij}=VR_{ij}, ZR_{ij}=NR_{ij}$

Tab. 3. 3 Závislosti rezerv

Obr. 3. 10 nám posluží aj na vyjadrenie základných vzťahov rezerv činností vzhľadom na priebeh kritickej cesty. Môžu nastať štyri prípady, znázornené (aj so vzťahmi medzi rezervami) v Tab. 3. 3. Porovnanie hodnôt všetkých rezerv v každej činnosti

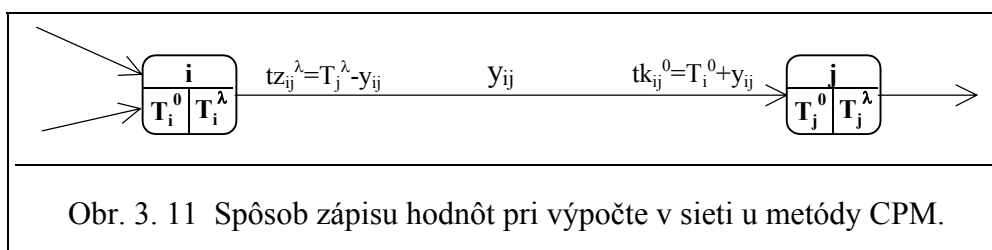
poskytuje možnosť poznať štruktúru grafu aj keď vlastný sieťový diagram nemáme

k dispozícii. Okrem toho porovnanie uvedených vzťahov medzi rezervami so štruktúrou sieťového diagramu je i významným nástrojom kontroly správnosti vykonaných výpočtov termínových ukazovateľov časového plánu.

3.3.2 Výpočet v sieti

Jednoduché siete malých rozmerov je výhodné počítať priamo v sieťovom diagrame. Výpočet sa vykonáva ručne a existujú odporúčania, ktoré uvádzajú, že sieť rozsahu do 100 uzlov sa dá bez ťažkostí ručne spočítať. Iným kritériom na rozhodnutie o výpočte ručnom, alebo na počítači je počet potrebných kópií, respektíve predpokladaný počet prepočtov siete. Čím viac prepočtov je požadovaných, tým skôr sa oplatí uskutočniť výpočet na počítači aj pre rozsahom malé siete.

Pri výpočte na sieti sa postupuje tak, že sa sieť kreslí so zväčšenými uzlovými bodmi, aby sa do nich mohli zaznamenávať príslušné vypočítané hodnoty. Potrebne hodnoty budeme zaznamenávať aj pri jednotlivých činnostiach. Spôsob zaznamenávania hodnôt pri výpočte v sieťovom grafe je znázornený na Obr. 3. 11.



Postup výpočtu priamo v sieti je nasledujúci:

Výpočet najskôr možných termínov uzlov T_i^0 (postup vpred)

- pri počiatočnom uzle volíme hodnotu $T_0^0 = 0$;
- na konci všetkých šípok, vychádzajúcich z už vyhodnoteného uzla, vyznačíme hodnotu $tk_{ij}^0 = T_i^0 + y_{ij}$;

- c) nájdeme uzol, pri ktorom už všetky, doň vchádzajúce šípky, obsahujú časový údaj a vyberieme najvyššiu hodnotu tk_{ij}^0 , ktorú zarámujeme a vpíšeme do políčka pre T_j^0 (ľavého);
- d) opakujeme postup od bodu b) pre všetky uzly siete, dokiaľ nezískame hodnotu T_n^0 pre koncový uzol grafu.

Výpočet najneskôr prípustných termínov uzlov T_i^λ (postup vzad)

- a) pri koncovom uzle volíme hodnotu $T_n^\lambda = T_n^0$ (súhlasíme s dobou trvania projektu, ktorá vyšla v prvej fáze výpočtu) a túto hodnotu zapíšeme do pravého políčka uzla;
- b) na začiatku všetkých šípok, ktoré smerujú do uzlového bodu z ktorého vykonávame výpočet, vyznačíme hodnotu $tz_{ij}^\lambda = T_j^\lambda - y_{ij}$;
- c) nájdeme uzol, u ktorého všetky šípky z neho vychádzajúce sú časovo ohodnotené a vyberieme najmenšiu hodnotu, ktorú zarámujeme a vpíšeme do políčka pre T_i^λ (pravého) príslušného uzla;
- d) opakujeme postup od bodu b) pre všetky uzly siete, dokiaľ nezískame hodnotu T_0^λ pre počiatočný uzol grafu.

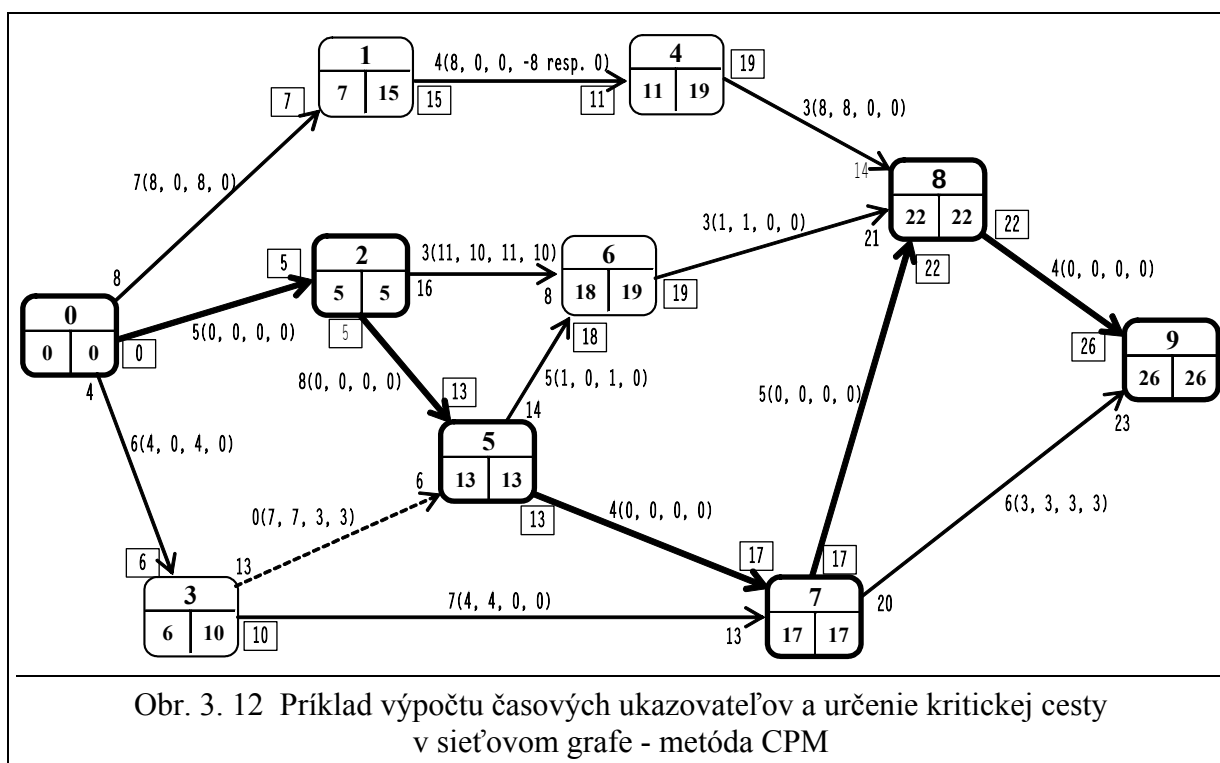
Za predpokladu, že sme pre koncový uzol prijali variant $T_n^0 = T_n^\lambda$, potom pre počiatočný uzol musí vyjsť pri výpočte vzad hodnota $T_0^0 = T_0^\lambda = 0$. Ak vyjde iná hodnota, bola vo výpočte chyba.

Za predpokladu, že sme neprijali pre koncový uzol grafu vyššie uvedený variant, musí platiť vzťah (ktorý je ale univerzálne platný, tzn. aj pre predchádzajúci prípad):

$$T_n^\lambda - T_n^0 = T_0^\lambda - T_0^0 \quad (3.23)$$

Priebeh kritickej cesty určíme na základe výsledkov časových rezerv, resp. celkovej rezervy činností. Rezervy činností počítame podľa vzťahov (3.18), (3.19),

(3. 20) a (3. 21) resp. (3. 22). Výsledky môžeme zaznamenávať priamo v diagrame pri príslušných činnostiach, alebo v tabuľke. Činnosti, ktorých $CR=0$ sú **kritické činnosti** a ich postupnosť od počiatkového ku koncovému uzlu grafu predstavuje **kritickú cestu**. Príklad výpočtu je vykonaný v sieti na Obr. 3. 12, časové rezervy činností sú zaznamenané priamo pri dobách trvania činností v poradí $y_{ij}(CR,VR,ZR,NR)$, kritická cesta je vyznačená silnou čiarou.



3.3.3 Výpočet v tabuľke

Druhým spôsobom výpočtu je výpočet v tabuľke. Tento je výhodný najmä pre siete stredného rozsahu, pokiaľ vykonávame výpočet ručne. Učebnicová výhodnosť tohto spôsobu výpočtu je v tom, že je v podstate rovnaká čo do obsahu i formy s väčšinou výsledkov, ktoré poskytujú programy počítačov.

Pri výpočte v tabuľke je možné postupovať dvomi spôsobmi. Prvý postup je čiastočne jednoduchší a lepšie sa pri ňom vypočítavajú celkové rezervy činností a tým

aj kritická cesta. Druhý je trochu náročnejší, výrazne jednoduchšie sa ale týmto spôsobom vypočítavajú ostatné časové rezervy.

Prvý variant výpočtu v tabuľke

Prvé štyri stĺpce tabuľky predstavujú vstupné údaje, a to:

- ⇒ poradové číslo činnosti;
- ⇒ číselné označenie činnosti dvojicou jej krajných uzlov (i, j);
- ⇒ dobu trvania činnosti y_{ij} .

Na základe údajov 2. až 4. stĺpca sa potom vypočítavajú hodnoty ostatných stĺpcov tabuľky.

Prvá výpočtová fáza predstavuje výpočet stĺpca 5 a 6, druhá fáza výpočet údajov stĺpca 7 a 8. Nakoniec sa vypočítavajú celkové rezervy v stĺpci 9.

Výpočty môžeme vykonať týmito krokmi (postup je ilustrovaný v Tab. 3. 4 na rovnakom príklade ako výpočet v sieti uvedený na Obr. 3. 12):

Prvá fáza (postup od počiatočného ku koncovému uzlu grafu):

- 1) Do všetkých riadkov stĺpca 5 s činnosťami, ktoré vychádzajú z počiatočného uzla siete, napíšeme nulu - pri použití vzťahu (3. 14).
- 2) Hodnoty veličín 6. stĺpca dostávame súčtom hodnôt stĺpca 4. a 5., postupne tak, ako získavame premenné v stĺpci 5.
- 3) Vyhľadáme maximálnu hodnotu v stĺpci 6. v tých riadkoch, ktoré odpovedajú činnostiam s rovnakým (práve počítaným) koncovým uzlom a toto maximum zapíšeme do 5. stĺpca tých riadkov, ktoré majú rovnaký počiatočný uzol činnosti (napr. pre uzol 5 hľadáme maximum v 6. stĺpci riadkov 5 a 7 a vyhládané maximum = 13 zapíšeme v 5. stĺpci do riadkov 10 a 11; vid'. Tab. 3. 4).
- 4) Kroky 2) a 3) opakujeme až do vyplnenia všetkých riadkov 5. a 6. stĺpca.

- 5) Na záver prvej fázy vyhl'adáme maximálnu hodnotu v tých riadkoch 6. stĺpca, ktorých činnosti sa končia v koncovom uzle grafu; táto hodnota predstavuje najskôr možný termín ukončenia celej akcie (T_n^0).

Druhá fáza (postup od koncového k počiatočnému uzlu grafu):

- 6) Pri použití vzťahu (3. 15) zapíšeme do 8. stĺpca tých riadkov, ktorých činnosti sa končia v koncovom uzle grafu, hodnotu zistenú v 5) kroku (v našom prípade hodnota 26 - Tab. 3. 4).
- 7) Hodnoty 7. stĺpca získame v riadkoch , pre ktoré už boli určené veličiny 8. stĺpca tak, že od nich odčítame dobu trvania činnosti (hodnotu 4. stĺpca).

P.č.	Činnosť		Doba trvania y_{ij}	Najskôr možný		Najneskôr prípustný		Celková rezerva CR_{ij}
	i	j		začiatok $tz_{ij}^0 = T_i^0$	koniec tk_{ij}^0	začiatok tz_{ij}^λ	koniec $tk_{ij}^\lambda = T_j^\lambda$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	7	0	7	8	15	8
2	0	2	5	0	5	0	5	0 •
3	0	3	6	0	6	4	10	4
4	1	4	4	7	11	15	19	8
5	2	5	8	5	13	5	13	0 •
6	2	6	3	5	8	16	19	11
7	3	5	0	6	6	13	13	7
8	3	7	7	6	13	10	17	4
9	4	8	3	11	14	19	22	8
10	5	6	5	13	18	14	19	1
11	5	7	4	13	17	13	17	0 •
12	6	8	3	18	21	19	22	1
13	7	8	5	17	22	17	22	0 •
14	7	9	6	17	23	20	26	3
15	8	9	4	22	26	22	26	0 •

Tab. 3. 4 Výpočet v tabuľke - metóda CPM - prvý variant

- 8) V 7. stĺpci vyhl'adáme minimálnu hodnotu v tých riadkoch, ktoré odpovedajú činnostiam s rovnakým (práve počítaným) počiatočným uzlom a toto minimum zapíšeme do 8. stĺpca tých riadkov, ktorých činnosti majú rovnaký koncový uzol (napr. pre 7. uzol hľadáme minimum v 7. stĺpci v riadkoch 13 a 14 a vyhl'adané minimum = 17 zapíšeme v 8. stĺpci do riadkov 8 a 11).

9) Kroky 7) a 8) opakujeme až do vyplnenia všetkých riadkov 7. a 8. stĺpca.

Po vykonaní obidvoch výpočtových fáz sa počítajú časové rezervy.

10) Základom je výpočet celkovej časovej rezervy CR, z ktorej sa zistí aj priebeh kritickej cesty. Celkovú rezervu vypočítame:

$$\text{stĺpec 9} = \text{stĺpec 8} - \text{stĺpec 4} - \text{stĺpec 5} \quad \text{čo je tiež}$$

$$\text{stĺpec 9} = \text{stĺpec 8} - \text{stĺpec 6}.$$

Výsledky výpočtov, aj priebeh kritickej cesty, je rovnaký ako pri výpočte v sieti (Obr. 3. 12). Pre zvýraznenie kritickej cesty sú v tabuľke nulové celkové rezervy činností, ktoré ju tvoria, zvýraznené značkou „•“.

Druhý variant výpočtu v tabuľke

Postup a výsledky sú prezentované v Tab. 3. 5. Stĺpce 1,2,3 a 4 sú rovnaké ako v príklade v Tab. 3. 4, a iba sa vyplňajú.

P.č.	Činnosť		Doba trvania y_{ij}	Termín uzla i		Termín uzla j		Rezervy činností			
	i	j		Najskôr možný T_i^0	Najneskôr prípustný T_i^λ	Najskôr možný T_j^0	Najneskôr prípustný T_j^λ	celková CR_{ij}	voľná VR_{ij}	závislá ZR_{ij}	nezávislá NR_{ij}
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	7	0	0	7	15	8	0	8	0
2	0	2	5	0	0	5	5	0 •	0	0	0
3	0	3	6	0	0	6	10	4	0	4	0
4	1	4	4	7	15	11	19	8	0	0	-8 (0)
5	2	5	8	5	5	13	13	0 •	0	0	0
6	2	6	3	5	5	18	19	11	10	11	10
7	3	5	0	6	10	13	13	7	7	3	3
8	3	7	7	6	10	17	17	4	4	0	0
9	4	8	3	11	19	22	22	8	8	0	0
10	5	6	5	13	13	18	19	1	0	1	0
11	5	7	4	13	13	17	17	0 •	0	0	0
12	6	8	3	18	19	22	22	1	1	0	0
13	7	8	5	17	17	22	22	0 •	0	0	0
14	7	9	6	17	17	26	26	3	3	3	3
15	8	9	4	22	22	26	26	0 •	0	0	0

Tab. 3. 5 Výpočet v tabuľke - metóda CPM - druhý variant

Ďalší postup výpočtu je nasledujúci:

Prvá fáza (postup od počiatočného ku koncovému uzlu grafu):

- 1) Do všetkých riadkov 5. stĺpca, ktorých činnosti vychádzajú z počiatočného uzla grafu, zapíšeme hodnotu 0.
- 2) V poradí podľa čísiel uzlov (za predpokladu, že číslovanie uzlov odpovedá nadväznosti hrán siete) vykonáme:
 - a) v riadkoch, v ktorých už máme vypočítané hodnoty 5. stĺpca a ktoré majú koncový uzol činnosti rovnaký s uzlom, ktorý práve počítame, vyhľadáme maximálny súčet hodnôt 4. a 5. stĺpca;
 - b) toto maximum zapíšeme do 7. stĺpca tých riadkov, v ktorých sme ho hľadali, t.j. do riadkov činností, ktorých koncový uzol má číslo počítaného uzla;
 - c) rovnakú maximálnu hodnotu zapíšeme do 5. stĺpca tých riadkov, ktoré majú číslo počiatočného uzla činnosti rovnaké ako uzol počítaný (napr. pre 5. uzol hľadáme maximum v riadkoch 5 ($8+5$) a 7 ($0+6$), ktoré sa rovná 13 a tuto hodnotu zapíšeme v 7. stĺpci do riadkov 5 a 7 a v 5. stĺpci do riadkov 10 a 11).
- 3) Krok 2) algoritmu opakujeme až do úplného vyplnenia 5. a 7. stĺpca.
Maximálna hodnota v 7. stĺpci predstavuje najskôr možný termín koncového uzla grafu a tým aj najskôr možný termín ukončenia celej akcie (T_n^0).

Druhá fáza (postup od koncového k počiatočnému uzlu grafu):

- 4) Pri použití vzťahu (3. 15) zapíšeme do 8. stĺpca tých riadkov, ktorých činnosti sa končia v koncovom uzle grafu, hodnotu z príslušného riadku 7. stĺpca (T_n^0).

- 5) V zostupnom poradí číslovania uzlov (od koncového k počiatočnému) vykonáme:
- a) pre riadky, v ktorých už máme vypočítané hodnoty 8. stĺpca a ktoré majú počiatočný vrchol činnosti rovnaký s uzlom, ktorý práve počítame, vyhladáme minimálny rozdiel hodnôt 8. a 4. stĺpca;
 - b) toto minimum zapíšeme do 6. stĺpca tých riadkov, v ktorých sme ho hľadali, t.j. do riadkov činností, ktorých počiatočný uzol má číslo počítaného uzla;
 - c) rovnakú minimálnu hodnotu zapíšeme do 8. stĺpca tých riadkov, ktoré majú číslo koncového uzla rovnaké ako počítaný uzol (napr. pre 7. uzol hľadáme minimum v riadkoch 13 (22-5) a 14 (26-6) ktoré sa rovná 17 a tuto hodnotu zapíšeme v 6. stĺpci do 13. a 14. riadku a v 8. stĺpci do 8. a 11. riadku).
- 6) Piaty bod algoritmu opakujeme do vyplnenia všetkých riadkov 6. a 7. stĺpca.
- 7) Rovnako ako pri prvom variante výpočtu nasleduje výpočet celkovej rezervy činností podľa vzťahu (3. 18), čo predstavuje:

$$\text{CR:} \quad \text{stĺpec 9} = \text{stĺpec 8} - \text{stĺpec 5} - \text{stĺpec 3}$$

Jednoduchým spôsobom sa v tejto tabuľke dajú vypočítať aj ostatné rezervy činností podľa vzťahov (3. 19), (3. 20) a (3. 21):

$$\text{VR:} \quad \text{stĺpec 10} = \text{stĺpec 7} - \text{stĺpec 5} - \text{stĺpec 4}$$

$$\text{ZR:} \quad \text{stĺpec 11} = \text{stĺpec 8} - \text{stĺpec 6} - \text{stĺpec 4}$$

$$\text{NR:} \quad \text{stĺpec 12} = \text{stĺpec 7} - \text{stĺpec 6} - \text{stĺpec 4}$$

V ďalšom je uvedený vývojový diagram výpočtu termínových ukazovateľov a rezerv (metóda CPM), pričom je vychádzané z vyššie popísaného algoritmu uvedeného ako „*druhý variant výpočtu v tabuľke*“. K algoritimizácii na výpočtovú techniku je možné pristúpiť aj viacerými spôsobmi, napr. úpravou Fordovho algoritmu uvedeného v kapitole 2.

V prezentovanom vývojovom diagrame sú použité tieto premenné a polia:

Predpoklady

- sieťový graf je správne očíslovaný a spĺňa všetky požiadavky uvedené v kapitole 2;
- zoznam činností dvojito zoradený podľa počiatkových uzlov a potom podľa koncových uzlov činností (algoritmus dvojitého usporiadania dvojrozmerného poľa nebude prezentovaný, nie je predmetom tejto problematiky);
- počiatkovým vrcholom grafu je vrchol s číslom 0.

Premenné a polia

kvg koncový vrchol grafu
ph počet hrán grafu
pv(i) počiatkový uzol činnosti
 koncový uzol činnosti
y(i) doba trvania (ohodnotenie) činnosti
tmp(i) termín možný počiatkového uzla činnosti
tpp(i) termín prípustný počiatkového uzla činnosti
tmk(i) termín možný koncového uzla činnosti
tpk(i) termín prípustný koncového uzla činnosti
cr(i) celková rezerva
vr(i) voľná rezerva
zr(i) závislá rezerva
nr(i) nezávislá rezerva

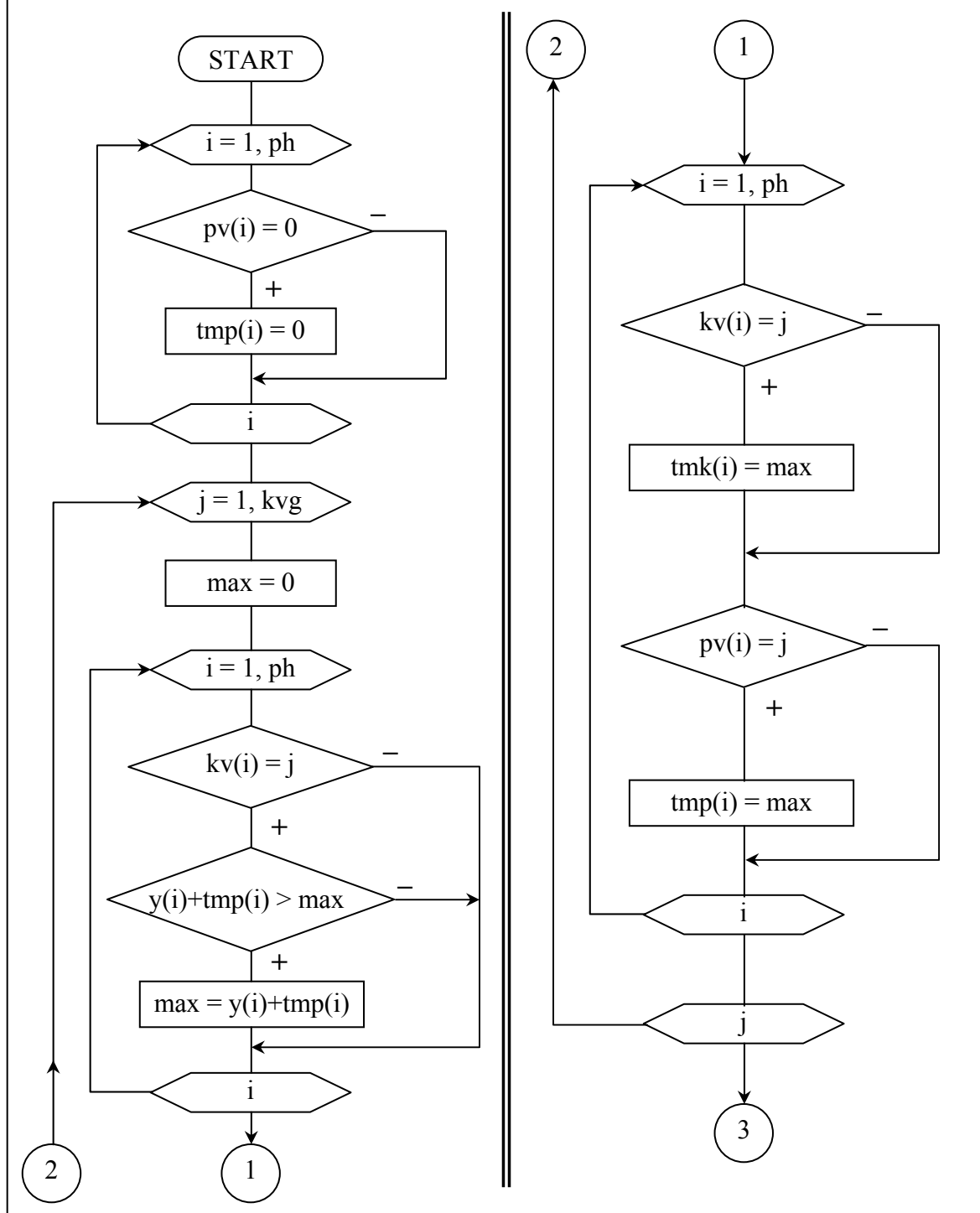
Dátová štruktúra odpovedá štruktúre tabuľky ako je použitá u druhého variantu výpočtu v tabuľke. Pre názornosť je uvedená v Tab. 3. 6.

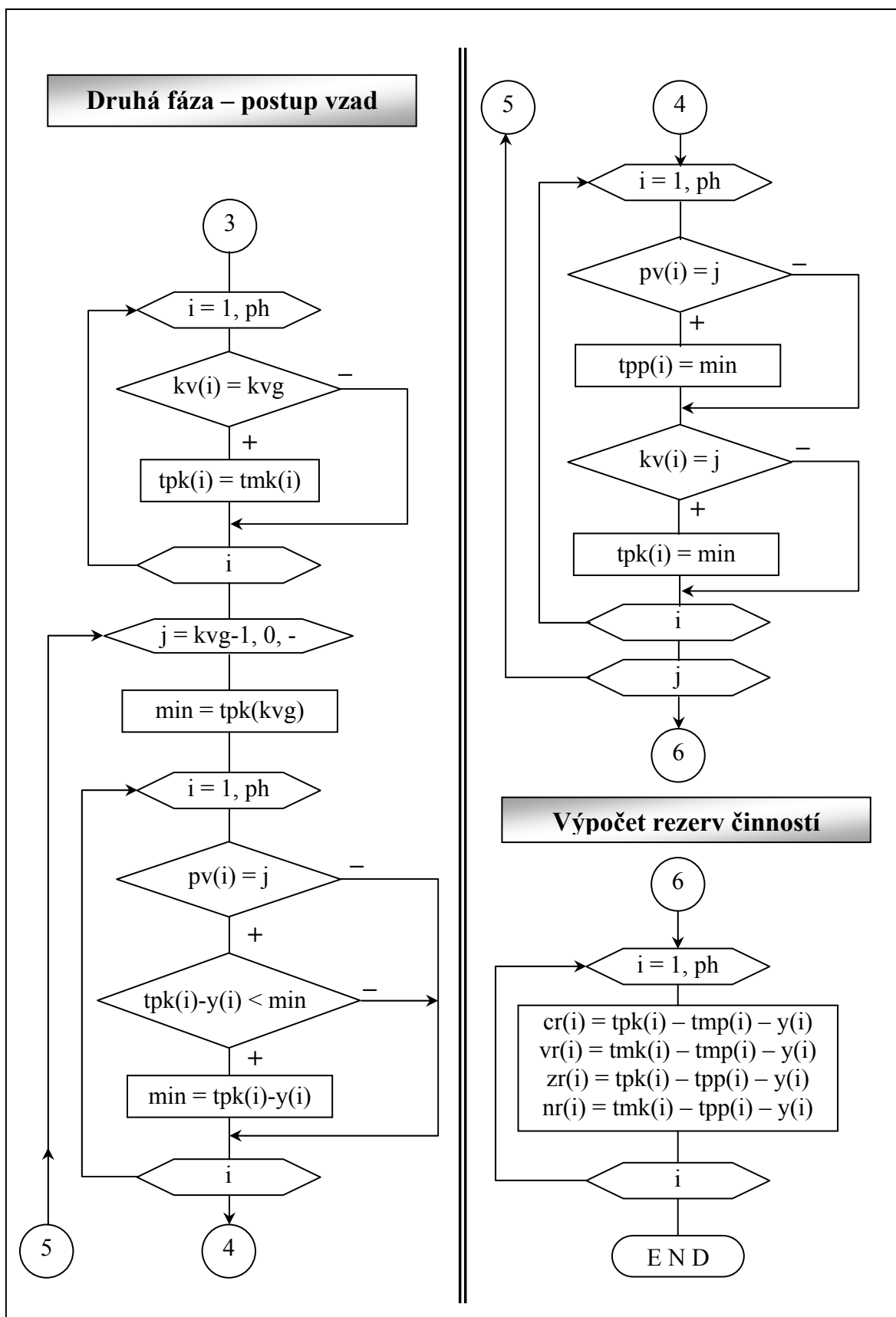
Činnosť		Doba trvania	Termín uzla i		Termín uzla j		Rezerva činnosti			
i	j		možný	prípustný	možný	prípustný	celk.	voľná	závislá	nezáv.
		y_{ij}	T_i^0	T_i^λ	T_j^0	T_j^λ	CR_{ij}	VR_{ij}	ZR_{ij}	NR_{ij}
pv(i) kv(i) y(i) tmp(i) tpp(i) tmk(i) tpk(i) cr(i) vr(i) zr(i) nr(i)										
1										
2										
3										
ph										

Tab. 3. 6 Polia použité vo vývojovom diagrame - CPM

VÝVOJOVÝ DIAGRAM – METÓDA CPM

Prvá fáza – postup vpred

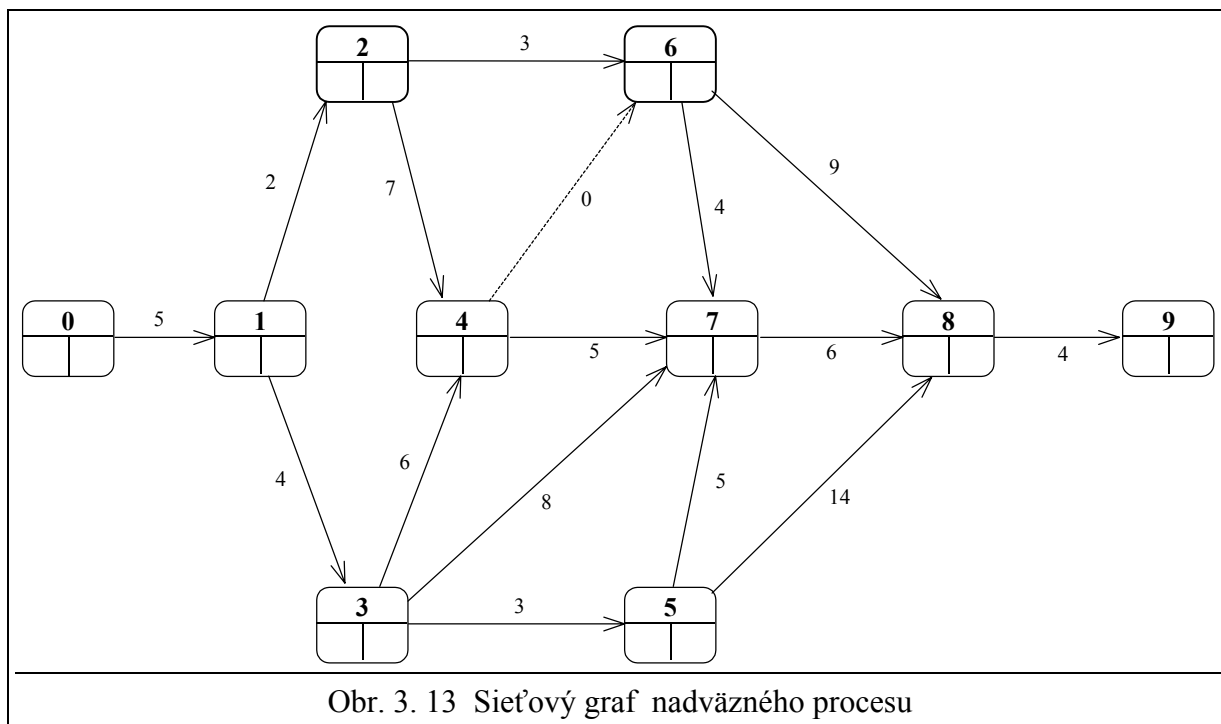




Príklad 3.1

Vypočítajte termínové ukazovatele nadväzného procesu znázorneného sieťovým grafom na Obr. 3. 13:

- a) výpočtom v sieti;
- b) výpočtom v tabuľke - 1. variant výpočtu;
- c) výpočtom v tabuľke - 2. variant výpočtu.



Výsledky príkladu sú (na porovnanie) uvedené v prílohe A.

3.4 Výpočet sieťového grafu typu PERT

Ako už bolo spomenuté v kapitole 3.2.2, výpočet sieťového grafu typu PERT a jeho analýzu je možné vykonať redukciou (prevodom) na deterministický model a použitím metódy Monte Carlo.

V tejto časti rozoberieme variant výpočtu prevodom na deterministický model, pričom nebudeme už rozdeľovať variantne riešenie na výpočet v sieťovom grafe a na výpočet v tabuľke. Vysvetlíme iba postup výpočtu s poukázaním na osobitosti vzhľadom na postup výpočtu u metódy CPM. Navyše potreba výpočtov ďalších ukazovateľov nás núti z hľadiska prehľadnosti pri výpočte v sieti používať aj tabuľkovú formu.

3.4.1 Výpočet termínových ukazovateľov

Pri riešení úlohy metódou PERT prevodom na deterministický model uplatníme tento postup:

- ⇒ každej činnosti priradíme očakávané doby trvania **a**, **b**, **m** (viď kapitola 3.2.2), ktoré redukuje na strednú dobu trvania činnosti **te** podľa vzťahu (3. 5),

$$\text{t.j.} \quad te = \frac{a + 4m + b}{6} ;$$

- ⇒ pre každú činnosť vypočítame smerodajnú odchýlku σ_{te} a rozptyl σ_{te}^2 podľa vzťahu (3. 6) a (3. 7) ;

Poznámka: V ďalšom texte budeme $\sigma_{te(ij)}$ a $\sigma_{te(ij)}^2$ označovať iba σ_{ij} a σ_{ij}^2 .

- ⇒ uplatníme bežný postup výpočtu ako u metódy CPM (vpred i vzad), pričom za dobu trvania činností berieme hodnoty te . Vypočítané hodnoty T^0 a T^λ považujeme za stredné hodnoty termínov uzlov.

- ⇒ za predpokladu,

$$\text{že pri postupe vpred} \quad \sigma_{(T_0^0)}^2 = 0 \quad (3. 24)$$

$$\text{že pri postupe vzad} \quad \sigma_{(T_n^\lambda)}^2 = 0 \quad (3. 25)$$

vypočítame rozptyly termínov uzlov podľa vzťahov :

pri postupe vpred:

$$\sigma_{(tk_{ij}^0)}^2 = \sigma_{(T_i^0)}^2 + \sigma_{ij}^2 \quad \text{pre } j \in V_i^+ \quad (3.26)$$

$$\sigma_{(T_j^0)}^2 = \max\{\sigma_{(T_i^0)}^2 + \sigma_{ij}^2\} \quad \text{pre tie činnosti (i,j), kde } i \in V_j^- \quad (3.27)$$

a súčasne pre nich platí $tk_{ij}^0 \in \{\max(T_i^0 + te_{(ij)})\}$

pri postupe vzad:

$$\sigma_{(tz_{ij}^\lambda)}^2 = \sigma_{(T_j^\lambda)}^2 + \sigma_{ij}^2 \quad \text{pre } i \in V_j^- \quad (3.28)$$

$$\sigma_{(T_i^\lambda)}^2 = \max\{\sigma_{(T_j^\lambda)}^2 + \sigma_{ij}^2\} \quad \text{pre tie činnosti (i,j), kde } j \in V_i^+ \quad (3.29)$$

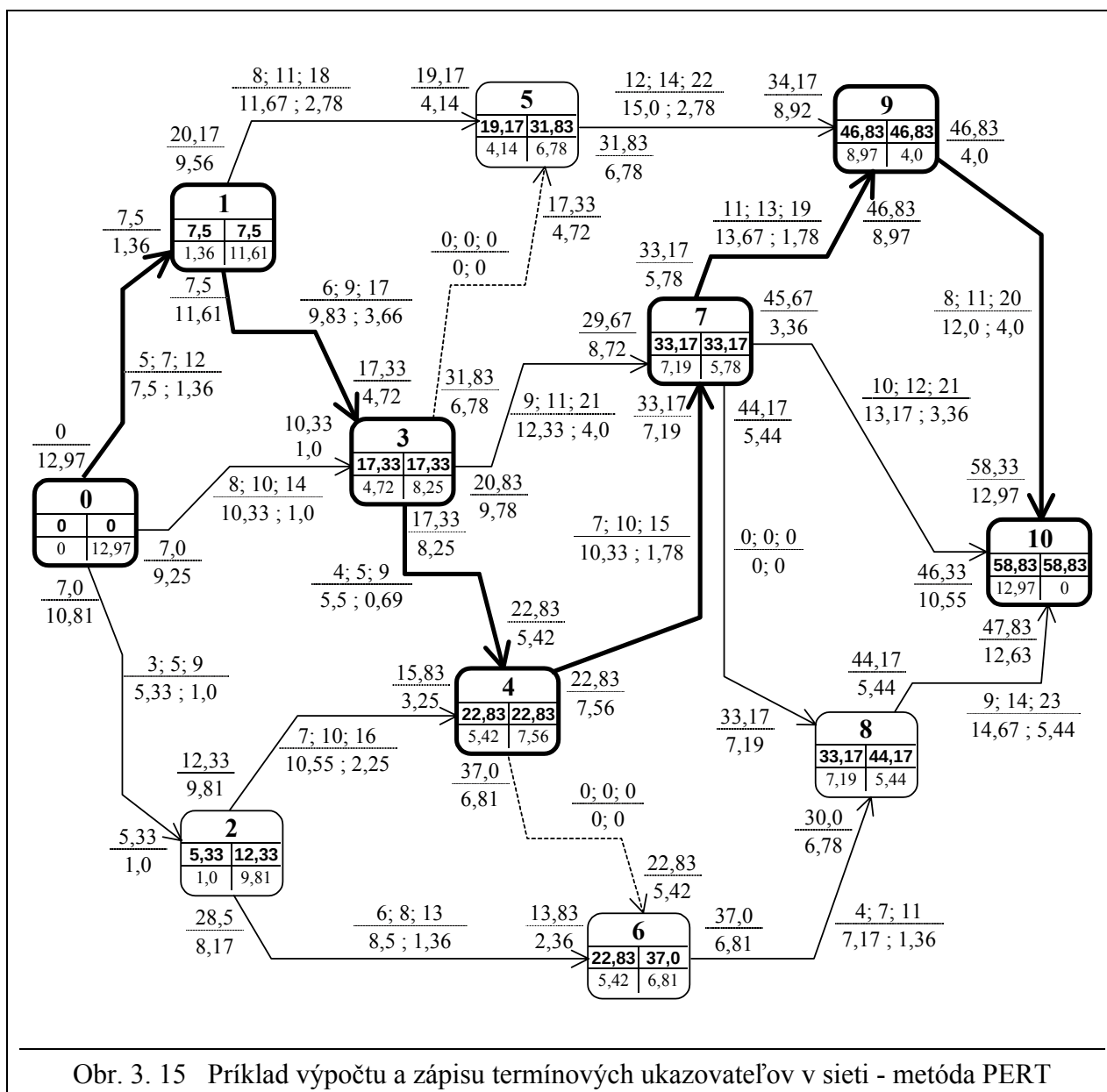
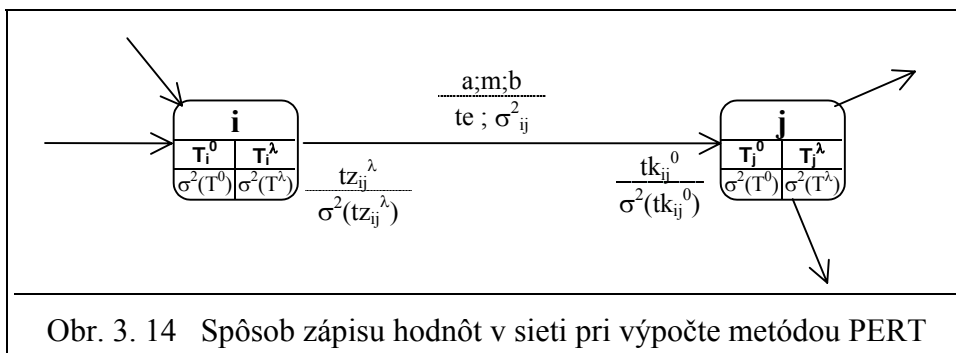
a súčasne pre nich platí $tz_{ij}^\lambda \in \{\min(T_j^\lambda + te_{(ij)})\}$

Vzťahy (3. 26) a (3. 27) predstavujú pri výpočte vpred skutočnosť, že hodnotu rozptylu pre T_j^0 vypočítame ako súčet rozptylu T^0 predchádzajúceho vrcholu a rozptylu činnosti, ktorá určuje hodnotu T_j^0 podľa vzťahu (3. 11). V prípade, že hodnotu T_j^0 určuje väčší počet rovnakých hodnôt tk_{ij}^0 , je určujúcim rozptylom pre T_j^0 maximálna hodnota s príslušných súčtov rozptylov.

Rovnaká zásada platí aj pri výpočte od koncového k počiatočnému uzlu grafu.

Postup výpočtu metódou PERT redukciou na deterministický model znázorňuje graf na Obr. 3. 15 (pričom údaje v grafe sú zaznamenávané ako je uvedené na Obr. 3. 14) a v Tab. 3. 7 a Tab. 3. 8.

Poznámka: Výsledky v tabuľke i v sieťovom grafe sú zaokrúhľované na dve desatinné miesta až pri zápise do príslušných buniek tabuľky.



P.č.	Činnosť		Doba trvania (odhad)				Najskôr možný		Najneskôr prípustný		Rozptyl	Celková rezerva
							začiatok	koniec	začiatok	koniec		
	i	j	a	m	b	te	$tz_{ij}^0 = T_i^0$	tk_{ij}^0	tz_{ij}^λ	$tk_{ij}^\lambda = T_j^\lambda$	σ^2	CR_{ij}
1	0	1	5	7	12	7,50	0	7,50	0	7,50	1,36	0
2	0	2	3	5	9	5,33	0	5,33	7,00	12,33	1,00	7,00
3	0	3	8	10	14	10,33	0	10,33	7,00	17,33	1,00	7,00
4	1	3	6	9	17	9,83	7,50	17,33	7,50	17,33	3,36	0
5	1	5	8	11	18	11,67	7,50	19,17	20,17	31,83	2,78	12,66
6	2	4	7	10	16	10,50	5,33	15,83	12,33	22,83	2,25	7,00
7	2	6	6	8	13	8,50	5,33	13,83	28,50	37,00	1,36	23,17
8	3	4	4	5	9	5,50	17,33	22,83	17,33	22,83	0,69	0
9	3	5	0	0	0	0	17,33	17,33	31,83	31,83	0	14,50
10	3	7	9	11	21	12,33	17,33	29,67	20,83	33,17	4,00	3,51
11	4	6	0	0	0	0	22,83	22,83	37,00	37,00	0	14,17
12	4	7	7	10	15	10,33	22,83	33,17	22,83	33,17	1,78	0
13	5	9	12	14	22	15,00	19,17	34,17	31,83	46,83	2,78	12,66
14	6	8	4	7	11	7,17	22,83	30,00	37,00	44,17	1,36	14,17
15	7	8	0	0	0	0	33,17	33,17	44,17	44,17	0	11,00
16	7	9	11	13	19	13,67	33,17	46,83	33,17	46,83	1,78	0
17	7	10	10	12	21	13,17	33,17	46,33	45,67	58,83	3,36	12,49
18	8	10	9	14	23	14,67	33,17	47,83	44,17	58,83	5,44	11,00
19	9	10	8	11	20	12,00	46,83	58,83	46,83	58,83	4,00	0

Tab. 3. 7 Základné termínové ukazovatele činností sieťového grafu typu PERT

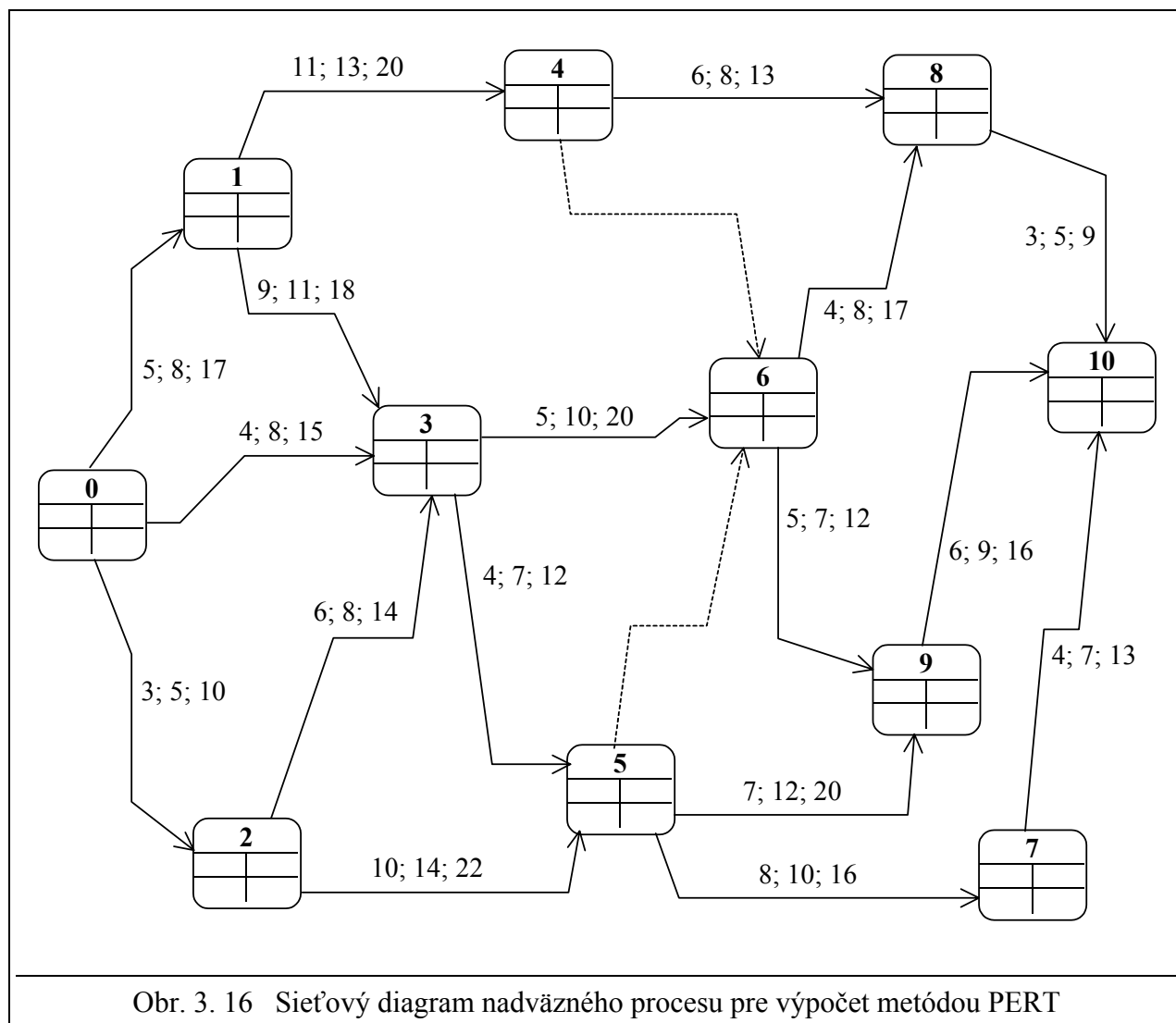
Uzol číslo	Termín uzla		Kritická rezerva	Rozptyl		
	možný	prípustný		$\sigma^2(T_i^0)$	$\sigma^2(T_i^\lambda)$	$\sigma^2(KR_i)$
i	T_i^0	T_i^λ	KR_i			
0	0	0	0	0	12,97	12,97
1	7,50	7,50	0	1,36	11,61	12,97
2	5,33	12,33	7,00	1,00	9,81	10,81
3	17,33	17,33	0	4,72	8,25	12,97
4	12,83	12,83	0	5,42	7,56	12,97
5	19,17	31,83	12,67	4,14	6,78	10,92
6	22,83	37,00	14,17	5,42	6,81	12,22
7	33,17	33,17	0	7,19	5,78	12,97
8	33,17	44,17	11,00	7,19	5,44	12,64
9	46,83	46,83	0	8,97	4,00	12,97
10	58,83	58,83	0	12,97	0	12,97

Tab. 3. 8 Základné termínové ukazovatele uzlov sieťového grafu typu PERT

Príklad 3.2

Vypočítajte metódou PERT termínové ukazovatele a vyhl'adajte kritickú cestu nadväzného procesu znázorneného sieťovým diagramom na Obr. 3. 16 .

Časové odhady dôb trvania činností sú uvedené v poradí **a, m, b**.



Výsledky riešenia sú uvedené v prílohe A.

3.4.2 Pravdepodobnostné výpočty

Ak by sme pri metóde PERT ukončili riešenie vo fáze výpočtu termínových ukazovateľov a stanovenia pravdepodobnostnej kritickej cesty, „degradovali“ by sme v podstate stochastickú metódu na deterministický model, iba s tým rozdielom, že na určenie dôb trvania činností, s ktorými vykonávame výpočty, používame tri odhady. Aby sme plne využili všetky prednosti metódy PERT, pristupujeme k ďalšej fáze riešenia, k dodatočným pravdepodobnostným výpočtom.

Pravdepodobnostné výpočty pri metóde PERT spravidla nasledujú za časovými, a riešia tri úlohy:

- ⇒ výpočet pravdepodobnosti vzniku časovej rezervy uzla, resp. výpočet pravdepodobnosti, že uzol bude ležať na kritickej ceste;
- ⇒ výpočet pravdepodobnosti, že trvanie projektu bude kratšie alebo nanajvýš rovnaké ako určitý zadaný čas;
- ⇒ výpočet doby trvania projektu pri zadanej pravdepodobnosti.

Pretože spravidla pracujeme s projektmi, ktoré pozostávajú z väčšieho množstva činností, sú veličiny T_i^0 a T_i^λ , ale tým aj KR_i - vid'. vzťah (3. 17) - súčtom väčšieho počtu náhodných premenných, predstavujúcich doby trvania jednotlivých činností. Potom na základe **centrálnej limitnej vety** z teórie pravdepodobnosti môžeme tvrdiť, že majú normálne rozdelenie pravdepodobnosti.

Ak označíme $d(v_i, v_j)$ ako maximálnu dráhu z vrcholu V_i do vrcholu V_j a termíny T_i^0 , T_i^λ a KR_i považujeme za stredné hodnoty, môžeme prijať hypotézu, že:

$$T_i^0 \quad \text{má} \quad N(T_i^0, \sigma(T_i^0)) \quad \text{rozdelenie pravdepodobnosti,} \quad (3.30)$$

$$\text{kde} \quad T_i^0 = \sum te \quad \text{pre} \quad te \in d(v_0, v_i) \quad (3.31)$$

$$\sigma^2(T_i^0) = \sum \sigma_{te}^2 \quad \text{pre} \quad te \in d(v_0, v_i) \quad (3.32)$$

$$T_i^\lambda \quad \text{má} \quad N(T_i^\lambda, \sigma(T_i^\lambda)) \quad \text{rozdelenie pravdepodobnosti,} \quad (3.33)$$

$$\text{kde} \quad T_i^\lambda = T_i^\lambda - \sum te \quad \text{pre} \quad te \in d(v_i, v_n) \quad (3.34)$$

$$\sigma^2(T_i^\lambda) = \sum \sigma_{te}^2 \quad \text{pre} \quad te \in d(v_i, v_n) \quad (3.35)$$

$$KR_i \quad \text{má} \quad N(KR_i, \sigma(KR_i)) \quad \text{rozdelenie pravdepodobnosti,} \quad (3.36)$$

$$\text{kde} \quad KR_i = T_i^\lambda - T_i^0 \quad (3.37)$$

$$\sigma^2(KR_i) = \sigma^2(T_i^0) + \sigma^2(T_i^\lambda) \quad (3.38)$$

a) pravdepodobnosť kritickosti uzla k

Niekedy je účelné skúmať niektoré nekritické uzly, za akých podmienok, resp. s akou pravdepodobnosťou by sa stali kritickými. V tomto prípade by bola kritickou aj činnosť, ktorá do uzla vstupuje a ktorá z uzla vystupuje (musíme brať ohľad na paralelné činnosti, pretože kritickosť uzla nie je jednoznačne neurčujúca v týchto prípadoch na stanovenie kritickej cesty - vid'. kapitola 3.3.1, Obr. 3. 4).

Postup výpočtu pravdepodobnosti vzniku časovej rezervy R uzla k je jednoduchý a vychádza zo vzťahu:

$$u = \frac{R - KR_k}{\sigma(KR_k)} = \frac{R - KR_k}{\sqrt{\sigma^2(T_k^0) + \sigma^2(T_k^\lambda)}}, \quad (3.39)$$

kde u je náhodná veličina riadiaca sa normovaným normálnym rozdelením pravdepodobnosti.

Všeobecne pravdepodobnosť vzniku rezervy $\mathbf{R}$ uzla $\mathbf{k}$ sa vypočíta podľa vzťahu:

$$P\{KR_k \leq R\} = \Phi\left(\frac{R - KR_k}{\sigma(KR_k)}\right) = \Phi(u) \quad , \quad (3.40)$$

kde $\Phi(u)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$.

Špecifickým prípadom je variant výpočtu pravdepodobnosti kritickosti uzla, t.j. situácia kde $\mathbf{KR}_k = \mathbf{0}$.

$$P\{KR_k \leq 0\} = \Phi\left(\frac{0 - KR_k}{\sigma(KR_k)}\right) = \Phi\left(\frac{-KR_k}{\sigma(KR_k)}\right) = \Phi(u) \quad (3.41)$$

Hodnotu distribučnej funkcie $\Phi(u)$ vyhľadáme v štatistických tabuľkách (hodnoty hustoty pravdepodobnosti $\phi(u)$ a distribučnej funkcie $\Phi(u)$ normovaného normálneho rozdelenia sú uvedené v prílohe B).

Na vyhľadanie príslušných hodnôt $\Phi(u)$, ktorých $u < 0$, použijeme vzťah:

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \quad (3.42)$$

Treba podotknúť, že uzly ležiace na pravdepodobnostnej kritickej ceste, majú pravdepodobnosť kritickosti $P\{KR_k \leq 0\} = 0,5$. Všetky ostatné uzly majú túto pravdepodobnosť v intervale $\langle 0; 0,5 \rangle$.

b) pravdepodobnosť, že doba trvania projektu do uzla k bude kratšia alebo rovná ako určitý zadaný termín T

Častejšou a významnejšou úlohou je odhad pravdepodobnosti dodržania plánovaných termínov, tj. ako termínu ukončenia celého projektu, i termínov niektorých jeho významných etáp. Pre konkrétny uzol $\mathbf{k}$ a zadaný termín $\mathbf{T}$ hľadáme pravdepodobnosť:

$$P\{T_k^0 \leq T\} = \Phi\left(\frac{T - T_k^0}{\sigma(T_k^0)}\right) = \Phi(u_k) \quad , \quad (3.43)$$

kde u_k je náhodná veličina s normovaným normálnym rozdelením pravdepodobnosti $N(0, 1)$. Hodnotu distribučnej funkcie $\Phi(u_k)$ $N(0, 1)$ vyhladáme opäť v štatistických tabuľkách (viď. príloha B).

c) trvanie projektu T do uzla k pri zadanej pravdepodobnosti P

Na stanovenie reálneho termínu T pre uzol k pri zadanej pravdepodobnosti P , nám posluží už uvedený vzťah (3. 43). Pre zadanú pravdepodobnosť P , ako hodnotu distribučnej funkcie $\Phi(u_p)$ $N(0, 1)$, nájdeme príslušný parameter u_p opäť v štatistických tabuľkách, a vypočítame hľadané trvanie T projektu podľa vzťahu:

$$T_k \{P = p\} = T_k^0 + u_p * \sigma(T_k^0) , \quad (3. 44)$$

$$\text{kde} \quad u_p = \Phi^{-1}(P)$$

ZHRNUTIE:

Všetky najdôležitejšie koncové vzťahy pravdepodobnostných výpočtov pri metóde PERT sú prehľadne uvedené v Tab. 3. 9.

Úloha	Vstup	Výstup	Vzťah
Pravdepodobnosť kritickosti uzla	k	$P\{KR_k \leq 0\}$	$\Phi\left(\frac{-KR_k}{\sigma(T_k^0)}\right)$
Pravdepodobnosť dodržania termínu ukončenia projektu	T, k	$P\{T_k^0 \leq T\}$	$\Phi\left(\frac{T - T_k^0}{\sigma(T_k^0)}\right)$
Doba trvania projektu pri zadanej pravdepodobnosti	p, k	$T_k \{P = p\}$	$T_k^0 + u_p * \sigma(T_k^0)$

Tab. 3. 9 Prehľad vzťahov pravdepodobnostných výpočtov pri metóde PERT

Prepočty ukazovateľov termínového plánovania pri metóde PERT sú zjavne náročnejšie ako pri metóde kritickej cesty, a to najmä vtedy, ak sa neuspokojíme iba s termínmi T^0 a T^{λ} a rezervou KR a počítame aj ostatné ukazovatele. Výhody tejto metódy sú zrejmé. Vyplývajú z jej stochastického charakteru a možnosti dôkladnejšej analýzy projektu, najmä prostredníctvom dodatočných pravdepodobnostných výpočtov.

Pravdepodobnostné výpočty budeme demonštrovať na príklade 3.3.

Príklad 3.3

Na zadanie nadväzného procesu a jeho výsledky riešenia uvedené na Obr. 3. 15 a v Tab. 3. 7 a Tab. 3. 8 máme spočítať:

a) pravdepodobnosť kritickosti uzlov 2, 5, 7 a 10

Na výpočet použijeme vzťah (3. 41)

$$P\{KR_2 \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-KR_2}{\sigma(KR_2)}\right) = \Phi\left(\frac{-7,00}{\sqrt{10,81}}\right) = \Phi(-2,129047)$$

s použitím vzťahu (3. 42) pre zápornú hodnotu parametru $\Phi(-u)$ dostávame

$$P\{KR_2 \leq 0\} = 1 - \Phi(2,129047); \text{ hodnotu } \Phi(u) \text{ vyhladáme v tabuľke (príloha B) a}$$

$$\text{dostávame } P\{KR_2 \leq 0\} \doteq 1 - 0,983414 \doteq \underline{\underline{0,016586}}$$

Podobne postupujeme pre uzly 5, 7, 10:

$$P\{KR_5 \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-12,67}{\sqrt{10,92}}\right) = \Phi(-3,83412) \doteq 1 - 0,999936 \doteq \underline{\underline{0,000064}}$$

$$P\{KR_7 \leq 0\} = \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{12,97}}\right) = \Phi(0) = \underline{\underline{0,5}}$$

$$P\{KR_{10} \leq 0\} = \Phi\left(\frac{0}{\sqrt{12,97}}\right) = \Phi(0) = \underline{\underline{0,5}}$$

b) pravdepodobnosť ukončenia projektu do 55, 60 a 65 časových jednotiek

Na výpočet použijeme vzťah (3. 43)

$$P\{T_{10}^0 \leq 55\} = \Phi\left(\frac{T - T_{10}^0}{\sigma(T_{10}^0)}\right) = \Phi\left(\frac{55 - 58,83}{\sqrt{12,97}}\right) = \Phi(-1,063479) = 1 - \Phi(1,063479) \doteq \\ \doteq 1 - 0,855428 \doteq \underline{\underline{0,144572}}$$

Pravdepodobnosť, že uzol 10 (a tým aj celý projekt) bude ukončený v čase $T=55$ časových jednotiek, je 0,144572.

Rovnakým spôsobom vypočítame pravdepodobnosť ukončenia projektu v čase $T=60$ a $T=65$ časových jednotiek.

$$P\{T_{10}^0 \leq 60\} = \Phi\left(\frac{60 - 58,83}{\sqrt{12,97}}\right) = \Phi(0,328698) \doteq \underline{\underline{0,6293}}$$

$$P\{T_{10}^0 \leq 65\} = \Phi\left(\frac{65 - 58,83}{\sqrt{12,97}}\right) = \Phi(1,713228) \doteq \underline{\underline{0,956367}}$$

c) za aký čas bude ukončený celý projekt pri pravdepodobnosti 0,3; 0,7 a 0,95

Na výpočet použijeme vzťah (3. 44)

$$T_{10}\{P = 0,3\} = T_{10}^0 + u_{0,3} * \sigma(T_{10}^0) = 58,83 + u_{0,3} * \sqrt{12,97}$$

Hodnotu u_p vyhladáme v tabuľke (príloha B) v stĺpci u pre $\Phi(u)=0,3$. Ak nemáme k dispozícii tabuľky so zápornými hodnotami u (pre $\Phi(u)<0,5$) a inverznú funkciu k $\Phi(u)$ by sme zapísali v tvare $u(\Phi)$, použijeme vzťah

$$u(\Phi < 0,5) = -u(1 - \Phi) \quad (3. 45)$$

Potom dostávame

$$u(0,3) = -u(1-0,3) = -u(0,7)$$

Po dosadení do vzťahu na výpočet dostávame

$$\begin{aligned}T_{10}\{P = 0,3\} &= T_{10}^0 - u_{0,7} * \sigma(T_{10}^0) = 58,83 - u_{0,7} * \sqrt{12,97} \doteq \\&\doteq 58,83 - 0,52 * \sqrt{12,97} \doteq \underline{\underline{56,957278}}\end{aligned}$$

Podobným spôsobom vypočítame termíny ukončenia projektu s pravdepodobnosťou 0,7 a 0,95.

$$T_{10}(P = 0,7) = T_{10}^0 + u_{0,7} * \sigma(T_{10}^0) \doteq 58,83 + 0,52 * \sqrt{12,97} \doteq \underline{\underline{60,702722}}$$

$$T_{10}(P = 0,95) = T_{10}^0 + u_{0,95} * \sigma(T_{10}^0) \doteq 58,83 + 1,64 * \sqrt{12,97} \doteq \underline{\underline{64,706277}}$$

Príklad 3.4

Vyhodnotený projekt nadväzného procesu zadaný pre metódu PERT (vid'. Príklad 3.2, Obr. 3. 16) a jeho výsledky uvedené v prílohe A, doplňte o tieto dodatočné pravdepodobnostné výpočty:

- a) pravdepodobnosť kritickosti uzlov 6, 8, 10;*
- b) pravdepodobnosť ukončenia projektu do 40, 46, 55 a 60 časových jednotiek;*
- c) dobu trvania projektu s pravdepodobnosťou 0,4; 0,6 a 0,8.*

Výsledky riešenia sú uvedené v prílohe A.

4. VÝPOČET SIEŤOVÉHO GRAFU TYPU PERT POUŽITÍM METÓDY MONTE CARLO

Metóda Monte Carlo rieši stochastický sieťový graf typu PERT opakovaním časových výpočtov, pričom doby trvania činností sú náhodné čísla na stanovenom intervale, vopred podriadené danému rozdeleniu pravdepodobnosti. Odhad pravdepodobnostných charakteristík sieťového grafu sa získa ako relatívna početnosť prostredníctvom veľkého počtu simulácií sieťového grafu.

Nutnosť veľkého počtu simulácií ukazuje na vysokú prácnosť metódy, ktorú v podstate nie je možné uskutočniť bez použitia výpočtovej techniky. Čas potrebný na vykonanie nezbytných výpočtov sa však môže i pri značnej rýchlosti počítačov predĺžiť.

4.1 Výhody použitia metódy Monte Carlo

Pri metóde PERT dochádza pri riešení k určitému, aj keď nie veľkému, skresleniu výsledkov.

- ⇒ Bolo dokázané, že vplyvom paralelných činností v sieťovom grafe je vypočítaný najskôr možný termín koncového uzla týchto činností optimisticky skreslený.
- ⇒ Aproximácia TM koncového uzla grafu, na základe centrálnej limitnej vety, normálnym rozdelením pravdepodobnosti je iba približná.
- ⇒ Časové odhady trvania činností (a , m , b) nepostačujú jednoznačne na určenie parametrov p a q rozdelenia β - vid'. vzťah (3.3).

Snaha vyvarovať sa týchto uvedených nedostatkov bola podporená metódou Monte Carlo. Pravdepodobnostné charakteristiky získané touto metódou sú určené

podľa náhodnosti trvania činností a nie sú zaťažené chybami rovnakého druhu, ako je tomu pri výpočtoch metódou PERT, redukciou na deterministický model.

Hlavnou požiadavkou na použitie metódy Monte Carlo je opäť zostavenie acyklického, hranovo orientovaného sieťového grafu a jeho ohodnotenie. Doby trvania činností pri simuláciách grafu sú náhodné premenné s určitým pravdepodobnostným rozdelením. Najčastejšie sa používa rovnomerné alebo trojúholníkové rozdelenie, je možné tiež použiť aj rozdelenie β . V tom prípade nesmieme opomenúť skutočnosť, že čas potrebný na generovanie náhodného čísla z rozdelenia β bude niekoľkonásobne dlhší ako čas generovania náhodného čísla z rovnomerného rozdelenia, čo značne predĺži dobu výpočtu.

4.2 Mechanizmus výpočtu metódou Monte Carlo

V ďalšom texte prezentovaný algoritmus je iba návodom na zostavenie funkčného programu pre riešenie sieťového grafu typu PERT metódou Monte Carlo a záleží iba na zručnosti a individuálnom prístupe tvorcu programu, ako sa tejto úlohy zhostí.

Podstatou metódy je zistenie pravdepodobnostných charakteristík opakovaním časových výpočtov, pričom pre každý z nich stanovíme nové náhodné trvanie činnosti. Po vykonaní niekoľko tisíc simulácií sieťového grafu môžeme z dosiahnutých výsledkov zostaviť empirické pravdepodobnostné rozdelenie doby trvania celého projektu ako aj jeho rozhodujúcich etáp. Okrem toho je možné odhadnúť pravdepodobnosť splnenia plánovaných termínov a pravdepodobnosť vzniku časových rezerv uzlov.

Podobným spôsobom sa dá určiť aj koeficient kritickosti cesty. Jeho hodnota by odpovedala relatívnej početnosti tých simulácií sieťového grafu, pri ktorých by daná cesta bola kritická. Cesta s najväčším koeficientom kritickosti by odpovedala kritickej ceste z deterministických sieťových grafov. Tento pojem však pre stochastický

sieťový graf nie je najvhodnejší, pretože takmer každá cesta môže byť kritická, čo znamená, že absolútna veľkosť koeficientu kritickosti cesty by bola veľmi malá a rozdiel medzi jednotlivými hodnotami by bol takmer zanedbateľný. Namiesto tohto koeficienta sa pre stochastický sieťový graf používa iný koeficient, a to **koeficient kritickosti činnosti**. Hodnota tohto koeficientu odpovedá relatívnej početnosti tých prípadov simulácie grafu, pri ktorých činnosť ležala na kritickej ceste.

Celkový výpočet sieťového grafu typu PERT použitím metódy Monte Carlo môžeme vykonať týmto postupom:

1. Okrem koncového uzla grafu vopred určíme ako míľniky tie uzly, pre ktoré budeme mať záujem vykonávať pravdepodobnostné výpočty.
2. Vykonáme výpočet sieťového grafu postupom vpred ako pri metóde CPM a to s optimistickými odhadmi dôb trvania činností „a“ (výpočet najskôr možných termínov uzlov). Vypočítané hodnoty uchováme na ďalšie použitie pri koncovom uzle grafu a pri vybraných míľnikoch.

Hodnoty najskôr možných termínov uzlov s optimistickými časmi budeme označovať TA_i .

3. Vykonáme výpočet ako v bode 2. s pesimistickými dobami trvania činností „b“.

Hodnoty najskôr možných termínov uzlov s pesimistickými časmi budeme označovať TB_i .

Tým pre koncový uzol a každý míľnik projektu dostávame dve hodnoty TA_i a TB_i , ktoré udávajú rozpätie krivky hustoty pravdepodobnosti termínu príslušného uzla; inak povedané, hodnota

$$D_i = TB_i - TA_i \quad (4.1)$$

udáva rozpätie krivky empirického rozdelenia pravdepodobnosti najskôr možných termínov koncového uzla a vybraných míľnikov projektu.

4. Každé rozpätie D_i rozdelíme na intervaly podľa týchto zásad:

- Je logické (ako dôsledok centrálnej limitnej vety), že početnosť výskytu výsledkov v okolí extrémnych hodnôt TA_i a TB_i bude veľmi malá. Preto môže byť prvý a posledný interval podstatne väčší.

Prvý interval bude

$$\langle TA_i, TA_i + D_i * k_1 \rangle \quad (4.2)$$

posledný interval bude

$$\langle TB_i - D_i * k_2, TB_i \rangle, \quad (4.3)$$

kde pre koeficienty k_1 a k_2 spravidla volíme hodnoty $k_1 = 0,2$ a $k_2 = 0,4$.

- Zvyšok rozpätia rozdelíme na n rovnakých intervalov, pričom spravidla platí

$$20 < n < 30 \quad (4.4)$$

Potom j -tý interval pre uzol i bude

$$TA_i + D_i * k_1 + (j - 2) * h, TA_i + D_i * k_1 + (j - 1) * h, \quad (4.5)$$

$$\text{kde} \quad h = \frac{D_i * (1 - k_1 - k_2)}{n} \quad (4.6)$$

5. Vykonáme výpočet sieťového grafu so simulovanými dobami trvania činností podľa zvoleného rozdelenia pravdepodobnosti.

Pre každé vypočítané trvanie projektu TM_i do zvolených míľnikov a do koncového uzla vyhladáme interval, pre ktorý platí nerovnosť

$$TA_i + D_i * k_1 + (j - 2) * h \leq TM_i < TA_i + D_i * k_1 + (j - 1) * h \quad (4.7)$$

a pre tento interval zvýšime početnosť o 1.

6. Pri vykonávaní výpočtu podľa bodu 6. je možné sledovať, či uzly a činnosti ležia na kritickej ceste a opäť zaznamenávať početnosť ich výskytu.

Relatívnu početnosť kritickosti činností, t.j. **koeficient kritickosti činnosti - p_{ij}** určíme podľa vzťahu

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}, \quad (4.8)$$

kde N_{ij} početnosť prípadov kritickosti činnosti **i, j**
 N celkový počet simulácií sieťového grafu

a **koeficient kritickosti uzla - p_j** určíme podľa vzťahu

$$p_j = \frac{N_j}{N}, \quad (4.9)$$

kde N_j početnosť prípadov kritickosti uzla **j** ,

alebo za predpokladu, že generované náhodné doby trvania činností sú čísla s väčším počtom desatinných miest, čím je takmer nulová pravdepodobnosť prípadu vetvenia kritickej cesty pri jednotlivých simuláciách, podľa vzťahu

$$p_j = \sum p_{ij} \quad \text{pre} \quad i \in V_j^- \quad (4.10)$$

7. Ak zoradíme vzostupne vypočítané doby trvania projektu do uzla **k** zo všetkých **N** simulácií, určuje hodnota $N_{T_i \leq T_p}$ zo vzťahu

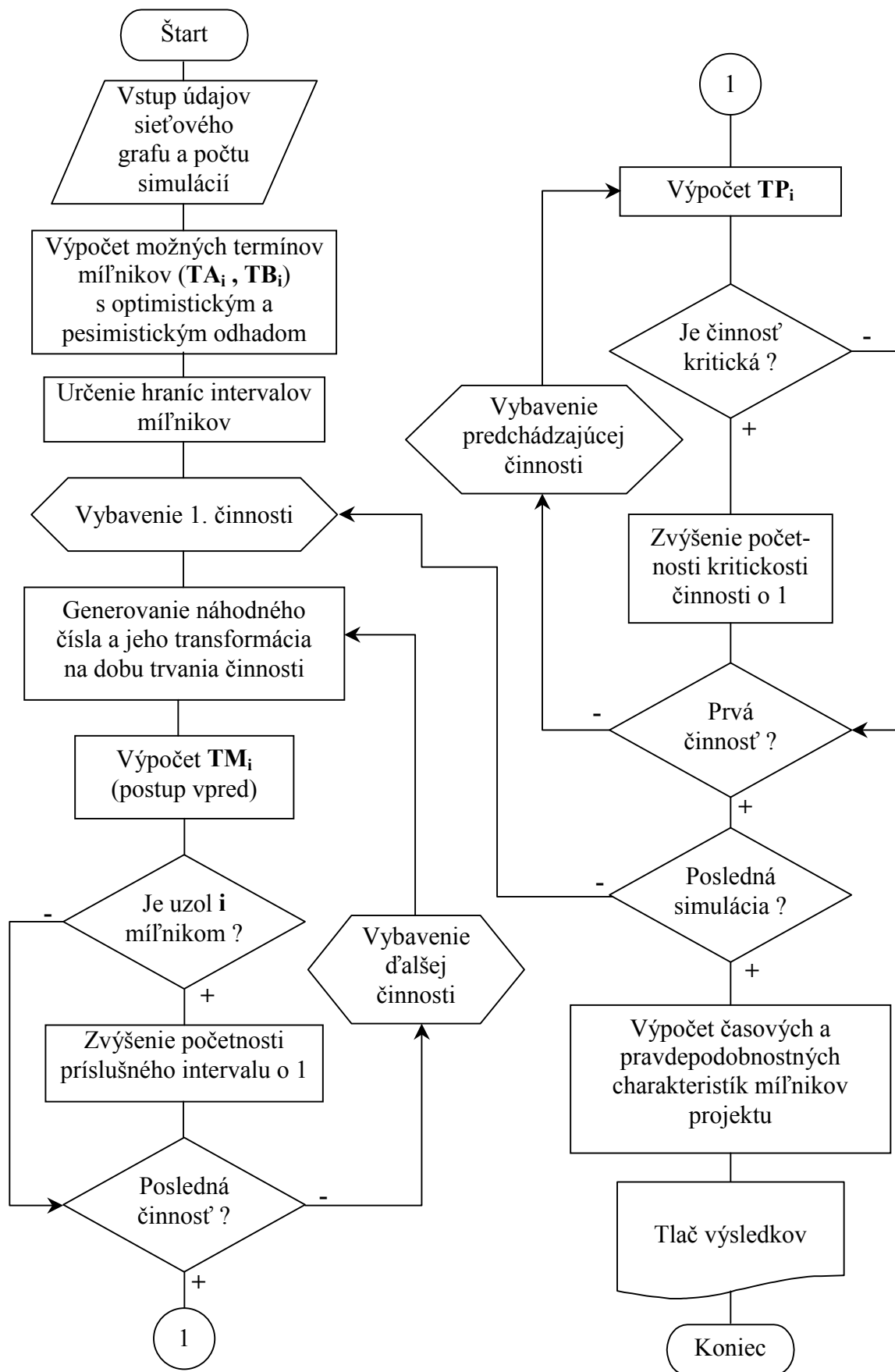
$$p\{T_i \leq T_p\} = \frac{N_{T_i \leq T_p}}{N} \quad (4.11)$$

poradie plánovaného termínu **T_p** , ktoré odpovedá danej pravdepodobnosti.

Zo vzťahu (4. 11) je teda možné ako relatívnu početnosť odhadnúť pravdepodobnosť **$p\{T_i \leq T_p\}$** ukončenia projektu v uzle **i** pri stanovenom plánovanom termíne **T_p** , ale aj opačne, pri stanovenej pravdepodobnosti určiť predpokladanú dobu trvania projektu.

Tým je celý postup výpočtu sieťového grafu typu PERT metódou Monte Carlo ukončený.

Všeobecný vývojový diagram výpočtu metódou Monte Carlo je uvedený na Obr. 4. 1.



Obr. 4. 1 Všeobecný vývojový diagram postupu výpočtu metódou Monte Carlo

Jednou z otázok, ktorú pri metóde Monte Carlo musíme zodpovedať, je **počet simulácií sieťového grafu**. Počet simulácií spravidla určujeme pred vlastnou sériou výpočtov sieťového grafu. V tomto prípade sa odporúča, na základe požiadaviek na presnosť, vychádzať z nerovnosti

$$500 < N < 10000 \quad (4.12)$$

Dalším problémom je vyhodnotenie koeficientov kritickosti činností a uzlov - vid' vzťahy (4.8), (4.9) a (4.10). Činnosti a uzly s koeficientom väčším ako **0,7** môžeme porovnať s činnosťami a uzlami ležiacimi na kritickej ceste deterministických sieťových grafov.

Pri činnostiach s koeficientom kritickosti menším ako **0,3** je potrebné preveriť ich zdroje a v prípade možnosti zväčšiť ich dobu trvania napr. presunom zdrojov na činnosti s vysokým koeficientom kritickosti.

Podobné závery môžeme prijať aj pre pravdepodobnosti ukončenia projektu vo zvolenom uzle (míľniku) aj pre metódu PERT, riešenú redukciou na deterministický model.

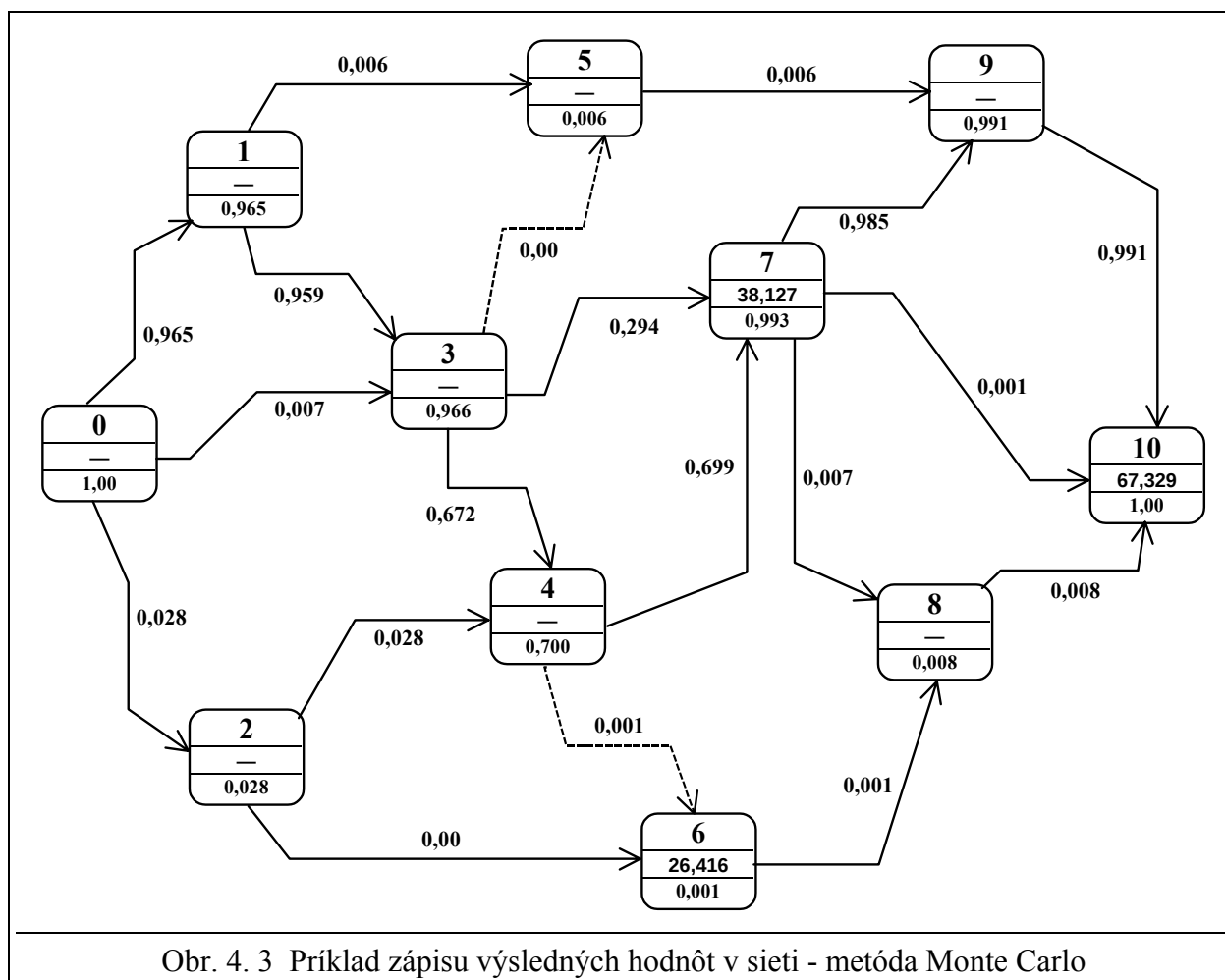
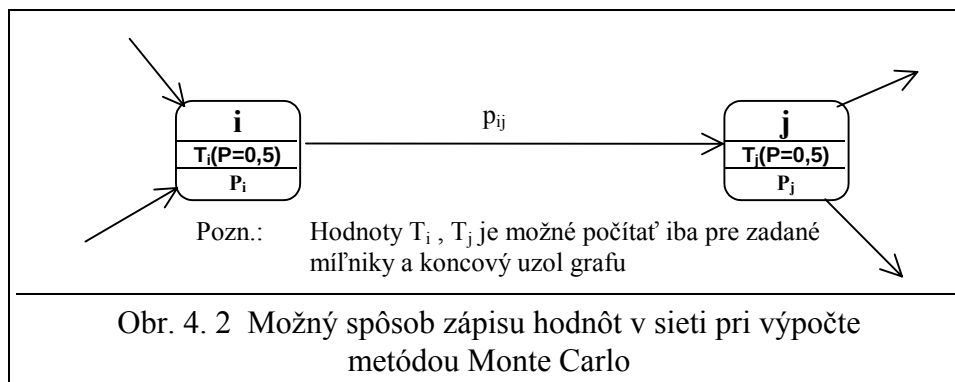
Teda:

- ⇒ ak je $p(T_i \leq T_p) < 0,3$, je so splnením projektu do uzla **i** v termíne **T_p** spojené príliš veľké riziko. V tomto prípade je potrebné preveriť operácie na pravdepodobnostnej (subkritickej) ceste a použitím ďalších, alebo presunom zdrojov posunúť plánovanú dobu trvania projektu na únosnú hranicu;
- ⇒ ak je $0,3 \leq p(T_i \leq T_p) \leq 0,7$, je riziko spojené so splnením normálne a jednotlivé termíny uzlov vyhovujú podmienkam; činnosti a zdroje sú dobre rozvrhnuté;
- ⇒ ak je $p(T_i \leq T_p) > 0,7$, potom v realizácii projektu je zbytočne veľká rezerva a dôslednou analýzou je možné niektoré zdroje ušetriť.

Výsledky riešenia projektu metódou Monte Carlo sú uvedené v príklade (vid' Obr. 4.2, Obr. 4.3, Tab. 4.1 a Tab. 4.2). Na porovnanie sa v príklade vychádza

zo zadania príkladu riešeného metódou PERT redukciou na deterministický model (viď Obr. 3.15, Tab. 3.6 a Tab. 3.7).

Na podrobnejšie porovnanie výsledkov získaných metódou PERT a Monte Carlo sú vybraté ako ďalšie míľniky (okrem koncového uzla grafu) uzly 6 a 7. Pri riešení bolo vykonaných 5000 simulácií sieťového grafu.



P.č.	Činnosť		Doba trvania (odhad)			Koeficient kritickosti
	i	j	a	m	b	p_{ij}
1	0	1	5	7	12	0
2	0	2	3	5	9	0
3	0	3	8	10	14	0
4	1	3	6	9	17	7,50
5	1	5	8	11	18	7,50
6	2	4	7	10	16	5,33
7	2	6	6	8	13	5,33
8	3	4	4	5	9	17,33
9	3	5	0	0	0	17,33
10	3	7	9	11	21	17,33
11	4	6	0	0	0	22,83
12	4	7	7	10	15	22,83
13	5	9	12	14	22	19,17
14	6	8	4	7	11	22,83
15	7	8	0	0	0	33,17
16	7	9	11	13	19	33,17
17	7	10	10	12	21	33,17
18	8	10	9	14	23	33,17
19	9	10	8	11	20	46,83

Tab. 4. 1 Výsledky pre činnosti - koeficienty kritickosti - (metóda Monte Carlo)

Uzol	Termín možný		Koeficient kritickosti uzla	Doba trvania pri pravdepodobnosti $p \dots T_i(P=p)$				
	optimistický výp.	pesimistický výp.		$p=0,3$	$p=0,5$	$p=0,7$		
i	TA_i	TB_i	p_i					
0	0	0	1,000	24,102 35,752	26,416 38,127	28,755 40,664		
1	5	12	0,965					
2	3	9	0,028					
3	11	29	0,966					
4	15	38	0,700					
5	13	30	0,006					
6	15	38	0,001					
7	22	53	0,993					
8	22	53	0,008					
9	33	72	0,991					
10	41	92	1,000	64,181	67,329	70,607		
Pravdepodobnosť ukončenia projektu za čas T_p		T_p	55	60	65	70	75	80
		$p(T_{10} \leq T_p)$	0,017	0,115	0,353	0,664	0,893	0,983

Tab. 4. 2 Výsledky pre uzly - metóda Monte Carlo

4.3 Porovnanie metódy PERT a Monte Carlo

V kapitole 4.1 sme sa zoznámili s určitou kritikou metódy PERT. Najzávažnejšie bolo optimistické skreslenie doby trvania projektu. O veľkosti tejto chyby je možné sa presvedčiť porovnaním doby trvania projektu, ktorý je uvedený na Obr. 3.15 (metóda PERT) a na Obr. 4. 3 (metóda Monte Carlo). Výpočtom metódou PERT redukciou na deterministický model dostávame dobu trvania projektu 58,83 časových jednotiek a použitím metódy Monte Carlo na ten istý projekt dostávame dobu trvania 67,33 časových jednotiek.

Treba podotknúť, že relatívna veľkosť tohto rozdielu závisí úmerne aj od rozpätia dôb trvania jednotlivých činností. Pravdepodobnosť dodržania termínu stanoveného metódou PERT (približne 60 časových jednotiek) bola pri metóde Monte Carlo stanovená na 11,5 %.

Jedným z dôležitých hľadísk na porovnanie obidvoch metód je doba výpočtu na počítači. Pri metóde Monte Carlo musíme rátať s tým, že doba výpočtu sa bude približne rovnať dobe výpočtu metódou PERT násobenej zvoleným počtom simulácií, a to ešte za predpokladu, že sme použili na generovanie náhodných dôb trvania činností algoritmus, alebo také rozdelenie pravdepodobnosti, pri ktorých doba generovania náhodného čísla je „zanedbateľná“.

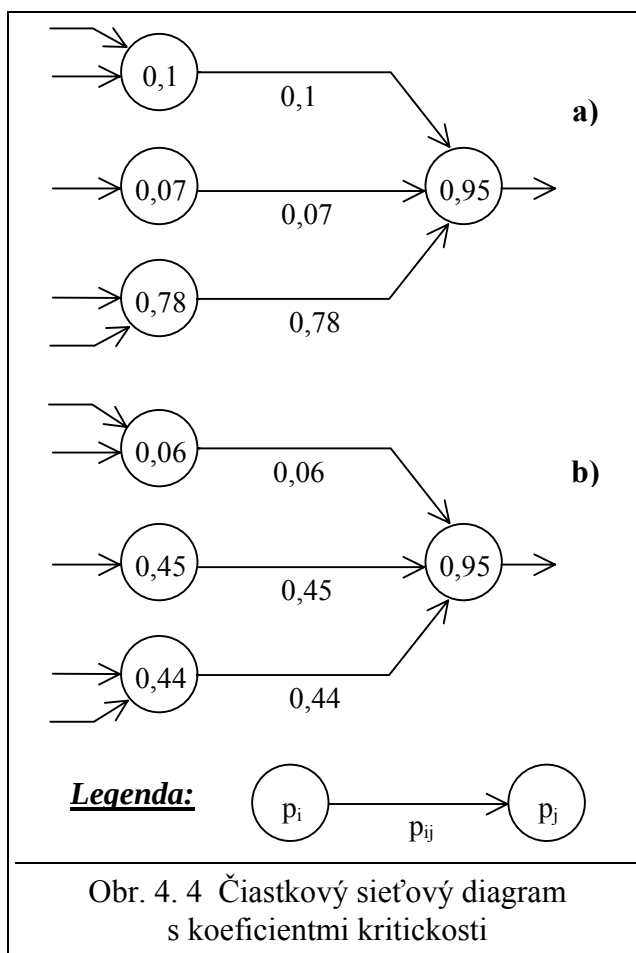
Ďalej treba upozorniť na jednu dôležitú skutočnosť:

Pri kontrole celého projektu sú výhodným meradlom koeficienty kritickosti činností p_i . Pri ich posudzovaní musíme postupovať veľmi citlivo. V sieťovom grafe budú takmer vždy existovať paralelné činnosti, pri ktorých žiadny koeficient kritickosti nebude spĺňať nerovnosť $p_i \leq 0,7$. Môže vzniknúť dojem, že žiadna činnosť nebude „subkritická“ a nemôže teda ovplyvniť dobu trvania projektu.

V týchto prípadoch je vhodné posúdiť, v kombinácii s koeficientmi kritickosti činností, aj veľkosť koeficientu kritickosti uzlov, ktorý sa rovná súčtu koeficientov kritickosti činností do uzla vstupujúcich - vid' vzťah (4. 10).

Na Obr. 4. 4 sú znázornené dva čiastkové sieťové grafy, ktorých koncový uzol má rovnakú kritickosť $p_i=0,95$.

V obidvoch prípadoch ležal koncový uzol v 95 % simulácií na subkritickej ceste. Z grafu **a)** je na prvý pohľad zrejmé, ktorá činnosť spôsobila vysokú kritickosť koncového uzla. Situácia na Obr. 4. 4 b) nás núti k vykonaniu hlbšej analýzy obidvoch činností s koeficientom kritickosti $p_{ij}=0,45$ a $p_{ij}=0,44$ aj keď ich hodnota sa nepribližuje hodnote 0,7. Obidve činnosti totiž môžu ľahko zapríčiniť predĺženie doby trvania projektu.



Na začiatku tejto kapitoly (v stati 4.1) sme hovorili o výhodách použitia metódy Monte Carlo. Metóda Monte Carlo nesporne prináša do riešenia úloh sieťovej analýzy nové prvky. Spresňuje výsledky nielen tým, že termíny koncového uzla a míľnikov sa optimisticky neskresľujú, ale neskreslené ostávajú aj ostatné charakteristiky sieťového grafu, napr. pravdepodobnosť dodržania plánovaného termínu.

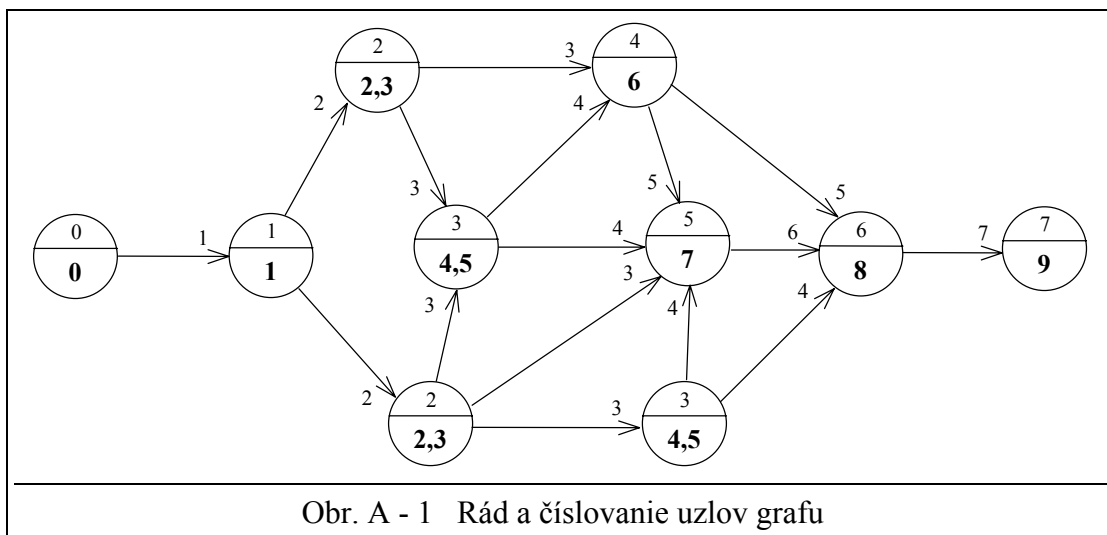
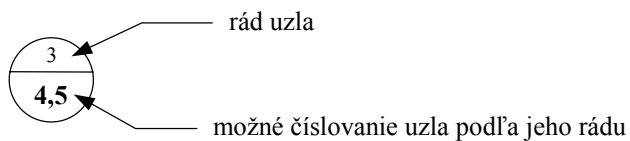
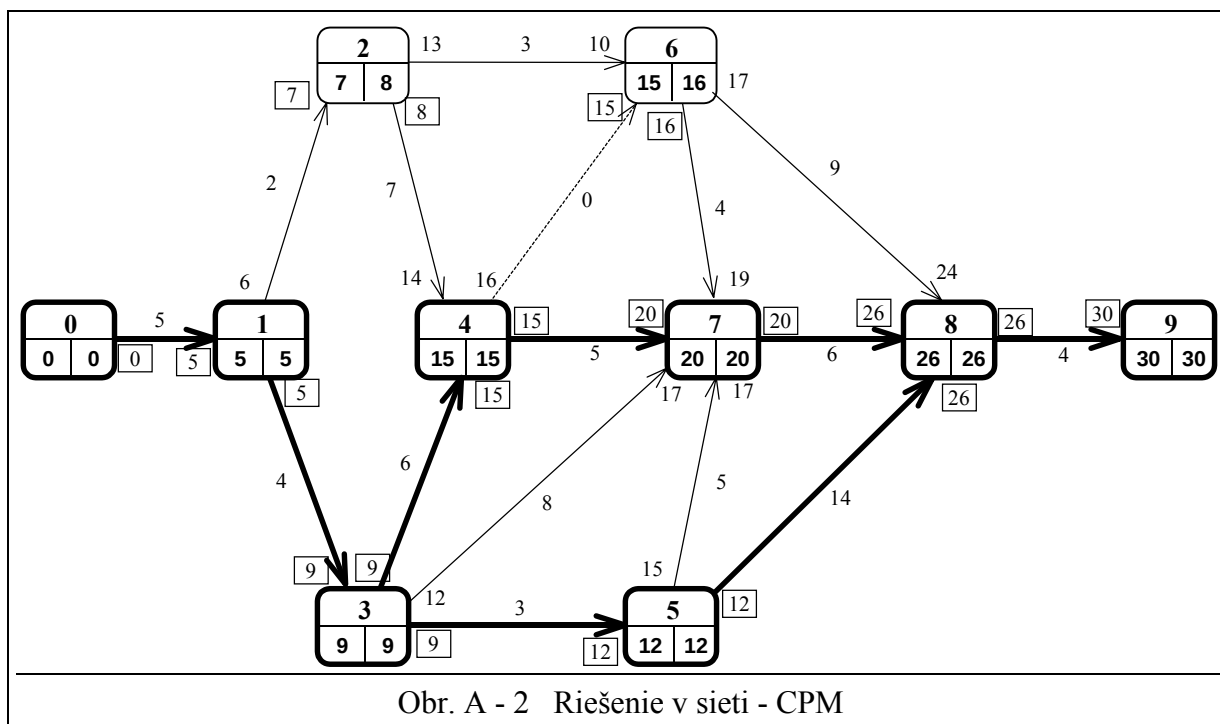
Z rozborov výsledkov vyplýva, že kontrola projektu bude zložitejšia, čo je spôsobené najmä tým, že koeficienty kritickosti činností nie sú celkom porovnateľné. Nie je možné sústrediť sa iba na činnosti s koeficientom kritickosti blízkym jednotke,

resp. spĺňajúce nerovnosť $p_{ij} > 0,7$. Celkovú dobu trvania projektu môžu ovplyvniť aj činnosti s podstatne nižším koeficientom.

Je potrebné, aby takúto analýzu vykonávali pracovníci oboznámení nielen s teóriou metódy ale aj s odbornou problematikou a technológiou príslušného nadväzného procesu.

Príloha A

VÝSLEDKY RIEŠENIA PRÍKLADOV

Príklad 2.5Legenda:**Príklad 3.1 a)**

Príklad 3.1 b)

P.č.	Činnosť		Doba trvania y_{ij}	Najskôr možný		Najneskôr prípustný		Celková rezerva CR_{ij}
	i	j		začiatok tz_{ij}^0	koniec tk_{ij}^0	začiatok tz_{ij}^λ	koniec tk_{ij}^λ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	5	0	5	0	5	0
2	1	2	2	5	7	6	8	1
3	1	3	4	5	9	5	9	0
4	2	4	7	7	14	8	15	1
5	2	6	3	7	10	13	16	6
6	3	4	6	9	15	9	15	0
7	3	5	3	9	12	9	12	0
8	3	7	8	9	17	12	20	3
9	4	6	0	15	15	16	16	1
10	4	7	5	15	20	15	20	0
11	5	7	5	12	17	15	20	3
12	5	8	14	12	26	12	26	0
13	6	7	4	15	19	16	20	1
14	6	8	9	15	24	17	26	2
15	7	8	6	20	26	20	26	0
16	8	9	4	26	30	26	30	0

Tab. A - 1 Riešenie v tabuľke - variant 1.

Príklad 3.1 c)

P.č.	Činnosť		Doba trvania y_{ij}	Termín uzla i		Termín uzla j		Rezervy činností			
	i	j		Najskôr možný T_i^0	Najneskôr prípustný T_i^λ	Najskôr možný T_j^0	Najneskôr prípustný T_j^λ	celková CR_{ij}	voľná VR_{ij}	závislá ZR_{ij}	nezávislá NR_{ij}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	5	0	0	5	5	0	0	0	0
2	1	2	2	5	5	7	8	1	0	1	0
3	1	3	4	5	5	9	9	0	0	0	0
4	2	4	7	7	8	15	15	1	1	0	0
5	2	6	3	7	8	15	16	6	5	5	4
6	3	4	6	9	9	15	15	0	0	0	0
7	3	5	3	9	9	12	12	0	0	0	0
8	3	7	8	9	9	20	20	3	3	3	3
9	4	6	0	15	15	15	16	1	0	1	0
10	4	7	5	15	15	20	20	0	0	0	0
11	5	7	5	12	12	20	20	3	3	3	3
12	5	8	14	12	12	26	26	0	0	0	0
13	6	7	4	15	16	20	20	1	1	0	0
14	6	8	9	15	16	26	26	2	2	1	1
15	7	8	6	20	20	26	26	0	0	0	0
16	8	9	4	26	26	30	30	0	0	0	0

Tab. A - 2 Riešenie v tabuľke - variant 2.

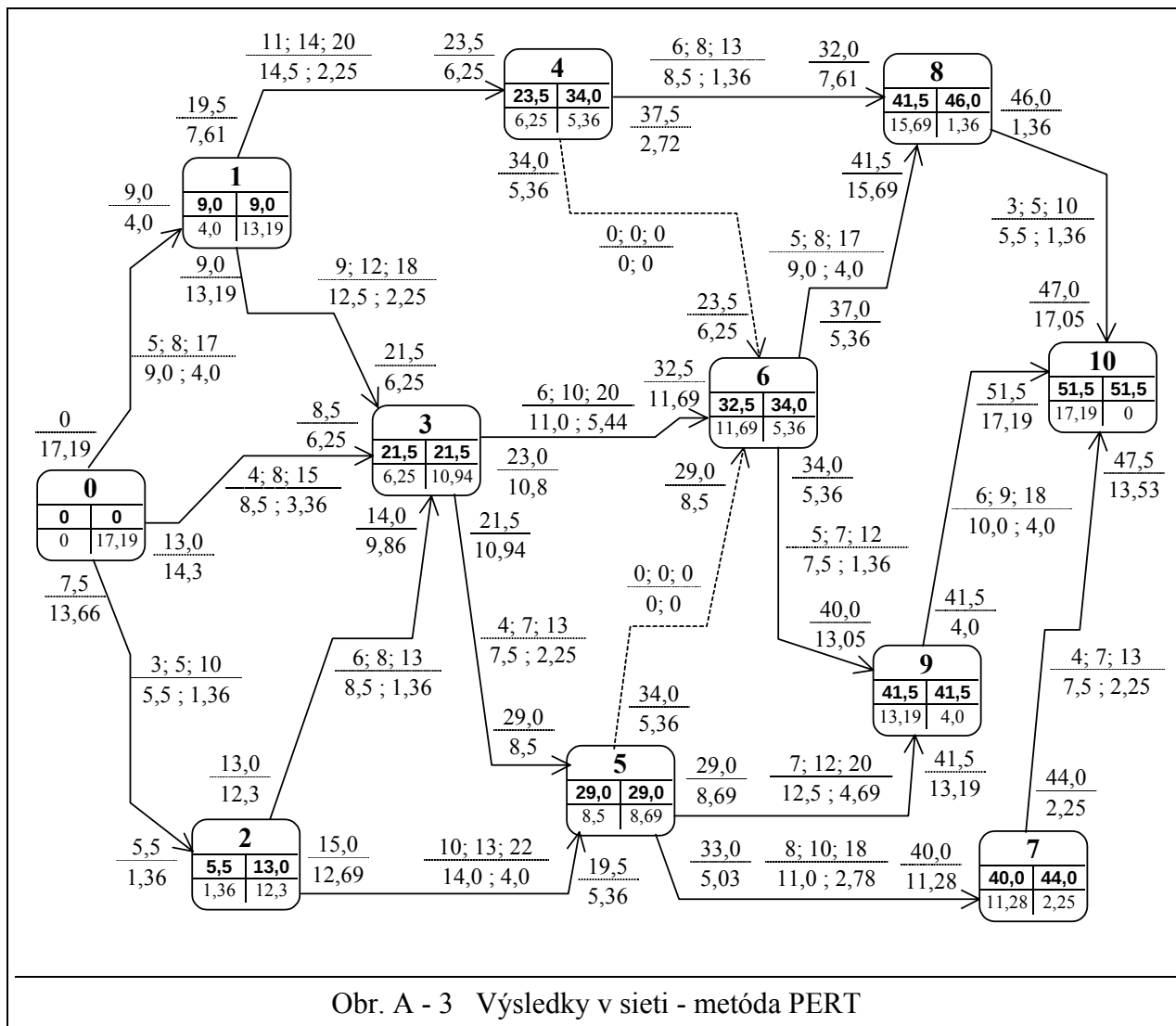
Príklad 3.2

P.č.	Činnosť		Doba trvania (odhad)				Najskôr možný		Najneskôr prípustný		Rozptyl σ^2	Celková rezerva CR_{ij}
	i	j	a	m	b	te	začiatok	koniec	začiatok	koniec		
							$tz_{ij}^0 = T_i^0$	tk_{ij}^0	tz_{ij}^λ	$tk_{ij}^\lambda = T_j^\lambda$		
1	0	1	5	8	17	9,0	0	9,0	0	9,0	4,00	0
2	0	2	3	5	10	5,5	0	5,5	7,5	13,0	1,36	7,5
3	0	3	4	8	15	8,5	0	8,5	13,0	21,5	3,36	13,0
4	1	3	9	12	18	12,5	9,0	21,5	9,0	21,5	2,25	0
5	1	4	11	14	20	14,5	9,0	23,5	19,5	34,0	2,25	10,5
6	2	3	6	8	13	8,5	5,5	14,0	13,0	21,5	1,36	7,5
7	2	5	10	13	22	14,5	5,5	19,5	15,0	29,0	4,00	9,5
8	3	5	4	7	13	7,5	21,5	29,0	21,5	29,0	2,25	0
9	3	6	6	10	20	11,0	21,5	32,5	23,0	34,0	5,44	1,5
10	4	6	0	0	0	0	23,5	23,5	34,0	34,0	0	10,5
11	4	8	6	8	13	8,5	23,5	32,0	37,5	46,0	1,36	14,0
12	5	6	0	0	0	0	29,0	29,0	34,0	34,0	0	5,0
13	5	7	8	10	18	11,0	29,0	40,0	33,0	44,0	2,78	4,0
14	5	9	7	12	20	12,5	29,0	41,5	29,0	41,5	4,69	0
15	6	8	5	8	17	9,0	32,5	41,5	37,0	46,0	4,00	4,5
16	6	9	5	7	12	7,5	32,5	40,0	34,0	41,5	1,36	1,5
17	7	10	4	7	13	7,5	40,0	47,5	44,0	51,5	2,25	4,0
18	8	10	3	5	10	5,5	41,5	47,5	46,0	51,5	1,36	4,5
19	9	10	6	9	18	10,5	41,5	51,5	41,5	51,5	4,00	0

Tab. A - 3 Základné termínové ukazovatele činností

Uzol číslo	Termín uzla		Kritická rezerva KR_i	Rozptyl		
	možný	prípustný		T_i^0	T_i^λ	KRi
	T_i^0	T_i^λ		$\sigma^2(T_i^0)$	$\sigma^2(T_i^\lambda)$	$\sigma^2(KR_i)$
0	0	0	0	0	17,19	17,19
1	9,0	9,0	0	4,00	13,19	17,19
2	5,5	13,0	7,5	1,36	12,30	13,66
3	21,5	21,5	0	6,25	10,94	17,19
4	23,5	34,0	10,5	6,25	5,36	11,61
5	29,0	29,0	0	8,50	8,69	17,19
6	32,5	34,0	1,5	11,69	5,36	17,05
7	40,0	44,0	4,0	11,28	2,25	13,53
8	41,5	46,0	4,5	15,69	1,36	17,05
9	41,5	41,5	0	13,19	4,00	17,19
10	51,5	51,5	0	17,19	0	17,19

Tab. A - 4 Základné termínové ukazovatele uzlov



Obr. A - 3 Výsledky v sieti - metóda PERT

Příklad 3.4

a) Vzťahy: $P\{KR_i \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-KR_i}{\sigma(KR_i)}\right) \quad \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Výpočet:

$$P\{KR_6 \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-1,5}{\sqrt{17,05}}\right) = \Phi(-0,36327) = 1 - \Phi(0,36327) \doteq \\ \doteq 1 - 0,640576 \doteq \underline{\underline{0,359424}}$$

$$P\{KR_8 \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-4,5}{\sqrt{17,05}}\right) = \Phi(-1,0898088) = 1 - \Phi(1,0898088) \doteq \\ \doteq 1 - 0,862143 \doteq \underline{\underline{0,137857}}$$

$$P\{KR_{10} \leq 0\} = \Phi\left(\frac{-0}{\sqrt{17,19}}\right) = \Phi(0) = \underline{\underline{0,5}}$$

b) Vzťahy: $P\{T_k^0 \leq T\} = \Phi\left(\frac{T - T_k^0}{\sigma(T_k^0)}\right) \quad \Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Výpočet:

$$P\{T_{10}^0 \leq 40\} = \Phi\left(\frac{40 - 51,5}{\sqrt{17,19}}\right) = \Phi(-2,7737) = 1 - \Phi(2,7737) \doteq \\ \doteq 1 - 0,997197 \doteq \underline{\underline{0,0028}}$$

$$P\{T_{10}^0 \leq 46\} = \Phi\left(\frac{46 - 51,5}{\sqrt{17,19}}\right) = \Phi(-1,32655) = 1 - \Phi(1,32655) \doteq \\ \doteq 1 - 0,908241 \doteq \underline{\underline{0,091759}}$$

$$P\{T_{10}^0 \leq 55\} = \Phi\left(\frac{55 - 51,5}{\sqrt{17,19}}\right) = \Phi(0,84417) \doteq \underline{\underline{0,799546}}$$

$$P\{T_{10}^0 \leq 60\} = \Phi\left(\frac{60 - 51,5}{\sqrt{17,19}}\right) = \Phi(2,05) \doteq \underline{\underline{0,979818}}$$

c) Vzťahy: $T_k\{P = p\} = T_k^0 + u_p * \sigma(T_k^0) \quad u(\Phi < 0,5) = -u(1 - \Phi)$

Výpočet:

$$T_{10}\{P = 0,4\} = 51,5 + u(0,4) * \sqrt{17,19} = 51,5 - u(0,6) * \sqrt{17,19} \doteq \\ \doteq 51,5 - 0,25 * \sqrt{17,19} \doteq \underline{\underline{50,46 \text{ časových jednotiek}}}$$

$$T_{10}\{P = 0,6\} = 51,5 + u(0,6) * \sqrt{17,19} \doteq 51,5 + 0,25 * \sqrt{17,19} \doteq \underline{\underline{52,54 \text{ čas. jedn.}}}$$

$$T_{10}\{P = 0,8\} = 51,5 + u(0,8) * \sqrt{17,19} \doteq 51,5 + 0,84 * \sqrt{17,19} \doteq \underline{\underline{54,98 \text{ čas. jedn.}}}$$

Príloha B

HUSTOTA PRAVDEPODOBNOSTI A DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NORMOVANÉHO NORMÁLNEHO ROZDELENIA $N(0,1)$

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia rozdelenia $N(0,1)$

u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$
0,00	0,398942	0,500000	0,50	0,352065	0,691462	1,00	0,241971	0,841345
0,01	0,398922	0,503989	0,51	0,350292	0,694974	1,01	0,239551	0,843752
0,02	0,398862	0,507978	0,52	0,348493	0,698468	1,02	0,237132	0,846136
0,03	0,398763	0,511967	0,53	0,346668	0,701944	1,03	0,234714	0,848495
0,04	0,398623	0,515953	0,54	0,344818	0,705402	1,04	0,232297	0,850830
0,05	0,398444	0,519939	0,55	0,342944	0,708840	1,05	0,229882	0,853141
0,06	0,398225	0,523922	0,56	0,341046	0,712260	1,06	0,227470	0,855428
0,07	0,397966	0,527903	0,57	0,339124	0,715661	1,07	0,225060	0,857690
0,08	0,397668	0,531881	0,58	0,337180	0,719043	1,08	0,222653	0,859929
0,09	0,397330	0,535856	0,59	0,335213	0,722405	1,09	0,220251	0,862143
0,10	0,396953	0,539828	0,60	0,333225	0,725747	1,10	0,217852	0,864334
0,11	0,396536	0,543795	0,61	0,331215	0,729069	1,11	0,215458	0,866500
0,12	0,396080	0,547758	0,62	0,329184	0,732371	1,12	0,213069	0,868643
0,13	0,395585	0,551717	0,63	0,327133	0,735653	1,13	0,210686	0,870762
0,14	0,395052	0,555670	0,64	0,325062	0,738914	1,14	0,208308	0,872857
0,15	0,394479	0,559618	0,65	0,322972	0,742154	1,15	0,205936	0,874928
0,16	0,393868	0,563559	0,66	0,320864	0,745373	1,16	0,203571	0,876976
0,17	0,393219	0,567495	0,67	0,318737	0,748571	1,17	0,201214	0,878999
0,18	0,392531	0,571424	0,68	0,316593	0,751748	1,18	0,198863	0,881000
0,19	0,391806	0,575345	0,69	0,314432	0,754903	1,19	0,196520	0,882977
0,20	0,391043	0,579260	0,70	0,312254	0,758036	1,20	0,194186	0,884930
0,21	0,390242	0,583166	0,71	0,310060	0,761148	1,21	0,191860	0,886860
0,22	0,389404	0,587064	0,72	0,307851	0,764238	1,22	0,189543	0,888767
0,23	0,388529	0,590954	0,73	0,305627	0,767305	1,23	0,187235	0,890651
0,24	0,387617	0,594835	0,74	0,303389	0,770350	1,24	0,184937	0,892512
0,25	0,386668	0,598706	0,75	0,301137	0,773373	1,25	0,182649	0,894350
0,26	0,385683	0,602568	0,76	0,298872	0,776373	1,26	0,180371	0,896165
0,27	0,384663	0,606420	0,77	0,296595	0,779350	1,27	0,178104	0,897958
0,28	0,383606	0,610261	0,78	0,294305	0,782305	1,28	0,175847	0,899727
0,29	0,382515	0,614092	0,79	0,292004	0,785236	1,29	0,173602	0,901475
0,30	0,381388	0,617911	0,80	0,289692	0,788145	1,30	0,171369	0,903199
0,31	0,380226	0,621719	0,81	0,287369	0,791030	1,31	0,169147	0,904902
0,32	0,379031	0,625516	0,82	0,285036	0,793892	1,32	0,166937	0,906582
0,33	0,377801	0,629300	0,83	0,282694	0,796731	1,33	0,164740	0,908241
0,34	0,376537	0,633072	0,84	0,280344	0,799546	1,34	0,162555	0,909877
0,35	0,375240	0,636831	0,85	0,277985	0,802338	1,35	0,160383	0,911492
0,36	0,373911	0,640576	0,86	0,275618	0,805106	1,36	0,158225	0,913085
0,37	0,372548	0,644309	0,87	0,273244	0,807850	1,37	0,156080	0,914656
0,38	0,371154	0,648027	0,88	0,270864	0,810570	1,38	0,153948	0,916207
0,39	0,369728	0,651732	0,89	0,268477	0,813267	1,39	0,151831	0,917736
0,40	0,368270	0,655422	0,90	0,266085	0,815940	1,40	0,149727	0,919243
0,41	0,366782	0,659097	0,91	0,263688	0,818589	1,41	0,147639	0,920730
0,42	0,365263	0,662757	0,92	0,261286	0,821214	1,42	0,145564	0,922196
0,43	0,363714	0,666402	0,93	0,258881	0,823814	1,43	0,143505	0,923641
0,44	0,362135	0,670031	0,94	0,256471	0,826391	1,44	0,141460	0,925066
0,45	0,360527	0,673645	0,95	0,254059	0,828944	1,45	0,139431	0,926471
0,46	0,358890	0,677242	0,96	0,251644	0,831472	1,46	0,137417	0,927855
0,47	0,357225	0,680822	0,97	0,249228	0,833977	1,47	0,135418	0,929219
0,48	0,355533	0,684386	0,98	0,246809	0,836457	1,48	0,133435	0,930563
0,49	0,353812	0,687933	0,99	0,244390	0,838913	1,49	0,131468	0,931888

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia rozdelenia $N(0,1)$

u	$\phi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\phi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\phi(u)$	$\Phi(u)$
1,50	0,129518	0,933193	2,00	0,053991	0,977250	2,50	0,017528	0,993790
1,51	0,127583	0,934478	2,01	0,052919	0,977784	2,51	0,017095	0,993963
1,52	0,125665	0,935744	2,02	0,051864	0,978308	2,52	0,016670	0,994132
1,53	0,123763	0,936992	2,03	0,050824	0,978822	2,53	0,016254	0,994297
1,54	0,121878	0,938220	2,04	0,049800	0,979325	2,54	0,015848	0,994457
1,55	0,120009	0,939429	2,05	0,048792	0,979818	2,55	0,015449	0,994614
1,56	0,118157	0,940620	2,06	0,047800	0,980301	2,56	0,015060	0,994766
1,57	0,116323	0,941792	2,07	0,046823	0,980774	2,57	0,014678	0,994915
1,58	0,114505	0,942947	2,08	0,045861	0,981237	2,58	0,014305	0,995060
1,59	0,112704	0,944083	2,09	0,044915	0,981691	2,59	0,013940	0,995201
1,60	0,110921	0,945201	2,10	0,043984	0,982136	2,60	0,013583	0,995339
1,61	0,109155	0,946301	2,11	0,043067	0,982571	2,61	0,013234	0,995473
1,62	0,107406	0,947384	2,12	0,042166	0,982997	2,62	0,012892	0,995603
1,63	0,105675	0,948449	2,13	0,041280	0,983414	2,63	0,012558	0,995731
1,64	0,103961	0,949497	2,14	0,040408	0,983823	2,64	0,012232	0,995855
1,65	0,102265	0,950529	2,15	0,039550	0,984222	2,65	0,011912	0,995975
1,66	0,100586	0,951543	2,16	0,038707	0,984614	2,66	0,011600	0,996093
1,67	0,098925	0,952540	2,17	0,037878	0,984997	2,67	0,011295	0,996207
1,68	0,097282	0,953521	2,18	0,037063	0,985371	2,68	0,010997	0,996319
1,69	0,095657	0,954486	2,19	0,036262	0,985738	2,69	0,010706	0,996427
1,70	0,094049	0,955435	2,20	0,035475	0,986097	2,70	0,010421	0,996533
1,71	0,092459	0,956367	2,21	0,034701	0,986447	2,71	0,010143	0,996636
1,72	0,090887	0,957284	2,22	0,033941	0,986791	2,72	0,009871	0,996736
1,73	0,089333	0,958185	2,23	0,033194	0,987126	2,73	0,009606	0,996833
1,74	0,087796	0,959071	2,24	0,032460	0,987455	2,74	0,009347	0,996928
1,75	0,086277	0,959941	2,25	0,031740	0,987776	2,75	0,009094	0,997020
1,76	0,084776	0,960796	2,26	0,031032	0,988089	2,76	0,008846	0,997110
1,77	0,083293	0,961636	2,27	0,030337	0,988396	2,77	0,008605	0,997197
1,78	0,081828	0,962462	2,28	0,029655	0,988696	2,78	0,008370	0,997282
1,79	0,080380	0,963273	2,29	0,028985	0,988989	2,79	0,008140	0,997365
1,80	0,078950	0,964070	2,30	0,028327	0,989276	2,80	0,007915	0,997445
1,81	0,077538	0,964852	2,31	0,027682	0,989556	2,81	0,007697	0,997523
1,82	0,076143	0,965621	2,32	0,027048	0,989830	2,82	0,007483	0,997599
1,83	0,074766	0,966375	2,33	0,026426	0,990097	2,83	0,007274	0,997673
1,84	0,073407	0,967116	2,34	0,025817	0,990358	2,84	0,007071	0,997744
1,85	0,072065	0,967843	2,35	0,025218	0,990613	2,85	0,006873	0,997814
1,86	0,070740	0,968557	2,36	0,024631	0,990863	2,86	0,006679	0,997882
1,87	0,069433	0,969258	2,37	0,024056	0,991106	2,87	0,006491	0,997948
1,88	0,068144	0,969946	2,38	0,023491	0,991344	2,88	0,006307	0,998012
1,89	0,066871	0,970621	2,39	0,022937	0,991576	2,89	0,006127	0,998074
1,90	0,065616	0,971284	2,40	0,022395	0,991802	2,90	0,005953	0,998134
1,91	0,064378	0,971933	2,41	0,021862	0,992024	2,91	0,005782	0,998193
1,92	0,063157	0,972571	2,42	0,021341	0,992240	2,92	0,005616	0,998250
1,93	0,061952	0,973197	2,43	0,020829	0,992451	2,93	0,005454	0,998305
1,94	0,060765	0,973810	2,44	0,020328	0,992656	2,94	0,005296	0,998359
1,95	0,059595	0,974412	2,45	0,019837	0,992857	2,95	0,005143	0,998411
1,96	0,058441	0,975002	2,46	0,019356	0,993053	2,96	0,004993	0,998462
1,97	0,057304	0,975581	2,47	0,018885	0,993244	2,97	0,004847	0,998511
1,98	0,056183	0,976148	2,48	0,018423	0,993431	2,98	0,004705	0,998559
1,99	0,055079	0,976705	2,49	0,017971	0,993613	2,99	0,004567	0,998605

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia rozdelenia $N(0,1)$

u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$	u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$
3,00	0,004432	0,998650	3,50	0,000873	0,999767	4,00	0,000134	0,999968
3,01	0,004301	0,998694	3,51	0,000843	0,999776	4,01	0,000129	0,999970
3,02	0,004173	0,998736	3,52	0,000814	0,999784	4,02	0,000124	0,999971
3,03	0,004049	0,998777	3,53	0,000785	0,999792	4,03	0,000119	0,999972
3,04	0,003928	0,998817	3,54	0,000758	0,999800	4,04	0,000114	0,999973
3,05	0,003810	0,998856	3,55	0,000732	0,999807	4,05	0,000109	0,999974
3,06	0,003695	0,998893	3,56	0,000706	0,999815	4,06	0,000105	0,999975
3,07	0,003584	0,998930	3,57	0,000681	0,999821	4,07	0,000101	0,999976
3,08	0,003475	0,998965	3,58	0,000657	0,999828	4,08	0,000097	0,999977
3,09	0,003370	0,998999	3,59	0,000634	0,999835	4,09	0,000093	0,999978
3,10	0,003267	0,999032	3,60	0,000612	0,999841	4,10	0,000089	0,999979
3,11	0,003167	0,999064	3,61	0,000590	0,999847	4,11	0,000086	0,999980
3,12	0,003070	0,999096	3,62	0,000569	0,999853	4,12	0,000082	0,999981
3,13	0,002975	0,999126	3,63	0,000549	0,999858	4,13	0,000079	0,999982
3,14	0,002884	0,999155	3,64	0,000529	0,999864	4,14	0,000076	0,999983
3,15	0,002794	0,999184	3,65	0,000510	0,999869	4,15	0,000073	0,999983
3,16	0,002707	0,999211	3,66	0,000492	0,999874	4,16	0,000070	0,999984
3,17	0,002623	0,999238	3,67	0,000474	0,999879	4,17	0,000067	0,999985
3,18	0,002541	0,999264	3,68	0,000457	0,999883	4,18	0,000064	0,999985
3,19	0,002461	0,999289	3,69	0,000441	0,999888	4,19	0,000061	0,999986
3,20	0,002384	0,999313	3,70	0,000425	0,999892	4,20	0,000059	0,999987
3,21	0,002309	0,999336	3,71	0,000409	0,999896	4,21	0,000057	0,999987
3,22	0,002236	0,999359	3,72	0,000394	0,999900	4,22	0,000054	0,999988
3,23	0,002165	0,999381	3,73	0,000380	0,999904	4,23	0,000052	0,999988
3,24	0,002096	0,999402	3,74	0,000366	0,999908	4,24	0,000050	0,999989
3,25	0,002029	0,999423	3,75	0,000353	0,999912	4,25	0,000048	0,999989
3,26	0,001964	0,999443	3,76	0,000340	0,999915	4,26	0,000046	0,999990
3,27	0,001901	0,999462	3,77	0,000327	0,999918	4,27	0,000044	0,999990
3,28	0,001840	0,999481	3,78	0,000315	0,999922	4,28	0,000042	0,999991
3,29	0,001780	0,999499	3,79	0,000303	0,999925	4,29	0,000040	0,999991
3,30	0,001723	0,999517	3,80	0,000292	0,999928	4,30	0,000039	0,999991
3,31	0,001667	0,999533	3,81	0,000281	0,999930			
3,32	0,001612	0,999550	3,82	0,000271	0,999933			
3,33	0,001560	0,999566	3,83	0,000260	0,999936			
3,34	0,001508	0,999581	3,84	0,000251	0,999938			
3,35	0,001459	0,999596	3,85	0,000241	0,999941			
3,36	0,001411	0,999610	3,86	0,000232	0,999943			
3,37	0,001364	0,999624	3,87	0,000223	0,999946			
3,38	0,001319	0,999638	3,88	0,000215	0,999948			
3,39	0,001275	0,999650	3,89	0,000207	0,999950			
3,40	0,001232	0,999663	3,90	0,000199	0,999952			
3,41	0,001191	0,999675	3,91	0,000191	0,999954			
3,42	0,001151	0,999687	3,92	0,000184	0,999956			
3,43	0,001112	0,999698	3,93	0,000177	0,999958			
3,44	0,001075	0,999709	3,94	0,000170	0,999959			
3,45	0,001038	0,999720	3,95	0,000163	0,999961			
3,46	0,001003	0,999730	3,96	0,000157	0,999963			
3,47	0,000969	0,999740	3,97	0,000151	0,999964			
3,48	0,000936	0,999749	3,98	0,000145	0,999966			
3,49	0,000904	0,999758	3,99	0,000139	0,999967			

Literatúra

- [1] Janáček, J. - Szendreyová, A.: Modelování komunikačních systémů I,II.
Bratislava, Alfa 1989.
- [2] Klusoň, V.: Kritická cesta a PERT v řídicí práci.
Praha, SNTL 1968.
- [3] Knezovič, M. - Jindra, V. - Kraclík, J. - Řeřucha, V.: Operační analýza ve
vojenství.
Brno, VAAZ 1988.
- [4] Linda, B.: Stochastické modely operační analýzy.
Žilina, VŠDS 1990.
- [5] Skýva, L. - Machalík, F.: Numerické metody.
Bratislava, Alfa 1985.
- [6] Slamková, E.: Operační a systémová analýza.
Bratislava, Alfa 1990.
- [7] Šulc, J. a kol.: Síťová analýza v hospodářské praxi.
Praha, SNTL 1975.
- [8] Walter, J. - Vejmla, S. - Fiala, P.: Aplikace metod síťové analýzy
v řízení a plánování.
Praha, SNTL 1989.

Autor	:	Ing. Vladislav Kašpar, CSc.
Názov	:	Vybrané metódy operačnej analýzy vo vojenskej doprave a vojenskom staviteľstve (metódy sieťovej analýzy – CPM, PERT)
Vydavateľ	:	Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta špeciálneho inžinierstva
Vydanie	:	prvé
Povolené	:	rektorom Žilinskej univerzity v Žiline, výmerom č. 6/1998
Určené	:	pre študentov Fakulty špeciálneho inžinierstva ŽU v Žiline
Zodpovedný redaktor	:	RSDr. Štěpán Machynka
Rok vydania	:	1998
Náklad	:	200 výtlačkov
AH / VH	:	6,2 / 6,6

ISBN 80-88829-27-5