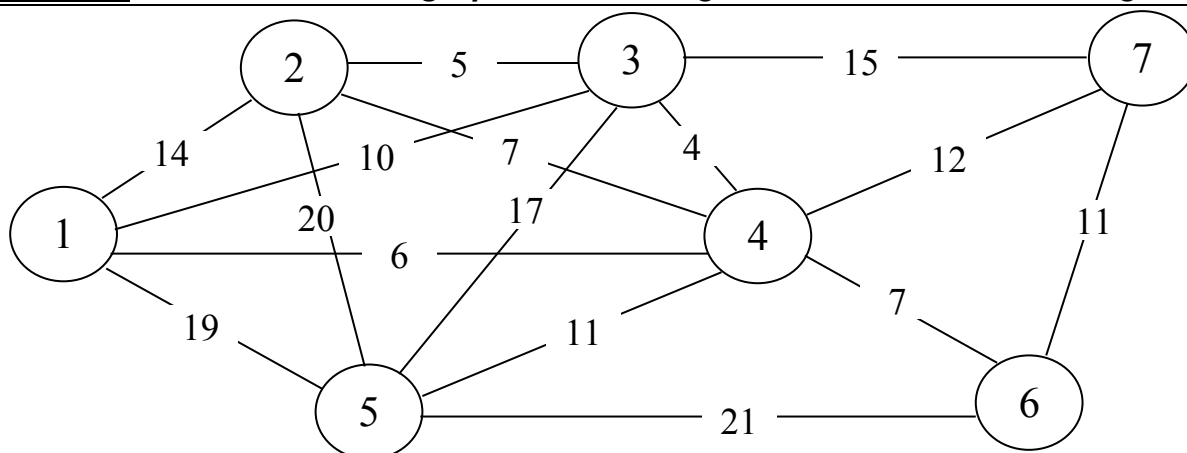


ZÁKLADY TEÓRIE GRAFOV

PRÍKLAD 1: Minimálna kostra grafu – v zadanom grafe určite minimálnu kostru grafu



Riešenie:

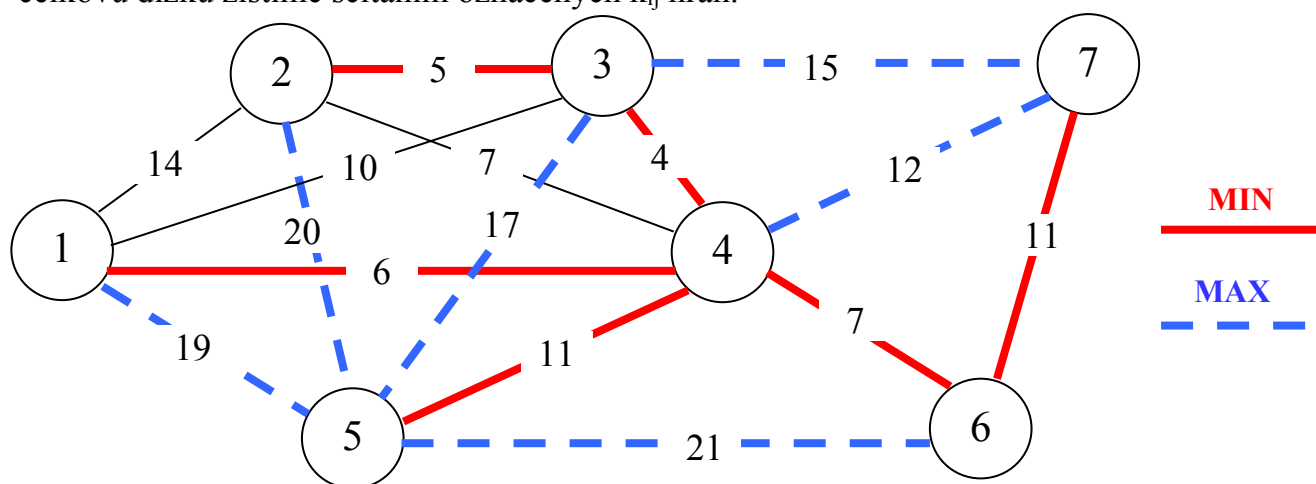
Kostra grafu je taký podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu a neobsahuje uzavretý cyklus. Je to vlastne strom, ktorý obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu.

Minimálna kostra – kostra grafu, ktorej súčet ohodnotení hrán je minimálny.

Aplikácie: optimálne spojenie miest (spojenie ciest telefónnej siete tak, aby sme spotrebovali minimum kábla, rozvody elektrickej energie, plynu, teplárstvo a pod.).

Algoritmus :

1. zoradíme hrany vzostupne podľa k_{ij} (veľkosti hodnôt hrán),
2. vyberieme dve hrany s min k_{ij} a vyznačíme ich v grafe,
3. postupne vyberáme ďalšie hrany k_{ij} tak, aby netvorili s vybranými hranami cyklus,
4. takto postupujeme dovtedy, pokiaľ nenájdeme $(n - 1)$ hrán, kde n predstavuje počet vrcholov,
5. celkovú dĺžku zistíme sčítaním označených k_{ij} hrán.



$h_{34} = 4$	$h_{24} = 7$	$h_{54} = 11$	$h_{12} = 14$	$h_{15} = 19$
$h_{23} = 5$	$h_{46} = 7$	$h_{67} = 11$	$h_{37} = 15$	$h_{25} = 20$
$h_{14} = 6$	$h_{13} = 10$	$h_{47} = 12$	$h_{35} = 17$	$h_{56} = 21$

$(n-1) = 7-1 = 6$ hrán

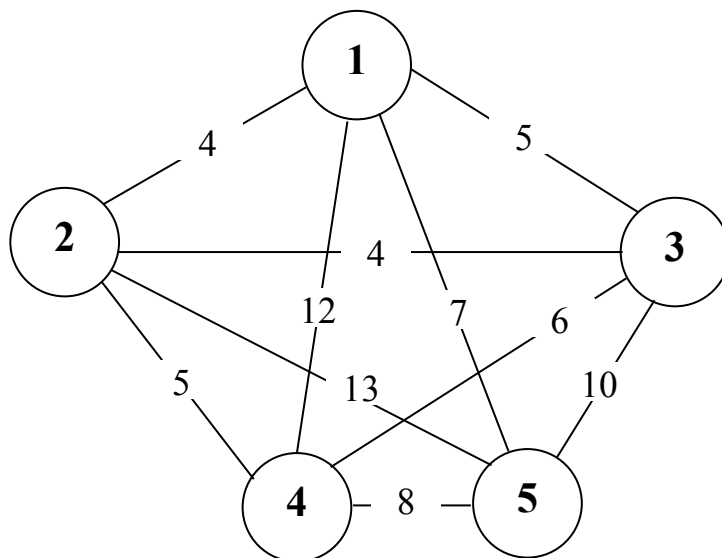
Celková dĺžka $L_{\min} = 4 + 5 + 6 + 7 + 11 + 11 = 44$
 $L_{\max} = 21 + 20 + 19 + 17 + 15 + 12 = 104$

PRÍKLAD 2: Minimálna okružná cesta v grafe - v zadanom grafe (úplný, neorientovaný) určite minimálnu okružnú cestu z vrcholu V1. Aplikujte pri tom : (a) metódu rozhodovacieho stromu, (b) metódu najbližšieho suseda, (c) metódu vetvenia a hraníc [Branch and Bound].

Riešenie :

(a) Metóda rozhodovacieho stromu :

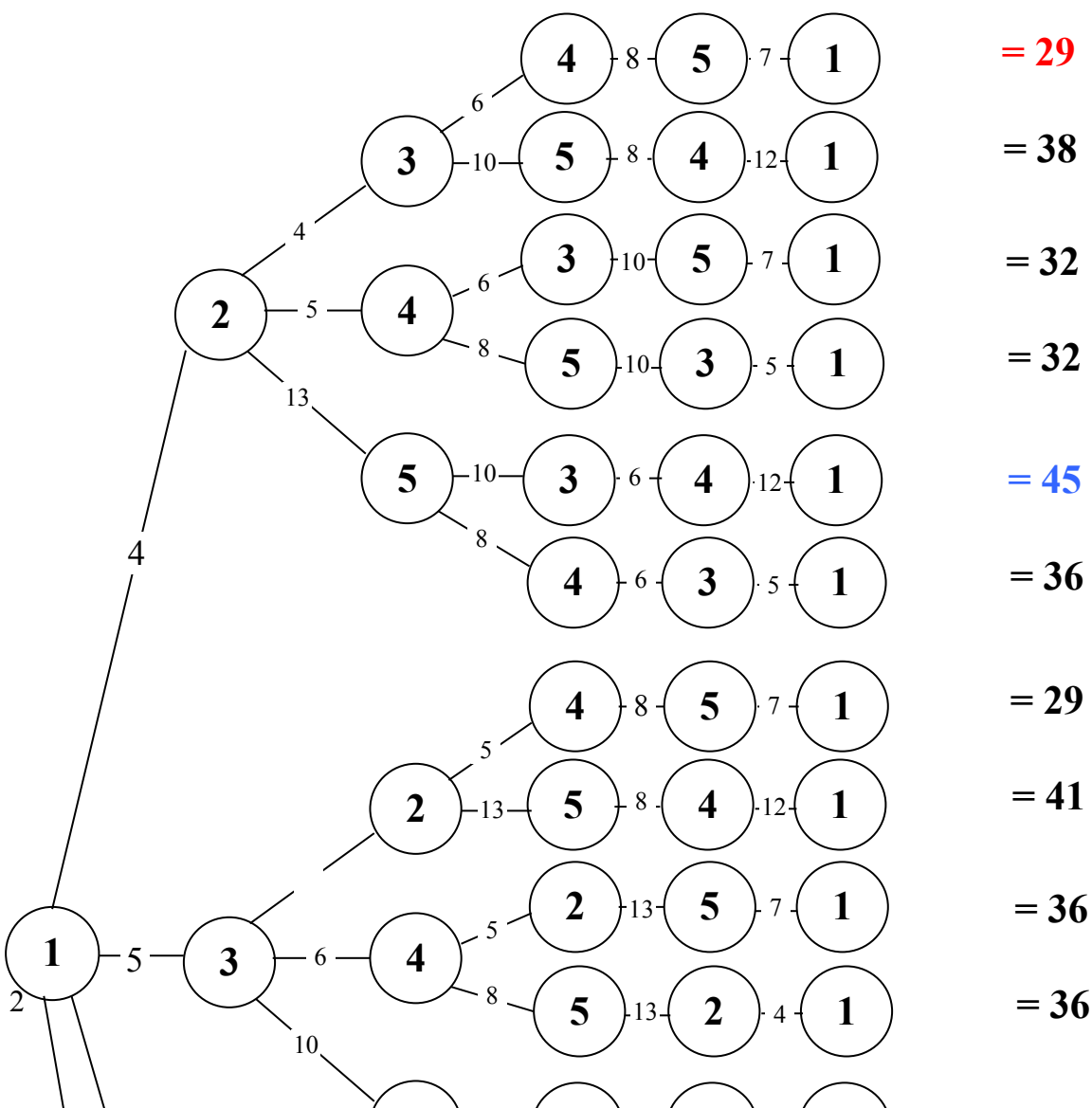
Je potrebné preskúmať všetky alternatívy, rozvoj a zápis prostredníctvom stromovej štruktúry a určenie hodnoty súčtu hrán zaradených do okružnej cesty.



$$\text{Min (OC)} = V1 - V2 - V3 - V4 - V5 - V1 = 4 + 4 + 6 + 8 + 7 = \mathbf{29}$$

$$\text{Max (OC)} = V1 - V3 - V5 - V2 - V4 - V1 = 5 + 10 + 13 + 5 + 12 = \mathbf{45}$$

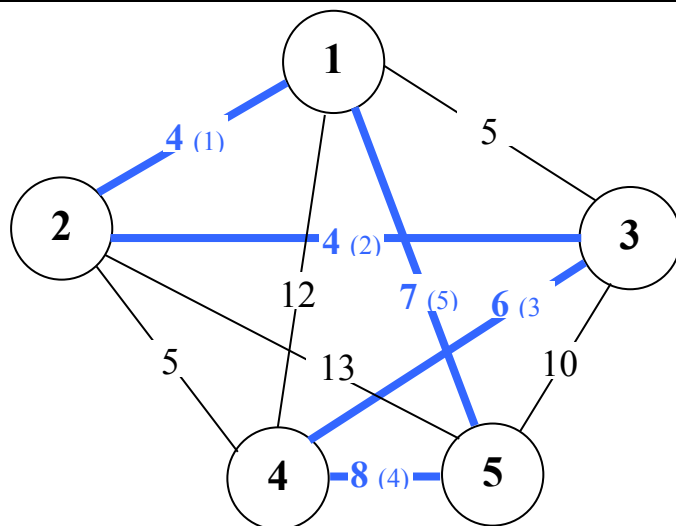
$$V1 - V2 - V5 - V3 - V4 - V1 = 4 + 13 + 10 + 6 + 12 = \mathbf{45}$$



(b) Metóda najbližšieho suseda :

Z východiskového vrcholu hľadáme vždy prípustnú hranu, ktorá je najkratšia.

Možnosť riešiť priamo v grafe alebo incidenčnej matici.



Incidenčná matica :

Východiskový vrchol – V1: $V1 - V2 - V3 - V4 - V5 - V1 = 4 + 4 + 6 + 8 + 7 = 29$

Graf: pre východiskový vrchol - V1

Vrchol	1	2	3	4	5
1 = VV	-	4 ⁽¹⁾	5	12	7
2	4	-	4 ⁽²⁾	5	13
3	5	4	-	6 ⁽³⁾	10
4	12	5	6	-	8 ⁽⁴⁾
5	7 ^{(5) sc}	13	10	8	-

Východiskový vrchol – V3 : $V3 - V2 - V1 - V5 - V4 - V3 = 4 + 4 + 7 + 8 + 6 = 29$

Vrchol	1	2	3	4	5
1	-	4	5	12	7 ⁽³⁾
2	4 ⁽²⁾	-	4	5	13
3 = VV	5	4 ⁽¹⁾	-	6	10
4	12	5	6 ^{(5) sc}	-	8
5	7	13	10	8 ⁽⁴⁾	-

(c) Metóda vetvenia a hraníc:

	1	2	3	4	5	
1	-	4 0	5 1	12 8 7	7 3 0	(-4)
2	4 0	-	4 0	5 1 0	13 9 6	(-4)
3	5 1	4 0	-	6 2 1	10 6 3	(-4)
4	12 7	5 0	6 1	-	8 3 0	(-5)
5	7 0	13 6	10 3	8 1 0	-	(-7)

(-1) (-3)

Po vykonaných úpravách dostaneme matice redukovaných sadzieb

	1	2	3	4	5	
1	-	0	1	7	0	r = 1
2	0	-	0	0	6	r = 6
3	1	0	-	1	3	r = 1
4	7	0	1	-	0	r = 1
5	0	6	3	0	-	r = 3

r = 1

r = 6

r = 1

r = 1

r = 3

Na základe hodnôt r_i vyberieme tzv. perspektívne hrany: $\max(r_i)$ určuje riadok resp. stĺpec, v ktorom políčka s nulovými redukovanými sadzbami identifikujú perspektívne hrany.

Platí : perspektívne hrany (1 – 2), (3 – 2), (4 – 2).

Vyberieme napr. (4-2) a (2-3)

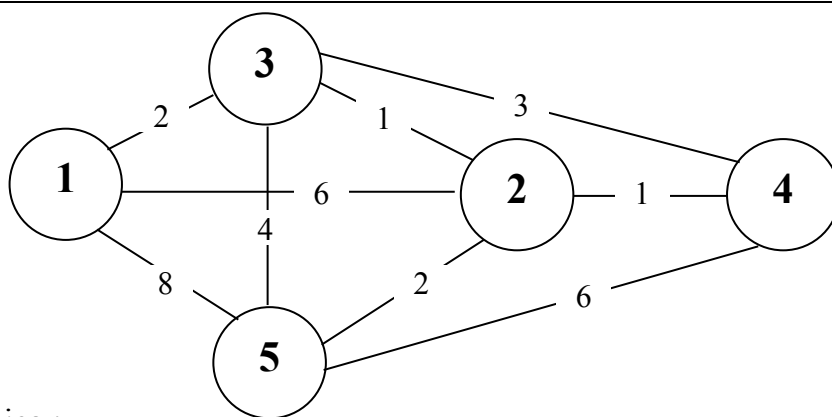
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} \\
 & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \\
 (1-5) & - & (5-4) & - & (4-2) & - & (2-3) & - & (3-1) \\
 \mathbf{V1} & - & \mathbf{V5} & - & \mathbf{V2} & - & \mathbf{V3} & - & \mathbf{V1} \\
 7 & + & 8 & + & 4 & + & 5 & = & 29
 \end{array}$$

napr. (3-2) a (2-1)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} & & \textcolor{blue}{0} \\
 & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \\
 (1-5) & - & (5-4) & - & (4-3) & - & (3-2) & - & (2-1) \\
 \mathbf{V1} & - & \mathbf{V5} & - & \mathbf{V3} & - & \mathbf{V2} & - & \mathbf{V1} \\
 7 & + & 8 & + & 4 & + & 4 & = & 29
 \end{array}$$

PRÍKLAD 3: Minimálna cesta z vrcholu do vrcholu - DIJKSTROV POSTUP

Pre graf zadany na obrázku: (1) Napíšte incidenčnú maticu, (2) nájdite minimálnu cestu z vrcholu V1 do vrcholu V4, (3) nájdite minimálnu cestu z vrcholu V2 do všetkých ostatných vrcholov.



Riešenie:

1. Incidenčná matica :

Vrchol	1	2	3	4	5
1	-	6	2	N	8
2	6	-	1	1	2
3	2	1	-	3	4
4	N	1	3	-	6
5	8	2	4	6	-

2. Minimálna cesta z V1 do V4 → použitie Dijkstrovho algoritmu

VP = 1 VK = 4

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} \text{MC} \\ \text{VP} \\ \text{ST} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \text{N} & \text{N} & \text{N} & \text{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{T} & \text{D} & \text{D} & \text{D} & \text{D} \end{bmatrix} \Rightarrow V_{\text{pr}}^{(0)} = V1$$

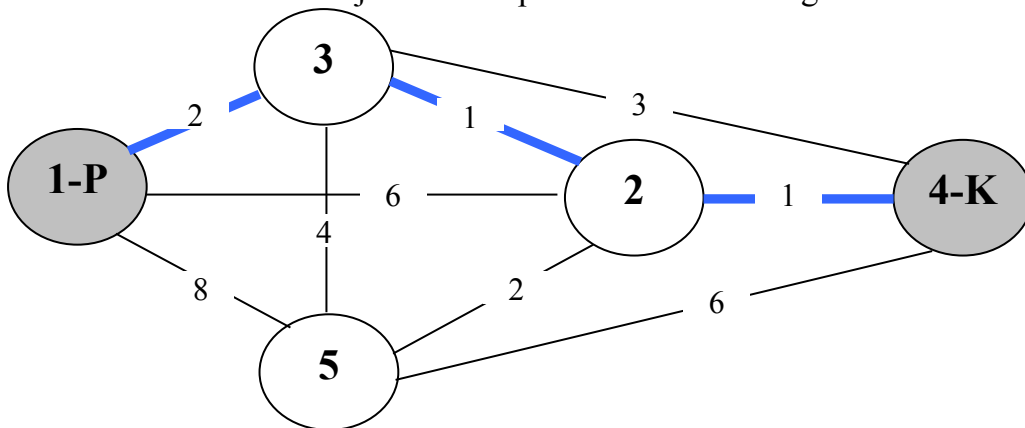
Legenda : *MC* – vektor hodnôt minimálnych ciest z východiskového vrcholu ku všetkým ostatným,
VP – vektor vrcholov predchodcov,
ST – vektor stavov vrcholov.

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} MC \\ VP \\ ST \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & \boxed{2} & N & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ T & D & T & D & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(1)} = V3$$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} MC \\ VP \\ ST \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ T & T & T & D & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(2)} = V2$$

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} MC \\ VP \\ ST \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & \boxed{4} & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ T & T & T & T & D \end{bmatrix} \Rightarrow MC(V1 - V4) = 4$$

Minimálna cesta: z vrcholu V1 do V4 je **MC=4** a prechádza vrcholmi grafu **V1 – V3 – V2 – V4**.



3. Minimálna cesta z vrcholu V2 do všetkých ostatných → Dijkstrov algoritmus

VP = 1 VK = i (pre i = 2,3,4,5)

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} MC \\ VP \\ ST \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \boxed{0} & N & N & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & T & D & D & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(0)} = V2$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & T & D & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(1)} = V3$$

$$\text{resp. } D^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & D & T & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(1)} = V4$$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & T & T & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(2)} = V4$$

$$\text{resp. } D^{(2)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & T & T & D \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(2)} = V3$$

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & \boxed{2} \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & T & T & T \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(3)} = V5$$

$$\text{resp. } D^{(3)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & \boxed{2} \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ D & T & T & T & T \end{bmatrix} \Rightarrow V_{pr}^{(3)} = V5$$

$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ T & T & T & T & T \end{bmatrix} \quad \text{resp. } D^{(4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ T & T & T & T & T \end{bmatrix}$$

Interpretácia výsledkov :

Minimálne cesty z vrcholu V2 do všetkých ostatných vrcholov grafu sú :

$$\begin{aligned} MC(V2 - V1) &= 3 & - & (V2 - V3 - V1) \\ MC(V2 - V3) &= 1 & - & (V2 - V3) \\ MC(V2 - V4) &= 1 & - & (V2 - V4) \\ MC(V2 - V5) &= 2 & - & (V2 - V5) \end{aligned}$$

Príklad 4 : Cesty v grafoch - Dijkstrov algoritmus

V grafe zadanom incidenčnou maticou určte: (1) minimálnu cestu z vrcholu V1 do V7, (2) minimálnu cestu z vrcholu V4 do všetkých ostatných vrcholov

Vrchol	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	2	7	N	N	N	N	N
2	2	-	6	5	N	N	N	N
3	7	6	-	6	N	N	9	N
4	N	5	6	-	5	4	10	N
5	N	N	N	5	-	7	N	N
6	N	N	N	4	7	-	4	8
7	N	N	9	10	N	4	-	3
8	N	N	N	N	N	8	3	-

Riešenie:

(1) $VV = V1, KV = V7$

it.	V_j Vekt	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V _{pr}
0.	MC ST	0 T	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	V1
1.	MC ST		2 ¹ T	7 ¹ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	V2
2.	MC ST			7 ¹ D	7 ² T	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	N ⁰ D	V4
3.	MC ST			7 ¹ T		12 ⁴ D	11 ⁴ D	17 ⁴ D	N ⁰ D	V3
4.	MC ST					12 ⁴ D	11 ⁴ T	16 ³ D	N ⁰ D	V6
5.	MC ST					12 ⁴ D		15 ⁶ D	19 ⁶ D	V5
6.	MC ST							15 ⁶ T	19 ⁶ D	V7

Interpretácia výsledkov :

napr. MC (V1 – V7) = 15 a prechádza vrcholmi (V7 – V6 – V4 – V2 – V1)

MC (V1 – V5) = 12 a prechádza vrcholmi (V5 – V4 – V2 – V1)

(2) $VV = V4$, $KV = \text{všetky}$

it.	V_j Vekt	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V _{pr}
0.	MC ST	N D	N D	N D	0 T	N D	N D	N D	N D	V4
1.	MC ST	N D	5 ⁴ D	6 ⁴ D		5 ⁴ D	4 ⁴ T	10 ⁴ D	N D	V6
2.	MC ST	N ⁰ D	5 ⁴ T	6 ⁴ D		5 ⁴ D		8 ⁶ D	12 ⁶ D	V2
3.	MC ST	7 ² D		6 ⁴ D		5 ⁴ T		8 ⁶ D	12 ⁶ D	V5
4.	MC ST	7 ² D		6 ⁴ T				8 ⁶ D	12 ⁶ D	V3
5.	MC ST	7 ² T						8 ⁶ D	12 ⁶ D	V1
6.	MC ST							8 ⁶ T	12 ⁶ D	V7
7.	MC ST								11 ⁷ T	

Interpretácia výsledkov :

$$MC(V4 - V1) = 7 - (V1 - V2 - V4)$$

$$MC(V4 - V2) = 5 - (V2 - V4)$$

$$MC(V4 - V3) = 6 - (V3 - V4)$$

$$MC(V4 - V5) = 5 - (V5 - V4)$$

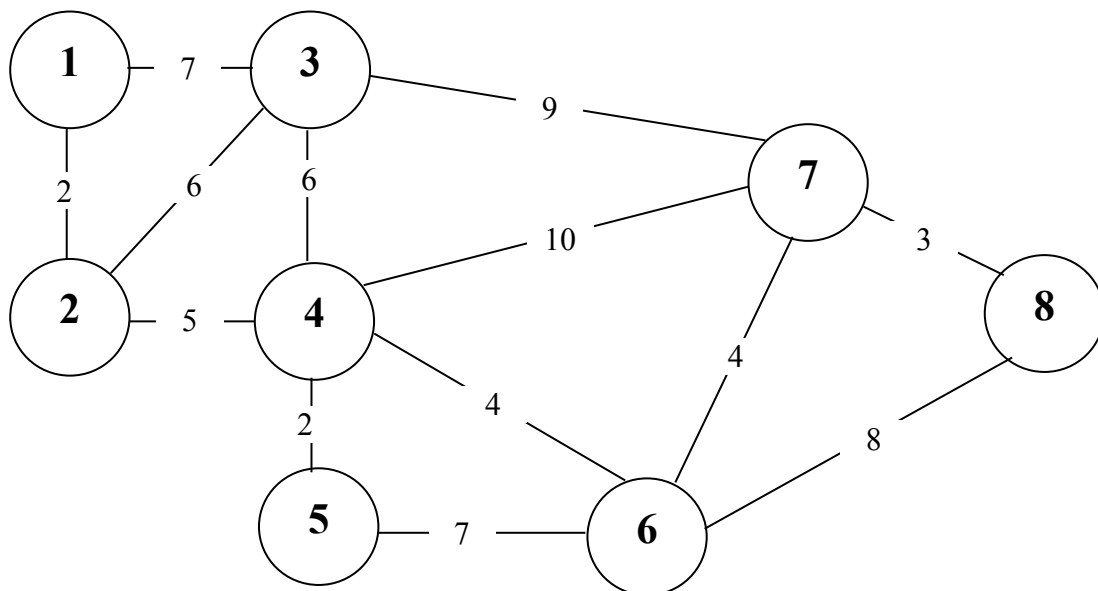
$$MC(V4 - V6) = 4 - (V6 - V4)$$

$$MC(V4 - V7) = 8 - (V7 - V6 - V4)$$

$$MC(V4 - V8) = 11 - (V8 - V7 - V6 - V4)$$

Príklad 5 : Minimálne cesty medzi všetkými vrcholmi grafu - metóda sčítania v matici

V zadanom grafe nájdite metódou sčítania v matici minimálne cesty medzi vrcholmi grafu: (A) z vrcholu V7 do vrcholu V1, (B) z vrcholu V4 do všetkých ostatných, (C) medzi všetkými vrcholmi navzájom.



Riešenie:

Nutný počet iteračných krokov: $(n - 1) \leq 2^{(PIK)}$

Platí : $ph \leq n - 1 \leq 2^{(PIK)}$

kde ph – maximálny počet hrán MC, n – počet vrcholov grafu, PIK - počet iteračných krokov

Postup výpočtu :

1. určenie počtu potrebných iteračných krokov,
2. spracovanie, tzv. nutej iterácie = úplnej iteračnej matice úlohy,
3. transformácia 0. iterácie na iteráciu nasledujúcu,
4. za nový prvok nasledujúcej iterácie $c_{ij}^{(n)}$ sa zapíše minimálna hodnota zo súčtov

$$c_{ik} + c_{kj}$$

tzn. matematicky zapísané $c_{ij}^{(n)} = \min_k (c_{ik} + c_{kj})$, avšak iba za podmienky, že platí $c_{ij}^{(n)} < c_{ij}^{(n-1)}$,

tzn. vtedy, ak hodnota $c_{ij}^{(n)}$ je menšia, ako prvok pôvodný.

5. výpočet opakujeme dovtedy, pokiaľ nebude vykonaný určený počet iteračných krokov podľa bodu 1.

0.iteračný krok

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	2	7	N	N	N	N	N
2	2	-	6	5	N	N	N	N
3	7	6	-	6	N	N	9	N
4	N	5	6	-	5	4	10	N
5	N	N	N	5	-	7	N	N
6	N	N	N	4	7	-	4	8
7	N	N	9	10	N	4	-	3
8	N	N	N	N	N	8	3	-

1.iteračný krok

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	2	7	7^2	N	N	16^3	N
2	2	-	6	5	10^4	9^4	15^3	N
3	7	6	-	6	11^4	10^4	9	12^7
4	7^2	5	6	-	5	4	8^6	12^6
5	N	10^4	11^4	5	-	7	11^6	15^6
6	N	9^4	10^4	4	7	-	4	7^7
7	16^3	15^3	9	8^6	11^6	4	-	3
8	N	N	12^7	12^6	15^6	7^7	3	-

2. iteračný krok

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	2	7	7^2	$12^{2,4}$	$11^{2,4}$	$15^{2,4,6}$	$19^{3,7}$
2	2	-	6	5	10^4	9^4	$13^{4,6}$	$16^{4,6,7}$
3	7	6	-	6	11^4	10^4	9	12^7
4	7^2	5	6	-	5	4	8^6	$11^{6,7}$
5	$12^{4,2}$	10^4	11^4	5	-	7	11^6	$14^{6,7}$
6	$11^{4,2}$	9^4	10^4	4	7	-	4	7^7
7	$15^{6,4,2}$	$13^{6,4}$	9	8^6	11^6	4	-	3
8	$19^{7,3}$	$16^{7,6,4}$	12^7	$11^{7,6}$	$14^{7,6}$	7^7	3	-

3. iteračný krok

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	2	7	7 ²	12 ^{2,4}	11 ^{2,4}	15 ^{2,4,6}	19 ^{2,4,6,7}
2	2	-	6	5	10 ⁴	9 ⁴	13 ^{4,6}	16 ^{4,6,7}
3	7	6	-	6	11 ⁴	10 ⁴	9	12 ⁷
4	7 ²	5	6	-	5	4	8 ⁶	11 ^{6,7}
5	12 ^{4,2}	10 ⁴	11 ⁴	5	-	7	11 ⁶	14 ^{6,7}
6	11 ^{4,2}	9 ⁴	10 ⁴	4	7	-	4	7 ⁷
7	15 ^{6,4,2}	13 ^{6,4}	9	8 ⁶	11 ⁶	4	-	3
8	19 ^{7,6,4,2}	16 ^{7,6,4}	12 ⁷	11 ^{7,6}	14 ^{7,6}	7 ⁷	3	-

Interpretácia výsledkov :

1. $MC(V7 - V1) = 15 - (V7 - V6 - V4 - V2 - V1)$
2. napr.
 - $MC(V4 - V1) = 7 - (V4 - V2 - V1)$
 - $MC(V4 - V2) = 5 - (V4 - V2)$
 - $MC(V4 - V7) = 8 - (V4 - V6 - V7)$
 - $MC(V4 - V8) = 11 - (V4 - V6 - V7 - V8)$
3. napr.
 - $MC(V1 - V8) = 18 - (V1 - V2 - V4 - V6 - V7 - V8)$
 - $MC(V5 - V8) = 14 - (V5 - V6 - V7 - V8)$
 - $MC(V2 - V7) = 13 - (V2 - V4 - V6 - V7)$