

# CELOČÍSELNÉ RIEŠENIE

## Postup pre určenie celočíselného riešenia – Gomoryho algoritmus

1. Určiť optimálne riešenie úlohy bez ohľadu na podmienku celočíselnosti.
2. V každej rovnici s neceločíselným riešením rozdeliť pravú stranu rovnice na celočíselnú časť a zlomkovú časť podľa vzťahu  $\mathbf{b}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{r}_i$ .
3. Vybrať rovnicu, v ktorej vyžadujeme celočíselné riešenie a v ktorej je zlomková časť pravej strany  $-\mathbf{r}_i$  maximálna. V tejto rovnici rozložiť koeficienty ľavej strany taktiež na celočíselnú a zlomkovú časť  $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{r}_{ij}$ .
4. Ku rovnici vybranej v kroku 3 vytvoriť tzv. **DOPLNKOVÚ ROVNICU** v tvare

$$-\mathbf{r}_{i1} \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_{i2} \cdot \mathbf{x}_2 - \dots - \mathbf{r}_{in} \cdot \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_1 = -\mathbf{r}_i$$

o ktorú rozšírime riešenie sústavu a „s“ je nová prídavná premenná.

5. Riadok doplnkovej rovnice považujeme za riadiaci. Riadiaci stĺpec určíme tak, že minimálna absolútna hodnota podielu ( $z_j / s_{ij}$ ) určuje riadiaci stĺpec úprav.
6. Riešenie takto rozšíreného problému by malo byť už minimálne u jednej premennej celočíselné. Ak nie sú všetky prípustné riešenia ešte celočíselné, pokračovať pridaním novej rovnice s novou prídavnou premennou  $s_2$ . Postup opakovať dovtedy, pokiaľ nie sú požadované hodnoty pravej strany celočíselné.

**Príklad 7 :** Úlohou je určiť celočíselné riešenie zadania Príkladu 5

**Príklad 5 :** Model s obmedzujúcimi podmienkami v tvare  $\geq$  a  $\leq$ .

Oprarovňa vykonáva 3 druhy opráv ( $O_1, O_2, O_3$ ), na ktoré využíva 2 druhy súčiastok ( $S_1, S_2$ ). Zisky z jednotlivých opráv sú :  $O_1 = 54$  j.,  $O_2 = 45$  j.,  $O_3 = 52$  j. Na opravu  $O_1$  sa spotrebujú 2 súčiastky typu  $S_1$  a 3 súčiastky typu  $S_2$ , na opravu  $O_2$  sa spotrebuje 1 súčiastka  $S_1$  a 2 typu  $S_2$  a na opravu  $O_3$  sa spotrebujú 3 súčiastky  $S_1$  a 2 súčiastky  $S_2$ . Na sklade je k dispozícii celkom 600 súčiastok  $S_1$  a 800 súčiastok  $S_2$ . Na zabezpečenie chodu opravovne je potrebné vykonať minimálne 50 opráv typu  $O_1$ , 100 opráv typu  $O_2$  a 80 opráv typu  $O_3$ . Naplánujte opravy tak, aby zisk za ich vykonanie bol maximálny. Interpretujte výsledky.

### 1. Tabuľka úlohy

| Opravy<br>Súčiastky | $O_1 = x_1$ | $O_2 = x_2$ | $O_3 = x_3$ | Zásoby súčiastok |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|------------------|
| S1                  | 2           | 1           | 3           | 600              |
| S2                  | 3           | 2           | 2           | 800              |
| Min. počet opráv    | 50          | 100         | 80          |                  |
| Zisk                | 54          | 45          | 52          | MAX              |

### 2. Matematický model

$$\begin{aligned}
 \text{Obmedzujúce podmienky : } & 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 \leq 600 \\
 & 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 \leq 800 \\
 & x_1 \geq 50 \\
 & x_2 \geq 100 \\
 & x_3 \geq 80
 \end{aligned}$$

Podmienky nezápornosti :  $x_j \geq 0$  pre  $j = 1, 2, 3$

Účelová funkcia :  $54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 = z \rightarrow \text{MAX}$

**Riešenie:** 1. Všeobecné (neceločíselné) riešenie = výsledok z Pr.5

| Báza  | b       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | Z | w |
|-------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|
| $x_8$ | 7,5     | 0     | 0     | 0     | 1/2   | -1/4  | 1/4   | 0     | 1     | 0 |   |
| $x_7$ | 137,5   | 0     | 0     | 0     | -1/2  | 3/4   | 5/4   | 1     | 0     | 0 |   |
| $x_1$ | 50      | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 0 |   |
| $x_2$ | 237,5   | 0     | 1     | 0     | -1/2  | 3/4   | 5/4   | 0     | 0     | 0 |   |
| $x_3$ | 87,5    | 0     | 0     | 1     | 1/2   | -1/4  | 1/4   | 0     | 0     | 0 |   |
| Z     | 17937,5 | 0     | 0     | 0     | 7/2   | 83/4  | 61/4  | 0     | 0     | 1 |   |

## 2. Celočíselné riešenie

0.

| Báza           | b         | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>5</sub> | x <sub>6</sub> | x <sub>7</sub> | x <sub>8</sub> | S <sub>1</sub> | Z   | b <sub>i</sub> = d <sub>i</sub> + r <sub>i</sub> |
|----------------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--------------------------------------------------|
| x <sub>8</sub> | 7,5       | 0              | 0              | 0              | 1/2            | -1/4           | 1/4            | 0              | 1              | 0              | 0   | 7 + 1/2                                          |
| x <sub>7</sub> | 137,5     | 0              | 0              | 0              | -1/2           | 3/4            | 5/4            | 1              | 0              | 0              | 0   | 137 + 1/2                                        |
| x <sub>1</sub> | 50        | 1              | 0              | 0              | 0              | 0              | -1             | 0              | 0              | 0              | 0   | 50 + 0                                           |
| x <sub>2</sub> | 237 + 1/2 | 0+0            | 1+0            | 0+0            | -1+1/2         | 0+3/4          | 1+1/4          | 0+0            | 0+0            |                | 0+0 | 237 + 1/2 r.r                                    |
|                | 237,5     | 0              | 1              | 0              | -1/2           | 3/4            | 5/4            | 0              | 0              | 0              | 0   |                                                  |
| x <sub>3</sub> | 87,5      | 0              | 0              | 1              | 1/2            | -1/4           | 1/4            | 0              | 0              | 0              | 0   | 87 + 1/2                                         |
| S <sub>1</sub> | -1 / 2    | 0              | 0              | 0              | -1 / 2         | -3 / 4         | -1 / 4         | 0              | 0              | 1              | 0   |                                                  |
| Z              | 17937,5   | 0              | 0              | 0              | 3,5            | 83/4           | 61/4           | 0              | 0              |                | 1   | max                                              |

$$\min \left| \frac{z_i}{s_{ji}} \right| \Rightarrow \left| \frac{\frac{7}{2}}{-1} \right| = 7, \quad \left| \frac{\frac{83}{4}}{-3} \right| = \frac{83}{3}, \quad \left| \frac{\frac{61}{4}}{-1} \right| = 61$$

1.

| Báza           | b      | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>5</sub> | x <sub>6</sub> | x <sub>7</sub> | x <sub>8</sub> | Z |     |
|----------------|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|-----|
| x <sub>8</sub> | 7      | 0              | 0              | 0              | 0              | -1             | 0              | 0              | 1              | 0 |     |
| x <sub>7</sub> | 138    | 0              | 0              | 0              | 0              | 3/2            | 3/2            | 1              | 0              | 0 |     |
| x <sub>1</sub> | 50     | 1              | 0              | 0              | 0              | 0              | -1             | 0              | 0              | 0 |     |
| x <sub>2</sub> | 238    | 0              | 1              | 0              | 0              | 3/2            | 3              | 0              | 0              | 0 |     |
| x <sub>3</sub> | 87     | 0              | 0              | 1              | 0              | -1             | 0              | 0              | 0              | 0 |     |
| x <sub>4</sub> | 1      | 0              | 0              | 0              | 1              | 3 / 2          | 1/2            | 0              | 0              | 0 |     |
| Z              | 17 934 | 0              | 0              | 0              | 0              | 15,5           | 13,5           | 0              | 0              | 1 | MAX |

3. Výsledky :

$$x_1 = 50, \quad x_2 = 238, \quad x_3 = 87, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = x_6 = 0, \quad x_7 = 138, \quad x_8 = 7 \quad Z = 17\,934.$$

**Príklad 8 :** Úlohou je určiť optimálne celočíselné riešenie úlohy o strojových zostavách (Príklad 2).

Pri odstraňovaní následkov živelnnej pohromy je potrebné vykonať zemné práce. Z prostriedkov, ktoré sú k dispozícii možno zostaviť 5 funkčných strojových zostáv. Určite koľko a ktorých zostáv je vhodné vytvoriť, aby celkový výkon za smenu bol MAX. Východiskové údaje sú v tabuľke.

| Stroj              | Zostava     |             |             |             |             | Stroje k dispozícii |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------------|
|                    | $Z_1 = x_1$ | $Z_2 = x_2$ | $Z_3 = x_3$ | $Z_4 = x_4$ | $Z_5 = x_5$ |                     |
| Autorýpadlo        | 1           | 1           | 1           | 1           | -           | 8                   |
| Automobil skl.     | 3           | 4           | 3           | 4           | -           | 16                  |
| Buldozér           | -           | -           | 1           | 1           | 1           | 10                  |
| Výkon ( $m^3/sm$ ) | 60          | 75          | 70          | 88          | 8           | MAX                 |

### 1. Matematický model

Obmedzujúce podmienky :  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$

$$3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 \leq 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 10$$

Podmienky nezápornosti :  $x_j \geq 0$  pre  $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Účelová funkcia :  $z = 60.x_1 + 75.x_2 + 70.x_3 + 88.x_4 + 8.x_5 \rightarrow \text{MAX}$

### 2. Transformácia na kanonický tvar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &= 8 \\ 3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 + x_7 &= 16 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_8 &= 10 \end{aligned}$$

$$Z - 60.x_1 - 75.x_2 - 70.x_3 - 88.x_4 - 8.x_5 = 0$$

### 3. Simplexová tabuľka

**RIEŠENIE :** Posledný krok z postupu hľadania optimálneho riešenia absolútneho

| Báza  | b      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | Z | w |
|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|
| $x_6$ | 8/3    | 0     | -1/3  | 0     | -1/3  | 0     | 1     | -1/3  | 0     | 0 |   |
| $x_3$ | 16/3   | 1     | 4/3   | 1     | 4/3   | 0     | 0     | 1/3   | 0     | 0 |   |
| $x_5$ | 14/3   | -1    | -4/3  | 0     | -1/3  | 1     | 0     | -1/3  | 1     | 0 |   |
| Z     | 1232/3 | 2     | 23/3  | 0     | 8/3   | 0     | 0     | 62/3  | 8     | 1 |   |

**Výsledky:** Nasadiť 5,33 SZ3, 4,66 SZ5, 2,33 SZ6. Výkon jednotky Z=410,66  $m^3/zmena$

## 1. Riešenie celočíselné – Gomoryho algoritmus

| Báza           | b       | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>5</sub> | x <sub>6</sub> | x <sub>7</sub> | x <sub>8</sub> | Z   | b <sub>i</sub> = d <sub>i</sub> + r <sub>i</sub> |
|----------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|--------------------------------------------------|
| x <sub>6</sub> | 8/3     | 0              | -1/3           | 0              | -1/3           | 0              | 1              | -1/3           | 0              | 0   | 8/3 = 2+2/3                                      |
| x <sub>3</sub> | 16/3    | 1              | 4/3            | 1              | 4/3            | 0              | 0              | 1/3            | 0              | 0   | 16/3=5+1/3                                       |
| x <sub>5</sub> | 4 + 2/3 | -1 + 0         | -2+2/3         | 0 + 0          | -1+2/3         | 1 + 0          | 0 + 0          | -1+2/3         | 1 + 0          | 0+0 | 14/3=4+2/3                                       |
|                | 14/3    | -1             | -4/3           | 0              | -1/3           | 1              | 0              | -1/3           | 1              | 0   |                                                  |
| s <sub>1</sub> | -2/3    | 0              | -2/3           | 0              | -2/3           | 0              | 0              | -2/3           | 0              | 0   | -80                                              |
| Z              | 1232/3  | 2              | 23/3           | 0              | 8/3            | 0              | 0              | 62/3           | 8              | 1   |                                                  |

$$\min \left| \frac{z_i}{s_i} \right| \Rightarrow \left| \frac{\frac{23}{3}}{-2} \right| = \frac{23}{2}, \quad \left| \frac{\frac{8}{3}}{-2} \right| = \frac{8}{2} = 4, \quad \left| \frac{\frac{62}{3}}{-2} \right| = \frac{62}{2} = 31$$

| Báza           | b   | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | x <sub>5</sub> | x <sub>6</sub> | x <sub>7</sub> | x <sub>8</sub> | Z |  |
|----------------|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|--|
| x <sub>6</sub> | 3   | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0 |  |
| x <sub>3</sub> | 4   | 1              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0              | 2/3            | 0              | 0 |  |
| x <sub>5</sub> | 5   | -1             | -1             | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 1              | 0 |  |
| x <sub>4</sub> | 1   | 0              | 1              | 0              | 1              | 0              | 0              | 1              | 0              | 0 |  |
| Z              | 408 | 2              | 5              | 0              | 0              | 0              | 0              | 18             | 8              | 1 |  |

## 2. Interpretácia výsledkov :

V obore celočíselných riešení je s ohľadom na zadané obmedzenia optimálne nasadiť:

**4 zostavy SZ3, 1 zostavu SZ4 a 5 zostáv SZ5, maximálny výkon Z = 408 m<sup>3</sup>/zmena.**