

DOPRAVNÁ ÚLOHA

Príklad 1: Nedegenerované východiskové riešenie

Riešte dopravnú úlohu zadanú tabuľkou. Vzdialenosti (náklady) – sadzby, kapacity a požiadavky sú v tabuľke. Vyriešte dopravnú úlohu tak, aby bol počet najazdených kilometrov MIN a zabezpečte, aby požiadavky spotrebiteľa S_1 boli plne zabezpečené.

Riešenie: Metóda potenciálov

1. Tabuľka úlohy:

Spotrebitelia Dodávateľia	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Kapacity
D_1	15	12	14	18	12	70
D_2	20	8	10	14	7	60
D_3	13	9	12	13	10	80
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 210

2. Overenie tzv. vyrovnanosti úlohy $\sum_{i=1}^m D_i = \sum_{j=1}^n S_j$, tzn. porovnanie kapacít a požiadaviek (ak sa nerovnajú, je potrebné doplniť tzv. fiktívny subjekt).

Spotrebitelia Dodávateľia	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Kapacity
D_1	15	12	14	18	12	70
D_2	20	8	10	14	7	60
D_3	13	9	12	13	10	80
FD4	M	0	0	0	0	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

3. Nájdenie tzv. východiskového (základného) riešenia. Možnosť využitia vhodných metód, napr.:

- severozápadný roh (SZR)
- indexová (MI)
- Vogelova aproximačná (VAM) a ďalšie (napr. Kotzigova (KM)).

A. Metóda severozápadného rohu

Spotrebitelia Dodávateľia	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Kapacity
D_1	50 ¹⁵	20 ¹²	- ¹⁴	- ¹⁸	- ¹²	70
D_2	- ²⁰	40 ⁸	20 ¹⁰	- ¹⁴	- ⁷	60
D_3	- ¹³	- ⁹	30 ¹²	30 ¹³	20 ¹⁰	80
FD4	- ^M	- ⁰	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

$$z = 50 \cdot 15 + 20 \cdot 12 + 40 \cdot 8 + 20 \cdot 10 + 30 \cdot 12 + 30 \cdot 13 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 0 = \underline{2460}$$

B. Metóda indexová

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	50 ¹⁵	- ¹²	10 ¹⁴	10 ¹⁸	- ¹²	70
D ₂	- ²⁰	20 ⁸	- ¹⁰	- ¹⁴	40 ⁷	60
D ₃	- ¹³	40 ⁹	40 ¹²	- ¹³	- ¹⁰	80
FD ₄	- ^M	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	- ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

$$z = 50 \cdot 15 + 10 \cdot 14 + 10 \cdot 18 + 20 \cdot 8 + 40 \cdot 7 + 40 \cdot 9 + 40 \cdot 12 + 20 \cdot 0 = \underline{2350}$$

C. Vogelova aproximačná metóda

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	50 ¹⁵	- ¹²	20 ¹⁴	- ¹⁸	- ¹²	70
D ₂	- ²⁰	- ⁸	20 ¹⁰	- ¹⁴	40 ⁷	60
D ₃	- ¹³	60 ⁹	10 ¹²	10 ¹³	- ¹⁰	80
FD ₄	- ^M	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	- ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

$$z = 50 \cdot 15 + 20 \cdot 14 + 20 \cdot 10 + 60 \cdot 9 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 13 + 40 \cdot 7 + 20 \cdot 0 = \underline{2300}$$

4. Overenie, či riešenie nie je tzv. **degenerované**, tzn. počet nenulových hodnôt sa musí rovnať $(m + n - 1)$. Ak je počet obsadených políčok s nenulovou hodnotou menší ako $(m + n - 1)$, je potrebné niektoré políčka vhodným spôsobom obsadiť tzv. **fiktívnou „0“** resp. „ ϵ “.

Počet nenulových políčok : 8

$(m + n - 1) : 8 \Rightarrow$ úloha nie je **degenerovaná**.

5. Overenie kritéria optimálnosti nájdeného riešenia pomocou tzv. riadkových a stĺpcových čísel :

- u obsadených políčok nenulovou hodnotou musí platiť $r_i + s_j = c_{ij}$
- u políčok s nulovou hodnotou
 - ak $r_i + s_j = c_{ij}$: hodnota je v poriadku
 - ak $r_i + s_j = c_{ij}$: obsadením políčka získame výhodnejšie riešenie.

6. **Kritérium optimálnosti riešenia = matica diferencií** (na základe jej hodnôt overíme, či je nájdené riešenie už optimálne). Ak riešenie optimálne nie je, nájdeme políčko, v ktorom je optimálnosť riešenia najviac narušená.

Pri MIN musia byť všetky prvky matice diferencií **nezáporné**, resp. pri MAX musí obsahovať matica diferencií iba prvky **nekladné**.

3. Za východiskové bázické riešenie zvolíme napr. najlepšie z nich, t.j. riešenie získané VAM

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D₁	50 ¹⁵	- ¹²	20 ¹⁴	- ¹⁸	- ¹²	70
D₂	- ²⁰	- ⁸	20 ¹⁰	- ¹⁴	40 ⁷	60
D₃	- ¹³	60 ⁹	10 ¹²	10 ¹³	- ¹⁰	80
FD4	- ^M	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	- ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

4. Riešenie nie je degenerované $8 = m+n-1 \Rightarrow 8 = 4+5-1 \Rightarrow 8 = 8$

5. Určenie riadkových a stĺpcových čísiel

$$\begin{array}{l} r_1 + s_1 = 15 \quad , \quad r_3 + s_2 = 9 \\ r_1 + s_3 = 14 \quad , \quad r_2 + s_3 = 10 \\ r_2 + s_5 = 7 \quad , \quad r_3 + s_3 = 12 \\ r_3 + s_4 = 13 \quad , \quad r_4 + s_4 = 0 \end{array}$$

Volím : $r_3 = 0$

$$r_1 = 2, r_2 = -2, r_3 = 0, r_4 = -13$$

$$s_1 = 13, s_2 = 9, s_3 = 12, s_4 = 13, s_5 = 9$$

6. Kritérium optimálnosti: matica diferencií **D**

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 15 & 12 & 14 & 18 & 12 \\ 20 & 8 & 10 & 14 & 7 \\ 13 & 9 & 12 & 13 & 10 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 11 & 14 & 15 & 11 \\ 11 & 7 & 10 & 11 & 7 \\ 13 & 9 & 12 & 13 & 9 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ M & 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{C} \quad \quad \quad - \quad \quad \quad \text{C}^* \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \text{D} \\ \text{matica sadzieb} \quad \quad \quad \text{matica nepriamych sadzieb} \quad \quad \quad \text{matica diferencií} \end{array}$$

Kritérium optimálnosti je **spĺnené**, tzn. východiskové riešenie získané VAM je aj optimálnym riešením zadaného dopravného problému.

7. Interpretácia výsledkov:

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D₁	50 ¹⁵	- ¹²	20 ¹⁴	- ¹⁸	- ¹²	70
D₂	- ²⁰	- ⁸	20 ¹⁰	- ¹⁴	40 ⁷	60
D₃	- ¹³	60 ⁹	10 ¹²	10 ¹³	- ¹⁰	80
FD4	- ^M	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	- ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

$z = 2300$. Z riešenia je zrejmé, že požiadavky spotrebiteľa S₄ nebudú plne zabezpečené.

Z matice diferencií vyplýva, že existuje ešte ďalšie optimálne riešenie. Ako to vieme?

Ak sa v matici diferencií **D** nachádzajú políčka s nulovou hodnotou aj na miestach, kde je premenná $x_{ij} = 0$, potom vhodným spôsobom, tzv. **presunom v cykle**, dokážeme získať aj ďalšie – alternatívne riešenie.

Alternatívne riešenie: $Z = 2300$

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	40 ¹⁵	- ¹²	30 ¹⁴	- ¹⁸	- ¹²	70
D ₂	- ²⁰	- ⁸	20 ¹⁰	- ¹⁴	40 ⁷	60
D ₃	10 ¹³	60 ⁹	- ¹²	10 ¹³	- ¹⁰	80
FD4	- ^M	- ⁰	- ⁰	20 ⁰	- ⁰	20
Požiadavky	50	60	50	30	40	230 / 230

Príklad 2: Degenerované východiskové riešenie

Riešte dopravnú úlohu zadanú tabuľkou. Vzdialenosti (náklady) – sadzby, kapacity a požiadavky sú v tabuľke. Navrhňte plán rozvozu tak, aby počet najazdených kilometrov bol čo najmenší (MIN) a aby bolo zaistené, že požiadavky spotrebiteľa S₄ budú zabezpečené v plnom rozsahu.

Riešenie: Metóda potenciálov

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	7	5	8	5	4	100
D ₂	8	9	6	7	5	80
D ₃	11	10	9	7	5	70
Požiadavky	50	100	30	90	30	250 / 300

- úloha nevyrovnaná (potreba doplniť fiktívneho dodávateľa s kapacitou 50)

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	7	5	8	5	4	100
D ₂	8	9	6	7	5	80
D ₃	11	10	9	7	5	70
FD4	0	0	0	M	0	50
Požiadavky	50	100	30	90	30	300 / 300

- získanie východiskového riešenia VAM

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	- ⁷	100 ⁵	- ⁸	- ⁵ ← ϵ_1	4 [↑]	100
D ₂	- ⁸	- ⁹	30 ⁶	20 ⁷ ↓	30 ⁵ ↑	80
D ₃	- ¹¹	- ¹⁰	- ⁹	70 ⁷ ↓	- ⁵ ↑	70
FD4	50 ⁰	- ⁰	- ⁰	- ^M → ϵ_2	0 [↑]	50
Požiadavky	50	100	30	90	30	300 / 300

$$Z = 50 \cdot 0 + 100 \cdot 5 + 30 \cdot 6 + 20 \cdot 7 + 70 \cdot 7 + 30 \cdot 5 = 1460$$

- vykonanie súčtovej kontroly (požiadavky a kapacity)
 - $m + n - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$
 - nenulových políček = 6 $\Rightarrow$ **2 x degenerované riešenie**
- potreba doplnenia 2 hodnôt „ ϵ ” (resp. „0”) na také políčka, aby **nevznikol uzatvorený okruh (cyklus)**, tzn. napr. políčka 1-5 a 4-5.
- kritérium optimálnosti – určenie riadkových a stĺpcových čísiel $\Rightarrow$ získanie matice diferencií.

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 5 \quad , \quad r_1 + s_5 = 4 \\ r_2 + s_3 = 6 \quad , \quad r_2 + s_4 = 7 \\ r_2 + s_5 = 5 \quad , \quad r_3 + s_4 = 7 \\ r_4 + s_1 = 0 \quad , \quad r_4 + s_5 = 0 \end{array}$$

Volím : $r_2 = 0$

$$r_1 = -1, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 = -5$$

$$s_1 = 5, s_2 = 6, s_3 = 6, s_4 = 7, s_5 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & \boxed{-1} & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & M & 0 \end{pmatrix}$$

C - **C*** = **D**

- presunom v cykle je potrebné modifikovať riešenie - cyklus (1-4 $\rightarrow$ 2-4 $\rightarrow$ 2-5 $\rightarrow$ 1-5 $\rightarrow$ 1-4).

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D₁	- 7	100 ⁵ $\uparrow$	- 8	81 ⁵ $\downarrow$	- 4	100
D₂	- 8	- 9 $\uparrow$	30 ⁶	20 ⁷ $\downarrow$	30 ⁵	80
D₃	- 11	- 10	- 9	70 ⁷	- 6	70
FD₄	50 ⁰	- 0 $\downarrow$	- 0	- M	82 ⁰ $\downarrow$	50
Požiadavky	50	100	30	90	30	300
						300

- riešenie nedegenerované $m + n - 1 = 8$, obsadených nenulových polí : 8
- kritérium optimálnosti :

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 5 \quad , \quad r_1 + s_4 = 5 \\ r_2 + s_3 = 6 \quad , \quad r_2 + s_4 = 7 \\ r_2 + s_5 = 5 \quad , \quad r_3 + s_4 = 7 \\ r_4 + s_1 = 0 \quad , \quad r_4 + s_5 = 0 \end{array}$$

Volíme : $s_4 = 0$

$$r_1 = 5, r_2 = 7, r_3 = 7, r_4 = 2$$

$$s_1 = -2, s_2 = 0, s_3 = -1, s_4 = 0, s_5 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & M & 0 \end{pmatrix}$$

- presunom v cykle je potrebné modifikovať riešenie - cyklus (4-2 → 1-2 → 1-4 → 2-4 → 2-5 → 4-5 → 4-2).

Spotrebitelia Dodávateľia	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	Kapacity
D ₁	- 7	100 ⁵	- 8	ε ₁ ⁵	- 4	100
D ₂	- 8	- 9	30 ⁶	20 ⁷	30 ⁵	80
D ₃	- 11	- 10	- 9	70 ⁷	- 6	70
FD4	50 ⁰	ε ₂ ⁰	- 0	- M	- 0	50
Požiadavky	50	100	30	90	30	300
						300

- riešenie nedegenerované $m + n - 1 = 8$, obsadených nenulových polí : 8
- kritérium optimálnosti :

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 5 \quad , \quad r_1 + s_4 = 5 \\ r_2 + s_3 = 6 \quad , \quad r_2 + s_4 = 7 \\ r_2 + s_5 = 5 \quad , \quad r_3 + s_4 = 7 \\ r_4 + s_1 = 0 \quad , \quad r_4 + s_2 = 0 \end{array}$$

Volím : $r_2 = 0$

$$r_1 = -2, r_2 = 0, r_3 = 0, r_4 = -7$$

$$s_1 = 7, s_2 = 7, s_3 = 6, s_4 = 7, s_5 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & M & 2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{\text{opt}} = 50.0 + 100.5 + 0.0 + 30.5 + 0.5 + 20.7 + 70.7 + 30.5 = \mathbf{1460}$$

Záver: Optimálne riešenie bolo v podstate nájdené ihneď a to prostredníctvom VAM, avšak iba doplnené „ε“ pre odstránenie degenerácie riešenia neboli ihneď umiestnené správne, pretože ich umiestňujeme iba odhadom.

Maximalizácia účelovej funkcie

Všetky doteraz prezentované metódy - určovania východiskového bázičného riešenia, ako aj celý postup metódy potenciálov pri testovaní optimálnosti riešenia, **boli formulované iba pre minimalizáciu účelovej funkcie**. Rozhodovací problém zadaný formálne rovnakým matematickým modelom ako dopravná úloha môžeme teoreticky aj *maximalizovať*.

Najjednoduchší spôsob transformácie MIN na MAX je vynásobenie matice sadziieb hodnotou (-1) a problém riešiť ako minimalizačný. Po vyriešení sa musíme vrátiť k pôvodnej matici sadziieb.

Druhou možnosťou je, rovnako ako u úlohy LP, zmeniť kritérium optimality. Ak u minimalizácie hodnoty ÚF dopravnej úlohy bolo kritériom optima dosiahnutie nezáporných hodnôt všetkých prvkov matice diferencií **D**, kritériom maxima budú zrejme všetky prvky matice diferencií **D** nekladné.

Analogicky môžeme obrátiť aj postup vytvárania východiskových bázičných riešení indexovou metódou (začíname obsadzovať maximálnou sadzbou), príp. Vogelovou metódou (najskôr obsadzovať premenné s maximálnou sadzbou v riadku alebo stĺpci, kde je rozdiel medzi maximálnou sadzbou a sadzbou najbližšou nižšou opäť najväčší).

Príklad 3: Maximalizácia účelovej funkcie

Vyriešte dopravnú úlohu - sadzby, kapacity a požiadavky sú v tabuľke a navrhните plán rozvozu tak, aby bola zabezpečená MAX hodnota ÚF, sadzby reprezentujú napr. zisk z jednotlivých prepráv.

Riešenie: Metóda potenciálov

Východiskové bázičné riešenie určíme napr. prostredníctvom Vogelovej metódy (tab.6.12).

		$s_1=15$	$s_2=23$	$s_3=11$	
	O	O ₁	O ₂	O ₃	a
$r_1=0$	D ₁	15 4 200	22 -	11 800	5 000
$r_2=15$	D ₂	20 -	30 -	26 2700	2 700
$r_3=3$	D ₃	18 1 300	26 1 000	13 -	2 300
	b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\ 000$

$x_{11} = 4\ 200$
 $x_{13} = 800$
 $x_{23} = 2\ 700$
 $x_{31} = 1\ 300$
 $x_{32} = 1\ 000$

$z^{(0)} = 191\ 400$
(MAX)

Matica diferencií **D** má tvar

$$D = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 23 & 11 \\ 30 & 38 & 26 \\ 18 & 26 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čo znamená, že riešenie získané hneď v nulej iterácii výpočtového postupu je už optimálne.

Príklad 4: Maximalizácia účelovej funkcie

Metódou potenciálov vyriešte zadanú dopravnú úlohu. Sadzby (zisk z prepravy), kapacity dodávateľov a požiadavky odberateľov sú v tabuľke. Navrhните plán rozvozu tak, aby bol zabezpečený najväčší možný zisk spoločnosti (MAX).

Riešenie: metóda potenciálov

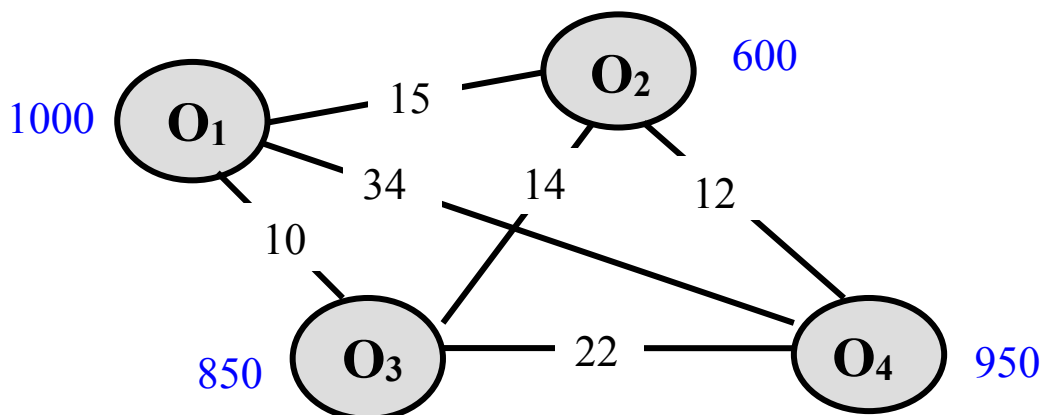
Dodávatelia Odberatelia	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	2	4	12	60
D ₂	5	8	10	80
D ₃	9	10	11	40
b	20	100	80	MAX

OPTIMÁLNE ROZMIESTŇOVANIE ZDROJOV

Príklad 4: Optimálne rozmiestnenie zdrojov

Pre štyri obce v regióne je potrebné zabezpečiť stálu lekársku službu. V dvoch z týchto obcí má byť vybudované zdravotné stredisko. Určite v ktorých dvoch obciach má byť ZS zriadené, aby suma najazdených kilometrov k lekárovi bola minimálna.

Riešenie:



Počet možností, ako umiestniť do 4 obcí 2 zdravotné strediská je :

$$\binom{4}{2} = 6$$

Je preto potrebné vytvoriť 6 čiastkových dopravných úloh. V každej z nich musíme určiť optimálne riešenie a vybrať taký variant, ktorého hodnota ÚF (účelovej funkcie) je MINIMÁLNA.

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
1 (O ₁ , O ₂)	O ₁	1000 ⁰	- ¹⁵	850 ¹⁰	- ³⁴	1850	Z = 19 900
	O ₂	- ¹⁵	600 ⁰	ε ¹⁴	950 ¹²	1550	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400	

Je potrebné overiť, či je uvedené riešenie optimálne :

- úloha vyrovnaná,
- riešenie je 1 krát degenerované $m + n - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$, obsadených polí: 4,
- doplniť ε a overiť kritérium optimality (riadkové a stĺpcové čísla) → matica diferencií **D**.

$$\begin{aligned} r_1 + s_1 &= 0, & r_2 + s_3 &= 14 \\ r_1 + s_3 &= 10, & r_2 + s_4 &= 12 \\ r_2 + s_2 &= 0 \end{aligned}$$

Volím : $r_2 = 0$

$$r_1 = -4, r_2 = 0$$

$$s_1 = 4, s_2 = 0, s_3 = 14, s_4 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 34 \\ 15 & 0 & 14 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & 10 & 8 \\ 4 & 0 & 14 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 0 & 26 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{optimum}$$

C - **C*** = **D**

$$Z = 1000 \cdot 0 + 600 \cdot 0 + 850 \cdot 10 + \varepsilon \cdot 14 + 950 \cdot 12 = 19\,900$$

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
2 (O ₁ , O ₃)	O ₁	1000 ⁰	- ¹⁵	ε ¹⁰	- ³⁴	1000	
	O ₃	- ¹⁰	600 ¹⁴	850 ⁰	950 ²²	2400	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 / 3400	

- úloha vyrovnaná, riešenie 1 x degenerované

$$\begin{cases} r_1 + s_1 = 0 & , & r_2 + s_3 = 0 \\ r_1 + s_3 = 10 & , & r_2 + s_4 = 22 \\ r_2 + s_2 = 14 \end{cases}$$

$$\text{Volím : } r_2 = 0$$

$$r_1 = 10, r_2 = 0$$

$$s_1 = -10, s_2 = 14, s_3 = 0, s_4 = 22$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 34 \\ 10 & 14 & 0 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 24 & 10 & 32 \\ -10 & 14 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 2 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
2 (O ₁ , O ₃)	O ₁	1000 ⁰	ε ¹⁵	- ¹⁰	- ³⁴	1000	Z = 29 300
	O ₃	- ¹⁰	600 ¹⁴	850 ⁰	950 ²²	2400	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 / 3400	

$$\begin{cases} r_1 + s_1 = 0 & , & r_2 + s_3 = 0 \\ r_1 + s_2 = 15 & , & r_2 + s_4 = 22 \\ r_2 + s_2 = 14 \end{cases}$$

$$\text{Volím : } r_2 = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 0$$

$$s_1 = -1, s_2 = 14, s_3 = 0, s_4 = 22$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 & 34 \\ 10 & 14 & 0 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 15 & 1 & 23 \\ -1 & 14 & 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 9 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ optimum}$$

$$Z = 1000 \cdot 0 + \varepsilon \cdot 15 + 600 \cdot 14 + 850 \cdot 0 + 950 \cdot 22 = 29\,300$$

Vo všeobecnosti platí: pri degenerovanom riešení presunmi v cykle obvykle iba hľadáme vhodné miesto pre ε, ďalšie varianty rozmiestnenia sú preto uvedené už iba vo forme tabuľky.

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
3 (O ₁ , O ₄)	O ₁	1000 ⁰	- ¹⁵	850 ¹⁰	- ³⁴	1850	Z = 15 700
	O ₄	- ³⁴	600 ¹²	- ²²	950 ⁰	1550	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 / 3400	

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
4 (O ₂ , O ₃)	O ₂	- ¹⁵	600 ⁰	- ¹⁴	950 ¹²	1550	Z = 21 400
	O ₃	1000 ¹⁰	- ¹⁴	850 ⁰	- ²²	1850	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 / 3400	

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
5 (O ₂ , O ₄)	O ₂	1000 ¹⁵	600 ⁰	850 ¹⁴	- ¹²	2450	Z = 26 900
	O ₄	- ³⁴	- ¹²	- ²²	950 ⁰	950	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 3400	

Variant		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	Kapacity	Riešenie
6 (O ₃ , O ₄)	O ₃	1000 ¹⁰	- ¹⁴	850 ⁰	- ²²	1850	Z = 17 200
	O ₄	- ³⁴	600 ¹²	- ²²	950 ⁰	1550	
Požiadavky		1000	600	850	950	3400 3400	

Interpretácia výsledkov:

Optimálne rozhodnutie z hľadiska zvolenej kritériálnej funkcie (t.j. počet kilometrov resp. náklady na dopravu k lekárovi majú byť minimálne) je vybudovanie ZS v obciach O₁ a O₄.

DVOJSTUPŇOVÁ DOPRAVNÁ ÚLOHA

Príklad 5: Dvojstupňový dopravný problém

Majme problém rozvozu materiálu v dvoch stupňoch. Od výrobcov (V) sa výrobok distribuuje do skladov (S), z ktorých sa vybavujú požiadavky koncových odberateľov (O). Východiskové údaje sú uvedené v tabuľkách. Určte optimálny plán rozvozu tak, aby náklady na prepravu (charakterizované maticami sadzieb) boli MINIMÁLNE.

Riešenie:

1. stupeň:

	S_1	S_2	S_3	a
V_1	6	3	7	100
V_2	4	2	3	150
V_3	3	7	10	120
h	180	130	75	385

a – vektor kapacít výrobcov, h – vektor požiadaviek skladov

2. stupeň:

	O_1	O_2	O_3	O_4	h
S_1	2	9	9	6	180
S_2	8	11	1	2	130
S_3	2	3	8	10	75
b	90	100	85	75	350

h – vektor kapacít skladov, b – vektor požiadaviek odberateľov

1. Vyriešenie oddelených dopravných problémov a sčítanie účelových funkcií

1. stupeň:

	S_1	S_2	S_3	a
V_1	- 6	100 3	- 7	100
V_2	45 4	30 2	75 3	150
V_3	120 3	- 7	- 10	120
FV_4	15 0	- 0	- 0	15
h	180	130	75	385

- úloha nevyrovnaná (doplnený FV_4 s kapacitou $a_{FV} = 15$)
- riešenie VAM – nedegenerované ($m + n - 1 = 6$, obsadených polí = 6).
- kritérium optimálnosti :

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 3 \quad , \quad r_2 + s_3 = 3 \\ r_2 + s_1 = 4 \quad , \quad r_3 + s_1 = 3 \\ r_2 + s_2 = 2 \quad , \quad r_4 + s_1 = 0 \end{array}$$

Volíme : $r_2 = 0$

$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = -1, r_4 = -4$

$s_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ optimum } Z_1 = 1125$$

2.stupeň:

	O1	O2	O3	O4	FO5	h
S1	90 ²	25 ⁹	- ⁹	30 ⁶	35 ⁰	180
S2	- ⁸	- ¹¹	85 ¹	45 ²	- ⁰	130
S3	- ²	75 ³	- ⁸	- ¹⁰	- ⁰	75
b	90	100	85	75	35	385

- úloha nevyrovnaná (doplnený FO5 s požiadavkou $b_{fo} = 35$)
- riešenie VAM – nedegenerované ($m + n - 1 = 7$, obsadených polí = 7)
- kritérium optimálnosti :

$$\begin{array}{l} r_1 + s_1 = 2, \quad r_2 + s_3 = 1 \\ r_1 + s_2 = 9, \quad r_2 + s_4 = 2 \\ r_1 + s_4 = 6, \quad r_3 + s_2 = 3 \\ r_1 + s_5 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Volíme : } r_1 = 0 \\ r_1 = 0, r_2 = -4, r_3 = -6 \\ s_1 = 2, s_2 = 9, s_3 = 5, s_4 = 6, s_5 = 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 9 & 6 & 0 \\ 8 & 11 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ optimum } Z_2 = 985$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1125 + 985 = 2110$$

2. Riešenie úlohy s uvažovaním vplyvu ich prepojenia (1.spôsob zápisu)

Začíname riešením 2.fázy prepravného procesu tým, že ju otočíme o 90° , aby bolo možné spojiť obe čiastkové úlohy do úlohy jednej – tzv. dvojstupňovej, dvojrozmernej.

2.stupeň : S – O

- úloha nevyrovnaná (doplníme FO s požiadavkou $b_{fo} = 35$), úlohu otočíme o 90° a určíme východiskové riešenie

	S1	S2	S3	b
O1	90 ²	- ⁸	- ²	90
O2	25 ⁹	- ¹¹	75 ³	100
O3	- ⁹	85 ¹	- ⁸	85
O4	30 ⁶	45 ²	- ¹⁰	75
FO5	35 ⁰	- ⁰	- ⁰	35
h	180	130	75	385

- riešenie nedegenerované ($m + n - 1 = 7$, obsadených polí = 7)
- kritérium optimálnosti – overené v bode 1. $\Rightarrow Z_2 = 985$

1. stupeň : $V - S$

POZOR ! Je potrebné riešiť iba pre kapacity skladov rovné súčtu kapacít výrobcov.

	S ₁	S ₂	S ₃	FS ₄	a
V ₁	- ⁶	$\xleftarrow{100}^3$	- ⁷	- ⁰	100
V ₂	25 ⁴	$\xleftarrow{30}^2$	$\xrightarrow{75}^3$	$\uparrow 20^0$	150
V ₃	120 ³	- ⁷	- ¹⁰	- ⁰	120
h	145	130	75	20	370

- úloha nevyrovnaná (bolo potrebné doplniť FS s kapacitou $h_{fs} = 20$)
- kapacita skladu S1 = 145, nakoľko nie je nutné uvažovať zaistenie FO5 (ten neexistuje)!! Preto iba **180 – 35 = 145**.
- riešenie je nedegenerované ($m + n - 1 = 6$, obsadených polí = 6), **Z = 1045**
- kritérium optimálnosti :

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 3 \quad , \quad r_2 + s_3 = 3 \\ r_2 + s_1 = 4 \quad , \quad r_2 + s_4 = 0 \\ r_2 + s_2 = 2 \quad , \quad r_3 + s_1 = 3 \end{array}$$

Volíme : $r_2 = 0$

$$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = -1$$

$$s_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

	S ₁	S ₂	S ₃	FS ₄	a
V ₁	- ⁶	80 ³	- ⁷	20 ⁰	100
V ₂	25 ⁴	50 ²	75 ³	- ⁰	150
V ₃	120 ³	- ⁷	- ¹⁰	- ⁰	120
h	145	130	75	20	370

- riešenie nedegenerované ($m+n-1 = 6$), obsadených polí 6,
- kritérium optimálnosti:

$$\begin{array}{l} r_1 + s_2 = 3 \quad , \quad r_2 + s_2 = 2 \\ r_1 + s_4 = 0 \quad , \quad r_2 + s_3 = 3 \\ r_2 + s_1 = 4 \quad , \quad r_3 + s_1 = 3 \end{array}$$

Volíme : $r_2 = 0$

$$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = -1$$

$$s_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{optimum } Z_1 = 1025$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1025 + 985 = 2010$$

3. Riešenie úlohy ako úlohy spojenej (2.spôsob zápisu)

Po nájdení východiskových riešení oboch stupňov spojiť do jednej úlohy.

	S1	S2	S3	S4	
	S1	S2	S3	FS4	a
V1	- 6	100 3	- 7	- 0	100
V2	25 4	30 2	75 3	20 0	150
V3	120 3	- 7	- 10	- 0	120
FO	35 0	- 0	- 0	X	35 = b
O1	90 2	- 8	- 2	X	90
O2	25 9	- 11	75 3	X	100
O3	- 9	85 1	- 8	X	85
O4	30 6	45 2	- 10	X	75
h	180	130	75	X	
	S1*	S2*	S3*		

r1
r2
r3
r4, r1*
r2*
r3*
r4*
r5*

- riešenie nie je degenerované $(m_1+n_1-1)+(m_2+n_2-1) = (4+4-1)+(5+3-1) = 14$
- kritérium optimálnosti : **riadkové a stĺpcové čísla pre 1. stupeň**

$$\begin{aligned} r_1 + s_2 &= 3 & r_2 + s_4 &= 0 \\ r_2 + s_1 &= 4 & r_3 + s_1 &= 3 \\ r_2 + s_2 &= 2 & r_4 + s_1 &= 0 \\ r_2 + s_3 &= 3 \end{aligned}$$

Volím : *riadková premenná, kde leží fiktívna nenulová hodnota tzn.*

$$r_2 = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = -1, r_4 = -4$$

$$s_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 0$$

riadkové a stĺpcové čísla pre 2. stupeň

Volím : *v stĺpci, v ktorom je fiktívna nenulová hodnota volíme*

$$s_j^* = -s_j \text{ tzn. } s_1 = 4 \Rightarrow s_1^* = -4.$$

$$r_1^* = 4, r_2^* = 6, r_3^* = 13, r_4^* = 9, r_5^* = 10$$

$$s_1^* = -4, s_2^* = -8, s_3^* = -10$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 9 & 11 & 3 \\ 9 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Ďalšie podmienky optimálnosti riešenia :

$$r_i \leq 0 \quad (\text{neplatí})$$

$$s_j + s_j^* \leq 0 \quad (\text{platí})$$

Riešenie po presune v cykle je nasledovné :

	S_1	S_2	S_3	S_4		
	S_1	S_2	S_3	FS_4	a	
V_1	- 6	80 3	- 7	20 0	100	r_1
V_2	25 4	50 2	75 3	- 0	150	r_2
V_3	120 3	- 7	- 10	- 0	120	r_3
FO	35 0	- 0	- 0	X	35 = b	r_4, r_1^*
O_1	90 2	- 8	- 2	X	90	r_2^*
O_2	25 9	- 11	75 3	X	100	r_3^*
O_3	- 9	85 1	- 8	X	85	r_4^*
O_4	30 6	45 2	- 10	X	75	r_5^*
h	180	130	75	X		
	S_1^*	S_2^*	S_3^*			

- riešenie nie je degenerované : $14 = 14$
- kritérium optimálnosti: **riadkové a stĺpcové čísla pre 1. stupeň**

$$\begin{aligned} r_1 + s_2 &= 3 & , & & r_2 + s_3 &= 3 \\ r_1 + s_4 &= 0 & , & & r_3 + s_1 &= 3 \\ r_2 + s_1 &= 4 & , & & r_4 + s_1 &= 0 \\ r_2 + s_2 &= 2 \end{aligned}$$

Volím : *v riadku, kde leží fiktívna nenulová hodnota volím $r = 0$, tzn.*

$$r_1 = 0$$

$$r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = -2, r_4 = -5$$

$$s_1 = 5, s_2 = 3, s_3 = 4, s_4 = 0$$

$$\begin{aligned} r_1^* + s_1^* &= 0 & , & & r_4^* + s_2^* &= 1 \\ r_2^* + s_1^* &= 2 & , & & r_5^* + s_1^* &= 6 \\ r_3^* + s_1^* &= 9 & , & & r_5^* + s_2^* &= 2 \\ r_3^* + s_3^* &= 3 \end{aligned}$$

riadkové a stĺpcové čísla pre 2. stupeň

Volím : *v stĺpci, v ktorom je fiktívna nenulová hodnota volíme*

$$s_j^* = -s_j \quad \text{tzn.} \quad s_1 = 5 \Rightarrow s_1^* = -5.$$

$$r_1^* = 2, r_2^* = 7, r_3^* = 14, r_4^* = 10, r_5^* = 11$$

$$s_1^* = -5, s_2^* = -9, s_3^* = -11$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 9 & 11 & 3 \\ 9 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

optimum Z = 2010

Doplnkové kritéria optimálnosti **sú splnené**.
 $r_i \leq 0$ (platí)
 $s_j + s_j^* \leq 0$ (platí)

$$z = 80.3 + 25.4 + 75.3 + 120.3 + 90.2 + 25.9 + 75.3 + 85.1 + 30.6 + 45.2 \Rightarrow \mathbf{z = 2010 \text{ optimum}}$$

PRIRAĐOVACÍ PROBLÉM

Príklad 6: Úloha minimalizácie priradenia

Na siedmych miestach uloženia je sedem súprav (zostáv) strojov a na siedmych stavbách je potrebné nasadiť vždy jednu z týchto zostáv. Vzdialenosti stavieb (miest nasadenia) od miest uloženia sú uvedené v tabuľke sadzieb. Úlohou je priradiť zostavy strojov na jednotlivé stavby tak, aby náklady na ich presun boli minimálne.

Riešenie:

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kapacity
MU ₁	5	7	4	9	8	6	5	1
MU ₂	4	3	5	7	2	9	6	1
MU ₃	10	5	8	6	5	4	7	1
MU ₄	8	12	7	9	7	5	6	1
MU ₅	6	9	5	7	4	3	2	1
MU ₆	13	9	4	8	7	6	5	1
MU ₇	6	10	12	9	12	4	7	1
Požiadavky	1	1	1	1	1	1	1	MIN

- Zostavenie tabuľky priraďovacej úlohy.
- Získanie východiskového riešenia tzv. **redukciou sadzieb**:
 - V každom riadku nájdeme min. sadzbu a tú od sadzieb v danom riadku odpočítame, tzn. v každom riadku bude min. jedna sadzba nulová.
 - Skontrolujeme, či sú nulové redukované sadzby aj vo všetkých stĺpcoch. Ak nie, vykonáme redukciu sadzieb v tých stĺpcoch, neobsahujúcich nulovú redukovanú sadzbu. Zabezpečíme, tým, že v každom stĺpci aj riadku sa bude nachádzať min. jedna nulová redukovaná sadzba.
 - Priradíme „①“ do premenných s nulovými redukovanými sadzbami, pričom prednostne priraďujeme hodnoty „①“ tým premenným, v ktorých riadkoch alebo stĺpcoch je minimálne množstvo nulových redukovaných sadzieb. Riadky a stĺpce už obsadené „①“ → ich sadzby pri posudzovaní počtu nulových redukovaných sadzieb neuvažujeme.

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.	
MU ₁	5 + 0 ①	7 - 2	4 0	9 - 3	8 4	6 2	5 1	1	(-4)
MU ₂	4 - 1	3 + 0	5 3	7 - 3	2 0 ①	9 7	6 4	1	(-2)
MU ₃	10 - 5	5 + 0 ①	8 4	6 - 0	5 1	4 0	7 3	1	(-4)
MU ₄	8 - 2	12 - 6	7 2	9 4 2	7 2	5 0 ①	6 1	1	(-5)
MU ₅	6 4 3	9 - 6	5 3	7 - 3	4 2	3 1	2 0 ①	1	(-2)
MU ₆	13 - 8	9 - 4	4 0 ①	8 4 2	7 3	6 2	5 1	1	(-4)
MU ₇	6 - 1	10 - 5	12 - 8	9 - 3	12 - 8	4 0	7 3	1	(-4)
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MIN	

(-1) (-1) (-2)

3. Posúdenie optimálnosti riešenia

Spočíva v zistení a porovnaní počtu všetkých priradení „①“ s rozmerom úlohy. Ak sa podarí všetky objekty na miesto určenia priradiť, riešenie je optimálne. Znamená to, že počet priradených „①“ je rovný rozmeru úlohy. Ak kritérium optimálnosti ešte splnené nie je - počet priradených „①“ sa nerovná rozmeru úlohy, je nutné riešenie zmeniť.

4. Transformácia riešenia v požadovanom smere

4.1 Všetky políčka s nulovými redukovanými sadzbami sa snažíme prekryť minimálnym počtom, tzv. **krycích čiar**.

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	5 + 0 ①	7 3 2	4 0	9 5 3	8 4	6 2	5 1	1
MU ₂	4 2 1	3 + 0	5 3	7 5 3	2 0 ①	9 7	6 4	1
MU ₃	10 6 5	5 + 0 ①	8 4	6 2 0	5 1	4 0	7 3	1
MU ₄	8 3 2	12 7 6	7 2	9 4 2	7 2	5 0 ①	6 1	1
MU ₅	6 4 3	9 7 6	5 3	7 5 3	4 2	3 1	2 0 ①	1
MU ₆	13 9 8	9 5 4	4 0 ①	8 4 2	7 3	6 2	5 1	1
MU ₇	6 2 1	10 6 5	12 8	9 5 3	12 8	4 0	7 3	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MIN

Podľa Königovej vety overíme, či sme použili minimálny počet čiar tzn. musí platiť: **Minimálny počet krycích čiar = počtu priradených „①“**.

4.2 V neprekrytých políčkach nájdeme minimálnu sadzbu a tú :

- **pripočítame k premenným dvakrát prekrytým (križujú sa),**
- **odpočítame od sadzieb neprekrytých,**
- **sadzby premenných jedenkrát prekrytých zostanú nezmenené.**

4.3 Takýmto spôsobom získame novú maticu redukovaných sadzieb a opäť sa snažíme o priradenie podľa bodu 2.3.

5. Určenie hodnoty účelovej funkcie z pôvodnej matice sadzieb.

Minimálne neprekryté políčko [4,7] resp. [7,1] resp. [6,7] = 1.

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	0 ①	2	1	3	4	3	1	1
MU ₂	1	0	4	3	0 ①	8	4	1
MU ₃	5	0	5	0 ①	1	1	3	1
MU ₄	1	5	2	1	1	0	0	1
MU ₅	3	6	4	3	2	2	0 ①	1
MU ₆	7	3	0 ①	1	2	2	0	1
MU ₇	0	4	8	2	7	0 ①	2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MIN

Minimálne neprekryté políčko [1,3] resp.[4,4] resp.[4,5] = 1.

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	0 ①	1	0	2	3	3	1	1
MU ₂	2	0 ①	4	3	0	9	5	1
MU ₃	6	0	5	0 ①	1	2	4	1
MU ₄	1	4	1	0	0 ①	0	0	1
MU ₅	3	5	3	2	1	2	0 ①	1
MU ₆	8	3	0 ①	1	2	3	1	1
MU ₇	0	3	7	1	6	0 ①	2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MIN

$$Z_{\text{opt}} = 5 + 3 + 4 + 6 + 7 + 4 + 2 = 31$$

Existuje ešte ďalšie – alternatívne - optimálne riešenie?

ÁNO, v riadku 2 sme boli nútení vybrať z dvoch ciest: umiestniť „①“ na [2,2] alebo [2,5]. Ak by sme zvolili políčko [2,5], potom bude riešenie v tvare:

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	0 ①	1	0	2	3	3	1	1
MU ₂	2	0	4	3	0 ①	9	5	1
MU ₃	6	0 ①	5	0	1	2	4	1
MU ₄	1	4	1	0 ①	0	0	0	1
MU ₅	3	5	3	2	1	2	0 ①	1
MU ₆	8	3	0 ①	1	2	3	1	1
MU ₇	0	3	7	1	6	0 ①	2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MIN

$$Z_{\text{opt}} = 5 + 5 + 4 + 9 + 2 + 4 + 2 = 31$$

Interpretácia výsledkov :

Na základe vstupných parametrov problému optimálneho priradenia, definovaného maticou sadzieb, je pre dosiahnutie MIN hodnoty ÚF optimálne realizovať nasledovné priradenie :

MU₁=MN₁, MU₂=MN₂, MU₃=MN₄, MU₄=MN₅, MU₅=MN₇, MU₆=MN₃, MU₇=MN₆

resp. ďalšie – alternatívne - riešenie v tvare

MU₁=MN₁, MU₂=MN₅, MU₃=MN₂, MU₄=MN₄, MU₅=MN₇, MU₆=MN₃, MU₇=MN₆.

Výsledná hodnota účelovej funkcie (získaná z pôvodnej matice sadzieb) je pre obidve riešenia

$$Z = 31 \rightarrow \text{MIN.}$$

Príklad 7: Úloha maximalizácie priradenia

Na siedmych miestach uloženia je sedem súprav (zostáv) strojov a na siedmych stavbách je potrebné nasadiť vždy jednu z týchto zostáv. V tabuľke sú uvedené sadzby, predstavujúce „mieru efektívnosti nasadenia“ konkrétnej zostavy na konkrétne miesto. Úlohou je priradiť zostavy strojov na jednotlivé stavby tak, aby bola celková miera efektívnosti priradených dvojíc maximálna.

Riešenie:

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	5	7	4	9	8	6	5	1
MU ₂	4	3	5	7	2	9	6	1
MU ₃	10	5	8	6	5	4	7	1
MU ₄	8	12	7	9	7	5	6	1
MU ₅	6	9	5	7	4	3	2	1
MU ₆	13	9	4	8	7	6	5	1
MU ₇	6	10	12	9	12	4	7	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MAX

1. Transformácia zadania (matice sadzieb) na riešenie úlohy maximalizácie

1.1. V matici sadzieb nájdeme maximálnu sadzbu max (c_{ij}).

1.2. Vytvoríme novú maticu sadzieb, ktorú získame tak, že sadzby matice pôvodnej odpočítame od maximálnej sadzby $\bar{c}_{ij} = (\max(c_{ij}) - c_{ij})$. Platí : $\max(c_{ij}) = c_{51} = 13$

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	8	6	9	4	5	7	8	1
MU ₂	9	10	8	6	11	4	7	1
MU ₃	3	8	5	7	8	9	6	1
MU ₄	5	1	6	4	6	8	7	1
MU ₅	7	4	8	6	9	10	11	1
MU ₆	0	4	9	5	6	7	8	1
MU ₇	7	3	1	4	1	9	6	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MAX

Riešenie transformovanej matice sadzieb ako úlohy minimalizácie

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	8 4	6 2	9 5	4 0 ①	5 1	7 3	8 4 1	1
MU ₂	9 5	10 6	8 4	6 2	11 7	4 0 ①	7 3 0	1
MU ₃	3 0	8 5	5 2	7 4	8 5	9 6	6 3 0 ①	1
MU ₄	5 4	1 0 ①	6 5	4 3	6 5	8 7	7 6 3	1
MU ₅	7 3	4 0	8 4	6 2	9 5	10 6	11 7 4	1
MU ₆	0 ①	4	9	5	6	7	8 5	1
MU ₇	7 6	3 2	1 0 ①	4 3	1 0	9 8	6 5 2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MAX

(-3)

1.3. Riešime optimálne priradenie pre maticu C - pre minimalizáciu $\dot{U}F$.

1.4. Po získaní optimálneho riešenia určíme hodnotu $\dot{U}F$ z matice sadzieb pôvodnej, čím získame maximálne možné priradenie v úlohe.

Minimálne neprekryté políčko $[5,4] = 2$

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	4	4	5	0 ①	1	3	1	1
MU ₂	5	8	4	2	7	0 ①	0	1
MU ₃	0	7	2	4	5	6	0 ①	1
MU ₄	2	0 ①	3	1	3	5	1	1
MU ₅	1	0	2	0	3	4	2	1
MU ₆	0 ①	6	9	5	6	7	5	1
MU ₇	6	4	0 ①	3	0	8	2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MAX

Minimálna neprekrytá sadzba $[1,5]$ resp. $[1,7]$ resp. $[4,7] = 1$.

	MN ₁	MN ₂	MN ₃	MN ₄	MN ₅	MN ₆	MN ₇	Kap.
MU ₁	4	4	4	0	0 ①	2	0	1
MU ₂	6	9	4	3	7	0 ①	0	1
MU ₃	2	8	2	5	5	6	0 ①	1
MU ₄	2	0 ①	2	1	2	4	0	1
MU ₅	1	0	1	0 ①	2	3	1	1
MU ₆	0 ①	6	8	5	5	6	4	1
MU ₇	7	5	0 ①	4	0	8	2	1
Pož.	1	1	1	1	1	1	1	MAX

$$Z_{\text{opt}} = 8 + 9 + 7 + 12 + 7 + 13 + 12 = 68 \rightarrow \text{MAX}$$

Interpretácia výsledkov :

Na základe vstupných podmienok (určených maticou sadzieb) a požiadavky na maximalizáciu KF je optimálne vykonať nasledovné priradenie :

MU₁=MN₅, MU₂=MN₆, MU₃=MN₇, MU₄=MN₂, MU₅=MN₄, MU₆=MN₁, MU₇=MN₃ .

Výsledná hodnota účelovej funkcie, získaná z pôvodnej matice sadzieb úlohy je

$$Z = 68 \rightarrow \text{MAX}.$$