

8. ZÁKLADY SIEŤOVEJ ANALÝZY

Sieťová analýza tvorí relatívne samostatnú oblasť aplikácie základných poznatkov teórie grafov do oblasti plánovania zložitých akcií (projektov), ktorých realizácia vyžaduje splnenie celého radu na seba nadväzujúcich čiastkových činností. Takéto činnosti môžu mať vzhľadom na svoj charakter rozličný vzťah – napr. nezávislosť, časová následnosť, vzájomná podmienenosť apod.

Z hľadiska zatriedenia do oblasti metód OA by mali metódy sieťovej analýzy patriť skôr medzi metódy heuristické, pretože ich rozhodujúcou etapou – t.j. zostavenie zoznamu činností a sieťového grafu sa doteraz nepodarilo úspešne algoritmizovať.

Medzi základné metódy sieťovej analýzy zaraďujeme najmä **metódu kritickej cesty (CPM)** s jej modifikáciou **CPM-GE**, vhodnou na objektívnejšie prerozdelenie vznikajúcich rezerv v sieťovom grafe, ale aj ďalšie metódy, ako napr. **MPM**, **PERT**, **GERT** a pod.

Definovanie pojmov z oblasti sieťovej analýzy:

- **projekt** (akcia) - súbor činností a udalostí spojený s vynakladaním práce, materiálnych a finančných prostriedkov pre dosiahnutie definovaného cieľa,
- **činnosť** (úloha, aktivita) - technologicky a organizačne vymedzený súhrn prác. Činnosti sú v projekte usporiadané v čase podľa jednoznačného poradia, ktoré vyplýva najmä z technologických závislostí (tzv. technologická precedencia),
- **udalosti** - začiatky a konce jednotlivých činností a iné dôležité termíny,
- **sieťový graf** (sieť) - ohodnotená orientovaná grafická štruktúra predstavujúca model projektu. Základným prvkom stavby grafu sú **činnosti** a podľa toho, či sú modelované hranami alebo uzlami (vrcholmi) grafu hovoríme o grafoch **hranovo orientovaných** alebo **uzlovo orientovaných**.

My sa budeme zaoberať iba hranovo orientovanými grafmi, preto nasledujúce pojmy sú už definované z tohoto pohľadu.

- **uzol** - predstavuje stav dosiahnutý určitou činnosťou. Predstavuje okamih začatia alebo ukončenia jednej alebo súboru viac činností. Vyjadruje logickú väzbu medzi činnosťami, ktorá znamená, že činnosti vystupujúce z uzla nemôžu začať skôr, ako skončia všetky činnosti do uzla vstupujúce,
- **hrana** - vyjadruje v sieťovom grafe činnosť, pričom môže reprezentovať **činnosť reálnu** (skutočne sa vykonáva) a zobrazuje sa plnou čiarou, alebo **činnosť fiktívnu** (zdanlivú), určenú pre zobrazovanie časových nadväzností v grafe (zobrazenie čiarkovanou čiarou),

Hrany v sieťovom grafe ohodnocujeme, pričom základné ohodnotenie je **časové** tzn. hrane sa priradí hodnota vyjadrujúca trvanie jej činnosti. Možné je ale aj napr. ohodnotenie **zdrojové**, hranám priradíme hodnoty vyjadrujúce množstvo vynaložených zdrojov (materiál, pomocné sily a pod.) alebo **nákladové**, priradíme hranám náklady potrebné k realizácii odpovedajúcej činnosti.

Z vyššie uvedených základných pojmov vyplýva aj rámcový postup tvorby sieťového grafu, ktorý tvoria v zásade tri základné fázy :

1.fáza - zostavenie zoznamu všetkých činností potrebných pre realizáciu zadaného projektu. Vyhodnotenie typu väzieb medzi jednotlivými činnosťami – t.j. bezprostredná časová následnosť, súbežnosť príp. vzájomná závislosť.

2.fáza - vytvorenie grafického modelu, rešpektujúceho všetky vyššie uvedené vlastnosti jednotlivých činností a ohodnotenie jednotlivých hrán siete (kalkuláciou alebo odhadom),

3.fáza - samotný výpočet všetkých charakteristík sieťového grafu, ich analýza a vyvodenie záverov pre jednotlivé činnosti projektu, ale aj pre projekt ako celok.

8.1 Metóda kritickej cesty (CPM)

Základnou metódou sieťovej analýzy pre riešenie sieťových grafov je tzv. **metóda kritickej cesty** – **CPM** (Critical Path Method). K vlastnému riešeniu sieťového grafu pristupujeme až po uskutočnení vyššie uvedenej druhej fázy tzn. až po vytvorení ohodnoteného sieťového grafu. K tomu aby mohol byť využitý algoritmus CPM, je nutné navyše naplniť 2 základné predpoklady :

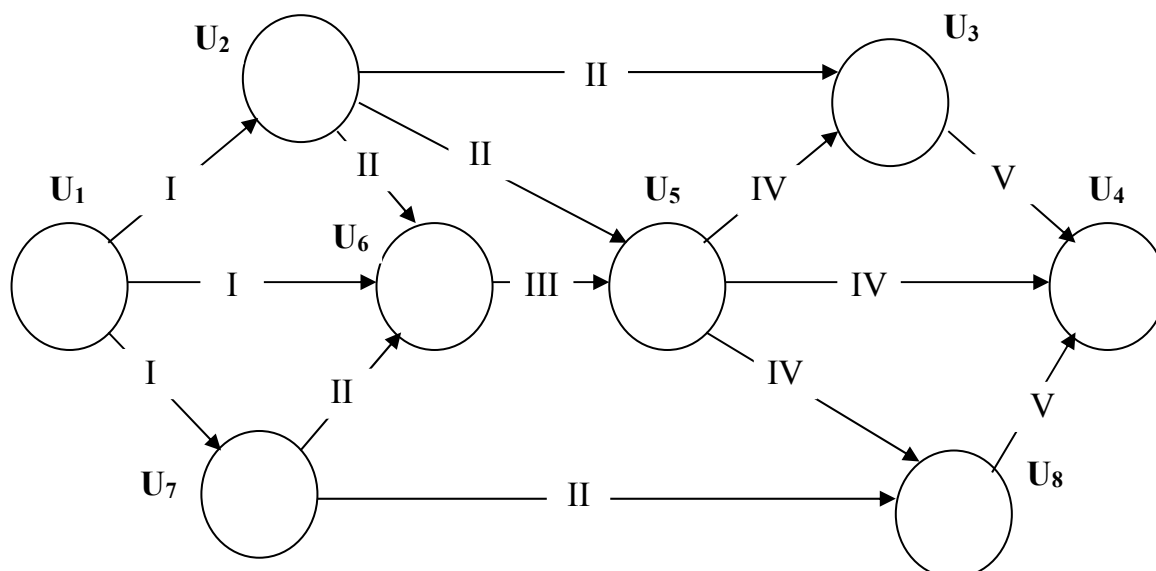
1. *Sieťový graf musí mať vždy iba jeden uzol počiatočný (do ktorého nevstupuje žiadna činnosť) a jeden uzol koncový (z ktorého žiadna činnosť nevystupuje).*
2. *Pre každú ľubovoľnú hranu h_{ij} musí platiť $i < j$, t.j. poradové číslo počiatočného uzla každej orientovanej hrany grafu musí byť nižšie ako poradové číslo uzla koncového.*

V prípade, ak nie je splnená prvá podmienka, je možné využiť zaradenie nového počiatočného alebo koncového uzla vhodným zvolením fiktívnych činností.

V prípade nesplnenia druhej podmienky dotýkajúcej sa číslovania uzlov, je výhodné využiť tzv. **Fordov algoritmus prečíslovania uzlov**, ktorý spočíva v kategorizácii uzlov (ich postupnom zatriedovaní do zvyšujúcich sa rádov). Princíp algoritmu si vysvetlíme na príklade z obr.8.1.a.

Slovne možno Fordov algoritmus vyjadriť nasledovne :

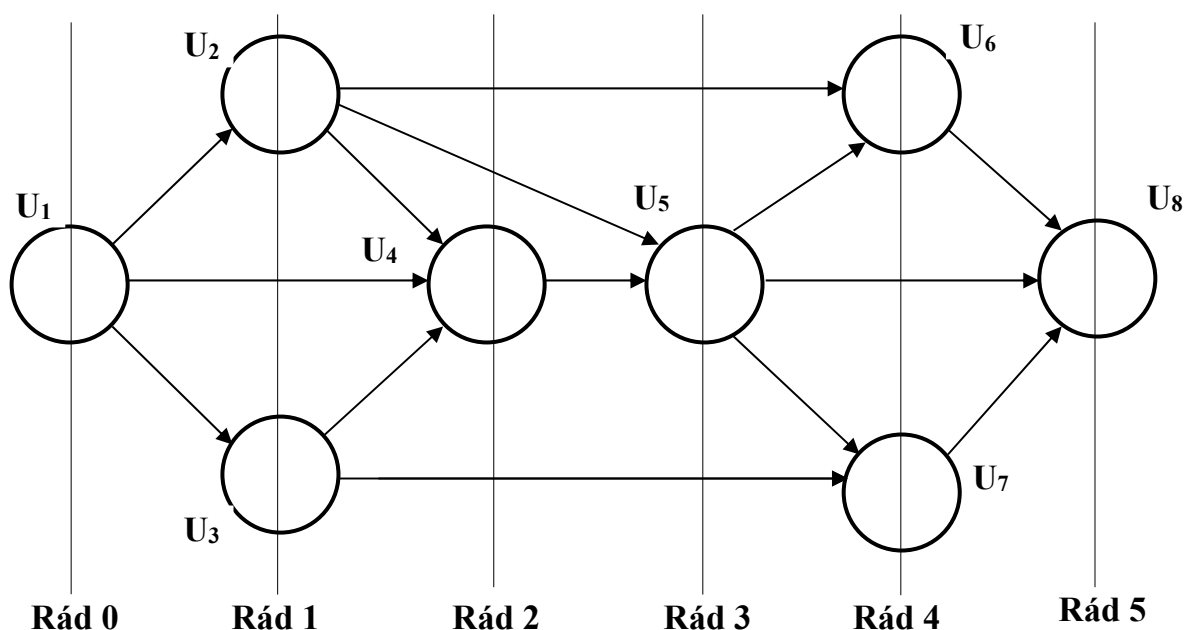
1. *Počiatočnému uzlu priradíme rád „0“. ($R=0$)*
2. *Hranám z neho vystupujúcim priradíme rád $R=R+1=1$, (v grafe označíme tak, že hrany raz prečiarkneme).*
3. *Skúmame všetky uzly do ktorých vstupujú iba hrany už definovaného rádu (prečiarknuté) a priradíme im rád rovný najvyššiemu rádu vstupujúcich hrán. (Uzly U_2 a U_7 budú teda 1. rádu).*
4. *Pokračujeme bodom 2. až po koncový uzol.*



Obr.8.1.a. Sieťový graf s nevyhovujúcim číslovaním vrcholov.

Pri realizácii uvedeného postupu na sieťový graf podľa Obr.8.1a môžeme dospieť k záveru, že uzol U_6 – bude 2.rádu, uzol U_5 – bude 3.rádu, uzly U_3, U_8 – sú 4.rádu a uzol U_4 – je rádu 5.

Po ukončení Fordovho algoritmu prečíslovania vrcholov siete je vhodné sieťový graf prekresliť s vyznačením určených rádov (Obr.8.1.b.). Nové prečíslovanie vrcholov potom vykonáme tak, že vrcholy číslujeme postupne od najnižšieho rádu po najvyšší tzn. zľava doprava.



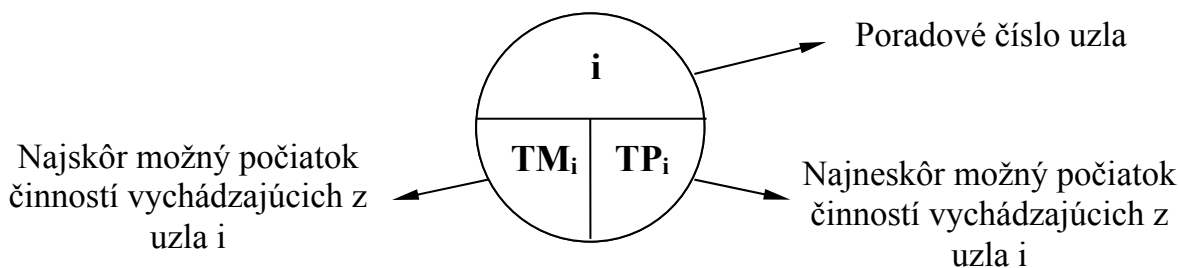
Obr.8.1.b. Sieťový graf s prečíslovanými vrcholmi.

Ak je splnenie podmienok riešiteľnosti sieťového grafu pre CPM zabezpečené, pristúpime k vlastnému riešeniu (3.fáza základného postupu), ktoré spočíva v realizácii takýchto krokov :

- 1. Určenie najskôr možných počiatkov činností TM_i vo všetkých uzloch a minimálneho možného času trvania akcie T_n , ktorý sa rovná najskôr možnému počiatku činností v koncovom uzle ($T_n = TM_k$).**

- 2. Určenie najneskôr možných počiatkov činností TP_i vo všetkých uzloch sieťového grafu a určenie kritickej cesty.**
- 3. Analýza a prípadné prerozdelenie rezerv v sieťovom grafe.**

Zaužívané označenie uzlov v rámci metódy CPM, v ktorom sú uvedené aj významy jednotlivých použitých symbolov je na Obr.8.2.

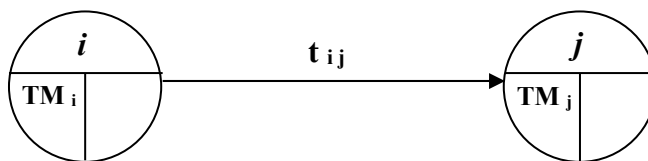


Obr.8.2 : Značenie uzlov v metóde kritickej cesty.

1. Určenie najskôr možných počiatkov činností

Počiatočnému uzlu U_1 priradíme hodnotu najskôr možného počiatku $TM_1=0$. U ďalších uzlov, pokiaľ do nich vstupuje iba jedna hrana = jedna činnosť (obr.8.3.a) určíme hodnotu podľa vzťahu

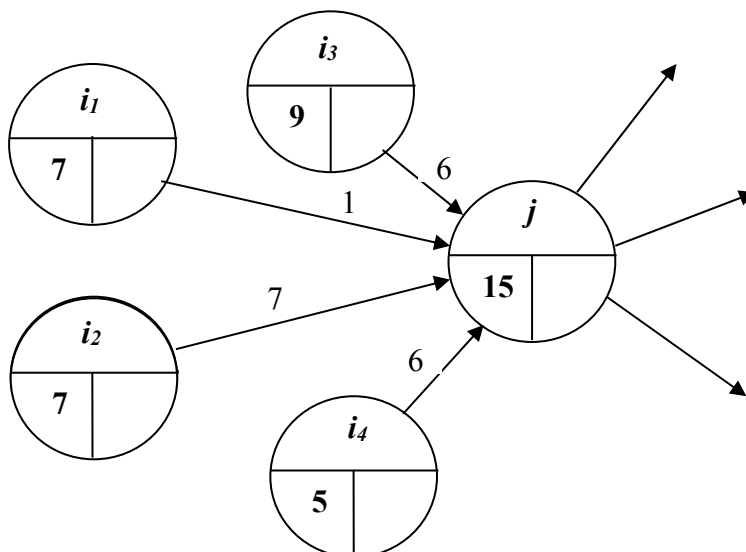
$$TM_j = TM_i + t_{ij} \quad (8.1)$$



Obr.8.3.a Určenie najskôr možných počiatkov (do uzla j vstupuje jedna činnosť)

Ak do uzla j vstupuje viac činností (obr.8.3.b), za hodnotu najneskôr možného počiatku činností v j -tom vrchole určíme maximálnu hodnotu z naznačených súčtov

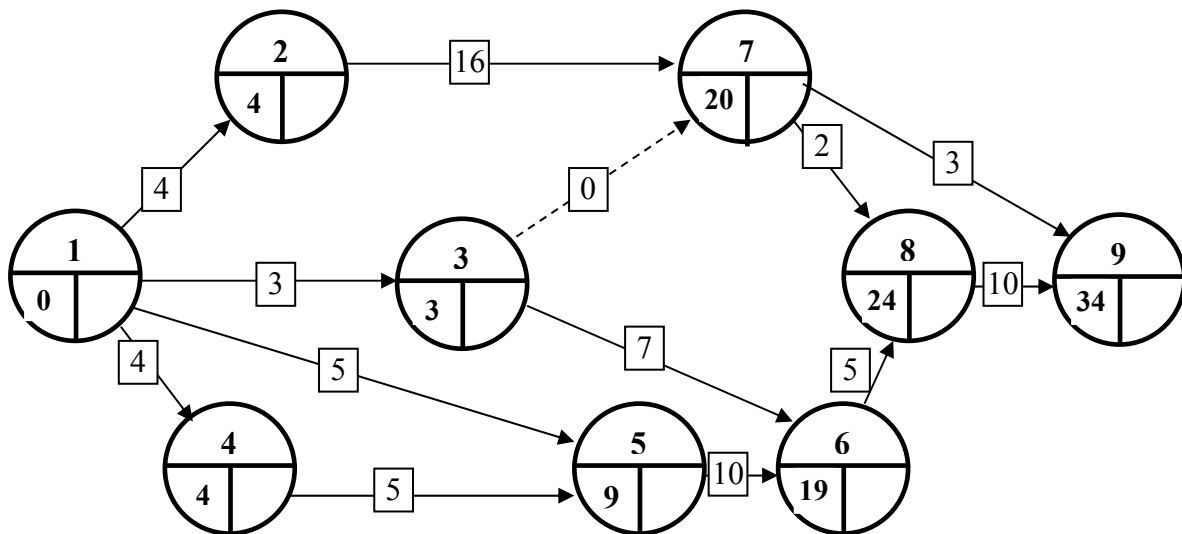
$$TM_j = \max_i (TM_i + t_{ij}) . \quad (8.2)$$



Obr.8.3.b. Určenie najskôr možných počiatkov - do uzla vstupuje viac činností.

Vzťah (8.2) vychádza z jednoduchého pravidla: **Všetky činnosti z uzla vystupujúce môžu začať až po skončení všetkých činností do uzla vstupujúcich.** Takto pokračujeme cez všetky vrcholy grafu až po vrchol koncový U_k , v ktorom (pretože v ňom už žiadna činnosť nezačína t.j. žiadna hrana z neho nevystupuje) určený najskôr možný počiatok súčasne znamená aj **minimálny možný čas trvania** celého projektu, pri ktorom je zabezpečené, že sa zrealizujú všetky určené a v projekte zaradené činnosti.

Majme jednoduchý sieťový graf (obr.8.4), v ktorom doby trvania jednotlivých činností t_{ij} sú uvedené priamo na príslušných hranách grafu. Po aplikácii vyššie uvedených pravidiel dostaneme **časy najskôr možných počiatkov** vo všetkých vrcholoch až po vrchol koncový. Čas $TM_9 = 34$ predstavuje **najskôr možný (minimálny) čas ukončenia celého projektu T_n .**



Obr.8.4. Určenie doby trvania projektu.

2. Určenie najneskôr možných počiatkov a kritickej cesty.

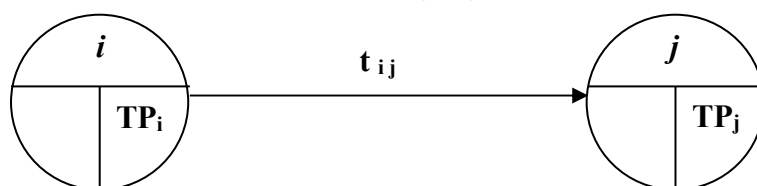
Pri určovaní najneskôr možných počiatkov činností v jednotlivých uzloch vychádzame z vrcholu koncového, v ktorom **času najneskôr možného počiatku** priradíme **čas trvania akcie**

$$TP_k = T_n.$$

Časy najneskôr možných počiatkov činností vo všetkých vrcholoch potom určujeme tzv. spätným chodom a to nasledovne :

- ak z vrcholu i vychádza iba jediná činnosť (obr.8.5.a) určujeme časy najneskôr možných počiatkov podľa vzťahu

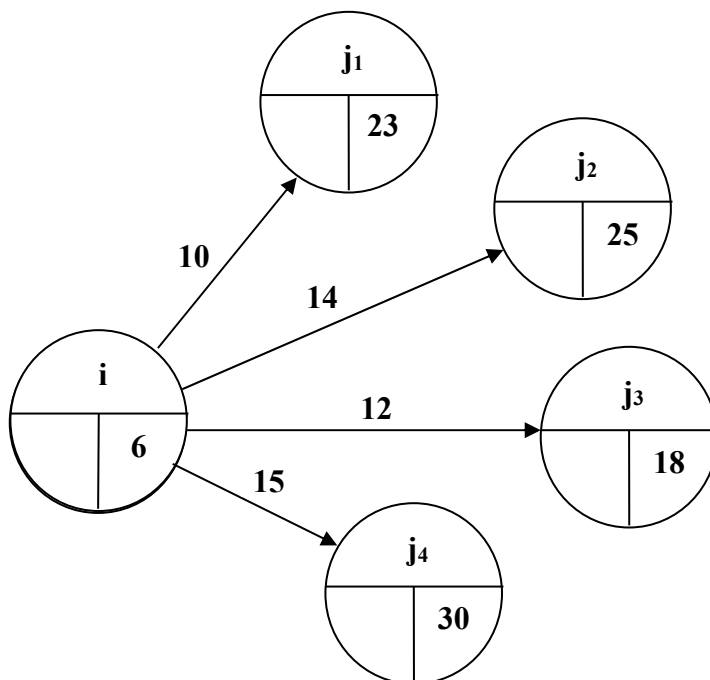
$$TP_i = TP_j - t_{ij} \quad (8.3)$$



Obr.8.5.a. Určenie časov najneskôr možných počiatkov – z vrcholu „i“ vychádza jediná činnosť.

- ak z vrcholu „i“ vychádza viac činností (obr.8.5.b) určíme časy najneskôr možných počiatkov podľa vzťahu

$$TP_i = \min_j (TP_j - t_{ij}) \quad (8.4)$$



Obr.8.5.b Určenie časov najneskôr možných začiatkov – z vrcholu „i“ vychádza viac činností.

Výraz (8.4) pritom vyjadruje skutočnosť, že najneskôr možné počiatky TP musia byť určené tak, aby neohrozili určený termín ukončenia projektu.

Uvedeným spôsobom spätného chodu postupujeme až k vrcholu počiatočnému U_1 , v ktorom musí platiť (to slúži súčasne ako kontrola správnosti riešenia)

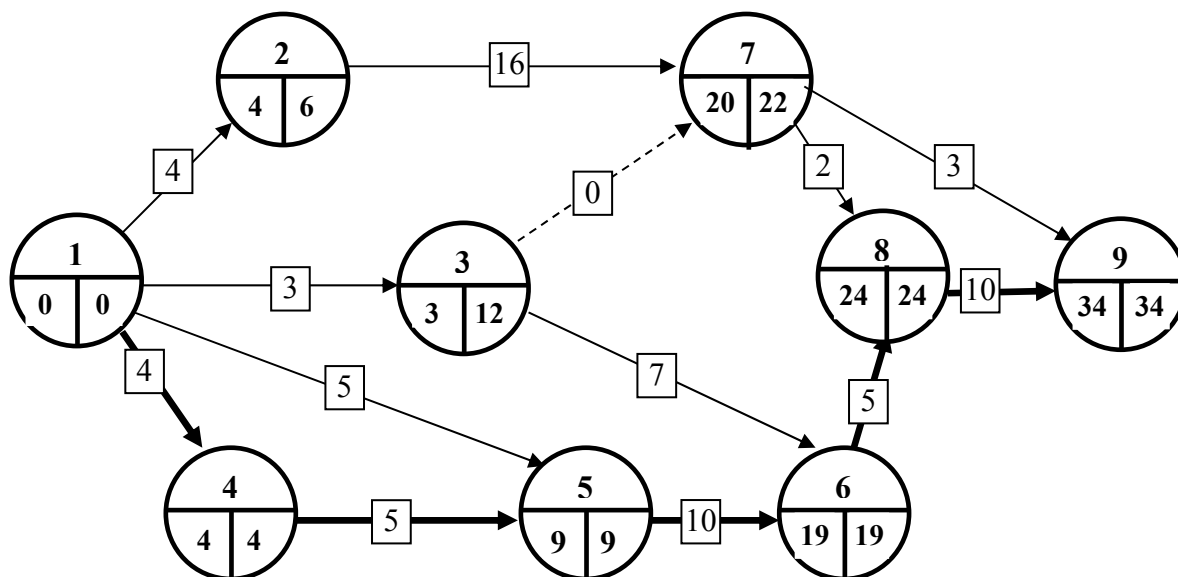
$$TP_1 = TM_1 = 0. \quad (8.5)$$

Následne na to už môžeme v grafe identifikovať tzv. **kritickú cestu**, ktorá spája vrcholy v ktorých nie je žiadna uzlová (kritická) rezerva a teda kde platí

$$TP_i = TM_i. \quad (8.6)$$

Platí: **Akékoľvek predĺženie činností ležiacich na kritickej ceste, alebo posunutie ich počiatkov znamená súčasne predĺženie doby trvania celého projektu.**

Aplikujme postup na zadaný príklad a dostaneme (obr.8.6) vo všetkých vrchoch hodnoty najneskôr možných počiatkov a kritickú cestu, ktorá začína v počiatočnom vrchole U_1 , prechádza cez vrcholy U_4 , U_5 , U_6 a U_8 do koncového vrcholu U_9 . Kritickú cestu tvoria preto činnosti (1 – 4), (4 – 5), (5 – 6), (6 – 8) a (8 – 9) a je zrejmé že súčet časov ich trvania musí byť rovný času trvania celého projektu.



Obr.8.6. Určenie časov najneskôr možných počiatkov a kritickej cesty.

Rozsiahlejšie problémy sa samozrejme neriešia priamo v grafe, ale pre ich riešenie s výhodou využívame výpočtovú techniku. Počet uzlov v grafe a hodnoty jednotlivých hrán (napr. trvanie činností) sú uložené v známej **incidenčnej matici**. Priebeh samotného výpočtu znázorňujeme v tzv. incidenčnej tabuľke (*tab.8.1*) s uvedenými hodnotami časov jednotlivých činností.

Tab.8.1 : Riešenie sieťového grafu CPM v incidenčnej tabuľke

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TP _i
1	X	4	3	4	5					<u>0</u>
2		X					16			<u>6</u>
3			X			7	0			<u>12</u>
4				X	5					<u>4</u>
5					X	10				<u>9</u>
6						X		5		<u>19</u>
7							X	2	3	<u>22</u>
8								X	10	<u>24</u>
9									X	<u>34</u>
TM _j	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>9</u>	<u>19</u>	<u>20</u>	<u>24</u>	<u>34</u>	X

V incidenčnej tabuľke najskôr určujeme hodnoty TM_j tak, že v prvom stĺpci určíme hodnotu **TM₁ = 0** a v ďalších stĺpcoch postupne zapisujeme ako hodnotu TM_j určený maximálny súčet podľa (8.2) v tvare: $\max (TM_i + t_{ij})$ vždy pre konkrétny stĺpec.

Hodnoty TP_i určujeme tak, že do riadku koncového vrcholu priradíme hodnotu **TM_k = T_n** a spätne hodnotám TP_i priradujeme minimálne rozdiely podľa (8.4), t.j. $\min (TP_j - t_{ij})$ určované vždy v príslušnom riadku.

Po ukončení spätného chodu musí byť v počiatočnom vrchole hodnota **TP₁ = 0** a porovnaním hodnôt **TP_i** a **TM_j** pre všetky vrcholy určíme sled vrcholov a činností ležiace na kritickej ceste.

Uvedený postup implicitne ukazuje na nutnosť splnenia už uvedenej požiadavky na číslovanie vrcholov ($i < j$). Pri jej nedodržaní, by totiž nestačila k uloženiu hodnôt hrán iba horná trojuholníková matica a nebolo by možné viesť výpočet jednoznačne jedným smerom (dopredným pri určovaní TM_j a spätným pre TP_i).

3. Časová analýza grafu (rozbor rezerv)

V sieťovom grafe rozlišujeme 2 základné druhy rezerv a to:

- rezervy uzlové a
- rezervy hranové.

Uzlová rezerva R_i je definovaná ako rozdiel hodnôt najneskôr a najskôr možného začiatku činnosti v príslušnom uzle

$$R_i = TP_i - TM_i \quad (8.7)$$

Niektorí autori rezervu v uzle používajú termín **kritická rezerva**, z čoho je aj odvodený názov metódy. Je zrejmé, že musí platiť: **Na kritickej ceste sú rezervy všetkých uzlov nulové.**

Hranové rezervy, vzťahujú sa k jednotlivým činnostiam projektu a rozlišujeme pritom:

- rezervu celkovú (CR_{ij}),
- rezervu voľnú (VR_{ij}),
- rezervu nezávislú (NR_{ij}),
- rezervu závislú (ZR_{ij}).

Reálny praktický význam majú najmä prvé dve – **rezerva celková a rezerva voľná**.

1. Rezerva celková - určuje, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti alebo posunúť jej najskôr možný počiatok bez toho, aby bol ohrozený termín ukončenia projektu. Určuje sa pre každú činnosť a platí

$$CR_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij} \quad (8.8.a)$$

2. Rezerva voľná - udáva, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti alebo posunúť jej počiatok, aby neboli ohrozené najskôr možné počiatky všetkých činností nasledujúcich po uvažovanej činnosti a platí

$$VR_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij} \quad (8.8.b)$$

Je zrejmé, že na kritickej ceste budú obidve uvedené rezervy nulové.

3. Rezerva nezávislá sa určuje podľa vzťahu

$$NR_{ij} = TM_j - TP_i - t_{ij} \quad (8.8.c)$$

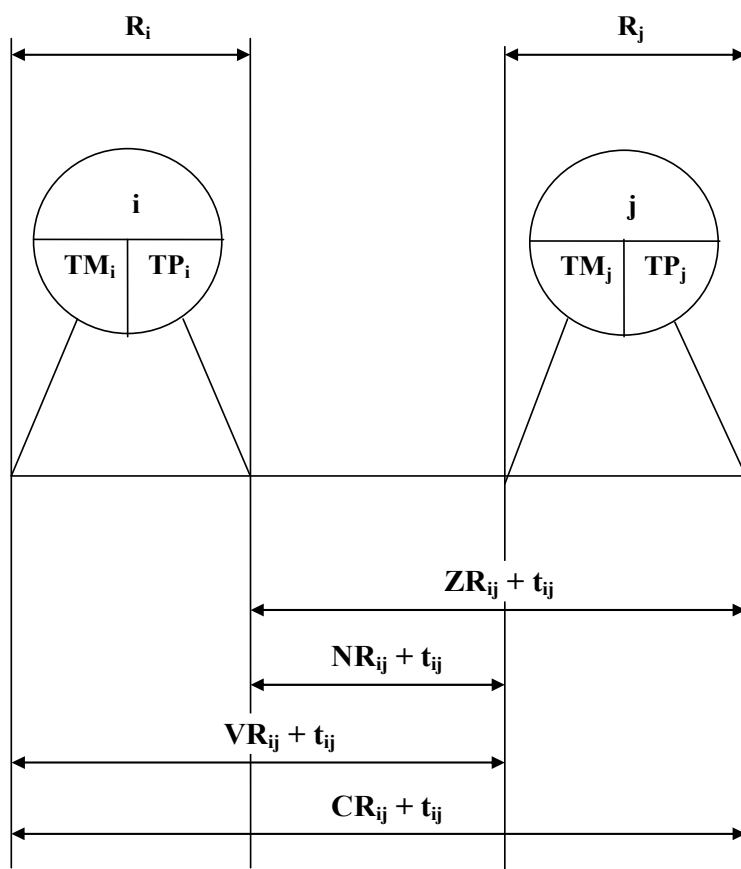
4. Rezerva závislá sa určuje zo vzťahu

$$ZR_{ij} = TP_j - TP_i - t_{ij} \quad (8.8.d)$$

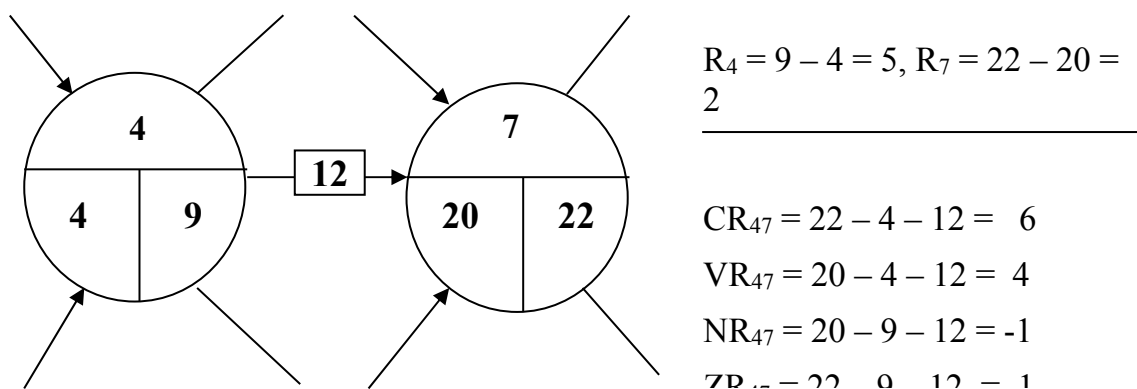
Po určení kritickej cesty v sieťovom grafe a prepočte všetkých rezerv prichádza na rad opäť empiria, skúsenosť alebo odborný úsudok riešiteľa projektu, ktorý môže (samozrejme v závislosti na charaktere úlohy) niektoré z činností na kritickej ceste:

- **vylúčiť**, t.j. činnosti na KC ktoré nie sú k realizácii projektu nevyhnutné,
- **naplánovať súbežne**, t.j. niektoré z činností na KC, ktoré boli pôvodne naplánované za sebou,
- **skrátit'**, napr. presunom pracovných síl, techniky, finančných zdrojov apod. z činností, u ktorých sú najväčšie časové rezervy apod..

Schematicky možno výrazy pre analýzu rezerv znázorniť podľa obr.8.7 a príklad výpočtu na ich výseku zo sieťového grafu je uvedený na obr.8.8.



Obr.8.7. Rezervy v sieťovom grafe



Obr.8.8. Výpočet rezerv v sieťovom grafe

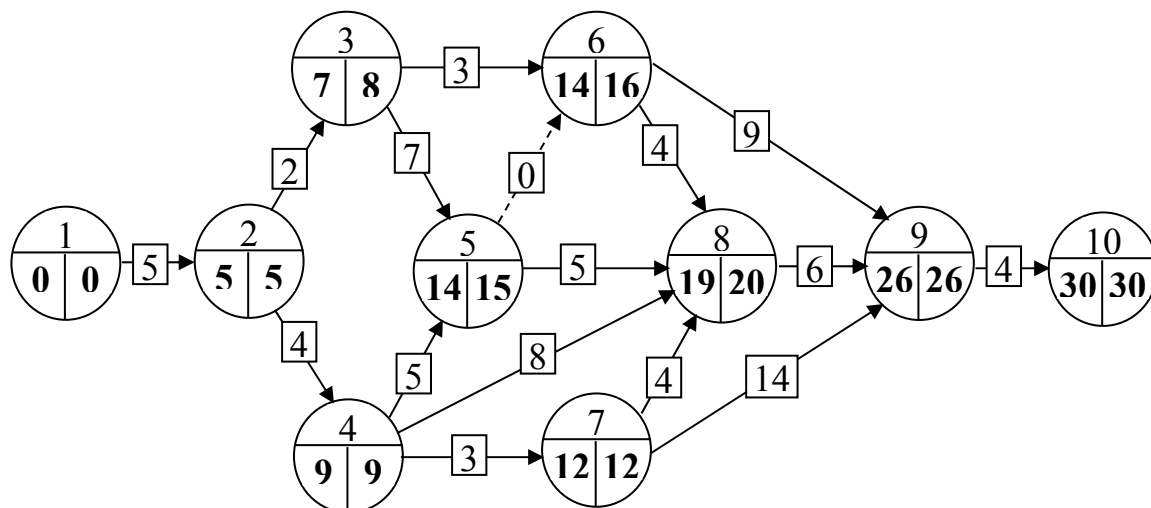
Príklad 8.1: Firma dostala za úlohu zabezpečiť stavbu výrobnéj haly a montáž strojného zariadenia. Na základe analýzy projektu bol spracovaný hrubý zoznam činností a na základe technologického rozboru noriem boli určené doby trvania každej činnosti ako celku. Zoznam činností a ich doby trvania sú uvedené v tab.8.2. Úlohou je zostaviť časovo orientovaný sieťový graf podľa zoznamu činností v projekte a prostredníctvom metódy CPM určiť najskôr možné počiatky TM a najneskôr možné počiatky TP jednotlivých činností, minimálny možný čas trvania projektu T_n a kritickú cestu (výpočtom priamo v grafe a tiež výpočtom v incidenčnej matici grafu) a vykonať rozbor časových rezerv.

Zoznam činností projektu a doby trvania jednotlivých činností.

Číslo činnosti	Názov činnosti	Bezprostredný predchodca	Doba trvania činnosti
1 – 2	Investičná úloha		5
2 – 3	Projektovanie strojovej časti	1-2	2
2 – 4	Projektovanie stavebnej časti	1-2	4
3 – 5	Montáž kotevných zariadení	2-3	7
3 – 6	Objednávka a dodanie strojového zariadenia	2-3	3
4 – 5	Základné bloky strojov	2-4	5
4 – 7	Dodanie strešných prefabrikátov	2-4	3
4 – 8	Steny priečne	2-4	8
5 – 6	Fiktívna činnosť	3–5, 4–5	0
5 – 8	Ostatné stavebné práce	3–5, 4–5	5
6 – 8	Montáž strojového zariadenia	3–6, 5–6	4
6 – 9	Pripojenie energie	3–6, 5–6	9
7 – 8	Dodávka materiálu	4–7	4
7 – 9	Steny pozdĺžne	4–7	14
8 – 9	Zastrešenie	6–8, 5–8, 4–8, 7–8	6
9 – 10	Skúšobná prevádzka	6–9, 7–9, 8–9	4

Riešenie :

1. Časovo orientovaný sieťový graf pre zadaný projekt je uvedený na obr.8.9



Obr. 8.9. Určenie minimálneho možného času trvania projektu a kritickej cesty.

2. Sieťový graf obsahuje už v príslušných políčkach vypočítané hodnoty najskôr možných počiatkov TM a najneskôr možných počiatkov činností TP podľa už uvedeného algoritmu.

Výsledky využitia výpočtu najskôr možných počiatkov činností TM a najneskôr možných počiatkov činností TP pomocou incidenčnej matice a určenie kritickej cesty sú uvedené v *tab.8.3*.

Tab.8.3. Výpočet sieťového grafu pomocou incidenčnej matice

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TP _i
1	X	5									<u>0</u>
2		X	2	4							<u>5</u>
3			X		7	3					8
4				X	5		3	8			<u>9</u>
5					X	0		5			15
6						X		4	9		16
7							X	4	14		<u>12</u>
8								X	6		20
9									X	4	<u>26</u>
10										X	<u>30</u>
TM _j	<u>0</u>	<u>5</u>	7	<u>9</u>	14	14	<u>12</u>	19	<u>26</u>	<u>30</u>	

Z hodnoty $TM_{10} = T_n$ zistíme predpokladaný minimálny čas trvania projektu $T_n = 30$ časových jednotiek. Kritická cesta vedie cez uzly, v ktorých sú hodnoty TM a TP rovnaké tzn. **kritická rezerva v týchto uzloch je nulová**. V našom prípade kritická cesta prechádza cez vrcholy

$$KC = V_1 - V_2 - V_4 - V_7 - V_9 - V_{10}.$$

3. Podľa vzťahov (8.7. a 8.8.a–d) určíme jednotlivé druhy rezerv, t.j. rezervy hranové - vzťahujúce sa na jednotlivé činnosti (CR_{ij}, VR_{ij}, NR_{ij} a ZR_{ij}) a uzlové rezervy (R_i – kritickú rezervu).

Tab.8.4. Výpočet časových rezerv

Činnosť	t _{ij}	i		j		CR _{ij}	VR _{ij}	NR _{ij}	ZR _{ij}	R _i
i - j		TM _i	TP _i	TM _j	TP _j					
1 – 2	5	0	0	5	5	0	0	0	0	0
2 – 3	2	5	5	7	8	1	0	0	1	0
2 – 4	4	5	5	9	9	0	0	0	0	0
3 – 5	7	7	8	14	15	1	0	-1	0	1
3 – 6	3	7	8	14	16	6	4	3	5	1
4 – 5	5	9	9	14	15	0	0	0	1	0
4 – 7	3	9	9	12	12	0	0	0	0	0
4 – 8	8	9	9	19	20	3	2	2	3	0
5 – 6	0	14	15	14	16	2	0	-1	1	1
5 – 8	5	14	15	19	20	1	0	-1	0	1
6 – 8	4	14	16	19	20	2	1	-1	0	2
6 – 9	9	14	16	26	26	3	3	1	1	2
7 – 8	4	12	12	19	20	4	3	3	4	0
7 – 9	14	12	12	26	26	0	0	0	0	0
8 – 9	6	19	20	26	26	1	1	0	0	1
9 – 10	4	26	26	30	30	0	0	0	0	0

8.2 Metóda CPM – GE

Metódou CPM na zostavovanie plánov zložitých nadväzných procesov je možné určiť činnosti, ktoré sú pre uskutočnenie akcie z hľadiska časového kritické – sled hrán tvoriacich kritickú cestu, pre ostatné činnosti vyčíslit' vhodné druhy rezerv apod.. Základná verzia CPM však neumožňuje objektívne a účelne prerozdeliť identifikované rezervy v grafe na tie činnosti, ktoré sú pre dodržanie termínu ukončenia projektu rozhodujúce.

Nevýhodou základnej verzie CPM je práve to, že všetky činnosti kladie z hľadiska dôležitosti pre úspešné uskutočnenie projektu na rovnakú úroveň. Znamená to, že rovnakú dôležitosť prisudzuje činnosti fiktívnej (ktorá reálne vôbec neexistuje), ako činnosti objektívne najdôležitejšej (napr. postaveniu piliera mostnej konštrukcie).

Uvedené nevýhody istým spôsobom redukuje jej modifikácia – tzv. metóda **CPM–GE** (General Electric). Základný princíp spočíva v tom, že okrem odhadnutého resp. skalkulovaného času trvania t_{ij} každej činnosti (príp. ďalších vhodných údajov – náklady, spotreba materiálu, počet pracovných síl, nasadená mechanizácia a pod.) môžeme každej činnosti priradiť tzv. **preferenčné číslo** (preferenciu, významnosť činnosti) w_{ij} .

Preferenčné čísla určujeme obvykle z intervalu (0 až 9) podľa nasledovných pravidiel:

- $w_{ij} = 0$ – platí pre fiktívnu činnosť,
- $w_{ij} = 1$ – sa priradí činnosti najľahšie splniteľnej, najmenej dôležitej pre realizáciu celého projektu, pričom môžeme priradiť hodnoty až po
- $w_{ij} = 9$ – pre rozhodujúce činnosti, u ktorých je najväčšie riziko nedodržania stanovených časov.

Práve preferenčné čísla w_{ij} umožnia prerozdeliť rezervy v grafe na tie činnosti, ktoré sú pre realizáciu projektu rozhodujúce a tak zabezpečiť čo najreálnejší priebeh realizácie projektu.

Základný postup riešenia projektu metódou CPM–GE je nasledovný :

1. Sieťový graf vyriešime primárnou verziou metódy CPM, tzn. prečíslujeme vrcholy grafu, určíme všetky najskôr a najneskôr možné počiatky činností TM_j a TP_i , určíme celkový čas trvania projektu T_n , sled hrán tvoriacich kritickú cestu a kvantifikujeme celkové rezervy CR_{ij} .
2. Každéj činnosti priradí preferenčné číslo $w_{ij} \in (0, 9)$, podľa jej dôležitosti v projekte.
3. Pomocou preferenčných čísel w_{ij} určíme tzv. pomocné hodnoty G_j a H_j pomocou vzťahov:

$$G_k = 1$$

$$G_i = \max_j (G_j + w_{ij}) \quad (8.9)$$

$$H_j = \max_i w_{ij}$$

4. Využitím hodnôt G_j a H_j určíme časy TS_j – t.j. skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch podľa vzťahov :

$$TS_1 = 0$$

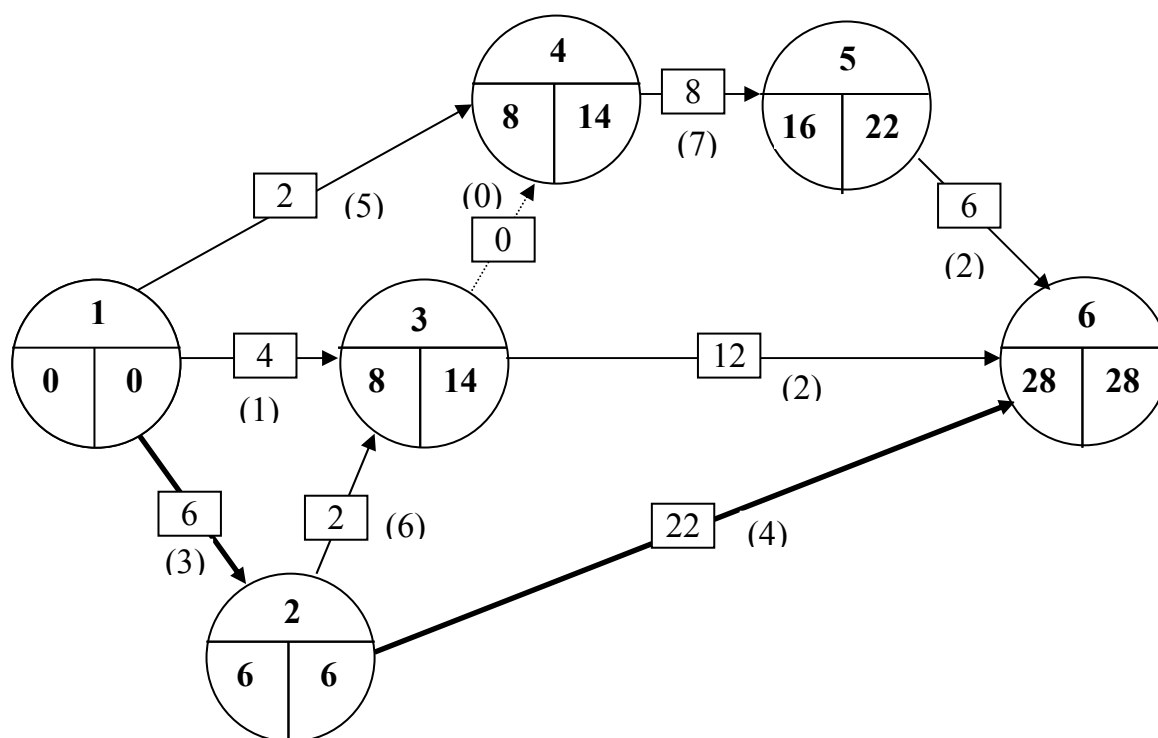
$$TS_j = \max_i \left[\frac{(TS_i + t_{ij}) \cdot G_j + TP_j \cdot H_j}{G_j + H_j} \right] \quad (8.10)$$

5. Vypočítame prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti, odpovedajúce ich preferenciám na základe vzťahu

$$SR_{ij} = TS_j - TS_i - t_{ij} \quad (8.11)$$

Realizácia výpočtu sieťového grafu podľa obr.8.10 pomocou metódy CPM-GE.

Riešenie :



Obr.8.10. Sieťový graf pre metódu CPM – GE

Poznámka : Čísla v štvorčekoch na jednotlivých hranách znamenajú časy trvania príslušných činností t_{ij} a hodnoty uvedené bez rámečka v zátvorke pri hrane prezentujú určené preferenčné čísla w_{ij} .

1. Príslušné časy TM_j a TP_i , ako aj kritická cesta sú uvedené v sieťovom grafe (Obr.8.10). Vypočítané celkové rezervy CR_{ij} sú spolu s časmi TM a TP uvedené v tabuľke (tab.8.6).
2. Preferenčné čísla w_{ij} boli určené hodnotami v Obr.8.10, t.j. číslo na hrane v zátvorke, napr. (3).
3. Určenie hodnôt G_j a H_j pre jednotlivé vrcholy je vhodné vykonať v incidenčnej tabuľke (matici) preferenčných hodnôt w_{ij} (tab.8.6), pričom postup ich výpočtu je nasledovný :
 - hodnoty H_j sa určujú jednoducho tak, že v každom stĺpci nájdeme maximálne preferenčné číslo w_{ij} a napíšeme ho priamo ako príslušnú hodnotu H_j ,
 - hodnoty G_i určujeme spätným chodom tak, že koncovému uzlu (v našom prípade uzol U_6) priradíme hodnotu $G_6 = 1$ a ostatné hodnoty G_i určujeme ako maximálny súčet hodnoty G_j a preferenčného čísla w_{ij} v každom riadku.

Konkrétne v tomto prípade je v 5. riadku takýto súčet jediný ($w_{56} + G_6 = 3 = G_5$) a takisto v 4.riadku ($w_{45} + G_5 = 10 = G_4$). V 3.riadku už existujú tieto súčty dva ($w_{34} + G_4 = 10$ a $w_{36} + G_6 = 3$). Ako hodnotu G_3 berieme väčšiu z nich, tzn. $G_3=10$.

Analogicky pre 2. riadok $G_2 = \max(16, 5) = 16$ a pre prvý riadok $G_1 = \max(19, 11, 15) = 19$.

Tab.8.5. Incidenčná tabuľka preferenčných čísel.

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	X	3	1	5		
2		X	6			4
3			X	0		2
4				X	7	
5					X	2
6						X
G_j	19	16	10	10	3	1
H_j	-	3	6	5	7	4

4. Príslušné výpočty skutočných časov TS_j počiatkov činností začínajúcich v jednotlivých uzloch vykonávame podľa podobných pravidiel ako časy najskôr možných počiatkov TM v základnej metóde CPM s tým rozdielom, že sa určujú podľa vzťahu (8.10). Výsledné hodnoty riešeného príkladu sú uvedené v *tab.8.6*.

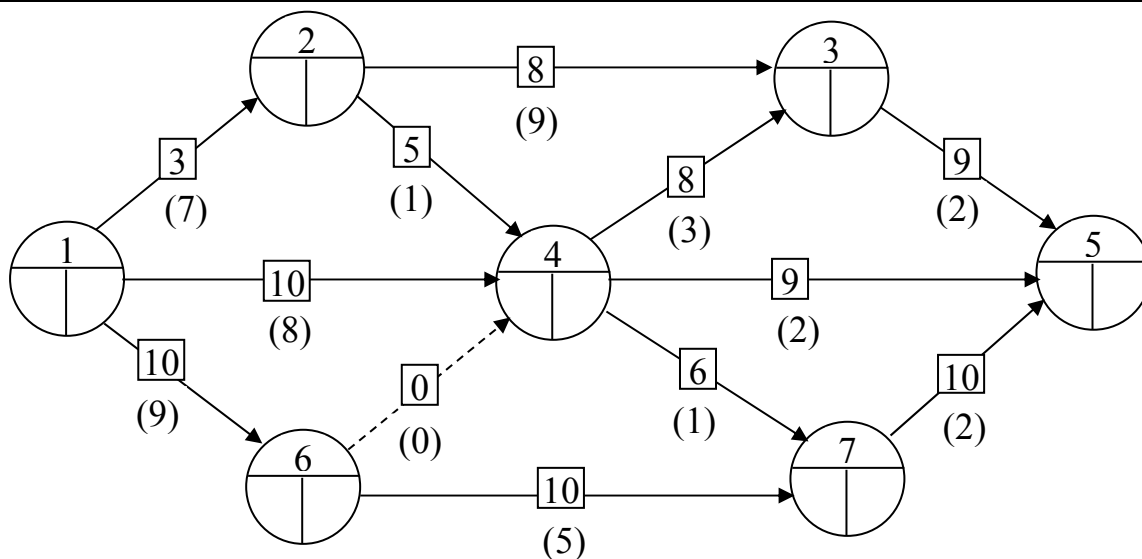
Tab.8.6. Riešenie siete metódou CPM – GE

Činnosť		t_{ij}	w_{ij}	i		j		CR_{ij}	G_j	H_j	TS_j	SR_{ij}
i	j			TM _i	TP _i	TM _j	TP _j					
1	2	6	3	0	0	6	6	0	16	3	6	0
1	3	4	1	0	0	8	14	10	10	6	10,25	6,25
1	4	2	5	0	0	8	14	12	10	5	11,5	9,25
2	3	2	6	6	6	8	14	6	10	6	10,25	2,25
2	6	22	4	6	6	28	28	0	1	4	28	0
3	4	0	0	8	14	8	14	6	10	5	11,5	1,25
3	6	12	2	8	14	28	28	8	1	4	28	0
4	5	8	7	8	14	16	22	6	3	7	21,25	1,75
5	6	6	2	16	22	28	28	6	1	4	28	0

Postup riešenia nadväzného technologického procesu metódou CPM-GE si demonštrujeme ešte na ďalšom príklade zo stavebnej praxe (*príklad.8.2*).

Príklad 8.2: Projekt obnovy živelnou pohromou poškodeného mosta je rozdelený do 7 hlavných činností, ktorých logická nadväznosť, časové trvanie a preferencie sú na obr.8.11. Úlohou je:

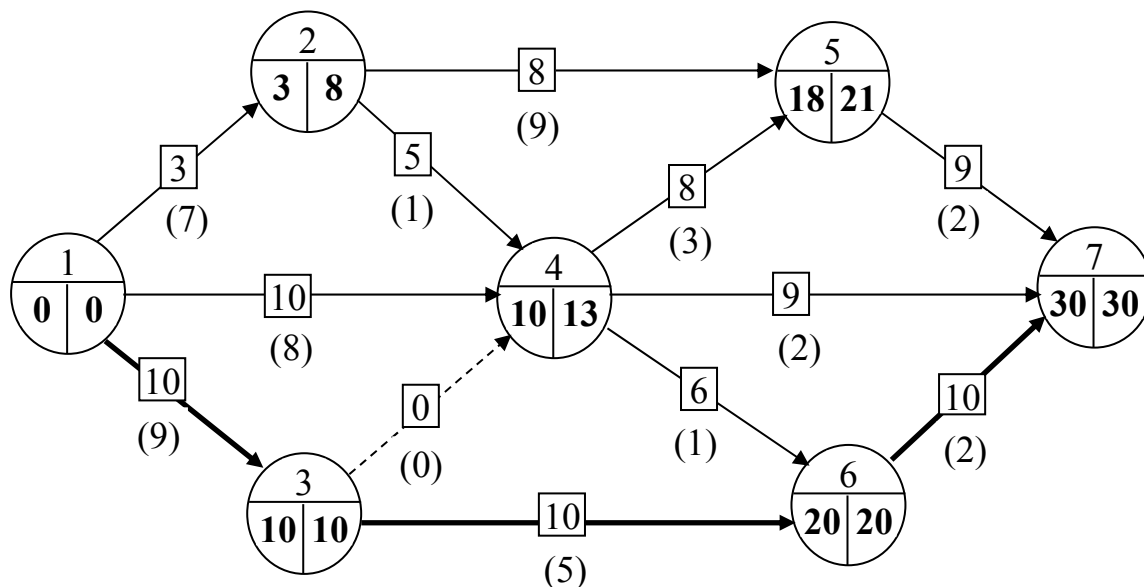
1. prečíslovať vrcholy,
2. metódou CPM určiť najskôr možné počiatky činností TM_j a najneskôr možné počiatky činností TP_i , minimálny možný čas trvania projektu T_n a kritickú cestu KC výpočtom priamo v grafe a tiež výpočtom v incidenčnej matici,
2. metódou CPM–GE určiť pomocné hodnoty G_j a H_j výpočtom v incidenčnej matici,
3. určiť celkovú časovú rezervu CR_{ij} pre každú jednu činnosť, skutočné časy počiatkov TS_j činností v jednotlivých uzloch a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti RS_{ij} .



Obr.8.11. Sieťový graf úlohy.

Riešenie :

1. Prečíslovanie vrcholov, hodnoty vypočítaných najskôr možných počiatkov a najneskôr možných počiatkov jednotlivých činností a určenie kritickej cesty sú uvedené v grafe na obr.8.12.



Obr.8.12. Prečíslovanie vrcholov a určenie časov TM_{ij} a TP_{ij} .

Z prepočtu v grafe vyplýva: minimálny možný čas realizácie projektu je $T_n = 30$ a kritická cesta prechádza uzlami $KC = U_1 - U_3 - U_6 - U_7$. Výpočet prostredníctvom incidenčnej matice:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	TP _i
1	X	3	10	10				<u>0</u>
2		X		5	8			<u>8</u>
3			X		0	10		<u>10</u>
4				X	8	6	9	<u>13</u>
5					X		9	<u>21</u>
6						X	10	<u>20</u>
7							X	<u>30</u>
TM _j	<u>0</u>	<u>3</u>	<u>10</u>	<u>10</u>	<u>18</u>	<u>20</u>	<u>30</u>	

3. Výpočet pomocných hodnôt G_j a H_j pomocou incidenčnej tabuľky preferencií:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	X	7	9	8			
2		X		1	9		
3			X	0		5	
4				X	3	1	2
5					X		2
6						X	2
7							X
G _j	19	12	8	6	3	3	1
H _j	-	7	9	8	9	5	2

4. Celkové časové rezervy pre každú činnosť CR_{ij} , skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch TS_j a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti SR_{ij} sú:

i - j	t _{ij}	w _{ij}	i		j		G _j	H _j	CR _{ij}	TS _j	SR _{ij}
			TM _i	TP _i	TM _j	TP _j					
1-2	3	7	0	0	3	8	12	7	5	4	1
1-3	10	9	0	0	10	10	8	9	0	10	0
1-4	10	8	0	0	10	13	6	8	3	11	1
2-4	5	1	3	8	10	13	6	8	5	11	2
2-5	8	9	3	8	18	21	3	9	10	18	8
3-4	0	0	10	10	10	13	6	8	3	11	1
3-6	10	5	10	10	20	20	3	5	0	20	0
4-5	8	3	10	13	18	21	3	9	3	20	1
4-6	6	1	10	13	20	20	3	5	4	18	3
4-7	9	2	10	13	30	30	1	2	11	26	10
5-7	9	2	18	21	30	30	1	2	3	29	1
6-7	10	2	20	20	30	30	1	2	0	30	0

Pri reálnej aplikácii metódy CPM väčšinou nevystačíme s jedným sieťovým grafom na jednej úrovni. Pri plánovaní zložitých rozsiahlych projektov napr. vodných diel, jadrových elektrární apod. sa v hlavnom grafe uvádzajú iba významné etapy (činnosti projektu) napr. montáž technologického zariadenia, stavba hlavnej hrádze apod., ktoré sa ďalej detailne rozpracúvajú v ďalších čiastkových sieťových grafoch.