VIACKRITERIÁLNE (MULTIKRITERIÁLNE) ROZHODOVANIE (ROZHODOVACIA ANALÝZA)

Metódy rozhodovacej analýzy

Existuje viacej rozličných metód, ktoré majú v zásade rovnaký princíp - posúdenie niekoľkých variantov riešenia zadaného problému podľa zvolených kritérií a stanovenie poradia variantov. Jednotlivé metódy sa líšia podľa toho, ako sa určuje tzv. ***váha jednotlivých kritérií*** *a ako sa číselne hodnotí stupeň, ktorým jednotlivé varianty riešenia napĺňajú zvolené kritériá.*

PRÍKLAD 1

Do konkurzu na dodávku kopírovacích strojov sa prihlásili 3 dodávatelia :

D1 – Canon, D2 – Minolta, D3 – Toshiba.

Na základe zvolených kritérií :

K1 – cena výrobku, K2 – poskytovaná záruka, K3 – výkonnosť výrobku, K4 – čas dodania

Po posúdení predložených ponúk do výberového konania boli s ohľadom na zvolené kritériá získané nasledovné informácie :

	CANON	MINOLTA	TOSHIBA
K1 – cena výrobku	350 Eur	300 Eur	450 Eur
K2 - záruka	36 mes	24 mes	60 mes
K3 – výkon stroja	25 str/min	25 str/min	35 str/min
K4 – doba dodania	14 dní	10 dní	7 dní

Riešte úlohu viackriteriálneho rozhodovania prostredníctvom :

(A) DMM – Metódy rozhodovacej matice,
(B) FDMM – modifikovanej metódy rozhodovacej matice
(C) AHP – Analytickej viacúrovňovej metódy

RIEŠENIE :

(A) DMM - Metóda rozhodovacej matice (Decision Matrix Method)

Je považovaná za základnú metódu (môže mať viac variantov riešenia). Jeden z variantov spočíva v hodnotení váhy (dôležitosti) jednotlivých kritérií ***bodovou stupnicou od 1 po 10*** *tak, že stupeň* ***1*** *je priradený najmenšej váhe a stupeň* ***10*** *váhe najväčšej. Rovnakou stupnicou sa tiež hodnotí skutočnosť, ako jednotlivé varianty riešenia vyhovujú zvoleným kritériám, tzn. stupňom „1“ - nevyhovuje až po „10“ - vyhovuje ideálne.*

Kritérium	Váha	Hodnotenie dodávateľa		
		Canon	Minolta	Toshiba
Cena ponuky	9	6	8	3
Poskytovaná záruka	6	6	4	8
Výkonnosť stroja	7	7	7	9
Doba dodávky	4	6	7	8
Vážený súčet		163	173	170
Poradie		3	1	2

Za výsledné kritérium pre rozhodnutie sa potom volí najväčší vážený súčet (súčet súčinov hodnotenia miery splnenia kritériá a ich váhy).

<u>Výhody</u> : 1. jednoduchosť postupu, 2. relatívne nízka časová náročnosť
<u>Nevýhody</u> : 1. vysoký podiel subjektivity – pri ohodnotení váh kritérií a pri hodnotení toho ako jednotlivé varianty vyhovujú zvoleným kritériám,

(B) FDMM – Modifikovaná metóda rozhodovacej matice (Forced Decision Matrix Method)

Čiastočne odstraňuje nevýhody DMM. Váhy jednotlivých kritérií, ako aj hodnotenie variantov ako spĺňajú jednotlivé kritériá, sa určujú tzv. ***párovým porovnaním.*** *Znamená to, že pri porovnaní dvoch kritérií, je významnejšie (pre rozhodovanie dôležitejšie) kritérium hodnotené „1“, menej významné kritérium „0“. Podobne pri hodnotení toho, ako dva varianty vyhovujú zvoleným kritériám hodnotenia, je variant vyhovujúci lepšie, hodnotený „1“ a variant hodnotený horšie „0“.*

a) Párové porovnanie kritérií

Kritérium	K1	K2	K3	K4	Súčet	Váha
K1	-	1	1	1	3	3/6 = 0,5
K2	0	-	0	1	1	1/6 = 0,167
K3	0	1	-	1	2	2/6 = 0,333
K4	0	0	0	-	0	0/6 = 0

b) Párové porovnanie variantov podľa kritéria K1

Variant	D1	D2	D3	Súčet	Hodnotenie
D1	-	0	1	1	1/3 = 0,333
D2	1	-	1	2	2/3 = 0,667
D3	0	0	-	0	0/3 = 0

c) Párové porovnanie variantov podľa kritéria K2

Variant	D1	D2	D3	Súčet	Hodnotenie
D1	-	1	0	1	1/3 = 0,333
D2	0	-	0	0	0/3 = 0
D3	1	1	-	2	2/3 = 0,667

d) Párové porovnanie variantov podľa kritéria K3

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	1/2	0	1/2	0,5/3 = 0,167
2	1/2	-	0	1/2	0,5/3 = 0,167
3	1	1	-	2	2/3 = 0,667

e) Párové porovnanie variantov podľa kritéria K4

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	0	0	0	0/3 = 0
2	1	-	0	1	1/3 = 0,333
3	1	1	-	2	2/3 = 0,667

Rozhodovacia tabuľka FDMM

Kritérium	Váha	Hodnotenie dodávateľa		
		Canon	**Minolta**	**Toshiba**
Cena ponuky	0,5	0,333	0,667	0
Poskytovaná záruka	0,167	0,333	0	0,667
Výkonnosť stroja	0,333	0,167	0,167	0,667
Doba dodávky	0	0	0,333	0,667
Vážený súčet		0,2777	0,3891	0,3335
Poradie		3	1	2

Výsledné hodnotenie variantov alebo váhu kritérií dostaneme tak, že hodnotenie „normujeme“, tj. požadujeme, aby súčet všetkých hodnotení resp. váh bol rovný 1

Výhody : 1. relatívna jednoduchosť postupu, 2. odstránenie subjektivity pri určovaní váh a vplyvu kritérií (sú určené exaktnejšie)
Nevýhody : 1. relatívne veľké rozdiely v hodnotení jednotlivých variantov a kritérií (aj keď sa líšia iba málo), 2. pri určení váhy kritéria alebo hodnotenia alternatívy rovnom „0“, nemajú na celkové hodnotenie žiadny vplyv.

(C) AHP – Analytická viacúrovňová metóda (Analytic Hierarchy Process)

*AHP do istej miery eliminuje nedostatky DMM a FDMM. Je založená tiež na párovom porovnávaní stupňa významnosti jednotlivých kritérií a miery toho, ako hodnotené varianty riešenia tieto kritériá spĺňajú. Stupnica hodnotenia je však podstatne komplexnejšia. Hodnotenie je v oboch prípadoch (porovnanie kritérií i variantov) založené na tzv. „**expertnom odhade“,** pri ktorom odborníci v danom odbore porovnávajú vzájomné vplyvy dvoch faktorov. Tieto hodnotia na základe stupnice **rovnaký – slabý – stredný - silný - veľmi silný],** pričom tomuto slovnému hodnoteniu odpovedajú hodnoty **[1 - 3 - 5 - 7 - 9]**.*

	9	**7**	**5**	**3**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	
Faktor A								X	X	Faktor B
	Veľmi silný	**Silný**	**Stred ný**	**Slabý**	**Rov- naký**	**Slabý**	**Stred ný**	**Silný**	**Veľmi silný**	

Ak sú vo formulári pre hodnotenie vyznačené 2 možnosti (v tomto prípade silná a veľmi silná prevaha faktora B nad faktorom A), ako výsledné hodnotenie sa v riadku faktora B a stĺpci faktora A objaví hodnota „8“ a v riadku faktora A a stĺpci faktora B sa uvedie prevrátená hodnota tj. hodnota „1/8“.

Do rozhodovacej matice sa zaraďuje i vzájomné porovnanie rovnakých premenných s hodnotením vplyvu „1“ (rovnaký vplyv).

Ďalší postup určenia váh kritérií a porovnania variantov riešení je oproti predchádzajúcim metódam komplikovanejší, pretože je potrebné :

1. *pre každú maticu párového porovnania určiť **normovaný vlastný vektor** odpovedajúci najväčšej reálnej **vlastnej hodnote (číslu)** matice, uvažovanej v absolútnej hodnote.*
2. *jeho zložky podobne určujú váhy kritérií a hodnotenie variantov riešenia podľa jednotlivých kritérií a výsledné ohodnotenie variantov dostaneme rovnako ako **vážený súčet** určených hodnotení násobených váhami kritérií.*

a) Porovnanie kritérií

Kritérium	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**
K1	1	3	4	5
K2	1/3	1	2	3
K3	1/4	1/2	1	2
K4	1/5	1/3	1/2	1

b) Porovnanie variantov podľa kritéria K1

K1 - cena	D1	D2	D3
D1	1	1/3	4
D2	3	1	6
D3	1/4	1/6	1

c) Porovnanie variantov podľa kritéria K2

K2 - záruka	D1	D2	D3
D1	1	3	1/3
D2	1/3	1	1/5
D3	3	5	1

d) Porovnanie variantov podľa kritéria K3

K3 - výkon	D1	D2	D3
D1	1	1	1/3
D2	1	1	1/3
D3	3	3	1

e) Porovnanie variantov podľa kritéria K4

K4 - dodanie	D1	D2	D3
D1	1	1/2	1/3
D2	2	1	1/2
D3	3	2	1

Všeobecný postup riešenia

I. Realizácia párového porovnania kritérií a porovnania variantov podľa jednotlivých kritérií – získanie matíc.

II. Určenie vlastnej hodnoty (vlastného čísla) každej matice

A. Získanie charakteristického polynómu

a) riešiť determinant matice v tvare $\det(\mathbf{A_i} - \lambda.\mathbf{J}) = 0$.

b) použiť Fadejevovu metódu

c) využiť dostupný software (Matlab, Mathematica a pod.)

B. Určenie koreňov charakteristického polynómu a z nich získať vlastné číslo, pre ktoré platí

$$\max|\lambda_i| = VČ$$

a) postupy na riešenie polynómov napr. Bairstowova metóda

b) využiť dostupný software (Matlab, Mathematica a pod.)

III. Získanie hodnôt vlastného vektora matice

Určené vlastné číslo matice dosadíme do sústavy v tvare

$$(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{J}).\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Získame homogénnu sústavu n - rovníc (s nulovou pravou stranou). Jej riešením získame hodnoty tzv. ***vlastného vektora.***

a) využitie metód riešenia sústav LAR, napr. Gaussova eliminačná metóda, LU rozklad, Gauss – Jordanova metóda a pod.

b) využiť dostupný software (Matlab, Mathematica a pod.)

IV. Transformácia vlastného vektora matice na normovaný vlastný vektor, ktorého zložky určujú váhy jednotlivých kritérií a váhy variantov podľa toho, ako spĺňajú požiadavky jednotlivých kritérií.

V. Výsledné ohodnotenie a stanovenie poradia pomocou vážených súčtov.

Praktická aplikácia postupu :

I. Získanie matice napr. z porovnania kritérií

Kritérium	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**
K1	1	3	4	5
K2	1/3	1	2	3
K3	1/4	1/2	1	2
K4	1/5	1/3	1/2	1

II. Určenie vlastnej hodnoty matice

A. určenie charakteristického polynómu - rozvoj determinantu $\det(\mathbf{A}_i - \lambda.\mathbf{J}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & 1-\lambda & 2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1)^{1+1}.(1-\lambda).\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1/2 & 1-\lambda & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1}.1/3.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 1-\lambda & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}.1/4.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+1}.1/5.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1-\lambda & 2 & 3 \\ 1/2 & 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Rozvojom a úpravami dostaneme charakteristický polynóm matice v tvare

$$\lambda^4 - 4.\lambda^3 - 0.\lambda^2 - 299/360.\lambda - 1/30 = 0$$

B. <u>získanie charakteristického polynómu Fadejevovou metódou</u>

Platí :

$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$	$p_1 = \text{stopa } \mathbf{A}_1$	$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 - p_1.\mathbf{J}$
$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}.\mathbf{B}_1$	$p_2 = 1/2 \ (\text{stopa } \mathbf{A}_2)$	$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 - p_2.\mathbf{J}$
$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}.\mathbf{B}_2$	$p_3 = 1/3 \ (\text{stopa } \mathbf{A}_3)$	$\mathbf{B}_3 = \mathbf{A}_3 - p_3.\mathbf{J}$
....	....	....
$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}.\mathbf{B}_{n-1}$	$p_n = 1/n \ (\text{stopa } \mathbf{A}_n)$	$\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n - p_n.\mathbf{J}$

Platí :

inverzná matica : $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p_n}.\mathbf{B}_{n-1}$$

charakteristický polynóm : $$\lambda^n - p_1.\lambda^{n-1} - p_2.\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}.\lambda - p_n = 0$$

späť na príklad :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 1+1+1+1 = 4 \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & -3 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & -3 & 2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}.\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -7/3 & 1/2 & 7 \\ 13/30 & 0 & -7/6 & -1/3 \\ 2/30 & 5/12 & 0 & -5/4 \\ -59/360 & 11/60 & 7/15 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \frac{1}{2}.(0+0+0+0) = 0$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -7/3 & 1/2 & 7 \\ 13/30 & 0 & -7/6 & -1/3 \\ 2/30 & 5/12 & 0 & -5/4 \\ -59/360 & 11/60 & 7/15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}.\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 269/360 & 1/4 & -2/3 & 1 \\ 27/360 & 109/180 & 2/5 & -1/2 \\ -4/90 & 1/5 & 171/360 & 1/3 \\ 5/360 & -3/40 & 8/45 & 239/360 \end{pmatrix} \quad p_3 = \frac{1}{3}.\left(\frac{269}{360} + \frac{109}{180} + \frac{171}{360} + \frac{239}{360}\right) = \frac{299}{360}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} -30/360 & 1/4 & -2/3 & 1 \\ 27/360 & -81/360 & 2/5 & -1/2 \\ -4/90 & 1/5 & -128/360 & 1/3 \\ 5/360 & -3/40 & 8/45 & -1/60 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}.\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1/30 & 0 & 0{,}0 & 0 \\ 0{,}0 & 1/30 & 0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 1/30 & 0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0 & 1/30 \end{pmatrix} \quad p_4 = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = \frac{1}{30}$$

Charakteristický polynóm :

$$\lambda^n - p_1.\lambda^{n-1} - p_2.\lambda^{n-2} - \ldots - p_{n-1}.\lambda - p_n = 0$$

$$\lambda^4 - 4.\lambda^3 - 0.\lambda^2 - \frac{299}{360}.\lambda - \frac{1}{30} = 0$$

C. Určenie koreňov charakteristického polynómu a z nich získať vlastné číslo, *pre ktoré platí*

$$\max|\lambda_i| = V\check{C}$$

a) postupy na riešenie polynómov napr. Bairstowova metóda

BAIRSTOWOVA METÓDA

$$\lambda^4 - 4.\lambda^3 - 0.\lambda^2 - \frac{299}{360}.\lambda - \frac{1}{30} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = ?$$

Iteračným algoritmom postupne spresňujeme (na začiatku odhadnuté neznáme) parametre (s, t) kvadratického trojčlena v tvare

$$K(x) = x^2 + s\,.\,x + t = 0\,.$$

Hľadáme taký kvadratický trojčlen, ktorým ak delíme náš charakteristický polynóm (ktorého korene hľadáme) dostaneme delenie takmer bez zvyšku. Prvé 2 korene polynómu získame – riešením kvadratickej rovnice.

Postup výpočtu :

Stupeň polynómu : n = 4
Počiatočný odhad parametrov : $s_0 = 0{,}01$, $t_0 = 0{,}2$
Presnosť riešenia : $\varepsilon = 0{,}001 = 10^{-3}$

Hornerova schéma II.typu

0. krok		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
	P(x)	1	-4	0	-0,8306	-0,0333
$(-s_0)$	-0,01	-	-0,01	0,0401	0,001599	0,00027001
$(-t_0)$	-0,2	-	-	-0,2	0,802	0,03198
	Q(x)	1	-4,01	-0,1599	-0,027001	-0,00105
		q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
$(-s_0)$	-0,01	-	-0,01	0,0402	0,003197	
$(-t_0)$	-0,2	-	-	-0,2	0,804	
	R(x)	1	-4,02	-0,3197	0,780196	
		r_0	r_1	r_2	r_3	

Platí : $$\Delta s = \frac{q_n . r_{n-3} - q_{n-1} . r_{n-2}}{r_{n-2}^2 - r_{n-1} . r_{n-3}} \qquad \Delta t = \frac{q_{n-1} . r_{n-1} - q_n . r_{n-2}}{r_{n-2}^2 - r_{n-1} . r_{n-3}}$$

$$\Delta s^{(0)} = \frac{(-0{,}00105 . 4{,}02) - (-0{,}027001 . -0{,}3197)}{(-0{,}3197)^2 - 0{,}780196 . -4{,}02} = \mathbf{-0{,}001362}$$

$$\Delta t^{(0)} = \frac{(-0{,}027001 . 0{,}780196) - (-0{,}00105 . -0{,}3197)}{(-0{,}3197)^2 - 0{,}780196 . -4{,}02} = \mathbf{-0{,}006608}$$

Potom :

$$s_1 = s_0 - \Delta s^{(0)} = 0{,}01 - (-0{,}001362) = \mathbf{0{,}011362}$$

$$t_1 = t_0 - \Delta t^{(0)} = 0{,}2 - (-0{,}006608) = \mathbf{0{,}206608}$$

Overenie kritéria presnosti :

$$\left| \Delta s^{(i)} \right| \le \varepsilon \qquad \left| \Delta t^{(i)} \right| \le \varepsilon$$

$$\left| -0{,}001362 \right| > 0{,}001 \qquad \left| -0{,}006608 \right| > 0{,}001$$

$\Rightarrow$ Je potrebné vykonať ďalší krok iteračného postupu.

1. krok		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
	P(x)	1	-4	0	-0,8306	-0,0333
$(-s_1)$	-0,01136	-	-0,01136	0,04557	0,001183	$-1{,}873.10^{-7}$
$(-t_1)$	-0,20661	-	-	-0,20661	0,82878	0,0332724
	Q(x)	1	-4,01136	-0,16104	-0,0000164	$-2{,}771.10^{-5}$
		q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
$(-s_1)$	-0,01136	-	-0,01136	0,04569	0,0036573	
$(-t_1)$	-0,20661	-	-	-0,20661	0,831134	
	R(x)	1	-4,02272	-0,32195	0,834775	
		r_0	r_1	r_2	r_3	

$$\Delta s^{(1)} = \mathbf{0{,}0000356} \qquad \Delta t^{(1)} = \mathbf{-0{,}00000023}$$

Potom :

$$s_2 = s_1 - \Delta s^{(1)} = 0{,}01136 - (0{,}0000356) = \mathbf{0{,}011326}$$

$$t_2 = t_1 - \Delta t^{(1)} = 0{,}20661 - (-0{,}00000023) = \mathbf{0{,}206609}$$

Overenie kritéria presnosti :

$$\left|\Delta s^{(1)}\right| \le \varepsilon \qquad \left|\Delta t^{(1)}\right| \le \varepsilon$$

$$|0{,}0000356| < 0{,}001 \qquad |-0{,}00000023| < 0{,}001$$

Nie je potrebné vykonať ďalší krok iteračného postupu a prvé dva korene charakteristického polynómu získame riešením kvadratickej rovnice v tvare

$$K(x) = x^2 + 0{,}011326\,.\,x + 0{,}206609 = 0$$

Korene :

$$\mathbf{x_1 = -0{,}00566 - 0{,}45451.i}$$

$$\mathbf{x_2 = -0{,}00566 + 0{,}45451.i}$$

Zostávajúce dva korene polynómu vypočítame zo zvyšku po delení polynómov

$$K(x) = x^2 - 4{,}01136\,.\,x - 0{,}16104 = 0$$

Korene :

$$\mathbf{x_3 = 4{,}0511}$$

$$\mathbf{x_4 = -0{,}03975}$$

Z podmienky v tvare $\max|\lambda_i| = VČ$ je možné určiť vlastnú hodnotu matice tzn. **VČ = 4,0511.**

III. Získanie hodnôt vlastného vektora matice

A. Určené VČ matice dosadíme do sústavy v tvare $(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{J}).\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -3{,}0511 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & -3{,}0511 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & -3{,}0511 & 2 \\ 1/5 & 1/3 & 1/2 & -3{,}0511 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ide o tzv. homogénny SLAR : ak má okrem nulového riešenia ešte aj nenulové riešenie, potom má nekonečne veľa tzv. lineárne závislých (násobných) riešení. Preto je nutné jednu neznámu zvoliť, napr. $x_1=1$

$$\begin{bmatrix} -3{,}0511 & 2 & 3 \\ 1/2 & -3{,}0511 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & -3{,}0511 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/4 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

Riešenie : **$x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}4253$, $x_3 = 0{,}2521$, $x_4 = 0{,}1533$**

Vlastný vektor matice	Normovaný vlastný vektor matice
$\mathbf{x}_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}4253 \\ 0{,}2521 \\ 0{,}1533 \end{bmatrix}$	$\mathbf{x}_{Kn} = \begin{bmatrix} 0{,}5462 \\ 0{,}2323 \\ 0{,}1377 \\ 0{,}0837 \end{bmatrix}$
$\sum = 1{,}8307$	$\sum = 0{,}9999 \doteq 1$

Ďalšie vlastné čísla a vektory :

Párové porovnanie podľa K1   VČ = 3,0542 $\mathbf{v}_{\mathbf{K1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}379885 \\ 0{,}314793 \end{bmatrix}$ $\sum = 3{,}694678$ $\mathbf{v}_{\mathbf{K1}n} = \begin{bmatrix} 0{,}27066 \\ 0{,}64414 \\ 0{,}08520 \end{bmatrix}$

Párové porovnanie podľa K2   VČ = 3,0385 $\mathbf{v}_{\mathbf{K}2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}405694 \\ 2{,}467355 \end{bmatrix}$ $\sum = 3{,}873044$ $\mathbf{v}_{\mathbf{K}2n} = \begin{bmatrix} 0{,}25819 \\ 0{,}10475 \\ 0{,}63706 \end{bmatrix}$

Párové porovnanie podľa K3 VČ = 2,9996 $\mathbf{v}_{\mathbf{K}3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}000712 \\ 3{,}002132 \end{bmatrix}$ $\sum = 5{,}0028$ $\mathbf{v}_{\mathbf{K}3n} = \begin{bmatrix} 0{,}19988 \\ 0{,}20003 \\ 0{,}60008 \end{bmatrix}$

Párové porovnanie podľa K4 VČ = 3,0089 $\mathbf{v}_{\mathbf{K}4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}817824 \\ 3{,}303289 \end{bmatrix}$ $\sum = 6{,}1211$ $\mathbf{v}_{\mathbf{K}4n} = \begin{bmatrix} 0{,}16337 \\ 0{,}29698 \\ 0{,}53966 \end{bmatrix}$

Výsledná rozhodovacia tabuľka AHP

Kritérium	**Váha**	**Hodnotenie dodávateľa**		
		Canon	**Minolta**	**Toshiba**
Cena ponuky	0,5462	0,27066	0,64414	0,08520
Poskytovaná záruka	0,2323	0,25819	0,10475	0,063706
Výkonnosť stroja	0,1377	0,19988	0,20003	0,60008
Doba dodávky	0,0837	0,16337	0,29698	0,53966
Vážený súčet		0,24973	0,42856	0,322325
Poradie		3	1	2

LITERATÚRA

[1] Máca, J. – Leitner, B.: Operačná analýza pre bezpečnostný manažment. FŠI ŽU – Detašované pracovisko Košice, Žilina 2002.

[2] Chvalovský, V. : Rozhodovací tabulky. SNTL, Praha 1984.

[3] Křovák, J. – Zamrazilová, E. : Expertní odhady. SNTL, Praha 1989.

[4] Jaiswal, N., K. : Military Operations Research. KAP, Boston, 1997.

Spôsob určenia vlastného vektora matice (University of Texas)

Kritérium	K1	K2	K3	K4
K1	1	3	4	5
K2	1/3	1	2	3
K3	1/4	1/2	1	2
K4	1/5	1/3	1/2	1

Určenie vlastného vektora : $v_i = \sqrt[n]{a_{i1}.a_{i2}.a_{i3}.\ldots.a_{in}}$, kde n – je rozmer matice

$$v_1 = \sqrt[4]{a_{11}.a_{12}.a_{13}.a_{14}} = \sqrt[4]{1.3.4.5} = \mathbf{2,7831577}$$

$$v_2 = \sqrt[4]{a_{21}.a_{22}.a_{23}.a_{24}} = \sqrt[4]{1/3.1.2.3} = \mathbf{1,1892071}$$

$$v_3 = \sqrt[4]{a_{31}.a_{32}.a_{33}.a_{34}} = \sqrt[4]{1/4.1/2.1.2} = \mathbf{0,7071067}$$

$$v_4 = \sqrt[4]{a_{41}.a_{42}.a_{43}.a_{44}} = \sqrt[4]{1/5.1/3.1/2.1} = \mathbf{0,4272869}$$

Vlastný vektor matice	Normovaný vlastný vektor matice
$\mathbf{x}_K = \begin{bmatrix} 2,7831577 \\ 1,1892071 \\ 0,7071067 \\ 0,4272869 \end{bmatrix}$	$\mathbf{x}_{Kn} = \begin{bmatrix} 0,5450 \\ 0,2329 \\ 0,1385 \\ 0,0837 \end{bmatrix}$
$\sum = 5,1067584$	$\sum = 1,0001 \doteq 1$

Určenie vlastného čísla matice : $\mathbf{A.w} = \lambda_{\max}.\mathbf{w}$,

kde **A** – je matica n x n, **w** – je n-rozmerný vektor, $\lambda_{\max}$ - je najväčšia vlastná hodnota (vlastné číslo).

Všeobecný zápis : $a_{i1}.w_1 + a_{i2}.w_2 + \ldots + a_{in}.w_n = \lambda_i.w_i$ napr. : $\lambda_i = \frac{\mathbf{A_i.w}}{w_i}$,

kde $\mathbf{A_i}$ – je i-ty riadok matice A, **w** – je normovaný vlastný vektor matice A.

$$\lambda_1 = \frac{a_{11}.w_1 + a_{12}.w_2 + a_{13}.w_3 + a_{14}.w_4}{w_1} = \frac{1.0,5450 + 3.0,2329 + 4.0,1385 + 5.0,0837}{0,5450}$$

$$\lambda_1 = \frac{2,2162}{0,545} = \mathbf{4,066422}$$

$$\lambda_2 \doteq \frac{0,9423}{0,2329} \doteq \mathbf{4,046} \quad , \quad \lambda_3 \doteq \frac{0,5608}{0,1385} \doteq \mathbf{4,049} \quad , \quad \lambda_4 \doteq \frac{0,3384}{0,0837} \doteq \mathbf{4,043}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n}.(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = \frac{1}{4}.(4,066 + 4,046 + 4,049 + 4,043) = \mathbf{4,051}$$

Výsledky získané prostredníctvom programu Expert Choice v.11

Expert Choice C:\cviko1.ahp

Distributive mode		Pairwise	Pairwise	Pairwise	Pairwise
Alternative	Total	1-cena (L: ,546)	2-záruka (L: ,232)	3-výkonnosť (L: ,138)	4-doba dodania (L: ,084)
Canon	,249	,420	,405	,333	,303
Minolta	,429	1,000	,164	,333	,550
Toshiba	,322	,132	1,000	1,000	1,000

Expert Choice C:\cviko1.ahp

Ideal mode		Pairwise	Pairwise	Pairwise	Pairwise
Alternative	Total	1-cena (L: ,546)	2-záruka (L: ,232)	3-výkonnosť (L: ,138)	4-doba dodania (L: ,084)
Canon	,395	,420	,405	,333	,303
Minolta	,676	1,000	,164	,333	,550
Toshiba	,526	,132	1,000	1,000	1,000