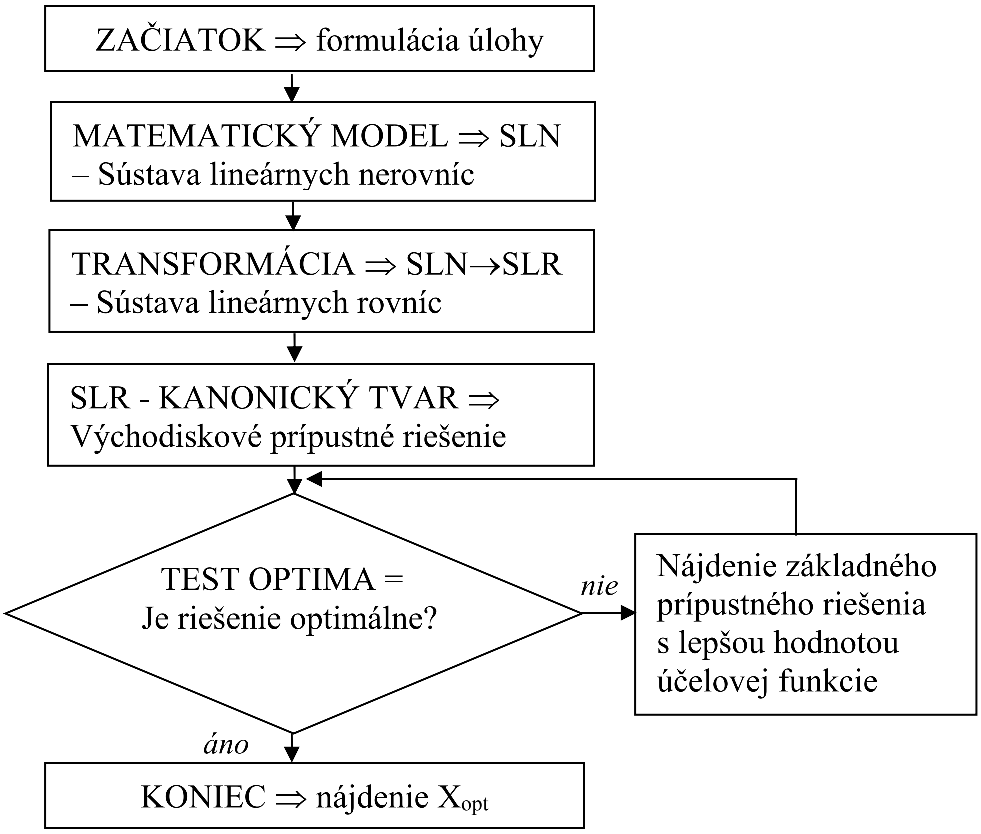
SIMPLEXOVÝ ALGOROTMUS

Oblasť lineárneho programovania patrí medzi najprepracovanejšie oblasti matematického programovania, t.j. ***hľadania optimálnych riešení RP s obmedzujúcimi podmienkami.***

Univerzálny postup riešenia veľkej množiny ÚLP je tzv. ***simplexová metóda*** (simplexový algoritmus). Pre svoje použitie vyžaduje úpravu všeobecného tvaru matematického modelu úlohy na tzv. **kanonický** (predpísaný, uzákonený) **tvar**.

Všeobecný základný algoritmus simplexovej metódy je na obr.1.



Obr.1 Schéma všeobecného postupu simplexovej metódy

Pri riešení ÚLP simplexovou metódou je nutné najskôr získať tzv. ***východiskové základné prípustné riešenie (VZPR).*** K tomu je nutné, aby mali obmedzujúce podmienky vhodný **tvar sústavy lineárnych rovníc** a takýto matematický model ÚLP nazývame ***kanonický (dohovorený) tvar.***

V ÚLP sú však obvykle obmedzujúce podmienky, ako aj podmienky nezápornosti najčastejšie zadané v tvare nerovníc.

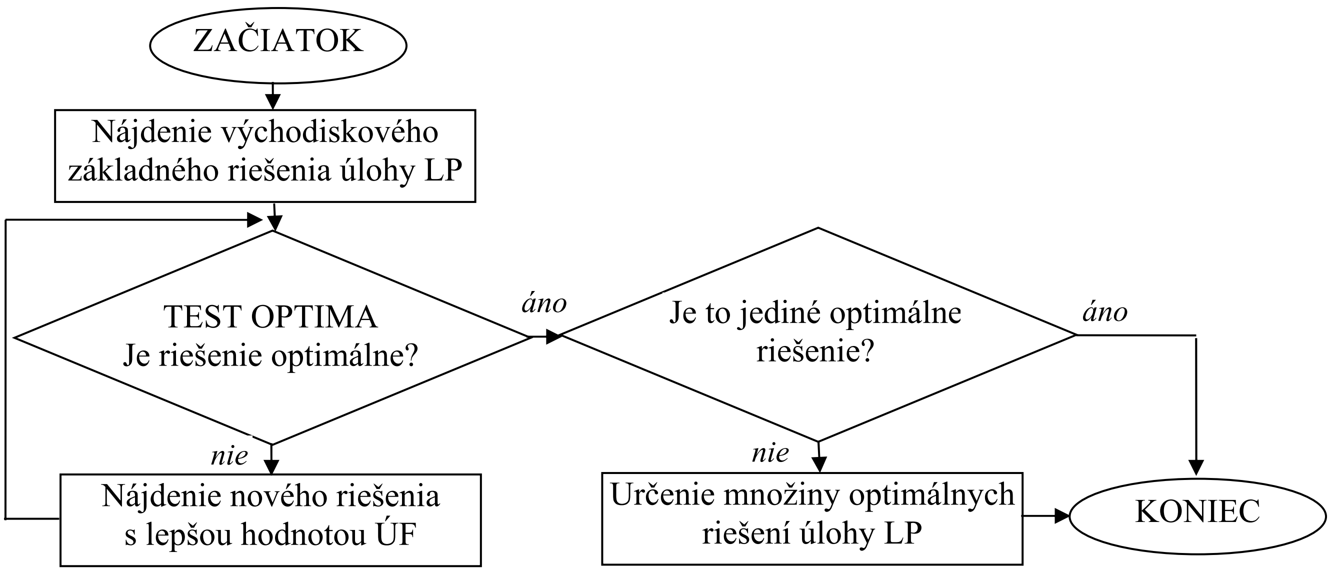
Prvý krok riešenia matematického modelu ÚLP = transformácia (prevod) sústavy lineárnych nerovníc (SLN) na sústavu lineárnych rovníc (SLR). Pokiaľ takto získaná – transformovaná – sústava rovníc nie je v dohovorenom **– kanonickom** - tvare, tak ju na požadovaný tvar musíme previesť. Prevodom SLR do kanonického tvaru je možné ihneď získať prvé riešenie – tzv. ***východiskové základné prípustné riešenie*** úlohy.

Druhý krok = testovanie optimálnosti riešenia. Takto je možné preveriť, či získané základné riešenie už je alebo ešte nie je optimálne. V prípade, že test optimálnosti preukáže, že VZPR už optimálne je - našli sme hľadané optimálne riešenie a algoritmus metódy končí.

V opačnom prípade sa snažíme nájsť lepšie základné prípustné riešenie, t.j. riešenie buď s vyššou hodnotou účelovej funkcie (ÚF) pre úlohu MAX, resp. riešenie s hodnotou ÚF nižšou (MIN). Opätovne aplikujeme test optima. Uvedeným iteračným postupom pokračujeme dovtedy, pokiaľ nebude nájdené riešenie testu optimálnosti vyhovovať.

4.1 Základný postup simplexového algoritmu

Vlastné riešenie matematického modelu ÚLP prebieha podľa algoritmu (Obr.2).



Obr. 2 Základná schéma iteračného postupu simplexovej metódy

Ten je možné slovne charakterizovať nasledovne:

1. ***Matematický model úlohy transformujeme na požadovaný – tzv. kanonický tvar modelu.***
2. ***Určíme východiskové (počiatočné) riešenie úlohy - tzv. východiskové základné riešenie.***
3. ***Východiskové riešenie posúdime prostredníctvom tzv. kritéria optimálnosti riešenia.***
4. ***Posúdime, či je určené riešenie optimálne a či je jediné optimálne alebo či existujú aj ďalšie, tzv. alternatívne riešenia. Ak je riešenie optimálne a jediné, výpočet končí.***
5. ***Ak riešenie optimálne nie je, vykonáme ekvivalentné úpravy modelu a snažíme sa o zlepšenie riešenia v požadovanom smere optimalizácie, tzn. nárastu resp. poklesu cieľovej funkcie.***
6. ***Pokračujeme v riešení bodom 3 dovtedy, pokiaľ základné prípustné riešenie nebude vyhovovať podmienke optimálnosti.***

Na základe princípu simplexovej metódy tiež platí, že k optimálnemu riešeniu ÚLP dospejeme po realizácii konečného počtu iteračných krokov.

Ak je matematický model úlohy prevedený na kanonický tvar, potom je po konečnom počte iteračných krokov simplexového algoritmu vždy možné nájsť optimálne riešenie.

Podstata prevodu na kanonický tvar:

V LP sa môžu vo všeobecnosti vyskytovať obmedzujúce podmienky definované buď ako nerovnice typu „≤“ alebo „≥“ príp. ako rovnice „=“. Vzhľadom k podmienkam nezápornosti je pre vytvorenie ekvivalentnej sústavy rovníc (ESR) nutné:

- **u nerovníc typu „≤“ prídavnú premennú k ľavej strane nerovnice pripočítať,**
- **u nerovníc typu „≥“prídavnú premennú od ľavej strany nerovnice odpočítať,**
- **u obmedzujúcich podmienok v tvare rovníc prídavné premenné nie sú potrebné.**

Základný výpočtový postup simplexovej metódy sú dve hlavné fázy:

1. **nájdenie východiskového základného riešenia**
2. **realizácia iteračného postupu vedúceho k extremalizácii hodnoty účelovej funkcie z.**

Východiskové základné riešenie: ak sú v úlohe LP všetky obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc typu „≤“ - pre získanie východiskového základného riešenia stačí SLN previesť pomocou tzv. prídavných premenných na ekvivalentnú sústavu rovníc (ESR). Tým je vytvorená sústava rovníc v kanonickom tvare a tomu potom odpovedá aj východiskové základné riešenie úlohy LP. Po získaní východiskového základného riešenia je možné pristúpiť k testu jeho optimality.

Testovanie optimality riešenia: spočíva v posúdení toho, či je možné nájsť v danom kroku výpočtu tzv. vstupujúcu premennú, ktorá by viedla k zvýšeniu (pri maximalizačnej úlohe) resp. zníženiu (pri minimalizácii) hodnoty účelovej funkcie.

Prakticky to znamená, že riešenie ÚLP je optimálne vtedy, ak pri:

- maximalizácii účelovej funkcie sú koeficienty v riadku účelovej funkcie (tzv. redukované ceny) nezáporné, t.j. kladné alebo nulové.
- minimalizácii účelovej funkcie sú koeficienty v riadku účelovej funkcie nekladné, t.j. záporné alebo nulové.

Podľa možnosti nájdenia východiskového základného riešenia rozoznávame:

- **jednofázový simplexový algoritmus**
- **dvojfázový simplexový algoritmus.**

JEDNOFÁZOVÝ SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

Príklad 1 : Optimálny opravárenský plán

Do opravovne techniky, vykonávajúcej 2 druhy opráv (O_1, O_2), pri ktorých sa spotrebovávajú 4 typy súčiastok (S_1, S_2, S_3, S_4), bolo pristavených 50 nepojazdných vozidiel. Na základe vstupnej kontroly bolo 20 vozidiel určených pre opravu O_1 a 30 vozidiel pre opravu O_2.
Na vykonanie O1 potrebujeme : 2ks – S_1, 1ks – S_2, 1ks – S_3, 1ks – S_4. Na vykonanie O2 potrebujeme : 3ks – S_1, 2ks – S_2, 1ks – S_3, 2ks – S_4.
Na sklade je pritom obmedzené množstvo súčiastok : S_1 – 100ks, S_2 – 70ks, S_3 – 40ks, S_4 – 50ks. Zostavte optimálny opravárenský plán tak, aby z obmedzených zásob bolo opravených maximum nepojazdných vozidiel.

RIEŠENIE :

1.Tabuľka úlohy

Súčiastka \ Oprava	Oprava		Zásoba súčiastok
	$O_1 = x_1$	$O_2 = x_2$	
S1	2	3	**100**
S2	1	2	**70**
S3	1	1	**40**
S4	1	2	**50**
Počet vozidiel vyžadujúcich opravu	**20**	**30**	**MAX**

2. Matematický model

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{rcrcl} 2.x_1 & + & 3.x_2 & \leq & 100 \\ x_1 & + & 2.x_2 & \leq & 70 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\ x_1 & + & 2.x_2 & \leq & 50 \\ x_1 & & & \leq & 20 \\ & & x_2 & \leq & 30 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti : $x_j \geq 0$ pre $j = 1,2$

Účelová funkcia : $x_1 + x_2 = z \rightarrow \text{MAX}$

3. Transformácia na kanonický tvar :

$$\begin{array}{rcrcccccccl} 2.x_1 & + & 3.x_2 & +x_3 & & & & & & = & 100 \\ x_1 & + & 2.x_2 & & +x_4 & & & & & = & 70 \\ x_1 & + & x_2 & & & +x_5 & & & & = & 40 \\ x_1 & + & 2.x_2 & & & & +x_6 & & & = & 50 \\ x_1 & & & & & & & +x_7 & & = & 20 \\ & & x_2 & & & & & & +x_8 & = & 30 \\ \hline z - x_1 & - & x_2 & & & & & & & = & 0 \rightarrow \text{MAX} \end{array}$$

4. Simplexový algoritmus

0. krok – vých. riešenie $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1=x_2=0, x_3=100, x_4=70, x_5=40, x_6=50, x_7=20, x_8=30)$, $z = 0$

Báza	b	x_1	x_2	X_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_3	100	2	3	1	0	0	0	0	0	0	100/2=50
x_4	70	1	2	0	1	0	0	0	0	0	70/1=70
x_5	40	1	1	0	0	1	0	0	0	0	40/1=40
x_6	50	1	2	0	0	0	1	0	0	0	50/1=50
x_7	20	**1**	0	0	0	0	0	1	0	0	20/1=**20**
x_8	30	0	1	0	0	0	0	0	1	0	30/0=∞
z	0	**-1**	-1	0	0	0	0	0	0	1	max

1. krok: riešenie $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1=20, x_2= x_7=0, x_3=60, x_4=50, x_5=20, x_6=30, x_8=30)$, $z = 20$.

Báza	b	x_1	x_2	X_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_3	60	0	3	1	0	0	0	-2	0	0	60/3=20
x_4	50	0	2	0	1	0	0	-1	0	0	50/2=25
x_5	20	0	1	0	0	1	0	-1	0	0	20/1=20
x_6	30	0	**2**	0	0	0	1	-1	0	0	30/2=**15**
x_1	20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	20/0=∞
x_8	30	0	1	0	0	0	0	0	1	0	30/1=30
Z	20	0	**-1**	0	0	0	0	1	0	1	max

2. krok: optimálne riešenie $\mathbf{x}^{(2)} = (\mathbf{x_1=20}, \mathbf{x_2=15}, x_3=15, x_4=20, x_5=5, x_6= x_7=0, x_8=15)$, $z=35$.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_3	15	0	0	1	0	0	-3/2	-1/2	0	0	
x_4	20	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	
x_5	5	0	0	0	0	1	-1/2	-1/2	0	0	
x_2	15	0	1	0	0	0	1/2	-1/2	0	0	
x_1	20	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
x_8	15	0	0	0	0	0	-1/2	1/2	1	0	
Z	35	0	0	0	0	0	1/2	1/2	0	1	MAX

5. Interpretácia výsledkov

Riešenie : $x_1 = 20$, $x_2 = 15$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 5$, $x_6 = x_7 = 0$, $x_8 = 15$, $z = 35$

Záver :

Z hľadiska kapacít zásob súčiastok a ich spotreby na jednotlivé typy opráv je optimálne z hľadiska maximálneho počtu spojazdnených vozidiel vykonať 20 opráv S_1 a 15 opráv S_2. Maximálne možno za daných podmienok je opraviť 35 vozidiel.

Príklad 2 : Optimálne počty nasadenia strojových zostáv

Pri odstraňovaní následkov živelnej pohromy je potrebné vykonať zemné práce. Z prostriedkov, ktoré sú k dispozícii možno zostaviť 5 funkčných strojových zostáv. Určite koľko a ktorých zostáv je vhodné vytvoriť, aby celkový výkon za smenu bol MAX. Východiskové údaje sú v tabuľke.

Stroj	Zostava					Stroje k dispozícii
	$Z_1 = x_1$	$Z_2 = x_2$	$Z_3 = x_3$	$Z_4 = x_4$	$Z_5 = x_5$	
Autorýpadlo	1	1	1	1	-	8
Automobil skl.	3	4	3	4	-	16
Buldozér	-	-	1	1	1	10
Výkon (m^3/sm)	60	75	70	88	8	MAX

RIEŠENIE :

1. Matematický model

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 8 \\ 3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 &\le 16 \\ x_3 + x_4 + x_5 &\le 10 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti : $x_j \ge 0$ pre j = 1,2, 3, 4, 5

Účelová funkcia : $z = 60.x_1 + 75.x_2 + 70.x_3 + 88\, x_4 + 8.x_5 \rightarrow \text{MAX}$

2. Transformácia na kanonický tvar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &= 8 \\ 3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 + x_7 &= 16 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 &= 10 \end{aligned}$$

$$Z - 60.x_1 - 75.x_2 - 70.x_3 - 88.x_4 - 8.x_5 = 0$$

3. Simplexová tabuľka

0.iteračný krok

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_6	8	1	1	1	1	0	1	0	0	0	8/1=8
x_7	16	3	4	3	**4**	0	0	1	0	0	16/4=**4**
x_8	10	0	0	1	1	1	0	0	1	0	10/1=10
Z	0	- 60	- 75	-70	**-88**	-8	0	0	0	1	

1.iteračný krok

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_6	4	1/4	0	1/4	0	0	1	-1/4	0	0	4/0=∞
x_4	4	3/4	1	3/4	1	0	0	1/4	0	0	4/0=∞
x_8	6	-3/4	-1	1/4	0	**1**	0	-1/4	1	0	6/1=**6**
Z	352	6	13	-4	0	**-8**	0	22	0	1	

2.iteračný krok

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_6	4	1/4	0	1/4	0	0	1	-1/4	0	0	16
x_4	4	3/4	1	**3/4**	1	0	0	1/4	0	0	**16/3**
x_5	6	-3/4	-1	1/4	0	1	0	-1/4	1	0	24
Z	400	0	5	**-2**	0	0	0	20	8	1	

3.iteračný krok

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w
x_6	8/3	0	-1/3	0	-1/3	0	1	-1/3	0	0	
x_3	16/3	1	4/3	1	4/3	0	0	1/3	0	0	
x_5	14/3	-1	-4/3	0	-1/3	1	0	-1/3	1	0	
Z	1232/3	2	23/3	0	8/3	0	0	62/3	8	1	

4. Interpretácia výsledkov

x_3 = 16/3 = 5,33 , x_5 = 14/3 = 4,66 , $x_1 = x_2 = x_4 = 0$

Z = 1232/3 = 410,6 m^3 / smenu.

Získané riešenie je tzv. ***absolútne riešenie***. Logické opodstatnenie má však iba riešenie celočíselné, ktoré získame jednoducho zaokrúhlením neceločíselných riešení (a dosadení do obmedzujúcich podmienok a účelovej funkcie)

x_3 = 5 , x_5 = 4 , Z = 382 m^3 / zmenu.

?? Je však takto určené celočíselné riešenie optimom v oblasti celočíselnej ??

Je potrebné použiť algoritmus celočíselného riešenia, napr. Gomoryho algoritmus ⇒

x_3 = 4 , x_4 = 1, x_5 = 5 , Z = 408 m^3 / zmenu.

DVOJFÁZOVÝ SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

Príklad 3 : Optimálny rezný plán

V lesozávode je potrebné na výstavbu provizórneho premostenia narezať z trámov dĺžky L = 8 m podpery definovaných dĺžok a množstva :
l_1= 2,5 m.. 1000 ks
l_2 = 3,0 m.. 600 ks
l_3 = 3,5 m.. 200 ks
Úlohou je určiť optimálny rezný plán tak, aby :

- **A) bol minimálny odpad pri rezaní,**
- **B) bol minimálny počet spotrebovaných trámov dĺžky L = 8 m.**

<u>RIEŠENIE</u> :

1.Tabuľka úlohy : varianty rezania

Dĺžka podpier	**Možné varianty rezania**						**Potrebný počet podpier [ks]**
	$V_1 = x_1$	$V_2 = x_2$	$V_3 = x_3$	$V_4 = x_4$	$V_5 = x_5$	$V_6 = x_6$	
P_1 = 2,5 m	3	-	-	2	1	-	**1000**
P_2 = 3,0 m	-	2	-	1	-	1	**600**
P_3 = 3,5 m	-	-	2	-	1	1	**200**
ODPAD	**0,5**	**2,0**	**1,0**	**0**	**2,0**	**1,5**	**MIN**

2. Matematický model „A“

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{aligned} 3.x_1 \quad\quad\quad + 2.x_4 + x_5 \quad &\geq 1000 \\ 2.x_2 \quad + x_4 \quad + x_6 &\geq 600 \\ 2.x_3 \quad + x_5 + x_6 &\geq 200 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti : $x_j \geq 0$ pre j = 1,2,3,....6

Účelová funkcia : $0,5.x_1 + 2.x_2 + x_3 \quad +2.x_5 + 1,5.x_6 = z \rightarrow MIN$

3. Transformácia na kanonický tvar :

$$\begin{aligned} 3.x_1 + 2.x_4 + x_5 - x_7 + u_1 &= 1000 \\ 2.x_2 + x_4 + x_6 - x_8 + u_2 &= 600 \\ 2.x_3 + x_5 + x_6 - x_9 + u_3 &= 200 \\ z - 0,5.x_1 - 2.x_2 - x_3 - 2.x_5 - 1,5.x_6 &= 0 \rightarrow MIN \end{aligned}$$

Pomocná účelová funkcia : $\quad p = u_1 + u_2 + u_3$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 + 3.x_4 + 2.x_5 + 2.x_6 - x_7 - x_8 - x_9 + p = 1800$$

4. Simplexový algoritmus – 2 fázy

Fáza1:

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	u_1	u_2	u_3	z	p	w
u_1	1000	3	0	0	2	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	**333**
u_2	600	0	2	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	∞
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
z	0	-1/2	-2	-1	0	-2	-3/2	0	0	0	0	0	0	1	0	
p	1800	3	2	2	3	2	2	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	

x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	∞
u_2	600	0	2	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	**300**
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
z	1000/6	0	–2	-1	1/3	-11/6	-3/2	-1/6	0	0	1/6	0	0	1	0	
p	800	0	2	2	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	

x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	∞
x_2	300	0	1	0	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	0	∞
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	**100**
z	4600/6	0	0	-1	4/3	-11/6	-1/2	-1/6	-1	0	1/6	1	0	1	0	
p	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	u_1	u_2	u_3	z	p	w
x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	500
x_2	300	0	1	0	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	0	600
x_3	100	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	∞
z	5200/6	0	0	0	4/3	-4/3	0	-1/6	-1	-1/2	1/6	1	1/2	1	0	
p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	

Fáza 2:

x_4	500	3/2	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	0				0		-1000
x_2	50	-3/4	1	0	0	- 1/4	1/2	1/4	-1/2	0				0		200
x_3	100	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2				0		∞
z	200	-2	0	0	0	-2	0	1/2	-1	-1/2				1		

x_4	600	0	2	0	1	0	1	0	-1	0				0		
x_7	200	-3	4	0	0	-1	2	1	-2	0				0		
x_3	100	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2				0		
z	**100**	-1/2	-2	0	0	-3/2	-1	0	0	-1/2				1		

5. Interpretácia výsledkov : $x_3 = 100$, $x_4 = 600$, $z = 100$.

Slovne : Z možných variantov rezania je optimálne z hľadiska obmedzení vykonať 100 krát variant 3 a 600 krát variant 4, pričom dosiahneme minimálny odpad 100 m.

2. Matematický model „B“

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{rrrrrrl} 3.x_1 & & & +\,2.x_4 & +\,x_5 & & \geq 1000 \\ & 2.x_2 & & +\,x_4 & & +\,x_6 & \geq 600 \\ & & 2.x_3 & & +\,x_5 & +\,x_6 & \geq 200 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti : $x_j \geq 0$ pre j = 1,2,3,4,5,6.

Účelová funkcia : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = z \rightarrow MIN$

3. Kanonický tvar

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl} 3.x_1 & & & +2.x_4 & +\,x_5 & & -x_7 & & & +\,u_1 & & & = 1000 \\ & 2.x_2 & & +\,x_4 & & +\,x_6 & & -\,x_8 & & & +\,u_2 & & = 600 \\ & & 2.x_3 & & +\,x_5 & +\,x_6 & & & -\,x_9 & & & +\,u_3 & = 200 \end{array}$$

$$z - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 + 3.x_4 + 2.x_5 + 2.x_6 - x_7 - x_8 - x_9 + p = 1800$$

4. Simplexový algoritmus

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
u_1	1000	3	0	0	2	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	**333**
u_2	600	0	2	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	∞
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
Z	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	
P	1800	3	2	2	3	2	2	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	∞
u_2	600	0	2	0	1	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	**300**
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
Z	1000/3	0	–1	-1	-1/3	-2/3	-1	-1/3	0	0	1/3	0	0	1	0	
P	800	0	2	2	1	1	2	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	

x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	∞
x_2	300	0	1	0	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	0	∞
u_3	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	**100**
Z	1900/3	0	0	-1	1/6	-2/3	-1/2	-1/3	-1/2	0	1/3	1/2	0	1	0	
P	200	0	0	2	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	1	

x_1	1000/3	1	0	0	2/3	1/3	0	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	**500**
x_2	300	0	1	0	1/2	0	1/2	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	0	600
x_3	100	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	0	0	1/2	0	0	∞
Z	2200/3	0	0	0	1/6	-1/6	0	-1/3	-1/2	-1/2	1/3	1/2	1/2	1	0	
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	

v 3. iteračnom kroku vypadne pomocná účelová funkcia – P.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	Z	P	w
x_4	**500**	3/2	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	0	0		
x_2	**50**	-3/4	1	0	0	5/12	1/2	-13/12	-1/2	0	0		
x_3	**100**	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2	0		
Z	**1950/3**	-1/4	0	0	0	-1/4	0	-1/4	-1/2	-1/2	1		

Výsledky : $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, $\mathbf{x_2 = 50}$, $\mathbf{x_3 = 100}$, $\mathbf{x_4 = 500}$
Z = 1950/ 3 **= 650.**

Minimum trámov spotrebujeme, ak realizujeme 50 krát variant V_2, 100 krát variant V_3 a 500 krát variant V_4.

DUALITA ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Príklad 4 : **Dualita úloh lineárneho programovania**

Určte riešenie úlohy duálne združenej k úlohe z Príkladu 1 a správne interpretujte výsledky. Porovnajte výsledné simplexové tabuľky príkladov.

RIEŠENIE :

1. Matematický model úlohy z Príkladu 1

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{llllllll} 3.x_1 & & & + 2.x_4 & + x_5 & & \geq & 1000 \\ & 2.x_2 & & + x_4 & & + x_6 & \geq & 600 \\ & & 2.x_3 & & + x_5 & + x_6 & \geq & 200 \end{array}$$

Účelová funkcia :

$$z - 0{,}5.x_1 - 2.x_2 - x_3 \quad - 2.x_5 - 1{,}5.\,x_6 = 0$$

2. Úloha duálne združená (bez fyzikálnej podstaty)

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{lllll} 3.y_1 & & & \leq & 0{,}5 \\ & 2.y_2 & & \leq & 2 \\ & & 2.y_3 & \leq & 1 \\ 2.y_1 + & y_2 & & \leq & 0 \\ y_1 & & + y_3 & \leq & 2 \\ & y_2 & + y_3 & \leq & 1{,}5 \end{array}$$

Účelová funkcia :

$$1000.y_1 + 600.y_2 + 200.y_3 = z$$
$$Z - 1000.y_1 - 600.y_2 - 200.y_3 = 0 \rightarrow MAX$$

3. Kanonický tvar

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{array}{lllllllllll} 3.y_1 & & & + y_4 & & & & & & = & 0{,}5 \\ & 2.y_2 & & & + y_5 & & & & & = & 2 \\ & & 2.y_3 & & & + y_6 & & & & = & 1 \\ 2.y_1 & + y_2 & & & & & + y_7 & & & = & 0 \\ y_1 & & + y_3 & & & & & + y_8 & & = & 2 \\ & y_2 & + y_3 & & & & & & + y_9 & = & 1{,}5 \end{array}$$

Účelová funkcia :

$$z - 1000.y_1 - 600.y_2 - 200.y_3 = 0 \rightarrow MAX$$

4. Simplexový algoritmus

Báza	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	z	w
y_4	0,5	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1/6
y_5	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
y_6	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	∞
y_7	0	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	**0**
y_8	2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2
y_9	1,5	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	∞
Z	0	-1000	-600	200	0	0	0	0	0	0	1	

y_4	1/2	0	-3/2	0	1	0	0	-3/2	0	0	0	∞
y_5	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
y_6	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	**1/2**
y_1	0	1	1/2	0	0	0	0	1/2	0	0	0	1
y_8	2	0	-1/2	1	0	0	0	-1/2	1	0	0	2
y_9	3/2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	3/2
Z	0	0	-100	-200	0	0	0	500	0	0	1	

y_4	1/2	0	-3/2	0	1	0	0	-3/2	0	0	0	-1/3
y_5	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1
y_3	1/2	0	0	1	0	0	1/2	0	0	0	0	∞
y_1	0	1	1/2	0	0	0	0	1/2	0	0	0	**0**
y_8	3/2	0	-1/2	0	0	0	-1/2	-1/2	1	0	0	-3
y_9	1	0	1	0	0	0	-1/2	0	0	1	0	1
Z	100	0	-100	0	0	0	100	500	0	0	1	

Báza	b	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	z	w
y_4	1/2											
y_5	2											
y_3	**1/2**											
y_2	**0**											
y_8	3/2											
y_9	1											
Z	**100**	**200**	0	0	0	0	**100**	**600**	0	0	1	

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
x_7	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Interpretácia výsledkov :

Riešenie pôvodnej úlohy :

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	Z	w
x_4	**600**	0	2	0	1	0	1	0	-1	0		
x_7	**200**	-3	4	0	0	-1	2	1	-2	0		
x_3	**100**	0	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1/2		
Z	**100**	-1/2	-2	0	0	-3/2	-1	0	**0**	**-1/2**		

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_1	y_2	y_3

Ako je vidieť, dualitu úloh je možné s výhodou využiť napr. pri riešení úloh LP, ktoré je nutné riešiť zložitejším dvojfázovým algoritmom (obmedzujúce podmienky obsahujú znamienko $\geq$) a po transformácii riešiť úlohu duálnu prostredníctvom jednofázového simplexového algoritmu a potom správne interpretovať výsledky uvažované pre model pôvodný.

VŠEOBECNE DEFINOVANÝ MODEL (≤, ≥, =)

Príklad 5 : **Model s obmedzujúcimi podmienkami v tvare ≥ a ≤.**

Opravovňa vykonáva 3 druhy opráv (O_1, O_2, O_3), na ktoré využíva 2 druhy súčiastok (S_1, S_2). Zisky z jednotlivých opráv sú : O_1 = 54 j., O_2 = 45j, O_3 = 52j. Na opravu O_1 sa spotrebujú 2 súčiastky typu S_1 a 3 súčiastky typu S_2, na opravu O_2 sa spotrebuje 1 súčiastka S_1 a 2 typu S_2 a na opravu O_3 sa spotrebujú 3 súčiastky S_1 a 2 súčiastky S_2. Na sklade je k dispozícii celkom 600 súčiastok S_1 a 800 súčiastok S_2. Na zabezpečenie chodu opravovne je potrebné vykonať minimálne 50 opráv typu O_1, 100 opráv typu O_2 a 80 opráv typu O_3. Naplánujte opravy tak, aby zisk za ich vykonanie bol maximálny. Interpretujte výsledky.

RIEŠENIE :

1.Tabuľka úlohy

Opravy / Súčiastky	$O_1 = x_1$	$O_2 = x_2$	$O_3 = x_3$	Zásoby súčiastok
S1	2	1	3	**600**
S2	3	2	2	**800**
Min. počet opráv	50	100	80	
Zisk	54	45	52	**MAX**

2. Matematický model

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 &\le 600 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 &\le 800 \\ x_1 &\ge 50 \\ x_2 &\ge 100 \\ x_3 &\ge 80 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti : $x_j \ge 0$ pre j = 1,2,3

Účelová funkcia : $54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 = z \rightarrow MAX$

3. Transformácia na kanonický tvar

Obmedzujúce podmienky :

$$\begin{aligned} 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 + \mathbf{x_4} &= 600 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 + \mathbf{x_5} &= 800 \\ x_1 - \mathbf{x_6} + u_1 &= 50 \\ x_2 - \mathbf{x_7} + u_2 &= 100 \\ x_3 - \mathbf{x_8} + u_3 &= 80 \end{aligned}$$

Účelová funkcia :

$z - 54.x_1 - 45.x_2 - 52.x_3 = 0 \rightarrow$ **MAX**

Pomocná účelová funkcia : $p = u_1 + u_2 + u_3$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_6 - x_7 - x_8 + p = 230$$

4. Simplexový algoritmus

0.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	z	p	w
x_4	600	2	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
x_5	800	3	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	233
u_1	50	**1**	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	**50**
u_2	100	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	∞
u_3	80	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
z	0	-54	-45	-52	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
p	230	**1**	1	1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	

1.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	z	p	w
x_4	500	0	1	3	1	0	2	0	0	-2	0	0	0	0	166
x_5	650	0	2	2	0	1	3	0	0	-3	0	0	0	0	325
x_1	50	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	∞
u_2	100	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	∞
u_3	80	0	0	**1**	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	**80**
z	2700	0	-45	-52	0	0	-54	0	0	54	0	0	1	0	
p	180	0	1	**1**	0	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	1	

2.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_4	260	0	1	0	1	0	2	0	3	-2	0	-3	0	0	260
x_5	490	0	2	0	0	1	3	0	2	-3	0	-2	0	0	245
x_1	50	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	∞
u_2	100	0	**1**	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	**200**
x_3	80	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
z	6860	0	-45	0	0	0	-54	0	-52	54	0	52	1	0	
p	100	0	**1**	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	1	

3.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_4	160	0	0	0	1	0	**2**	1	3	-2	-1	-3	0	0	**80**
x_5	290	0	0	0	0	1	3	2	2	-3	-2	-2	0	0	96
x_1	50	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	-50
x_2	100	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	∞
x_3	80	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	∞
Z	11360	0	0	0	0	0	**-54**	-45	-52	54	45	52	1	0	
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	**VYNUL**

Pomocná účelová funkcia p bola vynulovaná, preto výpočet 1.fázy končí a pokračujeme už iba v hľadaní extrému pôvodnej účelovej funkcie z.

Úlohou je maximalizácia tzn. všetky hodnoty v účelovej funkcii z by mali byť po nájdení optimálneho riešenia nezáporné. Najviac sa od tohto stavu odlišuje hodnota -18 so súradnicami [z,x_7] ⇒ **riadiaci stĺpec**.

4.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_6	80	0	0	0	1/2	0	1	1/2	3/2				0		160
x_5	50	0	0	0	-3/2	1	0	**1/2**	-5/2				0		**100**
x_1	130	1	0	0	1/2	0	0	1/2	3/2				0		260
x_2	100	0	1	0	0	0	0	-1	0				0		-100
x_3	80	0	0	1	0	0	0	0	-1				0		∞
Z	15680	0	0	0	27	0	0	**-18**	29				1		

5.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_6	30	0	0	0	2	-1	1	0	**4**				0		**7,5**
x_7	100	0	0	0	-3	2	0	1	-5				0		-20
x_1	80	1	0	0	2	-1	0	0	4				0		20
x_2	200	0	1	0	-3	2	0	0	-5				0		-40
x_3	80	0	0	1	0	0	0	0	-1				0		-80
Z	17480	0	0	0	-27	36	0	0	**-61**				1		

6.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	u_1	u_2	u_3	Z	P	w
x_8	7,5	0	0	0	1/2	-1/4	1/4	0	1				0		
x_7	137,5	0	0	0	-1/2	3/4	5/4	1	0				0		
x_1	**50**	1	0	0	0	0	-1	0	0				0		
x_2	**237,5**	0	1	0	-1/2	3/4	5/4	0	0				0		
x_3	**87,5**	0	0	1	1/2	-1/4	1/4	0	0				0		
Z	**17937,5**	0	0	0	7/2	83/4	61/4	0	0				1		

5. Interpretácia výsledkov :
Absolútne riešenie : $\mathbf{x_1 = 50}$, $\mathbf{x_2 = 237{,}5}$, $\mathbf{x_3 = 87{,}5}$, $x_7 = 137{,}5$, $x_8 = 7{,}5$, **Z = 17 937,5.**

Slovne : Z hľadiska definovaných obmedzení je optimálne vykonať 50 krát opravu typu O1, 237,5 krát opravu O2 a 87,5 krát opravu typu O3.

Ako je vidieť z výsledkov, riešenie je tzv. absolútne (v oblasti reálnych hodnôt), avšak z hľadiska praktického je vhodnejšie nájsť optimálne riešenie z oboru prirodzených čísiel – tzv. ***celočíselné riešenie.***

OBMEDZUJÚCE PODMIENKY SO ZÁPORNÝMI KOEFICIENTMI

Príklad 6 : **Substitúcia**

Simplexovou metódou určite riešenie úlohy zadanej sústavou nerovností, aby bola dosiahnutá MAX hodnota účelovej funkcie v tvare $Z = 2.x_1 - x_2$.

1.	$x_2 \le 5$	3.	$x_1 \le 4$	5.	$x_2 \ge -4$	7.	$x_2 \ge (-x_1 / 2) - 3$
2.	$x_2 \le -x_1 + 6$	4.	$x_2 \le x_1 + 9$	6.	$x_1 \ge -5$		

<u>RIEŠENIE</u> :

1. Transformácia obmedzujúcich podmienok

1.Matematický model	2. Transformácia na rovnaké znamienka	3. Transformácia na tvar s absolútnou pr. stranou
1. $x_2 \le 5$	1. $x_2 \le 5$	1. $x_2 \le 5$
2. $x_2 \le -x_1 + 6$	2. $x_2 \le -x_1 + 6$	2. $x_1 + x_2 \le 6$
3. $x_1 \le 4$	3. $x_1 \le 4$	3. $x_1 \le 4$
4. $x_2 \le x_1 + 9$	4. $x_2 \le x_1 + 9$	4. $-x_1 + x_2 \le 9$
5. $x_2 \ge -4$	5. $-x_2 \le 4$	5. $-x_2 \le 4$
6. $x_1 \ge -5$	6. $-x_1 \le 5$	6. $-x_1 \le 5$
7. $x_2 \ge -x_1 / 2 - 3$	7. $-x_2 \le x_1 / 2 + 3$	7. $-x_1 / 2 - x_2 \le 3$
$z = 2.x_1 - x_2 \rightarrow MAX$	$z = 2.x_1 - x_2 \rightarrow MAX$	$z - 2.x_1 + x_2 = 0 \rightarrow MAX$

Ako to je s premennými so zápornými koeficientmi?
Ku korektnému riešeniu je potrebné zaviesť ***substitúciu*** *v tvare $x_1 = (y_1 - y_2)$ a $x_2 = (y_3 - y_4)$, ktorá plne zabezpečí transformáciu na prípustný tvar modelu.*

2. Zavedenie substitúcie a matematický model (z tvaru 3) :

$$
\begin{aligned}
y_3 - y_4 &\le 5 \\
y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &\le 6 \\
y_1 - y_2 &\le 4 \\
- y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\le 9 \\
- y_3 + y_4 &\le 4 \\
- y_1 + y_2 &\le 5 \\
(- y_1 + y_2) / 2 - y_3 + y_4 &\le 3
\end{aligned}
$$

$$2.y_1 - 2.y_2 - y_3 + y_4 = z \rightarrow MAX$$

3. Transformácia na kánonický tvar

$$y_3 - y_4 + y_5 = 5$$
$$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_6 = 6$$
$$y_1 - y_2 + y_7 = 4$$
$$-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_8 = 9$$
$$-y_3 + y_4 + y_9 = 4$$
$$-y_1 + y_2 + y_{10} = 5$$
$$(-y_1 + y_2)/2 - y_3 + y_4 + y_{11} = 3$$

$$z - 2.y_1 + 2.y_2 + y_3 - y_4 = 0$$

4. Simplexová tabuľka

Báza	**b**	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	z	w
y_5	5	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	∞
y_6	6	1	-1	1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	6
y_7	4	**1**	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	**4**
y_8	9	-1	1	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	-9
y_9	4	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	∞
y_{10}	5	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-5
y_{11}	3	-1/2	1/2	-1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	6
z	0	**-2**	2	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	

y_5	5	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-5
y_6	2	0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0	-2
y_1	4	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
y_8	13	0	0	1	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	-13
y_9	4	0	0	-1	**1**	0	0	0	0	1	0	0	0	**4**
y_{10}	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	∞
y_{11}	5	0	0	-1	1	0	0	1/2	0	0	0	1	0	5
z	8	0	0	1	**-1**	0	0	2	0	0	0	0	1	

Báza	**b**	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	z	w
y_5	9	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	∞
y_6	6	0	0	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	6
y_1	**4**	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
y_8	17	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	-9
y_4	**4**	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-6
y_{10}	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	4
y_{11}	1	0	0	0	0	0	0	1/2	0	-1	0	1	0	-5
z	**12**	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1	

Interpretácia výsledkov : $y_1 = 4$, $y_4 = 4$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $z = 12$.

Návrat do substitúcie:

$x_1 = y_1 - y_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 – 0 = 4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 4}$

$x_2 = y_3 – y_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 – 4 = - 4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_2 = - 4} \qquad \mathbf{z} = 2 \,.\, x_1 – x_2 = 2 \,.\, 4 – (-4) = \mathbf{12}$

CELOČÍSELNÉ RIEŠENIE

Postup pre určenie celočíselného riešenia – Gomoryho algoritmus

1. *Určiť optimálne riešenie úlohy bez ohľadu na podmienku celočíselnosti.*
2. *V každej rovnici s neceločíselným riešením rozdeliť pravú stranu rovnice na celočíselnú časť a zlomkovú časť podľa vzťahu* $\boldsymbol{b_i = d_i + r_i}$.
3. *Vybrať rovnicu, v ktorej vyžadujeme celočíselné riešenie a v ktorej je zlomková časť pravej strany –* $\boldsymbol{r_i}$ *maximálna. V tejto rovnici rozložiť koeficienty ľavej strany taktiež na celočíselnú a zlomkovú časť* $\boldsymbol{a_{ij} = d_{ij} + r_{ij}}$.
4. *Ku rovnici vybranej v kroku 3 vytvoriť tzv.* ***DOPLNKOVÚ ROVNICU*** *v tvare*

$$-r_{i1} \cdot x_1 - r_{i2} \cdot x_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - r_{in} \cdot x_n + s_1 = -r_i$$

o ktorú rozšírime riešenú sústavu a „s“ je nová prídavná premenná.

5. *Riadok doplnkovej rovnice považujeme za riadiaci. Riadiaci stĺpec určíme tak, že minimálna absolútna hodnota podielu(* z_j / s_{ij} *) určuje riadiaci stĺpec úprav.*
6. *Riešenie takto rozšíreného problému by malo byť už minimálne u jednej premennej celočíselné. Ak nie sú všetky prípustné riešenia ešte celočíselné, pokračovať pridaním novej rovnice s novou prídavnou premennou* s_2*. Postup opakovať dovtedy, pokiaľ nie sú požadované hodnoty pravej strany celočíselné.*

Príklad 7 : **Úlohou je určiť celočíselné riešenie zadania Príkladu 5**

<u>Riešenie</u>: **1. Všeobecné (neceločíselné) riešenie = výsledok z Pr.5**

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Z	w
x_8	7,5	0	0	0	1/2	-1/4	1/4	0	1	0	
x_7	137,5	0	0	0	-1/2	3/4	5/4	1	0	0	
x_1	**50**	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	
x_2	**237,5**	0	1	0	-1/2	3/4	5/4	0	0	0	
x_3	**87,5**	0	0	1	1/2	-1/4	1/4	0	0	0	
Z	**17937,5**	0	0	0	7/2	83/4	61/4	0	0	1	

$$\min \left| \frac{z_i}{s_{ji}} \right| \Rightarrow \left| \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-1}{2}} \right| = \mathbf{7} \quad , \quad \left| \frac{\frac{83}{4}}{\frac{-3}{4}} \right| = \frac{83}{3} \quad , \quad \left| \frac{\frac{61}{4}}{\frac{-1}{4}} \right| = 61$$

2. Celočíselné riešenie

0.

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	x_5	x_6	x_7	x_8	S_1	Z	$b_i = d_i + r_i$
x_8	7,5	0	0	0	1/2	-1/4	1/4	0	1	0	0	7 + 1/2
x_7	137,5	0	0	0	-1/2	3/4	5/4	1	0	0	0	137 + 1/2
x_1	50	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	50 + 0
$\mathbf{x_2}$	237 + 1/2	0+0	1+0	0+0	-1+1/2	0+3/4	1+1/4	0+0	0+0		0+0	237 + **1/2 r.r**
	237,5	0	1	0	-1/2	3/4	5/4	0	0	0	0	
x_3	87,5	0	0	1	1/2	-1/4	1/4	0	0	0	0	87 + 1/2
$\mathbf{S_1}$	**-1 / 2**	**0**	**0**	**0**	**-1 / 2**	**- 3 / 4**	**- 1 / 4**	**0**	**0**	**1**	**0**	
Z	**17937,5**	0	0	0	3,5	83/4	61/4	0	0		1	**max**

1.

Báza	**b**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Z	
x_8	7	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	
x_7	138	0	0	0	0	3/2	3/2	1	0	0	
x_1	**50**	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	
x_2	**238**	0	1	0	0	3/2	3	0	0	0	
x_3	**87**	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	
x_4	1	0	0	0	1	3 / 2	1/2	0	0	0	
Z	**17 934**	0	0	0	0	15,5	13,5	0	0	1	**MAX**

3. Výsledky : $\mathbf{x_1 = 50}$, $\mathbf{x_2 = 238}$, $\mathbf{x_3 = 87}$, $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$, $x_7 = 138$, $x_8 = 7$ $\mathbf{Z = 17\,934.}$

Príklad 8 : Úlohou je určiť optimálne celočíselné riešenie úlohy o strojových zostavách (Príklad 2).

RIEŠENIE : Posledný krok z postupu hľadania optimálneho riešenia absolútneho

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Z	w
x_6	**8/3**	0	-1/3	0	-1/3	0	1	-1/3	0	0	
x_3	**16/3**	1	4/3	1	4/3	0	0	1/3	0	0	
x_5	**14/3**	-1	-4/3	0	-1/3	1	0	-1/3	1	0	
Z	**1232/3**	2	23/3	0	8/3	0	0	62/3	8	1	

Výsledky: Nasadiť 5,33 SZ3, 4,66 SZ5, 2,33 SZ6. Výkon jednotky Z=410,66 m^3/zmena

1. **Riešenie celočíselné**

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Z	$b_i = d_i + r_i$
x_6	8/3	0	-1/3	0	-1/3	0	1	-1/3	0	0	8/3 = 2+2/3
x_3	16/3	1	4/3	1	4/3	0	0	1/3	0	0	16/3=5+1/3
x_5	4 + 2/3	-1 + 0	-2+2/3	0 + 0	-1+2/3	1 + 0	0 + 0	-1+2/3	1 + 0	0+0	14/3=4+**2/3**
	14/3	-1	-4/3	0	-1/3	1	0	-1/3	1	0	
s_1	-2/3	0	-2/3	0	**-2/3**	0	0	-2/3	0	0	-80
Z	1232/3	2	23/3	0	8/3	0	0	62/3	8	1	

$$\min\left|\frac{z_i}{s_i}\right| \Rightarrow \left|\frac{\frac{23}{3}}{-\frac{2}{3}}\right| = \frac{23}{2} \quad , \quad \left|\frac{\frac{8}{3}}{-\frac{2}{3}}\right| = \frac{8}{2} = \mathbf{4} \quad , \quad \left|\frac{\frac{62}{3}}{-\frac{2}{3}}\right| = \frac{62}{2} = 31$$

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Z	
x_6	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
x_3	**4**	1	0	1	0	0	0	2/3	0	0	
x_5	**5**	-1	-1	0	0	1	0	0	1	0	
x_4	**1**	0	1	0	1	0	0	1	0	0	
Z	**408**	2	5	0	0	0	0	18	8	1	

2. **Interpretácia výsledkov :**

V obore celočíselných riešení je s ohľadom na zadané obmedzenia optimálne nasadiť:

4 zostavy SZ3, 1 zostavu SZ4 a 5 zostáv SZ5, maximálny výkon Z = 408 m^3/zmena.