

Úvod

U rozhodovacích úloh lineárneho programovania majú obidve základné časti ich matematického modelu t.j. **cieľ riešenia** - vyjadrený **cieľovou** (kriteriálnou, účelovou) **funkciou**, ako aj všetky **obmedzujúce podmienky** - tvar lineárnych funkcií s viac premennými.

Všeobecný model ÚLP:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{opt (max, min)} \quad (1)$$

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n & \geq < & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n & \geq < & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n & \geq < & b_m \end{array} \quad (2)$$

Rovnica (1) vyjadruje **účelovú funkciu** a sústava nerovníc / rovníc (2) opisuje **obmedzujúce podmienky** rozhodovacej úlohy.

Maticový zápis:

$$\begin{array}{rcl} z = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} & \rightarrow & \text{opt} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} & \geq < & \mathbf{b} \end{array} \quad (3)$$

kde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{[m,n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c}$ je vektor koeficientov účelovej funkcie, $\mathbf{x}$ je stĺpcový vektor premenných, $\mathbf{A}(m,n)$ je matica sústavy obmedzujúcich podmienok a $\mathbf{b}$ je stĺpcový vektor pravej strany obmedzujúcich podmienok.

Pri aplikácii modelov lineárneho programovania záleží na schopnosti rozhodovateľa formulovať zadanú úlohu a zostaviť jej matematický model tak, aby s požadovanou presnosťou rozhodovací problém opisoval.

Zostavovanie modelu ÚLP pozostáva z krokov:

- a) **Slovné zadanie = formulácia úlohy.**
- b) **Formalizácia zápisu do tabuľky = všeobecný model úlohy.**
- c) **Zostavenie matematického modelu úlohy = dve základné časti :**
 - I. účelová funkcia a smer jej optimalizácie (MAX, MIN),
 - II. sústava obmedzujúcich podmienok v tvare nerovníc, príp. rovníc
- d) **Riešenie modelu = hľadanie optimálneho riešenia úlohy.**

I. Typické úlohy lineárneho programovania

1. Úlohy výrobného plánovania (alokácia zdrojov)

Obvykle ide o to, určiť sortiment výroby s tým, že je potrebné rešpektovať obmedzujúce podmienky na strane vstupov (kapacita surovín, strojového času, energie a pod.) alebo na strane výstupov (odberateľské obmedzenia určujúce minimálny resp. maximálny objem produkcie, pomer v akom sa majú výrobky vyrábať a pod.). Cieľom optimalizácie môže byť napr. maximalizácia zisku, minimalizácia nákladov. Premenné v takomto type úloh často predstavujú objem produkcie jednotlivých výrobkov. Je možné aj iné definovanie úlohy – napr. doba prevádzky výrobnéj linky, počas ktorej sa bude výrobok vyrábať (t.j. vzťah doby výroby a objemu produkcie je zrejmý)

Príklad 1.1: Úloha výrobného plánovania (alokácia zdrojov)

a) Slovné zadanie

Podnik vyrába 2 typy výrobkov V_1 a V_2 , pri čom spotrebováva dva druhy surovín S_1 a S_2 . Za jeden výrobok V_1 realizuje zisk 70 Eur, za jeden výrobok V_2 realizuje zisk 90 Eur. Na výrobu výrobku V_1 je potrebných 5 jednotiek suroviny S_1 a 2 jednotky suroviny S_2 a na výrobu výrobku V_2 sa spotrebujú 4 jednotky suroviny S_1 a 5 jednotiek suroviny S_2 . Zásoba suroviny S_1 je 1300 jednotiek a zásoba suroviny S_2 je 1200 jednotiek. Úloha: naplánovať výrobu tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk.

b) Formálny zápis do tabuľky

Výrobok Surovina	$V_1 = x_1$	$V_2 = x_2$	Zásoba
S_1	5	4	1300
S_2	2	5	1200
Zisk	70	90	MAX

c) Matematický model úlohy

1. Identifikácia premenných: počet vyrobených výrobkov $V_1 = x_1$, $V_2 = x_2$.

2. Cieľ optimalizácie (účelová funkcia):

$$z = 70 \cdot x_1 + 90 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

3. Obmedzujúce podmienky: t.j. nesmú byť prekročené disponibilné množstvá – výrobná kapacita prevádzky za zmenu a platí:

- prvá surovina: $5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 1300$
- druhá surovina: $2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 1200$

Z podstaty úlohy vyplývajú ďalšie dve obmedzujúce podmienky (počet výrobkov nemôže byť záporné číslo) a preto tiež musí platiť

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Výsledný matematický model:

$$\begin{aligned} z &= 70 \cdot x_1 + 90 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX} \\ 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 1300 \\ 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\leq 1200 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Príklad 1.2: Úloha výrobného plánovania (kapacitný model)

a) Slovné zadanie

Podnik vyrába 2 typy výrobkov V_1 a V_2 v dvoch prevádzkach P_1 a P_2 . Za jeden výrobok V_1 realizuje zisk 10 finančných jednotiek (FJ), za jeden výrobok V_2 zisk 12 FJ. Kapacita prevádzky P_1 stačí na výrobu 6 výrobkov V_1 na zmenu alebo výrobu 12 výrobkov V_2 na zmenu. Kapacita prevádzky P_2 je alebo 12 výrobkov V_1 alebo 8 výrobkov V_2 na zmenu. Úloh: naplánovať výrobu (určiť počty výrobkov V_1 a V_2) tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk.

b) Formálny zápis do tabuľky

Výrobok Prevádzka	$V_1 = x_1$	$V_2 = x_2$	Kapacita
P_1	6	12	1
P_2	12	8	1
Zisk	10	12	MAX

c) Zostavenie matematického modelu úlohy

1. Identifikácia premenných: počet vyrobených výrobkov $V_1 = x_1$, $V_2 = x_2$.

2. Cieľ optimalizácie (účelová funkcia):

$$z = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

3. Obmedzujúce podmienky: t.j. nesmú byť prekročené disponibilné množstvo – výrobná kapacita prevádzky za zmenu a platí:

$$\text{- prvá prevádzka: } \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

$$\text{- druhá prevádzka: } \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1.$$

Z podstaty úlohy vyplývajú ďalšie dve obmedzujúce podmienky (počet výrobkov nemôže byť záporné číslo) a preto tiež musí platiť

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Výsledný matematický model:

$$z = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

a jeho maticový zápis: $z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MAX}$

$$\begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/8 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Príklad 1.3: Úloha výrobného plánovania (plán opráv obmedzený zásobami)

a) Slovné zadanie

Opravná robí 3 druhy opráv O_1, O_2, O_3 , na ktoré spotrebováva 2 druhy súčiastok S_1 a S_2 . Zisky z jednotlivých opráv sú po rade 54, 45 a 52 jednotiek. Na opravu O_1 (1. typu) sa pritom spotrebujú 2 súčiastky S_1 a 3 súčiastky S_2 , na opravu O_2 je potrebná 1 súčiastka S_1 a 2 súčiastky S_2 a na O_3 potrebujeme 3 súčiastky S_1 a 2 súčiastky S_2 . Na sklade je pritom 600 súčiastok S_1 a 800 súčiastok S_2 . Ďalšou požiadavkou je, že pre zabezpečenie chodu organizácie je potrebné zabezpečiť minimálne 50 opráv O_1 , 100 opráv O_2 a 80 opráv O_3 . Úloha: naplánovať počet opráv tak, aby zisk opravovne za ich vykonanie bol maximálny.

b) Tabuľka úlohy

Súčiastky	Opravy	O ₁	O ₂	O ₃	Zásoba
S ₁		2	1	3	600
S ₂		3	2	2	800
Min. počty opráv		50	100	80	
Zisk		54	45	52	MAX

c) Matematický model

1. Identifikácia premenných: počet druhov opráv $O_1 = x_1$, $O_2 = x_2$, $O_3 = x_3$.
2. Cieľ optimalizácie (účelová funkcia): maximalizovať zisk za opravy

Výsledný matematický model:

$$z = 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 \rightarrow \text{MAX}$$

$$2.x_1 + x_2 + 3.x_3 \leq 600$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 \leq 800$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_3 \geq 80$$

2. Úlohy o delení materiálu (optimálny rezný plán)

Obvykle ide o úlohu rozdelenia (rezania) väčších celkov na menšie časti tak, aby bol minimalizovaný odpad po delení. Je pritom nutné rešpektovať požiadavky v akom pomere majú byť vzniknuté menšie časti, koľko ich má minimálne resp. maximálne rezaním vzniknúť apod. Úloha môže byť jednorozmerná (delenie je charakterizované iba jedným rozmerom – napr. tyče, laná, káble, pásy rovnakej šírky a pod.) alebo dvojrozmerná, kedy sa z plochy snažíme vyrezávať menšie diely. Jednorozmerný problém vedie na úlohu LP, dvojrozmerný problém je výrazne zložitejší. Často je problematické určiť, čo sú v úlohe procesy a čo budú predstavovať premenné. Pretože každý väčší celok je možné rozdeliť na menšie časti mnohými spôsobmi, preto procesom budeme rozumieť použitie jedného z potenciálnych spôsobov delenia. Procesom budú odpovedať premenné a hodnoty premenných budú udávať, koľkokrát sa ten ktorý spôsob delenia použije.

Príklad 2.1: Úloha o delení materiálu (optimálny rezný plán)

a) Slovné zadanie

Z polotovaru s dĺžkou $l = 8$ m je potrebné narezať minimálne 1000 kusov o dĺžke $l_1 = 2,5$ m, 600 kusov dĺžky $l_2 = 3,0$ m a 200 kusov dĺžky $l_3 = 3,5$ m tak, aby odpad vzniknutý pri rezaní bol minimálny. Úloha: naplánovať spôsob rezania (rezný plán) a množstvo rezaných polotovarov tak, aby bol odpad po rezaní minimálny (resp. aby sme spotrebovali minimálny počet polotovarov).

b) Tabuľka úlohy = varianty rezania

Požadované dĺžky	Varianty rezania						Potreba
	1	2	3	4	5	6	
$l_1 = 2,5 \text{ m}$	3	-	-	2	1	-	1 000
$l_2 = 3,0 \text{ m}$	-	2	-	1	-	1	600
$l_3 = 3,5 \text{ m}$	-	-	2	-	1	1	200
Odpad	0,5	2,0	1,0	0	2,0	1,5	MIN

c) Matematický model

Z tabuľky je zrejmé, že za premenné úlohy $x_1, x_2, \dots, x_6$ je najvhodnejšie zvoliť počty realizácie jednotlivých variantov rezania, ktorými je možné z polotovaru narezat' požadované dĺžky a koeficienty účelovej funkcie $c_1, c_2, \dots, c_6$ budú tvorené dĺžkou odpadu, vznikajúcou pri použití jednotlivých variantov rezania.

$$z = 0,5 \cdot x_1 + 2,0 \cdot x_2 + 1,0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 2,0 \cdot x_5 + 1,5 \cdot x_6 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 + x_5 &\geq 1000 \\ 2 \cdot x_2 + x_4 &\geq 600 \\ 2 \cdot x_3 + x_5 + x_6 &\geq 200 \\ x_j &\geq 0 \quad \text{pre } j=1\dots 6 \end{aligned}$$

Riešením modelu by sme dostali: $x_3 = 100, x_4 = 600, x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$ a minimálna hodnota účelovej funkcie $Z_{\min} = 100$. Dosadením do obmedzujúcich podmienok - sú síce splnené

$$2 \cdot 600 > 1000$$

$$600 = 600 \quad ,$$

$$2 \cdot 100 = 200.$$

ale pri detailnejšom posúdení riešenia zistíme, že by bolo nutné narezat' 200 ks dĺžky $l_1 = 2,5 \text{ m}$ navyše. Záleží na konkrétnych podmienkach, či na uvedené množstvo bude prípadný odbyt.

Často býva preto výhodnejšie zvoliť iné kritérium optimálnosti riešenia a to v tvare požiadavky minimálneho počet spotrebovaných polotovarov. To je možné definovať jednoducho zmenou tvaru účelovej funkcie na tvar

$$z' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \text{MIN}.$$

Po tejto modifikácii úlohy dostaneme riešenie ($x_2=50, x_3=100, x_4=500, x_1=x_5=x_6=0, z'=650$) dostaneme síce väčší odpad ($z=200 \text{ m}$), avšak celkový počet použitých polotovarov sa zníži o 50 ks, tzn., celková narezaná dĺžka ($650 \times 8 = 5200$) bude o 400 m kratšia, ako v prvom prípade.

Príklad 2.2: Optimálny plán nasadenia strojov

a) Slovné zadanie

Pri odstraňovaní následkov živelnnej pohromy je potrebné vykonať zemné práce. Z prostriedkov, ktoré sú k dispozícii je možné zostaviť 5 funkčných strojových zostáv. Určite koľko a ktorých zostáv je vhodné vytvoriť, aby celkový výkon strojovej jednotky za zmenu bol maximálny. Východiskové údaje sú spracované v tabuľke.

b) Tabuľka úlohy

Stroj	Zostava					Stroje k dispozícii
	$Z_1 = x_1$	$Z_2 = x_2$	$Z_3 = x_3$	$Z_4 = x_4$	$Z_5 = x_5$	
Auto rýpadlo	1	1	1	1	-	8
Automobil sklápací	3	4	3	4	-	16
Buldozér	-	-	1	1	1	10
Výkon (m^3/zm)	60	75	70	88	8	MAX

c) Matematický model úlohy

$$Z = 60.x_1 + 75.x_2 + 70.x_3 + 88.x_4 + 8.x_5 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$

$$3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 \leq 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 10,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

3. Zmiešavací problém (optimálne zloženie zmesi)

Obvykle ide o úlohu vytvorenia zmesi požadovaných vlastností s tým, že pre jej vytvorenie je možné použiť iba zadanú ponuku komponentov (surovín). Premenné potom odpovedajú použitým komponentom a ich hodnoty objemu použitých komponentov. Cieľom môže byť minimalizácia nákladov na vytvorenie požadovanej zmesi. Napr. optimalizácia tzv. vsádzky do vysokej pece pri výrobe ocele. Snahou je určiť zloženie vsádzky tak, aby vyrobená oceľ mala požadované vlastnosti a aby vsádzka bola čo najlacnejšia.

Príklad 3.1: Zmiešavací problém

a) Slovné zadanie

Úlohou je vyrobiť pri minimálnych nákladoch hasiacu zmes s obsahom minimálne 54 jednotiek zložky A, minimálne 45 jednotiek zložky B a minimálne 52 jednotiek zložky C. K dispozícii sú celkom 2 základné suroviny S_1 a S_2 s jednotkovými cenami 600 a 800 finančných jednotiek.

Surovina S_1 obsahuje v jednotkovom množstve jej objemu 2 jednotky zložky A, 1 jednotku zložky B a 3 jednotky zložky C, surovina S_2 obsahuje 3 jednotky zložky A, 2 jednotky zložky B a 2 jednotky zložky C.

b) Tabuľka úlohy

Suroviny Zložky	S_1	S_2	Požiadavky
A	2	3	54
B	1	2	45
C	3	2	52
Ceny	600	800	MIN

c) Matematický model úlohy

$$z = 600.x_1 + 800.x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$2.x_1 + 3.x_2 \geq 54$$

$$x_1 + 2.x_2 \geq 45$$

$$3.x_1 + 2.x_2 \geq 52$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Špeciálny typ zmiešavacej úlohy je tzv. **nutričný problém**. Má formálne rovnaký model, riešiaci optimálne zloženie stravy s vopred definovanými požiadavkami na dodržanie určených zásad (napr. percento obsahu základných zložiek v jedle) s cieľom minimalizovať náklady na nákup potravín, spotrebovanú energiu, prácu pri príprave.

Príklad 3.2: Nutričný problém

a) Slovné zadanie

Podnik má vytvoriť krmnu zmes, ktorá by obsahovala aspoň 308 mg vápnika a aspoň 214 mg horčíka. Používa pritom dva typy krmív. Jeden kilogram krmiva K_1 obsahuje 10 mg vápnika, 8 mg horčíka a stojí 5 Eur. Jeden kilogram krmiva K_2 obsahuje 8 mg vápnika, 1 mg horčíka a stojí 0,8 Eura. Úloha: stanoviť zloženie výslednej krmnej zmesi tak, aby náklady na nákup potrebných krmív boli čo najmenšie.

b) Tabuľka úlohy

	$K_1 = x_1$	$K_2 = x_2$	Minimálne množstvo
Vápnik [mg/kg]	10	8	308
Horčík [mg/kg]	8	1	214
Náklady [Eur/kg]	5	0,8	MAX

c) Matematický model úlohy

Premenné x_i vyjadrujú množstvo (v kg) krmiva K_i vo výslednej zmesi, $i = 1, 2$. Ak sa použije x_1 [kg] krmiva K_1 a x_2 [kg] krmiva K_2 , množstvo vápnika a horčíka vo výslednej zmesi bude:

$$\text{Ca : } 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2,$$

$$\text{Mg : } 8 \cdot x_1 + x_2.$$

V súvislosti s minimálnym požadovaným množstvom vápnika a horčíka vo výslednej zmesi, budú mať vyššie uvedené obmedzujúce podmienky tvar

$$\text{Ca : } 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 308,$$

$$\text{Mg : } 8 \cdot x_1 + x_2 \geq 214.$$

Celkové náklady z na zaobstaranie zmesi sú dané účelovou funkciou v tvare

$$z = z(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 0,8 \cdot x_2 \rightarrow \text{MIN.}$$

Výsledný matematický model:

$$z = 5 \cdot x_1 + 0,8 \cdot x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 308$$

$$8 \cdot x_1 + x_2 \geq 214$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Úloha môže byť formulovaná aj ako problém *návrhu dennej dávky výživy* pre konkrétnu skupinu ľudí. Do dennej dávky je možné zahrnúť viac zložiek (komponentov), z ktorých každá má špecifické zloženie z hľadiska sledovaných parametrov (energia, voda, vitamíny, vápnik a pod.). Procesom potom je, či a s akou intenzitou sa daná zložka do výsledného návrhu zahrnie. Premenné v modeli teda odpovedajú jednotlivým zložkám a ich hodnoty budú predstavovať množstvo danej zložky použité v návrhu dávky. Obmedzujúce podmienky najčastejšie vyjadrujú požiadavky na dosiahnutie minimálnej alebo maximálnej úrovne zložiek. Cieľom môže byť napr. aj minimalizácia ceny dennej dávky pri dodržaní určitých požiadaviek na jej nutričnú hodnotu.

4. Úloha určenia optimálnej úrovne ochrany

Príklad 4.1: Optimálna ochrana objektu

a) Slovné zadanie

Veliteľ má za úlohu brániť základňu proti leteckým útokom. K dispozícii má 5 kusov typov rakiet R_1 a R_2 . U rakety R_1 stojí inštalácia jednej z nich 7 jednotiek nákladov, u R_2 stojí inštalácia 8,5 jednotiek. K dispozícii má celkom 60 jednotiek nákladov. Jedná raketa R_1 vyžaduje obsluhu 6 mužov, jedná raketa R_2 obsluhu 2 mužov. Pritom je k dispozícii 32 vycvičených mužov. V prípade, že by základňa nebola vôbec bránená, je predpoklad jej zničenia 95%. Jedná raketa R_1 je schopná ubrániť 13% hodnoty základne, raketa R_2 9%. Úlohou je zabezpečiť maximálnu možnú ochranu objektu príp. jeho minimálne zničenie.

b) Tabuľka úlohy

Rakety Položky	R₁	R₂	Zásoba
Náklady	7	8,5	60
Obsluhy	6	2	32
Zásoby	5	5	
Ochrana (%)	13	9	MAX

c) Matematický model úlohy

$$z = 13 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{príp. } z^* = 95 - 13 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot x_1 + 8,5 \cdot x_2 &\leq 60 \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 32 \\ 0 &\leq x_1 \leq 5 \\ 0 &\leq x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

Do podobného tvaru je možné upraviť veľké množstvo úloh. Uvedieme aj niektoré ďalšie prípady úloh, na ktoré sa lineárne programovanie tiež využíva. Je možné uviesť napr. úlohy typu optimálny plán montáže, optimálne nasadenie jednotky, optimálne zloženie strojových zostav, úlohy finančného plánovania, rozvrhovanie pracovníkov do pracovných zmien, optimálne oševné plány, ale aj úlohy zamerané na distribúciu výrobkov, ako sú optimálne plány rozvozu tovaru (dopravná úloha), optimálne umiestnenie výrobní, optimálne priradenie objektov a pod. ale taktiež úlohy pre určovanie najkratšej cesty v grafe, maximálneho toku v sieti, optimalizácie časových a nákladových plánov zložitých nadväzných projektov atď.

Podobných úloh by bolo možné uviesť oveľa viac a dajú sa nájsť v dostupnej literatúre zaoberajúcej sa oblasťou lineárneho programovania. Je samozrejmé, že modely reálnych systémov a procesov prebiehajúcich v nich budú oveľa rozmanitejšie a obmedzujúcich podmienok môže byť podstatne viac ako v uvedených príkladoch. Prakticky všetky úlohy v rámci LP je možné riešiť tzv. všeobecným algoritmom lineárneho programovania – tzv. *simplexový algoritmus*. Pre niektoré z nich – napr. dopravný a priradovací problém, úlohy teórie grafov - boli však vyvinuté špeciálne postupy riešenia, ktoré sú efektívnejšie ako postup riešenie problému ako ÚLP.

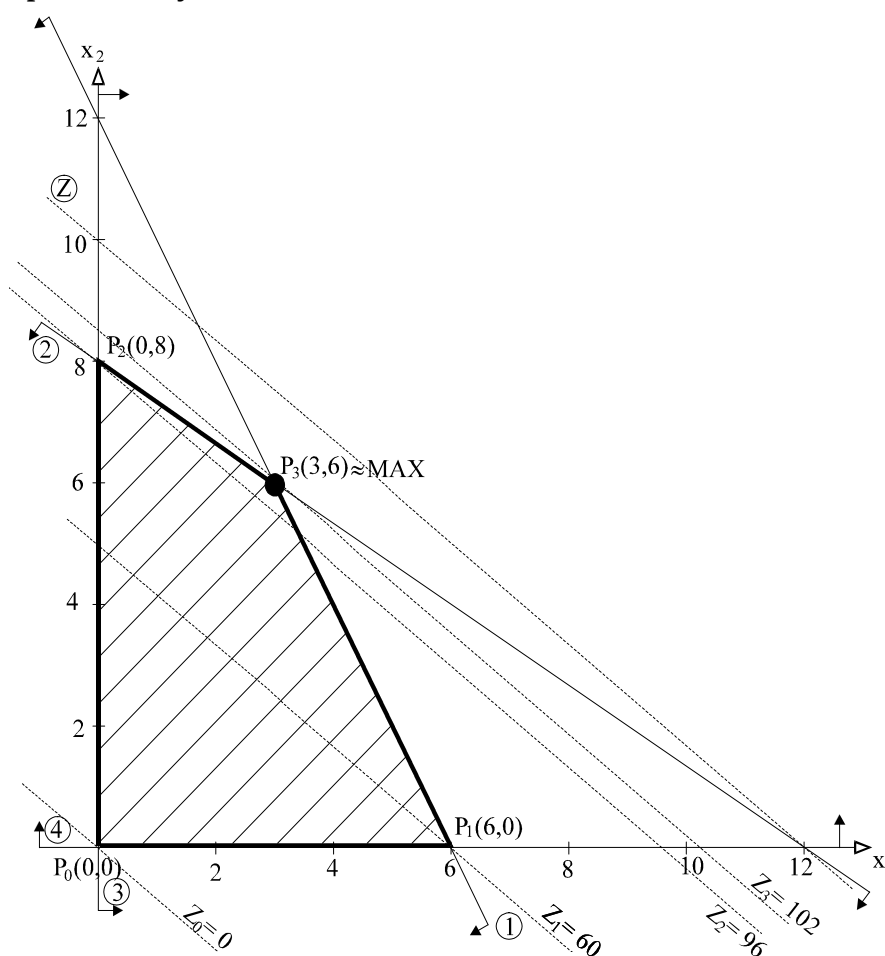
II. Grafické riešenie úloh lineárneho programovania

Jednoduchšie modely úloh lineárneho programovania s dvomi resp. tromi premennými je možné výhodne riešiť aj graficky. Na postupe grafického riešenia si názorne demonštrovať niektoré základné pojmy a princípy, ktoré pri riešení rozhodovacích problémov s viac premennými nie sú pri analytickom riešení úplne zrejmé. Zo základov analytickej geometrie v rovine, príp. 3D priestore je známe, že grafickým znázornením lineárnej funkcie dvoch premenných v rovine je **priamka**. V trojrozmernom priestore lineárnu funkciu 3 premenných predstavuje **rovina**.

Základný postup riešenia si demonštrujeme na riešení **Príkladu 1.2**, pre ktorý boli obmedzujúce podmienky definované v tvare :

$$(1) \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1, \quad (2) \quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1, \quad (3) \quad x_1 \geq 0, \quad (4) \quad x_2 \geq 0$$

Každá z týchto štyroch priamok (očíslovaných podľa ich nerovníc) rozdelí rovinu na dve polroviny (*obr.2.1*), z ktorých v jednej je podmienka nerovnosti splnená (vrátane hranice), v druhej podmienka splnená nie je.



Obr.2.1. Grafické riešenie príkladu 1.2

U nerovníc, v ktorých hranice polrovín vytvárajú osi ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$), je určenie príslušných polrovín elementárne. U nerovníc, kde to nie je na prvý pohľad zrejmé, je výhodné dosadiť do príslušného vzťahu (napr. (1), (2) vyššie) súradnice počiatku a tak zistiť, či počiatok patrí do oblasti vyhovujúcej nerovnici, alebo nie. V našom prípade u oboch nerovníc leží počiatok v oblastiach vyhovujúcich danému tvaru nerovnice.

Prienikom takýchto štyroch polrovín vznikol štvoruholník (vo všeobecnosti n -hran), ktorý vrátane svojich strán vytvára v rovine tzv. **oblasť prípustných riešení** (výšrafovaná), tzn. oblasť, v ktorej sú splnené súčasne podmienky všetkých nerovníc.

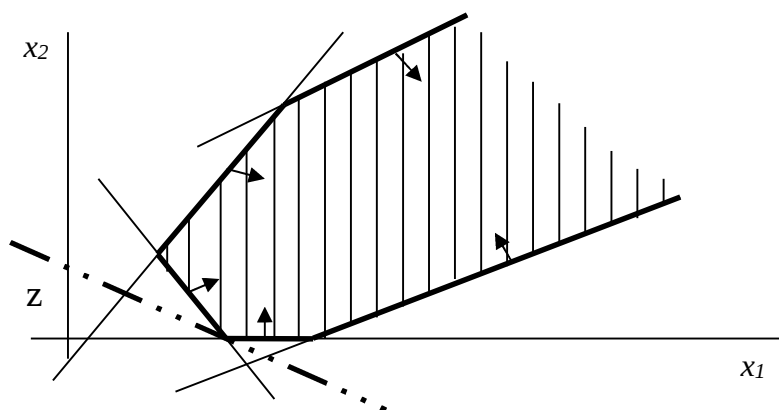
Je jasné, že prípustných riešení (dvojíc súradníc x_1, x_2), vyhovujúcich uvedeným obmedzujúcim podmienkam, je **nekonečne veľa**. Cieľom riešenia úlohy lineárneho programovania je nájsť práve také riešenie (dvojicu hodnôt x_1 a x_2), pre ktoré nadobudne zadaná účelová funkcia extrém, tj. maximum (ako v tejto úlohe) alebo minimum. Pre zaujímavosť, ak dosadíme do rovnice účelovej funkcie postupne súradnice vrcholov získaného štvoruholníka, dostaneme hodnoty účelovej funkcie vo vrchole $P_0(0, 0) \rightarrow z_0 = 0$, vo vrchole $P_1(6, 0) \rightarrow z_1 = 60$, vo vrchole $P_2(0, 8) \rightarrow z_2 = 96$ a vo vrchole $P_3(3, 6) \rightarrow z_3 = 102$.

Ak si rovnice ($z_i = 10 \cdot x_{1i} + 12 \cdot x_{2i}$) graficky zobrazíme, dostaneme sústavu rovnobežných priamok. Z ich grafického zobrazenia je zrejmé, že hraničnými hodnotami pri ktorých majú priamky Z_i s oblasťou prípustných riešení spoločný prienik sú hodnoty $z_0 = 0$, ktorá zrejme znamená minimálnu prípustnú hodnotu a $z_3 = 102$, ktorá je maximálna. Znamená to, že súradnice bodu P_3 ($x_1=3, x_2=6$) predstavujú hľadané optimálne riešenie zadaného problému. Ak sa vrátíme k pôvodnému zadaniu – optimálny plán výroby je **3 výrobky V_1 a 6 výrobkov V_2** za smenu a bude pri ňom realizovaný zisk **$z = 102$ jednotiek**.

Poznámky :

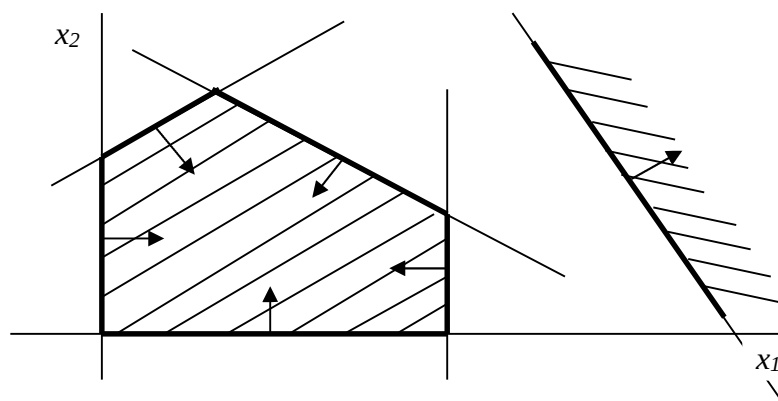
1. Z geometrického vyjadrenia je zrejmé, že vo všeobecnom prípade môže mať úloha buď **jedno jediné optimálne riešenie** pre

- obidva smery optimalizácie (ako v našom prípade),
- jeden smer optimalizácie (obr.2.2), ak je oblasť prípustných riešení neohraničená.



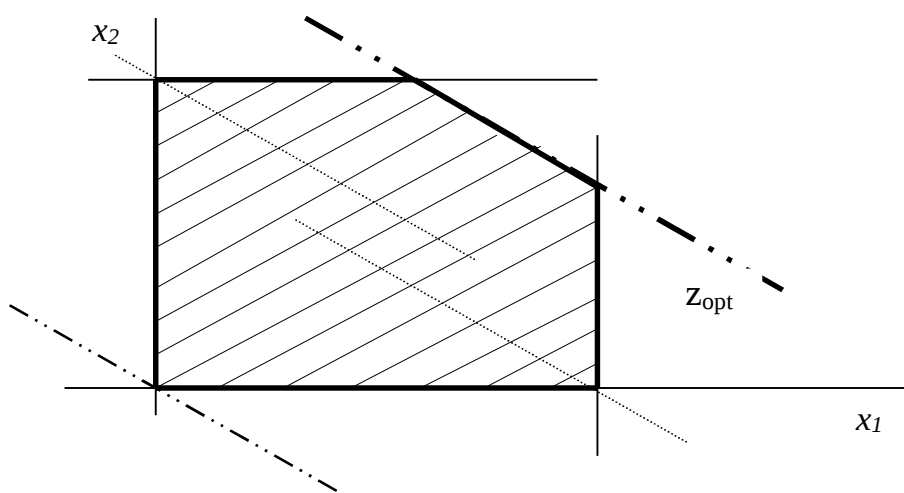
Obr.2.2. Neohraničená oblasť prípustných riešení

- **žiadne riešenie**, ak obmedzujúce podmienky nevytvoria prienik – t.j. oblasť prípustných riešení nevznikne (obr.2.3),



Obr.2.3. Prázdna množina prípustných riešení.

- **nekonečne veľa riešení**, ak je smernica účelovej funkcie totožná so smernicou niektorej z obmedzujúcich podmienok (obr.2.4).

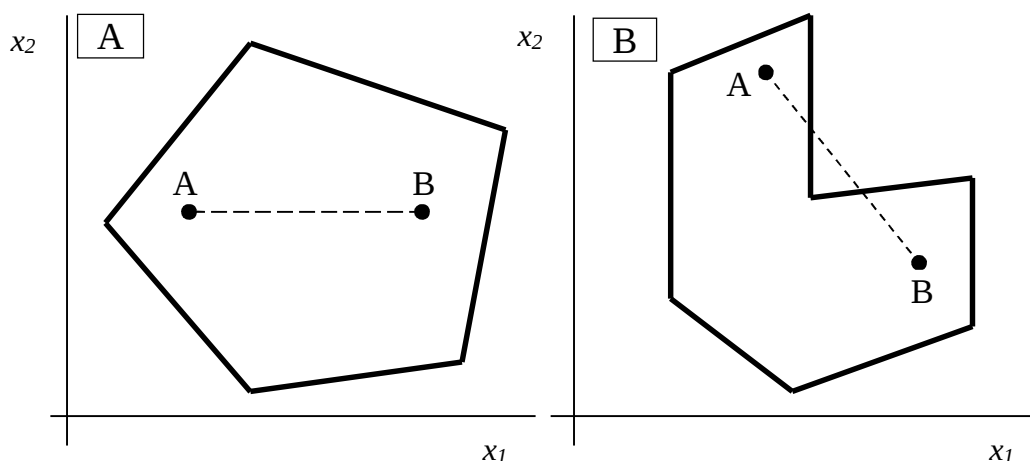


Obr.2.4. Problém s nekonečne veľa optimálnymi riešeniami.

2. Pre úplnosť je vhodné uviesť dva pojmy, často využívané v tejto problematike a to pojem **konvexná oblasť** (množina) prípustných riešení a **krajný bod**.

Pojem **konvexnej množiny** (oblasti) má svoju exaktnú definíciu v teórii vektorov, resp. množín. Pre našu potrebu postačuje uviesť hlavný rozdiel medzi konvexnou a nekonvexnou množinou názorne (obr.2.5a,b), ktorý môžeme zjednodušene definovať tak, že spojnice ľubovoľných dvoch bodov konvexnej množiny celá do príslušnej množiny patrí, zatiaľ čo u nekonvexnej množiny to nie je možné.

Krajný bod (vrchol) množiny je taký bod, ktorý nie je možné vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie bodov iných, ale ktorý predsa k množine patrí.

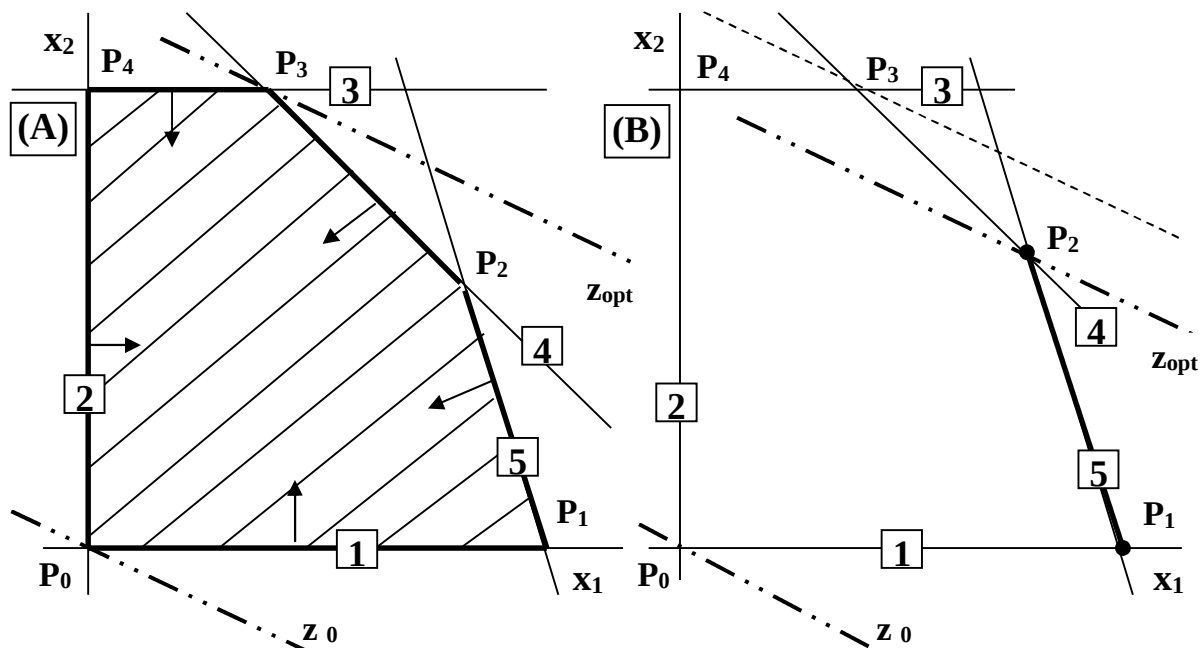


Obr.2.5.. Konvexná oblasť (množina A) a nekonvexná oblasť (množina B)

3. Grafické vyjadrenie umožňuje tiež názornú ilustráciu o zásadnom rozdiel medzi obmedzujúcou podmienkou zadanou v tvare rovnice a nerovnice (obr.2.6).

(A) 1) $x_1 \geq 0$, 2) $x_2 \geq 0$, 3) $x_2 \leq b_3$ 4) $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1$, 5) $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2$,	(B) 1) $x_1 \geq 0$, 2) $x_2 \geq 0$, 3) $x_2 \leq b_3$ 4) $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$, 5) $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2$,
---	--

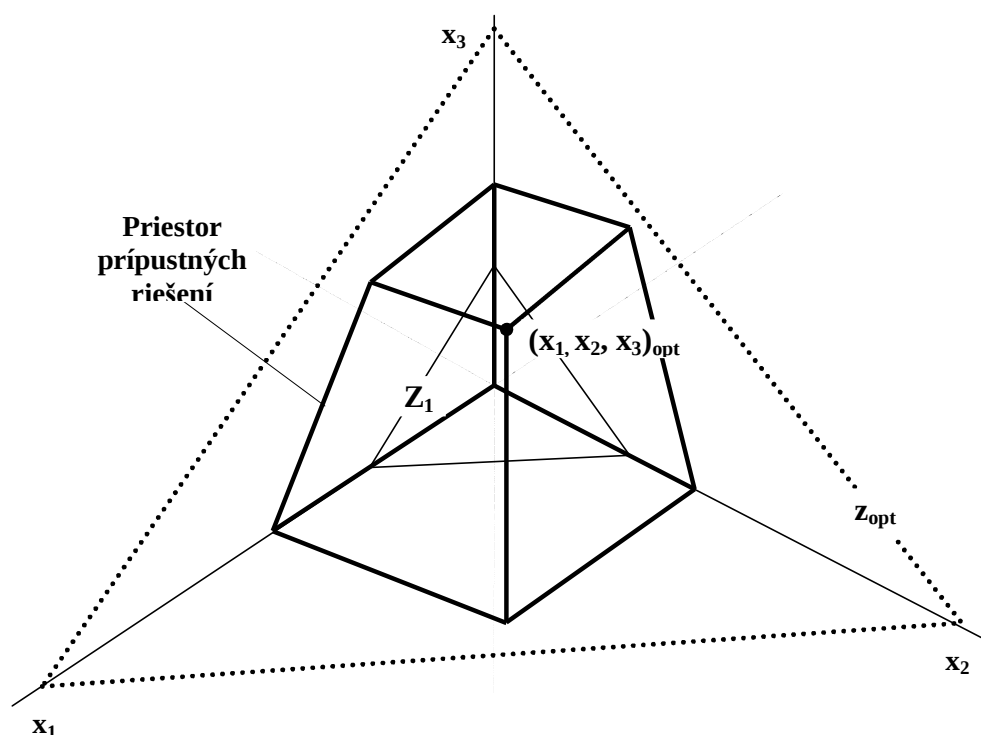
$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$



Obr.2.6. Rozdiel medzi obmedzujúcimi podmienkami v tvare nerovnice (A) a v tvare rovnice (B).

Aj keď sú výrazy v oboch príkladoch formálne podobné, je zrejmé, že ak pre obr.2.6.b platí podmienka (4) v tvare rovnice, oblasť prípustných riešení sa redukuje z päťuholníka (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) iba na úsečku (P_1, P_2), čo navyše pri naznačenom smere účelovej funkcie mení aj hodnotu optimálneho riešenia (z vrcholu P_3 do P_2), tzn. hodnoty premenných x_1 a x_2 , ale teda aj optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

4. Grafické vyjadrenie je pri vhodne zvolenej metóde premietania možné využiť aj pre úlohy s tromi premennými (obr.2.7). Obmedzujúce podmienky majú aj v tomto prípade tvar nerovníc, v ktorých vystupujú 3 neznáme parametre a z ktorých každá rozdeľuje priestor na dva **polpriestory**. Jeden, v ktorom je podmienka nerovnice splnená a druhý, v ktorom podmienka splnená nie je. Prienikom takýchto polpriestorov je mnohosten (polyéder), ktorý určuje **oblasť – priestor – prípustných riešení**.



Obr.2.7. Grafické riešenie optimalizačnej úlohy s 3 premennými

Takisto účelová funkcia vytvára pre rôzne zvolené hodnoty z sústavu rovnobežných rovín, pričom o optimálnych riešeniach platí to isté, ako v predchádzajúcom prípade pre rovinný problém. Znamená to, že pokiaľ existuje riešenie, môže byť buď jediné (t.j. v niektorom z vrcholov mnohostenu) alebo ich môže byť nekonečne veľa (t.j. na niektorej z hrán, resp. na celej stene) príp. riešenie existovať ani nemusí.

Obmedzujúcim podmienkám a rovnici účelovej funkcie hovoríme, že sú **rovnícami nadrovín** a pre oblasť prípustných riešení sa používa tiež výraz **konvexný polyéder**

Pre problémy s viac ako 3 premennými už s grafickým vyjadrením nevystačíme, pretože nám to už neumožňuje ľudská predstavivosť.

PRÍKLAD 1

Určte graficky optimálne riešenie úlohy zadanej sústavou nerovností

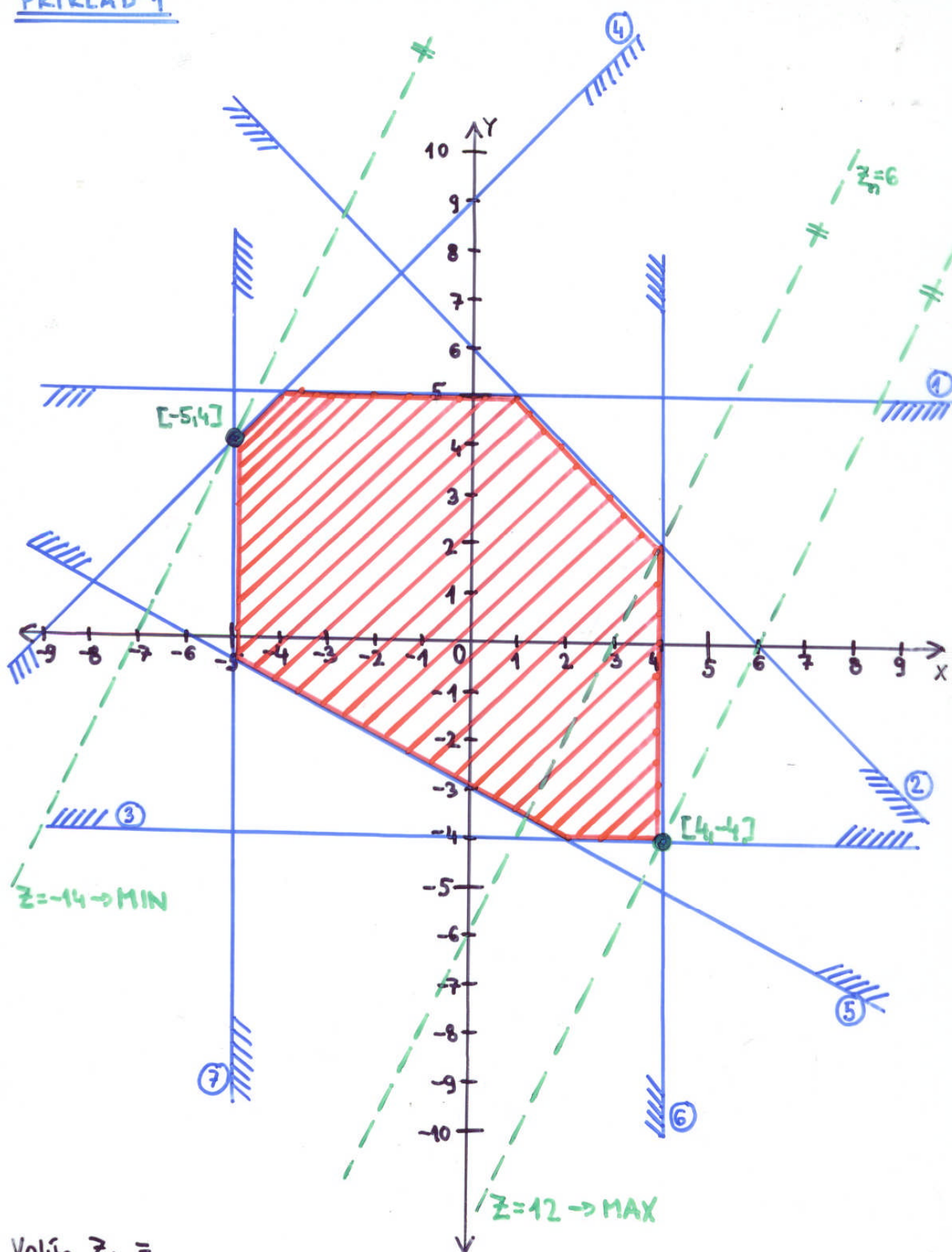
1. $y \leq 5$
2. $y \leq -x + 6$
3. $y \geq -4$
4. $y \leq x + 9$
5. $y \geq -x/2 - 3$
6. $x \leq 4$
7. $x \geq -5$.

z hľadiska dosiahnutia MAX, MIN hodnoty zadanej účelovej funkcie definovanej v tvare $y = 2 \cdot x$.

Riešenie:

1. Matematická formulácia	2. Transformácia = prevod všetkých premenných na ľavú stranu (prípustné matematické operácie)
1. $y \leq 5$	$y \leq 5$
2. $y \leq -x + 6$	$\approx x + y \leq 6 \approx x/6 + y/6 \leq 1$
3. $y \geq -4$	$y \geq -4$
4. $y \leq x + 9$	$\approx -x + y \leq 9 \approx -x/9 + y/9 \leq 1$
5. $y \geq -x/2 - 3$	$\approx x/2 + y \geq -3 \approx -x/2 - y \leq 3 \approx -x/6 - y/3 \leq 1$
6. $x \leq 4$	$x \leq 4$
7. $x \geq -5$	$x \geq -5$
$Z \rightarrow y = 2 \cdot x$	$Z = 2 \cdot x - y \rightarrow \text{MAX, MIN}$

PRÍKLAD 1



Volím $Z_n =$
 napr. $Z_n = 6 = 2x - y$
 $2x - y = 6 \rightarrow \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$

PRÍKLAD 2

Veliteľ má za úlohu zabezpečiť základňu proti leteckým útokom. K dispozícii má 6 kusov rakiet typu R1 a 4 kusy rakiet typu R2, Náklady na inštaláciu R1 sú 5 nákladových jednotiek a na inštaláciu R2 sú 8 jednotiek, pričom má k dispozícii celkom 50 jednotiek nákladov. Raketa R1 vyžaduje obsluhu 6 pracovníkov a obsluhu rakety R2 zabezpečujú 3 pracovníci. K dispozícii má celkom 24 vyškolených pracovníkov. Bolo zistené, že parametre rakety R1 dávajú predpoklady na ochranu 12 % plochy základne a jedna raketa R2 umožňuje ochranu 8 % plochy základne.

Graficky určte také riešenie, ktoré pri zadaných obmedzeniach zabezpečí maximálnu ochranu základne. Aké riešenie bude optimálne pre dosiahnutie minimálneho stupňa ochrany základne? Overte ako sa zmení percentuálne vyjadrenie ochrany objektu, ak sa napr. zdvojnásobí počet personálu? resp.. ak sa zníži počet rakiet R1 na 4?

Riešenie:

1.Tabuľka úlohy

Rakety Podmienky	R₁ = x₁	R₂ = x₂	K dispozícii
Náklady	5	8	50
Obsluha	6	3	24
Počet rakiet k dispozícii	6	4	
OCHRANA [%]	12	8	MAX

2. Matematický model pre grafické riešenie

Matematický model

- $5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 50$
- $6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24$
- $x_1 \geq 0$
- $x_1 \leq 6$
- $x_2 \geq 0$
- $x_2 \leq 4$

Transformácia ku grafickému riešeniu

- $$\begin{aligned} &\approx x_1 / 10 + x_2 / 6,25 \leq 1 \\ &\approx x_1 / 4 + x_2 / 8 \leq 1 \\ &\approx x_1 \geq 0 \\ &\approx x_1 \leq 6 \\ &\approx x_2 \geq 0 \\ &\approx x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

$$Z = 12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX, MIN}$$

$$Z = 12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = \text{MAX, MIN}$$

PRÍKLAD 2-A

Model:

$$5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 50$$

$$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24$$

$$0 \leq x_1 \leq 6$$

$$0 \leq x_2 \leq 4$$

$$\approx x_1/10 + x_2/6.25 \leq 1$$

$$\approx x_1/4 + x_2/8 \leq 1$$

$$\approx x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq 6$$

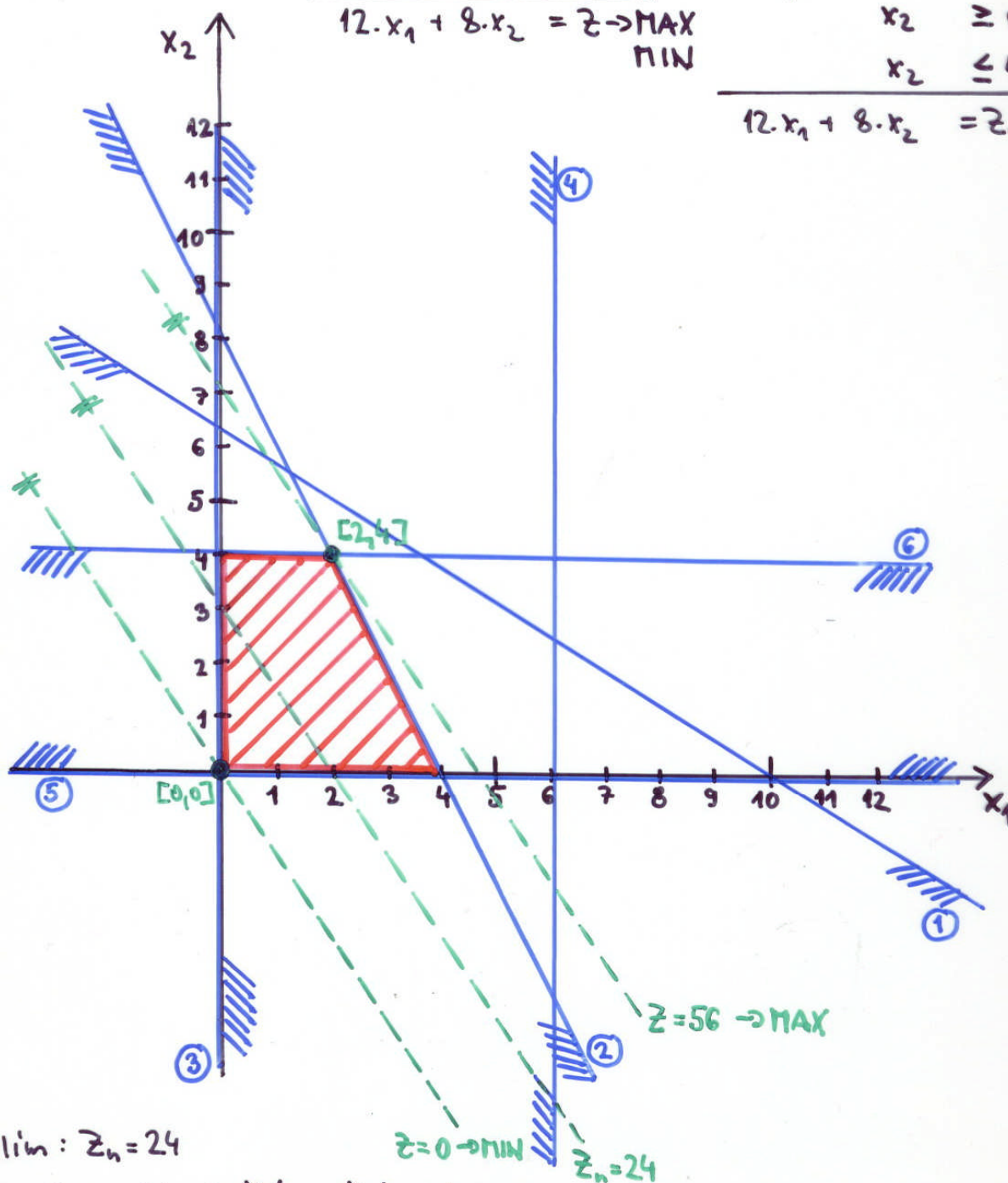
$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 4$$

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = z \rightarrow \text{MAX}$$

MIN

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = z_n$$



Zvolim: $z_n = 24$

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = 24 \approx x_1/2 + x_2/3 = 1$$

VÝSLEDOK: MAX $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 56$; MIN $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$

PRÍKLAD 2-B

Model:

$$5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 50$$

$$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 48$$

$$0 \leq x_1 \leq 6$$

$$0 \leq x_2 \leq 4$$

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = Z \rightarrow \text{MAX} \\ \text{MIN}$$

$$\approx x_1/10 + x_2/6.25 \leq 1$$

$$\approx x_1/8 + x_2/16 \leq 1$$

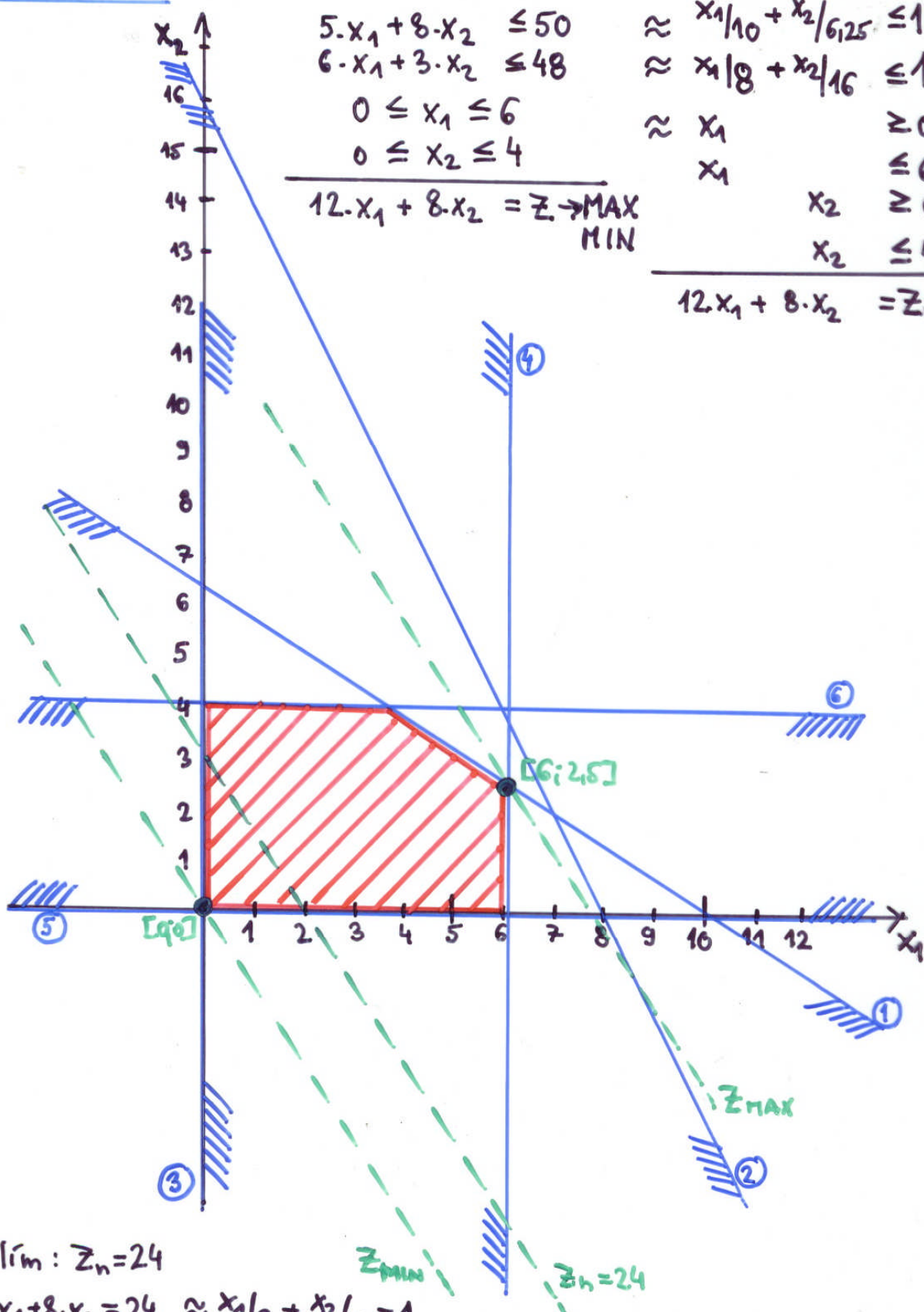
$$\approx x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 4$$

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = Z_n$$



Zvolím: $Z_n = 24$

$$12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 = 24 \approx x_1/2 + x_2/3 = 1$$

VÝSLEDOK: MAX $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2.5 \end{cases} \Rightarrow Z = 92$; MIN $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Z = 0$.

3. Transformácia na kánonický tvar

Nakoľko z fyzikálnej podstaty úlohy je irelevantné, aby počty rakiet boli záporné, vo výpočtovom postupe (matematickom modeli úlohy a jeho ekvivalentnom tzv. kanonickom tvare) štandardné podmienky nezápornosti už neuvažujeme.

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{rclclcl}
 5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + x_3 & & & & & = 50 \\
 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 & + x_4 & & & & = 24 \\
 x_1 & & & + x_5 & & = 6 \\
 & x_2 & & & + x_6 & = 4
 \end{array}$$

Účelová funkcia :

$$\begin{array}{rcl}
 12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 & = & z \\
 z - 12 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 & = & 0 \rightarrow \mathbf{MAX}
 \end{array}$$

PRÍKLAD 3

Výrobný podnik vyrába 3 druhy pneumatík (P1, P2, P3). Pri ich výrobe spotrebováva 2 druhy surovín (S1, S2). Pri výrobe pneumatiky typu P1 sa spotrebuje 1 jednotkové množstvo suroviny S1, pri výrobe pneumatiky typu P2 sa spotrebuje 1 jednotkové množstvo suroviny S1 a 2 jednotky suroviny S2, pri výrobe pneumatiky typu P3 sa spotrebujú 2 jednotkové množstvá suroviny S2. Zásoby surovín sú k dispozícii v obmedzenom množstve – zásoba S1 je 100 jednotiek, zásoba S2 je 200 jednotiek. Cena za jednu vyrobenú P1 je 10, P2 je 25 a P3 je 20 finančných jednotiek. Určte graficky aj výpočtom riešenie, aký sortiment výrobkov je potrebné vyrobiť, aby bol pre podnik zabezpečený MAXIMÁLNY zisk.

Riešenie:

1. Tabuľka úlohy

Pneumatiky Suroviny	P ₁ = x ₁	P ₂ = x ₂	P ₃ = x ₃	Zásoby surovín
S1	1	1	-	100
S2	-	2	2	200
Cena	10	25	20	MAX

2. Matematický model

$$\begin{array}{lcl} \text{Obmedzujúce podmienky :} & x_1 + & x_2 \\ & & 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \end{array} \leq \begin{array}{l} 100 \\ 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Podmienky nezápornosti :} & x_1 & \\ & & x_2 \\ & & & x_3 \end{array} \geq \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Účelová funkcia :} & 10 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 & = z \rightarrow \text{MAX} \\ & z - 10 \cdot x_1 - 25 \cdot x_2 - 20 \cdot x_3 & = 0 \end{array}$$

3. Transformácia na kanonický tvar

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{lcl} x_1 + & x_2 & + x_4 \\ & 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 & + x_5 \end{array} = \begin{array}{l} 100 \\ 200 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti : sa v kánonickom tvare neuvažujú, nakoľko sú zrejmé z fyzikálnej podstaty úlohy tzn.

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Účelová funkcia :

$$z - 10 \cdot x_1 - 25 \cdot x_2 - 20 \cdot x_3 = 0 \rightarrow \text{MAX}$$

Príklad 3

Model :

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$2x_2 + 2x_3 \leq 200$$

x_1

x_2

X

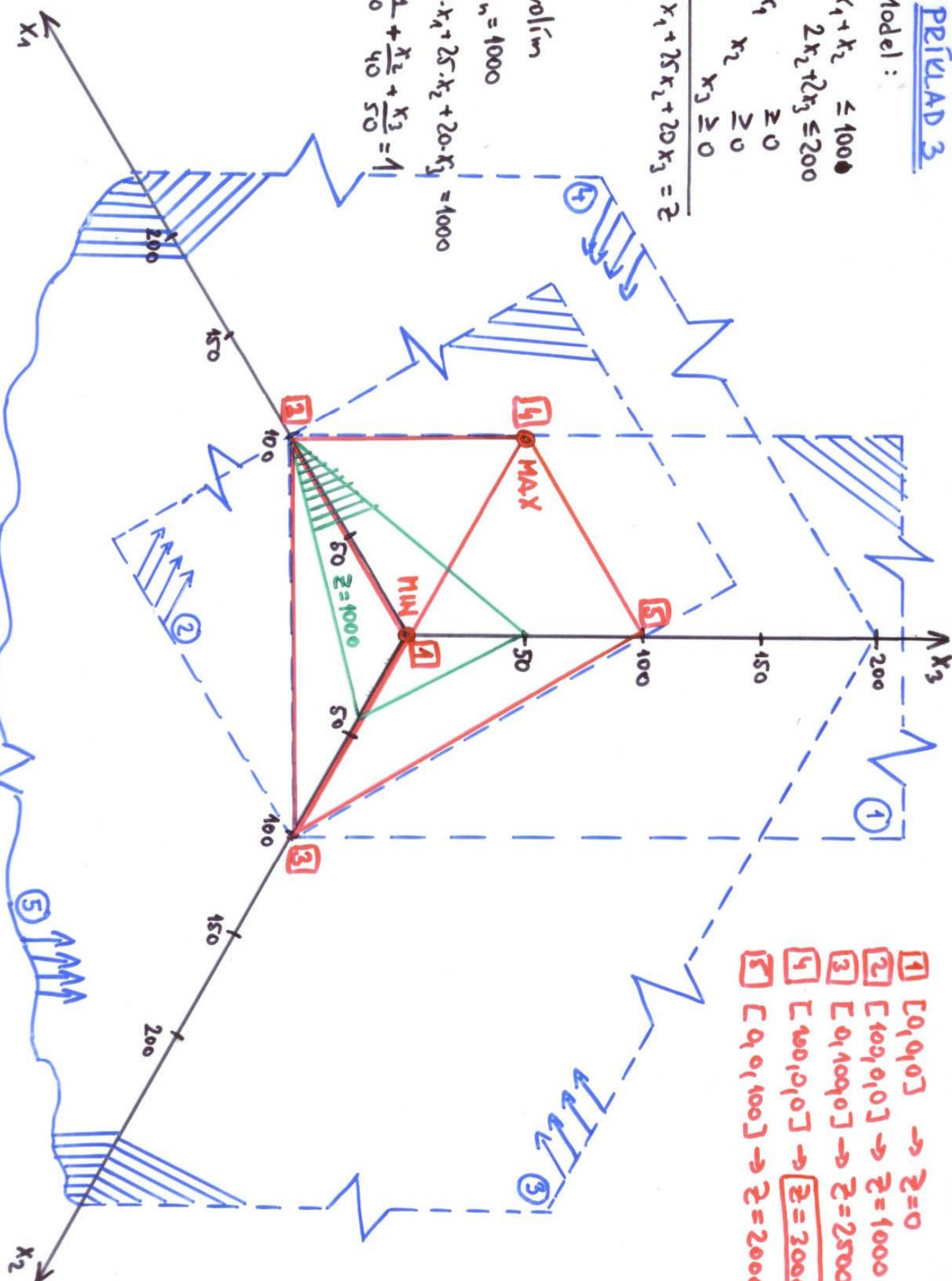
$$10x_1 + 25x_2 + 20x_3 = 2$$

Zvolín

$$Z_n = 1000$$

$$10 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 = 1000$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



4. Simplexová tabuľka

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	Z	w
x ₄	100	1	1	0	1	0	0	100/1 = 100
x ₅	200	0	2	2	0	1	0	200/2 = 100
Z	0	-10	-25	-20	0	0	1	

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	Z	w
x ₂	100	1	1	0	1	0	0	100/0 = ∞
x ₅	0	-2	0	2	-2	1	0	0/2 = 0
Z	2500	15	0	-20	25	0	1	

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	Z	w
x ₂	100	1	1	0	1	0	0	100/1 = 100
x ₃	0	-1	0	1	-1	1/2	0	0/-1 = 0
Z	2500	-5	0	0	5	10	1	

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	Z	w
x ₁	100	1	1	0	1	0	0	100/1 = 100
x ₃	100	0	1	1	0	1/2	0	200/2 = 100
Z	3000	0	5	0	10	10	1	

5. Výsledky :

Na základe definovaných obmedzení a podmienok je optimálne z hľadiska dosiahnutia maximálneho zisku a obmedzení vyplývajúcich z disponibilného množstva surovín vyrobiť:

100 ks pneumatík typu P1a 100 ks pneumatík P3.

Výsledný zisk za takýto výrobný program bude 3000 jednotiek.