

## **1. LINEÁRNE PROGRAMOVANIE – PODSTATA, ÚLOHY, MODEL**

Cieľ prednášky: **definovať princípy** pre formuláciu modelu úloh LP; **pochopiť tvar zápisu lineárneho matematického modelu** v rozpísanom, ako aj sumačnom tvare a **vytvoriť predpoklady** pre rozvoj schopnosti študentov zostaviť adekvátny model a pochopiť princíp grafického riešenia jednoduchších úloh LP. Objasnené budú všeobecné princípy zostavovania modelu ÚLP, ukázaný postup tvorby modelu na niekoľkých typických úlohách LP, bude definovaný všeobecný zápis modelu ÚLP a ukázaný princíp grafickej interpretácie riešenia ÚLP.

### **Úvod**

Oblasť lineárneho programovania patrí medzi najviac prepracované oblasti matematického programovania, t.j. *hľadania optimálnych riešení RP s obmedzujúcimi podmienkami*.

**Lineárne programovanie** = časť matematického programovania a teda aj operačnej analýzy, zaoberajúca sa riešením rozhodovacích úloh, v ktorých *ide o určenie intenzít realizácie procesov*, ktoré v analyzovanom systéme prebiehajú alebo môžu prebiehať.

Je pritom **nutné rešpektovať aj všetky významné podmienky**, ktoré realizáciu týchto procesov ovplyvňujú. Úloha rozhodovateľa = nájsť také riešenie, aby zvolený cieľ rozhodovania (rozhodovacie kritérium) bol splnený čo najlepšie. **Hľadá sa také riešenie, ktoré zaistí extrémnu hodnotu funkcie rozhodovacieho kritéria.**

- Slovo **programovanie** je synonymom pre plánovanie alebo vytváranie programov (scenárov) budúceho vývoja systému. Nemá nič spoločné s obvyklým chápaním – tvorba softvéru.
- Slovo **lineárny** zase vyjadruje, že všetky väzby v takomto modeli sú väzbami lineárnymi, tzn. všetky matematické funkcie použité v modeli sú lineárne funkcie.

V prvej prednáške bolo **lineárne programovanie (LP)** definované ako časť matematického programovania, v ktorej je kritérium rozhodovania, ako aj všetky rovnice / nerovnice podmienok obmedzení tvorené **výhradne lineárnymi výrazmi**.

Znamená to, že model ÚLP nesmie obsahovať žiadnu nelineárnu závislosť použitých premenných a preto premenné v modeli:

- sa vždy vyskytujú iba v prvej mocnine,
- nie sú argumentom inej funkcie (goniometrická, logaritmická, mocninová, exponenciálna a pod.),
- nesmú byť medzi sebou násobené.

## 1.1 Princípy formulácie modelov úloh LP

Pre zostavenie matematického modelu v LP je nutné modelovaný systém spoznať, t.j. mať riešený problém dobre zadefinovaný a verbálne popísaný (t.j. mať sformulovaný tzv. **všeobecný**, inak aj **ekonomický model** zadaného rozhodovacieho problému).

### 1.1.1 Definovanie a tvorba všeobecného modelu ÚLP

Pre tvorbu všeobecného modelu úlohy LP (ÚLP) je nutné zadefinovať a detailne popísať:

- **Cieľ** - ktorý chceme prostredníctvom ovplyvňovania určitých procesov v systéme dosiahnuť (tzv. **optimalizačné kritérium**).
- **Procesy** - ktorými je možné ovplyvňovať výsledný efekt (tzv. **riaditeľné vstupy** = **premenné**).
- **Činitele** - ktoré akýmkoľvek podstatným spôsobom obmedzujú realizáciu procesov a ktoré nemôžeme v rámci riešenia RP žiadnym spôsobom ovplyvniť (tzv. **neriaditeľné vstupy**).

Definovanie všeobecného (ekonomického) modelu RP, t.j. stanovenie a vyjadrenie všetkých uvedených prvkov modelu, je často zložitá záležitosť. Často je nemysliteľné bez účasti pracovníkov objektu rozhodovania (podniku, firmy, organizácie apod.), ktorí skúmaný systém a najmä prvky, procesy a činitele v ňom detailne poznajú.

Pre definovanie všeobecného modelu RP je nutné:

- dobre poznať fungovanie skúmaného systému,
- mať kvalitné a pravdivé informácie a
- uvedomiť si možnosti ďalších súvislostí, ktoré môžu mať na výsledné riešenie vplyv.

Pri ďalšom výklade už budeme vychádzať z toho, že verbálna definícia problému, t.j. jeho všeobecný model, už poznáme. Primárnym cieľom bude **objasniť proces tvorby matematických modelov** na základe už **formulovaného ekonomického modelu rozhodovacieho problému**.

### **1.1.2 Definovanie a tvorba matematického modelu ÚLP**

Zostavovanie matematického modelu je tvorivá, logickým myslením podmienená, činnosť.

Pri tvorbe matematických modelov sa však odporúča rešpektovanie týchto krokov:

- 1. Identifikácia a definovanie hľadaných procesných premenných** - definovanie konkrétnych procesov v modeli ako rozhodovacích premenných.
- 2. Definovanie cieľa riešenia** - sformulovanie kritériálnej funkcie.
- 3. Formulácia všetkých významných obmedzení problému** - definovanie činiteľov ovplyvňujúcich rozhodovacie premenné.

## 1. Identifikácia a definovanie rozhodovacích premenných = procesy v modeli

Ide o **číselné hodnoty**, ktoré chceme riešením modelu získať. Riešením matematického modelu už žiadne ďalšie informácie o systéme, okrem informácií daných takýmito číselnými hodnotami rozhodovacích premenných, už nezískame!

Výsledná hodnota kritériálnej (účelovej) funkcie (=cieľ rozhodovania) nám síce napovie, **ako kvalitné je získané riešenie**, ale bohužiaľ nič nepovie o tom, **ako ho môžeme dosiahnuť!**)

Pre identifikáciu premenných je nutné si uvedomiť, **aké všetky číselné hodnoty by bolo dobré poznať pre to, aby sme mohli považovať úlohu za vyriešenú.**

Každá z týchto hľadaných, ale zatiaľ neznámych, číselných hodnôt bude reprezentovaná jednou rozhodovacou premennou.

Vždy je nutné jednoznačne si uvedomiť význam danej premennej (vrátane jej fyzikálneho rozmeru, príp. jednotiek množstva, v ktorých ju meriame).

Napríklad, ak definujeme premennú:

$x_1$  ..... polotovarov typu 1;

$y$  ..... výsledný výrobok;

potom premenné  $x_1$ ,  $y$  nie sú definované správne. „Polotovary“, „výrobok“ sú pravdepodobne určité **hmotné predmety** a premenné vždy reprezentujú **číselné hodnoty**. Je zrejmé, že *predmet*  $\neq$  *číslo*.

Vhodnejšie je preto premenné  $x_l$ ,  $y$  definovať ako:

$x_l$  ..... **počet** polotovarov typu  $l$ ;

$y$  ..... **počet** výsledných výrobkov.

*Jednoznačne slovne sformulovaná a zrozumiteľná definícia rozhodovacích premenných je neoddeliteľnou súčasťou tvorby každého matematického modelu. Bez uvedenia konkrétného významu premenných stráca zmysel aj samotné riešenie rozhodovacej úlohy.*

## **2. Formulovanie kritériálnej funkcie = cieľ optimalizácie**

Kritériálna (účelová) funkcia v podstate predstavuje akési „**meradlo kvality či efektívnosti**“ **určeného riešenia**. Je to vždy funkcia a je vždy závislá na hodnotách (v predchádzajúcej fáze) definovaných rozhodovacích premenných.

Riešením matematického modelu teda *hl'adáme také hodnoty premenných, pre ktoré takáto – kritériálna, účelová - funkcia nadobúda maximálne* (napr. zisk, produktivita, vyťaženosť, objem výroby, ...) resp. *minimálne* (napr. náklady, spotrebovávaný zdroj, počet pracovníkov, ...) *hodnoty*.

*Kritériálna funkcia musí byť zostavená tak, aby jej hodnota „oceňovala“ každé možné riešenie úlohy.* Napr. pre tzv. nákladovú účelovú funkciu: horšie riešenia ocení vysokými nákladmi, riešenia lepšie nižšími nákladmi, riešenie optimálne bude vyjadrené najnižšími možnými nákladmi.

### 3. Formulovanie všetkých obmedzení úlohy = činitele pôsobiace na procesy

Jedná sa o správne sformulovanie všetkých obmedzujúcich činiteľov v RP vo forme rovníc či nerovníc. Dôležité je si uvedomiť najmä:

1. **Čím** sme pri hľadaní optimálneho riešenia úlohy obmedzovaní.
2. **Ako** sme pri riešení obmedzení konkrétnym činiteľom (t.j. aké premenné daný činiteľ obmedzuje a akým spôsobom).

**Príklad:** manažér (rozhodovateľ, rozhodovací subjekt) má za úlohu navrhnúť optimálny výrobný program (výrobný plán) podniku (objekt rozhodovania), ak okrem ďalších činiteľov, je zásadným obmedzením výrobný čas na 2 linkách, ktoré sú v jednej pracovnej zmene k dispozícii.

1. **Čím** sme obmedzení = dispozičným množstvom výrobného času (časových kapacít). Podmienku je možné verbálne sformulovať nasledovne:

**Celkový čas spotrebovaný pri výrobe  $\leq$  celkové dispozičné množstvo výrobného času.**

2. **Ako** sme činiteľom obmedzení = pri 8 hodinovej pracovnej zmene (bez prestojov) platí: *výrobný čas = počet strojov \* 8 h*. Obmedzujúca podmienka bude preto definovaná v tvare:

**Celkový čas spotrebovaný pri výrobe  $\leq 16$  [hod.]**

Pomocou príslušných premenných by už stačilo iba vyjadriť ľavú stranu podmienky.

**Pozor:** je nutné kontrolovať, či výsledný matematický model obsahuje všetky potrebné tzv. **obmedzujúce podmienky**, ktoré rozdeľujeme na:

- **Vlastné obmedzenia (VO)** - obvykle sú zrejmé už z definície všeobecného modelu ÚLP (napr. *neprekročenie zásoby zdrojov, minimálne požadované množstvo, neprekročenie kapacity a pod.*).
- **Obligátne podmienky** - určujúce definičný obor hodnôt jednotlivých premenných (napríklad tzv. *podmienky nezápornosti (PN)* – t.j. *prípustné sú iba nezáporné celé čísla*).

**Tvorba akéhokoľvek modelu je tvorivý proces.** Obvykle sa nepodarí model sformulovať správne na prvý pokus a preto sa môžeme vrátiť do predchádzajúcich krokov jeho tvorby a overujeme ich správnosť. Je možné aj napr. *dodefinovať ďalšie premenné v modeli*.

## 1.2 Možnosti overenia správnosti zostavenia modelu úlohy LP

**Ako si overovať správne zostavenie obmedzujúcich podmienok v modeli LP?** Jedným z osvedčených spôsobov je ich kontrola z hľadiska fyzikálneho rozmeru jednotlivých členov podmienky (napr. *km / hod; m<sup>2</sup>; kusy výroby za pracovnú zmenu* apod.). Znamená to, že fyzikálny rozmer jednotlivých činiteľov, ktoré navzájom sčítavame alebo odčítavame, resp. ktoré porovnávame, musí byť na pravej a ľavej strane podmienky vždy úplne rovnaký.

## **2. FORMULÁCIA MODELOV ZÁKLADNÝCH TYPOV ÚLOH LP**

V rámci operačnej analýzy sa najčastejšie prezentuje niekoľko základných typov modelov ÚLP. Definovanie rozhodovacích úloh v praxi, je obvykle iba variantom či kombináciou takýchto základných typových úloh. Na konkrétnych príkladoch si ukážeme, čo je ÚLP, ako možno zostaviť jej ekonomický a matematický model a čo ich jednotlivé prvky predstavujú. Účelom je pochopiť podstatu (typické vlastnosti a spoločné znaky) takýchto *typových úloh lineárneho programovania*.

### **2.1 Úlohy výrobného plánovania**

**Príklad 1:** *Baliarne kávy plánujú výrobu 2 zmesí kávy (Z1=Mocca a Z2=Štandard). Pre ich výrobu majú od dodávateľov zaistenú dodávku 3 druhov kávových zŕn s objemom  $K_1=40$  ton,  $K_2=60$  ton a  $K_3=25$  ton. Jednotlivé druhy kávových zŕn sa odlišujú kvalitou, ale aj nákupnou cenou. Pri výrobe je nutné dodržať technologické postupy určujúce, aké podiely (napr. percentuálne) jednotlivých druhov zŕn má zmes obsahovať. Skladba oboch zmesí (v tonách kávových zŕn na 1 tonu zmesi) a dispozičné množstvá kávových zŕn sú uvedené v Tabuľke 1.1. Na základe výrobných nákladov a plánovanej predajnej ceny zmesí bol vykalkulovaný nasledovný zisk: zmes  $Z_1$  prinesie plánovaný zisk 2000 Eur / 1 t a zmes  $Z_2$  prináša zisk 1400 Eur / 1 t zmesi. **Úloha:** naplánovať produkciu firmy tak, aby bol jej celkový zisk maximálny. Formulujte matematický model úlohy.*

| Polotovár<br>(výrobný komponent) | Druh zmesi |               | Kapacita<br>[tony] |
|----------------------------------|------------|---------------|--------------------|
|                                  | Mocca = Z1 | Standard = Z2 |                    |
| Kávové zrno - K1                 | 0,5        | 0,25          | 40                 |
| Kávové zrno - K2                 | 0,5        | 0,5           | 60                 |
| Kávové zrno - K3                 | -          | 0,25          | 25                 |

Tab.1.1 Kvantitatívne údaje úlohy

Riešenie:

Matematický model úlohy je

maximalizovať

$$z = 2000 \cdot x_1 + 1400 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX} \quad (\text{ÚF})$$

za obmedzujúcich podmienok

$$0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40$$

$$0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \leq 60 \quad (\text{VO})$$

$$0,25 \cdot x_2 \leq 25$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (\text{PN})$$

a vyjadruje riešenie problému **určenia extrém (MAX/MIN) účelovej funkcie** (ÚF) pri rešpektovaní všetkých obmedzujúcich podmienok = **vlastných obmedzení** (VO) a **podmienok nezápornosti** (PN).

## Ako sme však k takémuto matematickému modelu dospeli?

### 1. Ekonomický model - definovanie a štruktúra

Uvedené zadanie predstavuje stručný popis riešeného rozhodovacieho problému – tzv. **ekonomický model**. Predstavuje typickú podobu zadania ÚLP, ktoré obvykle obsahuje:

- **Cieľ analýzy** – charakterizuje *dosiahnutie stanoveného efektu*. Príklad: *cieľom je naplánovať produkciu oboch zmesí kávy tak, aby bol dosiahnutý maximálny zisk*.
- **Popis procesov** – ktoré v systéme prebiehajú a *majú vplyv na definovaný cieľ analýzy*. Príklad: *máme 2 procesy – výroba zmesi Z1 a Z2*. Každému z nich je pritom možné priradiť jeho úroveň / intenzitu, s akou je realizovaný – t.j. *objem výroby zmesi Z1 a zmesi Z2*.
- **Činitele** – v reálnych úlohách nemôže byť úroveň procesov alebo zdrojov nikdy neobmedzená, *vždy sú niečím limitované*. Príklad: *máme obmedzené kapacity výrobných činiteľov - kávových zŕn K1, K2, K3*. Popis činiteľov ovplyvňujúcich realizáciu procesu je neoddeliteľnou súčasťou každého ekonomického modelu ÚLP.
- **Vzťahy medzi procesmi, činiteľmi a cieľom** - často vyjadrené v *tvare určitých koeficientov*. Príklad: *opísané pomocou koeficientov spotreby jednotlivých výrobných činiteľov (= kávových zŕn K1 – K3) na výrobu jednotlivých druhov zmesi Z1 a Z2, ako aj pomocou koeficientov v účelovej funkcii, vyjadrujúcich jednotkový zisk*.

| Činiteľ<br>(výrobný komponent, polotovár) | Druh zmesi       |                     | Kapacita, zásoba<br>[tony] |
|-------------------------------------------|------------------|---------------------|----------------------------|
|                                           | Mocca Z1 = $x_1$ | Standard Z2 = $x_2$ |                            |
| Kávové zrno - K1                          | 0,5              | 0,25                | 40                         |
| Kávové zrno - K2                          | 0,5              | 0,5                 | 60                         |
| Kávové zrno - K3                          | -                | 0,25                | 25                         |
| Zisk [Eur / 1 tona]                       | 2000             | 1400                |                            |

*Tab.1.2 Ekonomický model úlohy*

## 2. Matematický model - ako transformácia ekonomického modelu

Pre zopakovanie - pri tvorbe matematických modelov realizujeme nasledovné kroky:

- 1. Identifikácia a definovanie hľadaných procesných premenných** - definovanie konkrétnych procesov v modeli ako rozhodovacích premenných.
- 2. Definovanie cieľa riešenia** - sformulovanie kritériálnej funkcie.
- 3. Formulácia všetkých významných obmedzení problému** - definovanie činiteľov ovplyvňujúcich rozhodovacie premenné.

- 1. Identifikácia procesných premenných:** v ekonomickom modeli máme definované 2 procesy – a preto každému z nich priradíme jednu premennú, t.j.  $x_1$  = **množstvo vyrobenej zmesi Z1** a  $x_2$  = **množstvo vyrobenej zmesi Z2** (v tonách) v navrhovanom výrobnom programe firmy.
- 2. Definovanie cieľa optimalizácie:** každá vyrobená tona zmesi Z1 prinesie zisk 2000 Eur. Pri výrobe  $x_1$  ton zmesi Z1 bude teda dosiahnutý zisk  $2000 \cdot x_1$  (Eur), rovnako výroba  $x_2$  ton zmesi Z2 prinesie zisk  $1400 \cdot x_2$  (Eur).

Celkový zisk z výrobného programu ( $x_1$  ton výrobku Z1,  $x_2$  ton výrobku Z2) je potom možné zapísať formou lineárnej rovnice v tvare

$$z = 2000 \cdot x_1 + 1400 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX},$$

ktorú budeme nazývať **účelová (kriteriálna) funkcia (ÚF)**.

Jej koeficienty budeme nazývať **cenové koeficienty** (t.j. ocenenie ich významu – nie vždy to musia byť iba financie, ale aj iné parametre, napr. *minimálny odpad, miera rizika, ....*). V tomto prípade sa jedná o **funkciu typu maximalizačného** (požadujeme MAX zisk)

- 3. Formulácia obmedzujúcich podmienok:** na výrobu jednej tony zmesi Z1 sa spotrebuje 0,5 t činiteľa K1 (kávové zrná K1) a teda na výrobu  $x_1$  ton sa jej spotrebuje  $0,5 \cdot x_1$  ton. Analogicky na výrobu jednej tony zmesi Z2 sa spotrebuje 0,25 t činiteľa K1 a na výrobu  $x_2$  ton sa jej spotrebuje  $0,25 \cdot x_2$  ton.

Celková spotreba činiteľa K1, t.j. kávových zŕn K1 je potom určená súčtom  $0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2$ . Spotreba však musí byť ( $\leq$ ) dispozičnému množstvu (kapacite) činiteľa K1, ktorá je 40 ton. Vyjadrením takejto podmienky je lineárna nerovnica v tvare

$$0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40.$$

Analogicky by sme získali aj tvar nerovníc vyjadrujúcich vzťahy medzi spotrebou a zásobou výrobných činiteľov K2 resp. K3, ktoré by mali tvar

$$0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \leq 60.$$

$$0,25 \cdot x_2 \leq 25.$$

Uvedené nerovnice predstavujú matematické vyjadrenie všetkých činiteľov definovaných v ekonomickom modeli úlohy. Každému jednému činiteľu v rámci ekonomického modelu teda odpovedá jedna lineárna nerovnica (alebo rovnica), ktoré nazývame **vlastné obmedzenia (VO)**.

VO obvykle obsahujú dva druhy parametrov a to:

- **štruktúrne koeficienty** – definujúce vzťah medzi činiteľmi a procesmi (napr. potreba 0,5 t K1 na vyrobenie 1 t Z1, resp. 0,25 t K2 na výrobu 1 t Z2) a
- **hodnoty pravej strany** – definujúce absolútnu úroveň činiteľov (zásoba K1, K2, K3).

V ÚLP sa obvykle definujú aj ďalšie podmienky, zaisťujúce napr. nezápornosť všetkých štruktúrnych premenných. Premenné v modeli majú vždy určitú ekonomickú interpretáciu, kde sa neuvažuje s ich zápornými hodnotami (*objem produkcie, prepravný výkon, výška investície a pod.*).

Takéto podmienky sú **podmienky nezápornosti (PN)** a pre príklad majú tvar

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Vlastné obmedzenia a podmienky nezápornosti budeme v rámci LP nazývať súhrnným pojmom **obmedzujúce podmienky**. Výsledná podoba matematického modelu pre zadanú ÚLP má tvar:

|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| $z = 2000.x_1 + 1400.x_2 \rightarrow \text{MAX}$ | (ÚF) |
| $0,5.x_1 + 0,25.x_2 \leq 40$                     |      |
| $0,5.x_1 + 0,5.x_2 \leq 60$                      | (VO) |
| $0,25.x_2 \leq 25$                               |      |
| $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$                  | (PN) |

***Matematický model ÚLP vyjadruje riešenie problému určenia extrému (MAX/MIN) účelovej funkcie z (ÚF) pri rešpektovaní obmedzujúcich podmienok, t.j. vlastných obmedzení (VO) a podmienok nezápornosti (PN).***

Z matematického pohľadu sa pri riešení ÚLP jedná o určenie hodnôt premenných  $x_1$  a  $x_2$ , tak aby neboli porušené VO ani PN a aby bola hodnota ÚF maximalizovaná. **Prakticky to znamená:** nájsť takú kombináciu premenných  $x_1$  a  $x_2$ , aby boli splnené všetky VO a PN, ale aby zároveň dosiahla ÚF maximálnu (vo všeobecnosti extrém MAX alebo MIN) možnú hodnotu.

### Pre ilustráciu uvidíme prehľad niektorých možných riešení ÚLP:

V Tabuľke 1.3 je uvedených niekoľko kombinácií premenných  $x_1$  a  $x_2$  – t.j. **vektorov riešení** ÚLP v tvare  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$ . Ukážme si, či všetky spĺňajú obmedzujúce podmienky zadanej úlohy.

Tabuľka obsahuje: označenie riešenia, hodnoty premenných, zostávajúcu (nevyužitú) kapacitu činiteľov alebo naopak jej nedostatok (hodnoty získané porovnaním ľavej a pravej strany VO) a tiež výslednú hodnotu účelovej funkcie (ZISK), určenú dosadením hodnôt premenných do ÚF.

| Riešenie       | Premenné<br>[tony]         |                            | Zostatok (+) / nedostatok (-)<br>kapacít |           |           | Zisk<br>[tis. Eur] |
|----------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------------------|-----------|-----------|--------------------|
|                | <b>Z1=<math>x_1</math></b> | <b>Z2=<math>x_2</math></b> | <b>K1</b>                                | <b>K2</b> | <b>K3</b> |                    |
| $\mathbf{x}^1$ | 0                          | 0                          | 40                                       | 60        | 25        | 0                  |
| $\mathbf{x}^2$ | 80                         | 0                          | 0                                        | 20        | 25        | 160                |
| $\mathbf{x}^3$ | 0                          | 100                        | 15                                       | 10        | 0         | 140                |
| $\mathbf{x}^4$ | 50                         | 50                         | 25                                       | 10        | 12,5      | 170                |
| $\mathbf{x}^5$ | 80                         | 20                         | -5                                       | 10        | 20        | 188                |

Tab.1.3 Prípustné a neprípustné riešenia úlohy

- **Riešenie  $\mathbf{x}^1$**  vyjadruje situáciu, kedy sa ani jedna zo zmesí Z1 a Z2 nevyrába – a teda sa ani žiadny z výrobných činiteľov (kávových zŕn) nespotrebováva a zisk je nulový.

- **Riešenia  $\mathbf{x}^2$  resp.  $\mathbf{x}^3$**  ukazujú maximálnu možnú produkciu zmesi Z1 resp. Z2 (maximálnu vzhľadom k zadaným dispozičným množstvám). Zmesi Z1 nemôže byť vyrobená viac ako 80 ton, pretože by k tomu nestačila kapacita kávových zŕn K1. Podobne zmesi Z2 nie je možné vyrobiť viac ako 100 ton, kvôli obmedzenej kapacite kávových zŕn K3. V prvom prípade je zisk 160 tis Eur, v druhom bude zisk 140 tis Eur. Znamená to, že riešenie  $\mathbf{x}^2$  je lepšie ako  $\mathbf{x}^3$ . Je však ľahko dokázateľné, že sa nejedná o najlepšie možné riešenie.
- **Riešenie  $\mathbf{x}^4$**  je toho dôkazom. V rámci neho sa vyrába 50 ton zmesi Z1 a rovnaké množstvo zmesi Z2, pričom takýto výrobný program prináša zisk 170 tis Eur. Všetky uvedené riešenia patria do množiny tzv. **prípustných riešení**.

**Prípustné riešenie ÚLP: také riešenie  $\mathbf{x}$ , ktoré vyhovuje všetkým obmedzujúcim podmienkam úlohy, t.j. všetky VO, ako aj PN sú splnené.**

- **Riešenie  $\mathbf{x}^5$**  – situácia je neprípustná – nakoľko výroba 80 ton Z1 a 20 ton Z2 by vyžadovala až 45 ton výrobného činiteľa K1 – avšak také množstvo K1 k dispozícii nie je ( $K1=40$  t).

S ohľadom na kritérium rozhodovania – t.j. hodnotu účelovej funkcie  $z$  ako najlepšie riešenie vychádza  $\mathbf{x}^4$  (pokiaľ neuvažujeme riešenie  $\mathbf{x}^5$ , ktoré však nie je prípustné). Ani riešenie  $\mathbf{x}^4$  však s veľkou pravdepodobnosťou nebude ešte riešením optimálnym (ani jeden z výrobných činiteľov nie je v tomto riešení plne využitý).

**Optimálne riešenie ÚLP:** *je prípustné riešenie s najlepšou hodnotou účelovej funkcie, tzn. s najvyššou hodnotou ÚF v prípade maximalizačnej úlohy resp. najnižšou hodnotou ÚF v prípade úlohy minimalizačnej.*

**Príklad 2:** Podnik vyrába dva druhy výrobkov  $V_1$ ,  $V_2$ . Tabuľka 1 udáva spotrebu surovín  $S_1$  a  $S_2$  v [kg] potrebných na výrobu 1 ks výrobku. Zisk z jedného výrobku  $V_1$  je 18 Eur, zisk z jedného výrobku  $V_2$  je 8 Eur. V tabuľke je uvedené aj množstvo surovín, ktorými podnik disponuje. **Úloha:** určiť tzv. optimálny výrobný plán tak, aby podnik dosiahol maximálny možný zisk.

|                      |          | Výrobok 1 ( $V_1=x_1$ ) | Výrobok 2 ( $V_2=x_2$ ) | Zásoba |
|----------------------|----------|-------------------------|-------------------------|--------|
| Surovina 1 ( $S_1$ ) | [kg/ks]  | 4                       | 2                       | 2 000  |
| Surovina 2 ( $S_2$ ) | [kg/ks]  | 4                       | 1                       | 1 600  |
| Zisk                 | [Eur/ks] | 18                      | 8                       | MAX    |

Tab.2.1 Ekonomický model úlohy

Riešenie:

Podstatu rozhodovacieho problému sa snažíme vyjadriť matematickými prostriedkami a preto musíme najskôr identifikovať a zadefinovať význam **premenných** (tzv. **riaditeľných vstupov**). Pre zadaný problém platí: **premenná  $x_i$  znamená počet vyrobených výrobkov  $V_i$** , pre  $i = 1, 2$ , tzn.

$$x_1 = V_1, \quad x_2 = V_2.$$

Z významu premenných je zrejmé, prečo musia platiť aj **podmienky nezápornosti** v tvare

$$x_i \geq 0, \quad \text{pre } i = 1, 2.$$

Okrem toho je potrebné sformulovať aj **vlastné obmedzenia**. Napríklad lineárny výraz

$$4.x_1 + 2.x_2$$

vyjadruje množstvo suroviny  $S_1$  [kg] potrebné na výrobu  $x_1$  výrobkov  $V_1$  a  $x_2$  výrobkov  $V_2$ . Množstvo použitej suroviny  $S_1$  však nemôže prevýšiť jej tzv. *disponibilné množstvo*, t.j. zásoby suroviny, ktoré má podnik na zadané obdobie k dispozícii. Obmedzujúca podmienka potom bude

$$4x_1 + 2x_2 \leq 2\,000.$$

Rovnako je možné získať aj obmedzujúcu podmienku pre spotrebu suroviny  $S_2$ , ktorá má tvar

$$4x_1 + x_2 \leq 1\,600.$$

Vyžadujeme maximálny zisk, preto bude **účelová funkcia** typu maximalizačného a platí

$$z = z(x_1, x_2) = 18x_1 + 8x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

a hovoríme o tzv. **maximalizačnej úlohe**.

Matematický model úlohy má tvar:

maximalizovať

$$z = 18.x_1 + 8.x_2 \rightarrow \text{MAX} \quad (\text{ÚF})$$

za obmedzujúcich podmienok

$$4.x_1 + 2.x_2 \leq 2\,000$$

$$4.x_1 + x_2 \leq 1\,600 \quad (\text{VO})$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (\text{PN})$$

## 2.2 Zmiešavacia úloha (nutričný problém)

**Príklad 3:** Podnik má vytvoriť krmnú zmes, ktorá bude obsahovať aspoň 308 mg vápnika a aspoň 214 mg horčíka. Používa pritom dva typy krmív. Jeden kilogram krmiva  $K_1$  obsahuje 10 mg vápnika, 8 mg horčíka a stojí 5 Eur. Jeden kilogram krmiva  $K_2$  obsahuje 8 mg vápnika, 1 mg horčíka a stojí 0,8 Eura. **Úloha:** stanoviť zloženie výslednej krmnej zmesi tak, aby náklady na jej zaobstaranie boli čo najmenšie. Vytvorte matematický model úlohy.

Riešenie:

Zadané údaje je možné previesť do formy tabuľky (ako časť všeobecného modelu ÚLP) a platí

|         |          | Krmivo 1 ( $K_1=\mathbf{x}_1$ ) | Krmivo 2 ( $K_2=\mathbf{x}_2$ ) | Min. množstvo |
|---------|----------|---------------------------------|---------------------------------|---------------|
| Vápnik  | [mg/kg]  | 10                              | 8                               | 308           |
| Horčík  | [mg/kg]  | 8                               | 1                               | 214           |
| Náklady | [Eur/kg] | 5                               | 0,8                             | MIN           |

Tab.3.1 Ekonomický model úlohy

Riešenie:

Premenné  $x_i$  vyjadrujú množstvo (v kg) krmiva  $K_i$  vo výslednej zmesi,  $i = 1, 2$ . Riešenie úlohy potom predstavuje vektor  $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ , ktorý nazývame **vektor riešení**  $\mathbf{x}$ .

Je zrejmé, že ak sa použije  $x_1$  [kg] krmiva  $K_1$  a  $x_2$  [kg] krmiva  $K_2$  bude množstvo vápnika resp. horčíka vo výslednej zmesi nasledovné:

$$\text{Ca} : 10.x_1 + 8.x_2,$$

$$\text{Mg} : 8.x_1 + x_2.$$

V súvislosti s minimálnym požadovaným množstvom vápnika a horčíka vo výslednej zmesi, budú mať vyššie uvedené **vlastné obmedzenia** tvar

$$\text{Ca} : 10.x_1 + 8.x_2 \geq 308,$$

$$\text{Mg} : 8.x_1 + x_2 \geq 214.$$

Aj v tomto prípade je logické vyžadovať splnenie podmienok nezápornosti v tvare  $x_i \geq 0$ , pre  $i = 1, 2$ , pretože nie je možné využiť záporné množstvo krmiva.

Celkové náklady na zaobstaranie krmnej zmesi sú určené účelovou funkciou v tvare

$$z = z(x_1, x_2) = 5.x_1 + 0,8.x_2 \rightarrow \text{MIN},$$

**účelová funkcia** je typu minimalizačného a hovoríme o tzv. **minimalizačnej úlohe**. Matematický model úlohy:

|                                              |
|----------------------------------------------|
| $z = 5.x_1 + 0,8.x_2 \rightarrow \text{MIN}$ |
| $10.x_1 + 8.x_2 \geq 308$                    |
| $8.x_1 + x_2 \geq 214$                       |
| $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$                    |

## 2.3 Rozdeľovacia úloha (rezný plán)

**Príklad 4:** Uvažujme, že máme k dispozícii dostatočné množstvo základných lán o dĺžke 32 m. K ďalšiemu použitiu potrebujeme aspoň 12 ks lán s dĺžkou 20 m, najmenej 20 ks lán dlhých 11 m a najmenej 26 ks lán s dĺžkou 6 m. **Úloha:** stanoviť optimálny plán (skladbu) rezania vzhľadom k požiadavke vzniku minimálneho odpadu. Zostavte adekvátny matematický model úlohy.

Riešenie:

Najskôr musíme určiť jednotlivé rezné plány (t.j. spôsoby, ktorými je možné základné laná s dĺžkou  $L=32$  m rozrezať na kusy dĺžky  $L_1=20$  m,  $L_2=11$  m a  $L_3=6$  m) a stanoviť, aký počet základných lán každým z týchto spôsobov rozrežeme. Zostavíme tabuľku rezných plánov (Tab.4.1).

| Základná dĺžka $L = 32$ [m] | Rezný plán |     |      |     |    | Požadované množstvo |
|-----------------------------|------------|-----|------|-----|----|---------------------|
|                             | I.         | II. | III. | IV. | V. |                     |
| $L_1 = 20$ [m]              | 1          | 1   | 0    | 0   | 0  | 12                  |
| $L_2 = 11$ [m]              | 1          | 0   | 2    | 1   | 0  | 20                  |
| $L_3 = 6$ [m]               | 0          | 2   | 1    | 3   | 5  | 26                  |
| Odpad [m]                   | 1          | 0   | 4    | 3   | 2  | MIN                 |

Tab.4.1 Tabuľka rezných plánov zo zadania príkladu

Napríklad: **rezný plán I** znamená, že zo základného lana o dĺžke  $L=32$  m narežeme 1 ks 20 m dlhého lana ( $L_1$ ), 1 ks 11 m dlhého lana ( $L_2$ ) a zostane odpad dĺžky 1 m. Význam ostatných rezných plánov je možné interpretovať analogicky. Teraz môžeme definovať ekvivalentný matematický model takto formulovaného rozhodovacieho problému.

Premenné  $x_i$  predstavujú **počet základných 32 m lán rozrezaných podľa i-teho rezného plánu**, pre  $i=1,2,\dots,5$ . Riešenie rezného problému reprezentuje vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

Ak rozrežeme  $x_1$  základných lán podľa rezného plánu I., ..... až  $x_5$  lán podľa rezného plánu V, potom celkom narežeme

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 & \text{ks 20 m dlhých lán } (L_1) \\ x_1 & + 2 \cdot x_3 + x_4 \quad \text{ks 11 m dlhých lán } (L_2) . \\ 2 \cdot x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 & \text{ks 6 m dlhých lán } (L_3) \end{array}$$

a po rezaní zostane odpad s celkovou dĺžkou (v metroch)

$$z = x_1 + 4 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 \rightarrow \text{MIN}$$

Aj v tomto prípade sú vyžadované podmienky nezápornosti v tvare  $x_i \geq 0$ , pre  $i=1,2,\dots,5$ , pretože žiadnym zo spôsobov nie je možné rozrezať záporné množstvo základných lán.

Matematický model úlohy:

$$\begin{array}{rcl} z = x_1 & + 4.x_3 + 3.x_4 + 2.x_5 & \rightarrow \text{MIN} \\ \hline x_1 + x_2 & & \geq 12 \\ x_1 & + 2.x_3 + x_4 & \geq 20 \\ 2.x_2 & + x_3 + 3.x_4 + 5.x_5 & \geq 26 \\ \hline x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \text{ tzn. } x_i \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, 5. \end{array}$$

**Príklad 4a:** Modifikujme zadanie Príkladu 4. Všetky predpoklady aj požiadavky zostávajú nezmenené, iba zmeňme kritérium optimality. **Úloha:** stanoviť optimálny plán (skladbu) rezania vzhľadom k požiadavke minimálneho počtu spotrebovaných základných lán o dĺžke  $L=32$  m. Zostavte adekvátny matematický model úlohy.

Riešenie: Matematický model sa od predchádzajúceho bude líšiť iba tvarom účelovej funkcie a platí

$$\begin{array}{rcl} z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \rightarrow \text{MIN} \\ \hline x_1 + x_2 & & \geq 12 \\ x_1 & + 2.x_3 + x_4 & \geq 20 \\ 2.x_2 & + x_3 + 3.x_4 + 5.x_5 & \geq 26 \\ \hline x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \text{ tzn. } x_i \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, 5. \end{array}$$

## 2.4 Ďalšie úlohy výrobného plánovania (obmedzenie kapacitou prevádzky)

**Príklad 5:** Podnik vyrába 2 typy výrobkov  $V_1$  a  $V_2$  v dvoch prevádzkach  $P_1$  a  $P_2$ . Za jeden výrobok  $V_1$  realizuje zisk 10 jednotiek, za jeden výrobok  $V_2$  zisk 12 jednotiek. Kapacita prevádzky  $P_1$  stačí na výrobu 6 výrobkov  $V_1$  na zmenu alebo výrobu 12 výrobkov  $V_2$  na zmenu. Kapacita prevádzky  $P_2$  je alebo 12 výrobkov  $V_1$  alebo 8 výrobkov  $V_2$  na zmenu. **Úloha:** naplánovať výrobu (určiť počty výrobkov  $V_1$  a  $V_2$ ) tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk. Definujte matematický model úlohy.

|                 | Výrobok $V_1$ | Výrobok $V_2$ | Kapacita prevádzky |
|-----------------|---------------|---------------|--------------------|
| Prevádzka $P_1$ | 6             | 12            | 1                  |
| Prevádzka $P_2$ | 12            | 8             | 1                  |
| Zisk            | 10            | 12            | MAX                |

Tab.5.1 Tabuľka kapacitou obmedzeného výrobného plánovania

Riešenie:

Po formálne správnom zápise ÚLP do tabuľky je tvorba matematického modelu jednoduchšia.

**Identifikácia premenných:** hľadanému počtu vyrábaných výrobkov  $V_1$  priradíme premennú  $x_1$  a hľadanému počtu výrobkov  $V_2$  premennú  $x_2$ . Je potom zrejmé, že účelová funkcia bude mať tvar

$$z = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}.$$

**Obmedzujúce podmienky:** sú definované množinou tzv. *vlastných obmedzení* - vyjadrujúcich nemožnosť prekročenia disponibilného množstva (zásoby) surovín

- pre prvú prevádzku v tvare  $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$  a

- pre druhú prevádzku v tvare  $\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$ .

Z podstaty úlohy vyplývajú aj *podmienky nezápornosti* – vyjadrujúce skutočnosť, že počet výrobkov nemôže byť reprezentovaný zápornou hodnotou a preto musí platiť

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Účelová funkcia:** pre zmenu uvedieme model vo forme **maticového zápisu** (ÚF), (OP) v tvare

$$z = [10, \quad 12] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{a} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{8} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ \leq \\ \geq \\ \geq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Príklad 6:** Opravovňa robí 3 druhy opráv  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , na ktoré spotrebováva 2 druhy súčiastok  $S_1$  a  $S_2$ . Zisky z jednotlivých opráv sú po rade 54, 45 a 52 jednotiek. Na opravu  $O_1$  (1. typu) sa pritom spotrebujú 2 súčiastky  $S_1$  a 3 súčiastky  $S_2$ , na opravu  $O_2$  je potrebná 1 súčiastka  $S_1$  a 2 súčiastky  $S_2$  a na  $O_3$  potrebujeme 3 súčiastky  $S_1$  a 2 súčiastky  $S_2$ . Na sklade je k dispozícii 600 súčiastok  $S_1$  a 800 súčiastok  $S_2$ . Ďalšou požiadavkou je, že pre zabezpečenie efektívnosti fungovania organizácie je potrebné zabezpečiť minimálne 50 opráv  $O_1$ , 100 opráv  $O_2$  a 80 opráv  $O_3$ . **Úloha:** naplánovať počty opráv tak, aby zisk za ich vykonanie bol maximálny. Definujte matematický model úlohy.

|                       | Oprava $O_1 = x_1$ | Oprava $O_2 = x_2$ | Oprava $O_3 = x_3$ | Zásoba |
|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------|
| Súčiastka $S_1$       | 2                  | 1                  | 3                  | 600    |
| Súčiastka $S_2$       | 3                  | 2                  | 2                  | 800    |
| Minimálny počet opráv | 50                 | 100                | 80                 |        |
| Zisk                  | 54                 | 45                 | 52                 | MAX    |

Tab.6.1 Tabuľka vstupných parametrov úlohy

Riešenie:

Ide o časť úlohu určenia optimálneho plánu výroby pri obmedzených zásobách (surovín, súčiastok) a definovanou hodnotou veľkosti riadených premenných. Matematický model:

$$\begin{array}{rcl}
 z = 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 & \rightarrow & \text{MAX} \\
 \hline
 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 & \leq & 600 \\
 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 & \leq & 800 \\
 \hline
 x_1 & & \geq 50 \\
 & x_2 & \geq 100 \\
 & & x_3 \geq 80
 \end{array}$$

**Príklad 7:** Veliteľ má za úlohu ochrániť základňu pred leteckým útokom. K dispozícii má 5 kusov typov rakiet  $R_1$  a  $R_2$ . Inštalácia jednej rakety  $R_1$  stojí 7 jednotiek nákladov, pre  $R_2$  stojí inštalácia 8,5 jednotiek. K dispozícii má celkom 60 jednotiek nákladov. Jedná raketa  $R_1$  vyžaduje obsluhu 6 osôb, jedná raketa  $R_2$  obsluhu 2 osôb. K dispozícii má 32 vycvičených osôb. V prípade, že by základňa nebola vôbec chránená, je predpoklad jej zničenia 95%. Jedná raketa  $R_1$  je schopná pokryť ochranu 13%, raketa  $R_2$  pokrýva 9% územia základne. **Úloha:** pri zadaných počtoch rakiet, osôb a nákladových jednotiek zabezpečiť maximálnu možnú ochranu objektu.

*Prednáška 3: Lineárne programovanie – podstatá, úlohy, model*

|                      | <b>Raketa <math>R_1 = x_1</math></b> | <b>Raketa <math>R_2 = x_2</math></b> | <b>Zásoba</b> |
|----------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------|
| <b>Náklady</b>       | 7                                    | 8,5                                  | <b>60</b>     |
| <b>Obsluha</b>       | 6                                    | 2                                    | <b>32</b>     |
| <b>Zásoba</b>        | 5                                    | 5                                    |               |
| <b>Ochrana ( % )</b> | <b>13</b>                            | <b>9</b>                             | <b>MAX</b>    |

*Tab.7.1 Tabuľka vstupných parametrov úlohy*

*Riešenie:*

Matematický model:

$$\begin{array}{l}
 z = 13.x_1 + 9.x_2 \rightarrow \text{MAX} \\
 \text{príp. } z^* = 95 - 13.x_1 - 9.x_2 \rightarrow \text{MIN} \\
 \hline
 7.x_1 + 8,5.x_2 \leq 60 \\
 6.x_1 + 2.x_2 \leq 32 \\
 \hline
 0 \leq x_1 \leq 5 \\
 0 \leq x_2 \leq 5
 \end{array}$$

**Príklad 8:** Pri odstraňovaní následkov živeľnej pohromy je potrebné vykonať zemné práce. Z prostriedkov, ktoré sú k dispozícii možno zostaviť 5 funkčných strojových zostáv. Východiskové údaje vo forme všeobecného modelu sú spracované v tabuľke. **Úloha:** určiť koľko a ktorých zostáv je vhodné vytvoriť, aby celkový výkon jednotky za zmenu bol maximálny.

| Stroj              | Zostava     |             |             |             |             | Stroje k dispozícii |
|--------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------------|
|                    | $Z_1 = x_1$ | $Z_2 = x_2$ | $Z_3 = x_3$ | $Z_4 = x_4$ | $Z_5 = x_5$ |                     |
| Autorýpadlo        | 1           | 1           | 1           | 1           | -           | 8                   |
| Automobil sklápací | 3           | 4           | 3           | 4           | -           | 16                  |
| Buldozér           | -           | -           | 1           | 1           | 1           | 10                  |
| Výkon ( $m^3/zm$ ) | 60          | 75          | 70          | 88          | 8           | MAX                 |

Tab.8.1 Tabuľka vhodných druhov strojových zostáv

Riešenie:

Matematický model:

$$Z = 60.x_1 + 75.x_2 + 70.x_3 + 88.x_4 + 8.x_5 \rightarrow \text{MAX}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$$

$$3.x_1 + 4.x_2 + 3.x_3 + 4.x_4 \leq 16$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

## 2.5 Špeciálna úloha LP – dopravný problém

**Príklad 9:** Stavebná firma pracuje na troch rôznych stavbách v miestach A, B a C. V ďalšom týždni je potrebné na tieto stavby zabezpečiť dodávky betónu o objeme  $45 \text{ m}^3$  pre stavbu A,  $30 \text{ m}^3$  pre stavbu B a  $60 \text{ m}^3$  pre stavbu C. Firma vlastní dve betonárky, ktoré môžu v požadovaný týždeň pre účely stavieb A, B a C poskytovať najviac  $80 \text{ m}^3$  (Betonárka 1) a  $65 \text{ m}^3$  (Betonárka 2). Náklady na prepravu jedného  $\text{m}^3$  betónu boli vykalkulované pre každú možnú trasu prepravy, t.j. z každej betonárky na každú zo stavieb. Tieto náklady sú uvedené v tabuľke 9.1. **Úloha:** zabezpečiť stavby požadovaným množstvom betónu tak, aby celkové náklady na jeho prepravu boli čo najnižšie.

Riešenie:

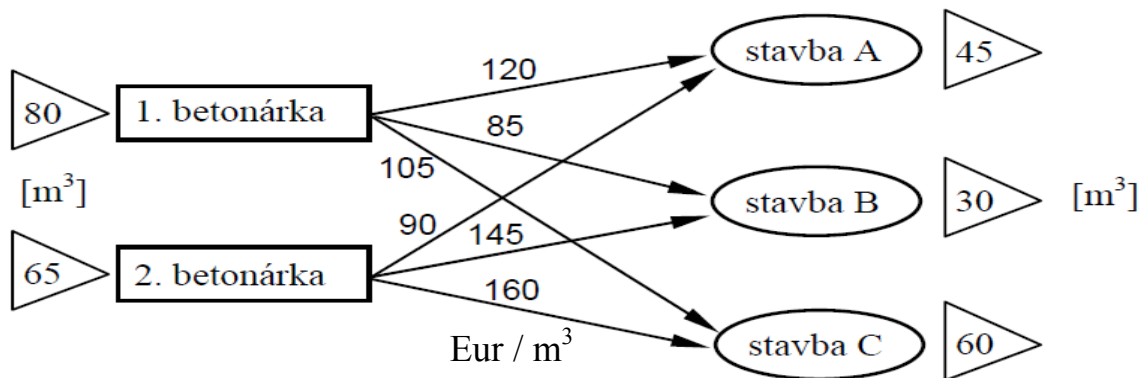
### 1. Neriaditeľné vstupy (koeficienty úlohy)

Všetky neriaditeľné vstupy analyzovanej úlohy môžeme zapísať do tabuľky:

| Náklady v Eur / $\text{m}^3$ | Stavba A | Stavba B | Stavba C | Kapacita [ $\text{m}^3$ ] |
|------------------------------|----------|----------|----------|---------------------------|
| Betonárka 1                  | 120      | 85       | 105      | 80                        |
| Betonárka 2                  | 90       | 145      | 160      | 65                        |
| Požiadavky [ $\text{m}^3$ ]  | 45       | 30       | 60       |                           |

Tab.9.1 Súhrn údajov dopravnej úlohy (neriaditeľné vstupy)

Často môže pochopenie závislostí a vzťahov v riešenej úlohe výrazne uľahčiť grafické znázornenie. Pre náš rozhodovací problém je zadaná situácia znázornená na Obrázku 1.



**Obr.1** Grafické znázornenie dopravnej úlohy

Z nákresu vyplýva, že prepravu betónu medzi 2 betonárkami a 3 stavbami je možné uskutočniť po celkom šiestich rôznych trasách (šípky v obrázku) s určenými jednotkovými nákladmi, t.j. podľa Tab. 9.1, ktoré sú prepočítané na 1 m³ prepravovaného betónu.

## 2. Definovanie premenných (riaditeľné vstupy)

**Otázka:** *Koľko a aké číselné údaje musíme poznať na to, aby bola úloha vyriešená?*

**Riešenie problému:** ak určíme množstvo betónu, ktoré je nutné previezť po jednotlivých trasách.

Pre každú jednu možnú trasu preto zadefinujeme jednu premennú, ktorá bude vyjadrovať množstvo betónu [ $m^3$ ] prepravovaného po tejto trase. Celkom bude šesť premenných, ozn.  $x_{ij}$ :

$x_{1,1}$  ..... počet  $m^3$  betónu prepraveného z 1. betonárky na stavbu A,

$x_{1,2}$  ..... počet  $m^3$  betónu prepraveného z 1. betonárky na stavbu B, ...

Všeobecne:  **$x_{ij}$  ..... počet  $m^3$  betónu prepraveného z  $i$ -tej betonárky na  $j$ -tu stavbu.**

### 3. Cieľ realizovanej analýzy (cieľové kritérium)

Cieľom firmy je minimalizácia celkových dopravných nákladov pri preprave betónu. Účelová funkcia modelu musí preto tieto náklady vyjadrovať a musí teda platiť:

*Celkové dopravné náklady = súčet nákladov na všetkých trasách, pričom platí:*

***Náklady na jednej trase = náklady na prevoz  $1 m^3$  \* počet vezených  $m^3$  betónu.***

Napríklad:

- *dopravné náklady na trase z 1. betonárky na stavbu A budú  $120 * x_{1,1}$*

- *dopravné náklady na trase z 2. betonárky na stavbu C budú  $160 * x_{2,3}$*

Účelová funkcia  $z$ , vyjadrujúca celkové dopravné náklady bude potom v tvare:

$$z = 120 x_{1,1} + 85 x_{1,2} + 105 x_{1,3} + 90 x_{2,1} + 145 x_{2,2} + 160 x_{2,3} \quad (9.1)$$

Funkčnú hodnotu funkcie  $z$  sa musíme pri riešení výsledného modelu snažiť **minimalizovať**.

#### 4. Obmedzujúce podmienky

Zo zadania vyplývajú isté obmedzenia a to, že pri preprave musíme:

- *neprekročiť kapacity jednotlivých betonárok (zdrojov);*
- *splniť požiadavky všetkých stavieb (zákazníkov).*

Uvedené obmedzenia je potrebné sformulovať do podoby obmedzujúcich podmienok:

##### 4.1 Kapacitné obmedzujúce podmienky

*Betonárka 1* môže poskytovať najviac  $80 \text{ m}^3$  a *Betonárka 2* najviac  $65 \text{ m}^3$  betónu. Znamená to, že celkové množstvo betónu vyvážané z každej z betonárok nesmie prevýšiť uvedené kapacity:

- celkové množstvo betónu vyvážané z 1. betonárky ( $v [\text{m}^3]$ )  $\leq 80$  ;
- celkové množstvo betónu vyvážané z 2. betonárky ( $v [\text{m}^3]$ )  $\leq 65$  .

Z *Betonárky 1* vyvážame  $x_{1,1} \text{ m}^3$  betónu na stavbu A,  $x_{1,2} \text{ m}^3$  na stavbu B a  $x_{1,3} \text{ m}^3$  na stavbu C. Celkom teda z prvej betonárky vyvážame  $(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}) \text{ m}^3$  betónu. Podobne z *Betonárky 2* vyvážame  $(x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3}) \text{ m}^3$  betónu. Výsledné kapacitné podmienky zapíšeme v tvare:

|                                                                                                           |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| $\begin{aligned}x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 80 \\x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 65\end{aligned}$ | $(9.2)$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|

#### 4.2 Podmienky zabezpečujúce splnenie požiadaviek jednotlivých stavieb

Stavby A, B a C požadujú po rade 45, 30 a 60 m<sup>3</sup> betónu. Celkové množstvo betónu dovezené na tieto stavby z oboch betonárok musí splniť uvedené požiadavky:

- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu A (v [m<sup>3</sup>])  $\geq 45$  ;
- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu B (v [m<sup>3</sup>])  $\geq 30$  ;
- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu C (v [m<sup>3</sup>])  $\geq 60$  .

Na Stavbu A privádzame z Betonárky 1  $x_{1,1}$  m<sup>3</sup> betónu a z Betonárky 2 privádzame  $x_{2,1}$  m<sup>3</sup> betónu. Celkom teda na Stavbu A privádzame  $(x_{1,1} + x_{2,1})$  m<sup>3</sup> betónu. Podobne na Stavbu B privádzame  $(x_{1,2} + x_{2,2})$  m<sup>3</sup> a na Stavbu C  $(x_{1,3} + x_{2,3})$  m<sup>3</sup> betónu. Výsledné podmienky zabezpečujúce splnenie požiadaviek jednotlivých stavieb budú v tvare:

$$\begin{aligned}x_{1,1} + x_{2,1} &\geq 45 \\x_{1,2} + x_{2,2} &\geq 30 \\x_{1,3} + x_{2,3} &\geq 60\end{aligned}\tag{9.3}$$

#### 5. Podmienky nezápornosti

Nie je možné prevážať záporné množstvo betónu, preto pre premenné v modeli musí tiež platiť:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ pre } i = 1,2; j = 1,2,3\tag{9.4}$$

## 6. Výsledný lineárny matematický model

Rozhodovacím problémom je určenie spôsobu zásobovania stavieb požadovaným množstvom betónu tak, aby celkové náklady na jeho prepravu boli minimálne. Z hľadiska matematického modelovania sa opäť jedná o úlohu nájdenia minimálnej hodnoty *účelovej funkcie* (9.1) pri rešpektovaní *vlastných obmedzujúcich podmienok* (9.2), (9.3) a *podmienok nezápornosti* (9.4).

minimalizovať

$$z = 120.x_{11} + 85.x_{12} + 105.x_{13} + 90.x_{21} + 145.x_{22} + 160.x_{23} \rightarrow \text{MIN} \quad (9.1)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 65 \quad (9.2)$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 45$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 30$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 60 \quad (9.3)$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0 \quad (9.4)$$

$$\text{t.j. } x_{ij} \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

Model bude mať nasledujúcu podobu (skrátенý zápis pomocou sumácie):

minimalizovať

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \text{MIN} \quad (10.1)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } j = 1, 2, 3 \quad (10.2) \quad \text{opraviť na DÚ}$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } i = 1, 2, 3 \quad (10.3)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

## 2.6 Špeciálna úloha LP – prirad'ovací problém

**Príklad 10:** Auto požičovňa dostala objednávky na zapožičanie vozidiel s luxusným vybavením od troch zákazníkov. K dispozícii má práve tri vozidla požadovanej kategórie, avšak každé je umiestnené v inej filiálke alokovanej v rôznych častiach regiónu. Vozidlá majú byť zákazníkom pristavené pred dom a za túto zvláštnu službu firma účtuje paušálny poplatok. Hlavný dispečer firmy si zistil vzdialenosti medzi sídlom každého zákazníka a každej filiálky (Tab.10.1). Rozhodnutie, ktoré má dispečer vyriešiť znie: z ktorej filiálky má byť pristavené auto ktorému zákazníkovi tak, aby bolo priradenie vykonané s čo najnižšími nákladmi pre firmu (t.j. aby bolo pri presune vozidiel na miesto určenia prejdených čo najmenej „neplatených“ kilometrov).

| Vzdialenosti v km | Zákazník 1 | Zákazník 2 | Zákazník 3 |
|-------------------|------------|------------|------------|
| Filiálka 1        | 28         | 8          | 36         |
| Filiálka 2        | 24         | 28         | 12         |
| Filiálka 3        | 44         | 20         | 27         |

Tab. 10.1 Vzdialenosti zákazníkov a filiálok firmy (cij)

**Riešenie:** Prirad'ovacia úloha je v podstate iba špeciálnym prípadom úlohy dopravnej, kedy platí: počet zdrojov aj zákazníkov je rovnaký a požiadavky každého zákazníka a zároveň kapacity každého zdroja sú rovné jednej (tzn. všetci majú rovnaké požiadavky aj kapacity).

Zo zadania úlohy vyplýva: požiadavky zákazníkov nie je možné deliť, t.j. napríklad splniť požiadavky určitého zákazníka tak, že mu splníme jednu časť jeho požiadavky z jedného zdroja a ďalšiu časť zo zdroja iného. Znamená to, že nás nezaujíma akú časť požiadaviek zákazníka splníme z daného zdroja, ale iba to, či budeme jeho požiadavku z daného zdroja uspokojovať alebo nie – t.j. *priradíme jeden celý zdroj k jednému celému požiadavku*.

### 1. Neriaditeľné vstupy (koeficienty úlohy)

Pre každú dvojicu zdroj - zákazník máme iba dve možnosti: *bud' bude zákazník z tohto zdroja vybavený* (v našom príklade dostane z danej filiálky auto) alebo *vybavený nebude* (auto dostane odinakiaľ). Na základe toho je možné zadať premenné pre model tejto úlohy.

### 2. Definovanie premenných (riaditeľné vstupy)

Otázka: *z ktorej filiálky pôjde auto k danému zákazníkovi*. Takáto formulácia by sa ťažko vyjadrovala vo forme premenných a preto to vyjadríme mierne inak: **Musíme poznať, či určitá filiálka pristaví vozidlo určitému zákazníkovi alebo nie.**

Pokiaľ budeme takúto informáciu poznať úloha je vyriešená. Znamená to, že pre každé možné priradenie jednej filiálky (t.j. konkrétneho automobilu) a jedného zákazníka definujeme vždy jednu premennú, ktorá bude vyjadrovať iba **dve možnosti**, ktoré môžu nastať a to: *priradenie sa uskutoční (hodnota premennej = 1)* alebo *priradenie sa neuskutoční (hodnota premennej = 0)*.

V danej úlohe existuje celkom  $3 \times 3 = 9$  možných variantov priradenia vozidiel a zákazníkov. Preto bude v modeli použitých celkom deväť premenných  $x_{ij}$  s nasledovným významom:

- $x_{ij} = 1$  .....auto z  $i$ -tej filiálky **pristavíme** k  $j$ -temu zákazníkovi;
- $x_{ij} = 0$  .....auto z  $i$ -tej filiálky **nepristavíme** k  $j$ -temu zákazníkovi;

pre  $i = 1, 2, 3$  (filiálky) a  $j = 1, 2, 3$  (zákazníci).

Z hľadiska typu použitých premenných sa jedná o **celočíselné premenné** (nesmú nadobúdať iné ako celočíselné hodnoty) a v tomto prípade hovoríme o tzv. **bivalentnej** (dvojhodnotovej, nula - jednotkovej) **celočíselnej premennej**.

### 3. Účelová funkcia (cieľové kritérium)

Cieľom autopožičovne je minimalizácia celkového počtu prejdených (beplatených) kilometrov pri pristavovaní vozidiel k zákazníkovi. **Účelová funkcia** modelu priradovacej úlohy preto musí najazdené kilometre vyjadrovať a platí:

*Celkom najazdené kilometre = súčet najazdených kilometrov na jednotlivých trasách,*

a kde zároveň platí, že:

*najazdené kilometre na jednej trase = dĺžka tejto trasy \* rozhodnutie, či bude trasa využitá alebo nebude (t.j. formou bivalentnej (0 – 1) rozhodovacej premennej).*

Napríklad:

- ak priradíme auto z *Filiálky 1* napr. *Zákazníkovi 3*, bude  $x_{1,3} = 1$ , a teda najazdené kilometre budú:  $36 * x_{1,3} = 36 * 1 = 36$
- ak auto z *Filiálky 1* *Zákazníkovi 3* nepriradíme, bude  $x_{1,3} = 0$ , a teda najazdené kilometre budú:  $36 * x_{1,3} = 36 * 0 = 0$

Účelovú funkciu  $z$  vyjadrujúcu celkom najazdené kilometre je možné teda zapísať v tvare:

$$z = 28 x_{1,1} + 8 x_{1,2} + 36 x_{1,3} + 24 x_{2,1} + 28 x_{2,2} + 12 x_{2,3} + 44 x_{3,1} + 20 x_{3,2} + 27 x_{3,3} \quad (10.1)$$

Funkčnú hodnotu takejto funkcie budeme pri riešení takto zadaného modelu **minimalizovať**.

#### 4. Obmedzujúce podmienky

Zo zadania vyplýva, že pri pristavovaní automobilu musíme dodržať, aby:

- a) **každý zákazník dostal aspoň jedno vozidlo;**
- b) **každá filiálka môže poskytnúť najviac jedno vozidlo.**

Takéto obmedzenia sformulujeme v podobe nasledovných *obmedzujúcich podmienok*:

##### 4.1 Splnenie požiadavku zákazníkov

Každý zákazník dostane aspoň jedno vozidlo, t.j. ***aspoň z jednej filiálky musí byť automobil zákazníkovi priradený.*** Znamená to, že aspoň jedna z premenných  $x_{ij}$  musí byť pre daného  $j$ -teho zákazníka rovná jednej. Táto skutočnosť musí platiť pre všetkých zákazníkov a preto platí:

$$\begin{aligned}x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} &\geq 1 \\x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} &\geq 1 \\x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} &\geq 1\end{aligned}\tag{10.2}$$

#### 4.2 Neprekročenie kapacít filiálok

Každá filiálka môže poskytnúť najviac jedno vozidlo, t.j. *z jednej filiálky môže byť priradený automobil najviac jednému zákazníkovi*. Znamená to, že najviac jedna z premenných  $x_{ij}$  môže byť pre danú  $i$ -tu filiálku rovná jednej. Táto skutočnosť musí platiť pre všetky filiálky a preto platí:

$$\begin{aligned}x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 1 \\x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 1 \\x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &\leq 1\end{aligned}\tag{10.3}$$

#### 4.3 Obligátne podmienky

Premenné definované v modeli môžu nadobúdať iba dve hodnoty, a to **0 alebo 1** a preto platí:

$$x_{ij} \in \{0 ; 1\}, \text{ pre } i = 1,2,3; j = 1,2,3\tag{10.4}$$

## 5. Výsledný lineárny matematický model úlohy

minimalizovať

$$z = 28.x_{11} + 8.x_{12} + 36.x_{13} + 24.x_{21} + 28.x_{22} + 12.x_{23} + 44.x_{31} + 20.x_{32} + 27.x_{33} \rightarrow \text{MIN} \quad (10.1)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 1 \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 1 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1 \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

Skutočnosť, že každý zákazník musí dostať **aspoň jedno** vozidlo, je možné v tomto prípade chápať aj tak, že každý zákazník musí dostať **práve jedno** vozidlo.

A podobne to, že každá filiálka môže poskytnúť **najviac jedno** vozidlo, je vzhľadom k tomu, že vozidiel je presne toľko ako zákazníkov možné chápať aj tak, že každá filiálka musí poskytnúť **práve jedno** vozidlo.

Model by potom mal nasledujúcu podobu (skrátенý zápis pomocou sumácie):

minimalizovať

$$z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \text{MIN} \quad (10.1)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } j = 1, 2, 3 \quad (10.2)$$

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } i = 1, 2, 3 \quad (10.3)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

### **3. VŠEOBECNÝ MODEL ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA**

Pomocou lineárneho programovania je možné určovať optimálne riešenia veľkej skupiny praktických rozhodovacích problémov. Záleží iba na schopnosti sformulovať slovne zadáný problém, definovať prislúchajúci ekonomický model a zostaviť jeho adekvátny matematický model tak, aby s požadovanou presnosťou vystihoval podstatu riešeného rozhodovacieho problému.

Pri zostavovaní modelu úlohy LP sa osvedčila nasledujúca postupnosť krokov :

- 1. Definovanie ekonomického modelu - slovné zadanie a formulácia cieľa riešenia.**
- 2. Formalizácia ekonomického modelu – zápis premenných, činiteľov a vzťahov medzi nimi do tabuľky.**
- 3. Zostavenie matematického modelu úlohy - obsahuje dve základné časti :**
  - I. účelovú funkciu a smer jej optimalizácie (MAX, MIN),**
  - II. sústavu tzv. obmedzujúcich podmienok v tvare nerovností, príp. rovníc, ktoré tvorí sústava podmienok tzv. vlastných obmedzení (pre definovanie systémových obmedzení) a sústavu podmienok nezápornosti (pre vymedzenie základných prípustných riešení).**
- 4. Samotné riešenie modelu úlohy – nájdenie optimálneho riešenia problému.**

Z vyššie uvedených základných **typových úloh LP** vyplýva, že u všetkých z nich majú obidve základné časti matematického modelu rozhodovacieho problému - tzn. **cieľ riešenia**, vyjadrený **cieľovou** (účelovou, kritériálnou) **funkciou**, ako aj všetky **obmedzujúce podmienky**, ktoré realizáciu procesu ovplyvňujú - tvar lineárnych funkcií s viac premennými. Obvykle sa jedná o podmienky v tvare nerovníc, menej už v tvare rovníc.

Všeobecne je možné úlohu lineárneho programovania zapísať matematickým modelom v tvare

$$\underline{Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{opt (MAX, MIN)}} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &> = < b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &> = < b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &> = < b_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde rovnica (3.1) vyjadruje cieľ optimalizácie - **účelovú funkciu** a sústava nerovníc alebo rovníc (3.2) charakterizuje podmienky realizácie - **obmedzujúce podmienky** optimalizačného problému.

### **Ako si však poradiť s riešením sústav nerovníc?**

Bude preukázané, že sústavu lineárnych nerovníc je možné pomocou tzv. **doplnkových premenných** pretransformovať na sústavu lineárnych rovníc.

Vo všeobecnom prípade ide teda o hľadanie riešenia sústavy lineárnych rovníc, spĺňajúce aj príslušné obligátne podmienky (*podmienky nezápornosti* alebo *podmienky bivalentnosti premenných*) a zároveň zaistujúce, že **účelová funkcia nadobudne svoje maximum, resp. minimum** (podľa typu riešeného rozhodovacieho problému).

Znamená to, že každú úlohu LP je možné matematicky vyjadriť nasledovne.

**Hľadáme také riešenie sústavy  $m$  rovníc s  $n$  neznámymi ( $m \leq n$ )**

$$\begin{array}{cccc} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}, \quad (3.3)$$

**aby boli splnené podmienky nezápornosti**, t.j. nerovnosti v tvare

$$x_i \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

**a aby účelová funkcia v tvare**

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{opt (MAX, MIN)} \quad (3.5)$$

**nadobudli hodnotu viazaného extrému (maximum, resp. minimum).**

Pri použití maticového zápisu môžeme matematický model zapísať aj v maticovom tvare:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} && \rightarrow && \text{opt} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= && \mathbf{b} \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde jednotlivé vektorové veličiny

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

predstavujú:  $\mathbf{c}$  je riadkový vektor koeficientov účelovej funkcie  $[1,n]$ ,  $\mathbf{x}$  je stĺpcový vektor premenných problému  $[m,1]$ ,  $\mathbf{A}$  je matica sústavy obmedzujúcich podmienok  $[m,n]$  a  $\mathbf{b}$  je stĺpcový vektor pravej strany obmedzujúcich podmienok  $[m,1]$ .

Všeobecná nehomogénna sústava lineárnych rovníc má v úlohách LP obvykle **nekonečne mnoho riešení** (Frobeniova veta,  $m < n$ ). Zmysel však majú iba tzv. **prípustné riešenia** (t.j. riešenia spĺňajúce aj podmienky nezápornosti, príp. bivalentnosti). Potom platí:

**Prípustné riešenie, pre ktoré účelová funkcia  $z$  nadobúda maximum (resp. minimum) nazývame riešením optimálnym.**

Pri riešení ÚLP má zásadný význam tvrdenie, označované ako **základná veta LP** a znie:

**Pokiaľ má ÚLP optimálne riešenie, potom má aj optimálne riešenie základné.**

Dôsledok: pri hľadaní optimálneho riešenia sa môžeme obmedziť iba na množinu riešení základných, ktorých je už iba konečný počet. Zmysel potom majú iba tzv. **základné prípustné riešenia** (t.j. základné riešenia spĺňajúce navyše aj podmienky nezápornosti).

Doteraz boli uvedené iba niektoré klasické úlohy, na ktoré sa lineárne programovanie najčastejšie v praxi využíva. Do podobného tvaru je možné upraviť veľké množstvo úloh. Niektoré ďalšie problémy, na ktoré sa lineárne programovanie využíva môžu byť napr. úlohy typu:

- optimálny plán montáže,
- optimálne nasadenie jednotky,
- optimálne zloženie strojových zostav,
- úlohy finančného plánovania,
- rozvrhovanie pracovníkov do pracovných zmien,
- optimálne oševné plány,

ale aj úlohy zamerané na distribúciu výrobkov, ako sú:

- optimálne plány rozvozu tovaru (dopravná úloha),
- optimálne umiestnenie výrobní,

- optimálne priradenie objektov a pod.

ale taktiež úlohy z teórie grafov, napr. pre

- určovanie najkratšej cesty v grafe,
- maximálneho toku v sieti,
- optimalizácie časových a nákladových plánov zložitých nadväzných projektov atď.

Je však jasné, že modely skutočných systémov a v nich prebiehajúcich procesov budú oveľa komplexnejšie a obmedzujúcich podmienok, ako aj premenných vystupujúcich v ich matematickom modeli, bude podstatne viac. Napr. spotreba energie, časová kapacita pracovnej sily, výkonnosť a kapacita vnútro podnikovej i vonkajšej dopravy a mnoho ďalších. Okrem toho aj kritériálne funkcie môžu byť oveľa komplexnejšie tzn. môžu integrovať viac kritérií s rôznymi váhami – viackritériálne rozhodovanie a pod.

## **4. RIEŠENIE MODELU ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA**

Zásadným problémom pri riešení ÚLP je hlavne správna formulácia prvkov a väzieb v rámci definovania ekonomického modelu RP (často zadaný iba slovne) a jeho následná transformácia na ekvivalentný model matematický. Znamená to, že pri riešení úloh matematického programovania je dôležité najmä pochopenie základných princípov pre formulovanie všeobecných modelov úloh a zvládnutie procesu zostavovania, ale aj vlastného vyriešenia ich matematických modelov.

Dôležité je pochopenie podstaty tvorby modelov vyššie uvedených základných typov ÚLP a spoznanie ich spoločných, ale aj rozdielnych prvkov, vlastností a súvislostí.

Prakticky všetky ÚLP je možné riešiť všeobecnými algoritmami lineárneho programovania – najčastejšie tzv. **simplexový algoritmus**. Pre niektoré z nich, ako napr. *dopravný a priradovací problém* alebo *niektoré úlohy v rámci teórie grafov* – však boli vyvinuté **špecifické, ale oveľa efektívnejšie postupy pre ich analytické riešenie**.

Riešenie deterministicky definovaných modelov ÚLP je možné realizovať buď:

- **analyticky** – najmä pomocou všeobecne platného simplexového algoritmu alebo
- **graficky** – riešenie je síce obmedzené iba na úlohy s max. 3 premennými, ale je veľmi názorné a pre pochopenie princípov optimalizácie a konvergencie riešenia k hľadanému optimu dôležité.

## 4.1 Grafické riešenie ÚLP

Jednoduchšie modely úloh lineárneho programovania s *dvomi* resp. *tromi premennými* je možné s viacerými výhodami vyriešiť aj graficky. Všeobecne platí, že pokiaľ nie je v modeli ÚLP definovaných viac ako 3 štruktúrne premenné, môžeme pre jeho riešenie využiť aj grafický spôsob.

Ak sú štruktúrne premenné dve ( $x_1, x_2$ ), celý problém je možné znázorniť v rovine. V prípade troch premenných ( $x_1, x_2, x_3$ ) riešenie prebieha v priestore, je však menej prehľadné, náročnejšie na predstavivosť, priestorové videnie a poznatky z analytickej geometrie.

Na postupe grafického riešenia je možné vhodne demonštrovať niektoré základné princípy a pojmy, ktoré pri riešení numerickom nie sú úplne zrejmé.

Z hľadiska praktickej využiteľnosti je s ohľadom na obmedzený počet premenných postup grafického riešenia iba ilustračný (reálne úlohy majú často až niekoľko tisíc premenných). **Grafický postup je však vhodným metodickým nástrojom** pre lepšie objasnenie a pochopenie princípov optimalizácie, špecifických prípadov riešení modelu, ako aj možností zakončenia výpočtu úlohy LP.

Grafické riešenie úlohy LP obvykle obsahuje 2 základné kroky:

1. **Grafické znázornenie a vymedzenie množiny prípustných riešení ÚLP.**
2. **Určenie optimálneho riešenia ÚLP.**

Zo základov analytickej geometrie v rovine, príp. priestore vieme, že grafickým znázornením *lineárnej funkcie dvoch premenných v rovine* je **priamka**, v *trojrozmernom priestore lineárnu funkciu 3 premenných* predstavuje **rovina**.

Pre ilustráciu grafického riešenia využijeme zadanie **Príkladu 1** – výroba dvoch zmesí kávy, ktorý mal zadefinovaný matematický model v tvare

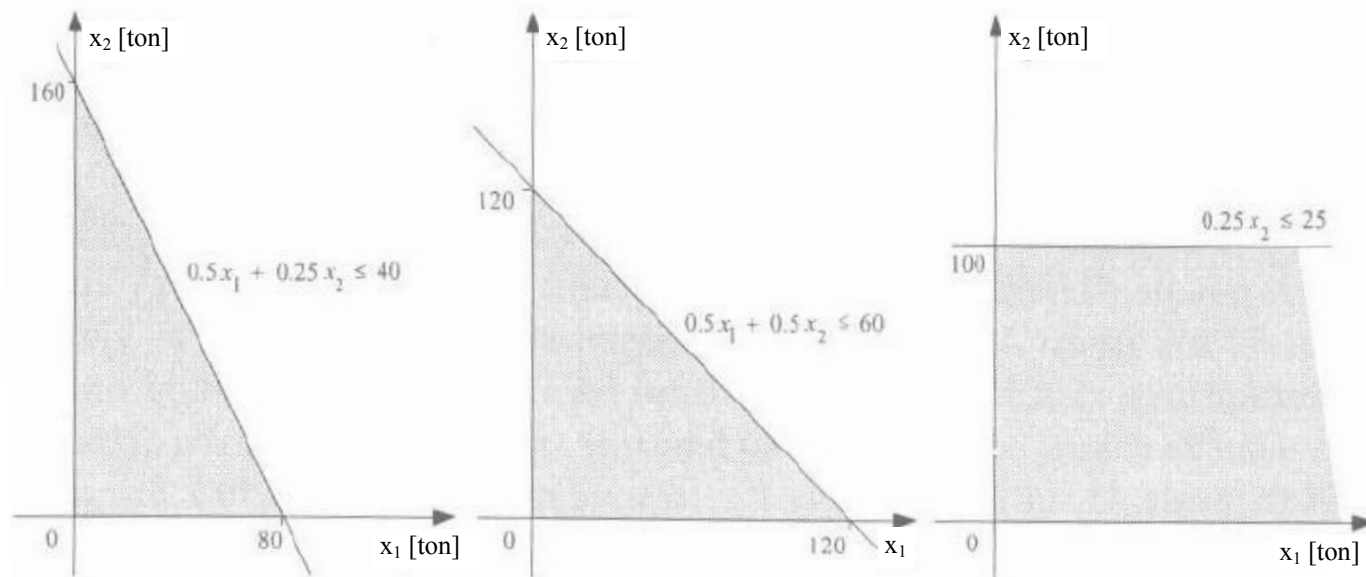
|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| $z = 2000.x_1 + 1400.x_2 \rightarrow \text{MAX}$ | (ÚF) |
| $0,5.x_1 + 0,25.x_2 \leq 40$                     |      |
| $0,5.x_1 + 0,5.x_2 \leq 60$                      | (VO) |
| $0,25.x_2 \leq 25$                               |      |
| $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$                  | (PN) |

### 1. Grafické znázornenie množiny prípustných riešení ÚLP.

V modeli úlohy je množina prípustných riešení určená tromi VO a dvomi PN. Uvedeným podmienkam nezápornosti v rovine vyhovuje iba **prvý kvadrant**. Množina prípustných riešení bude preto tvorená prienikom 1. kvadrantu a troch polrovín, odpovedajúcich trom VO v tvare nerovností.

Základný postup pri grafickom riešení si ukážeme na jednej z nerovníc tvoriacich VO, napr. na prvej nerovnici v tvare  $0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40$ . Polrovina odpovedajúca tejto nerovnosti je určená priamkou v tvare  $0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 = 40$ .

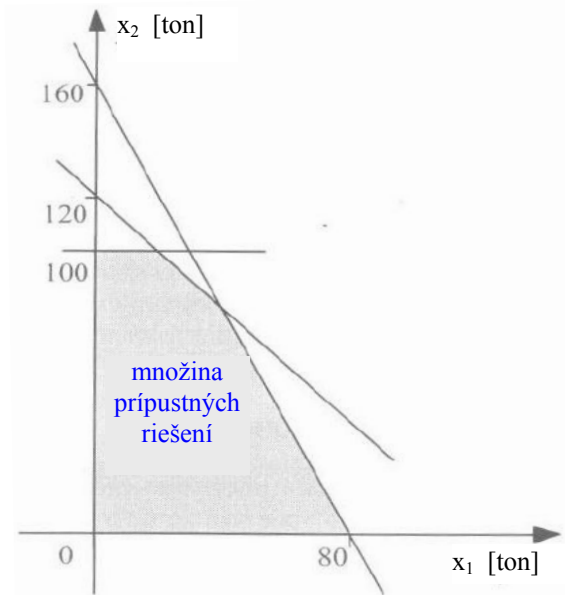
Na obrázku 4.1 sú postupne znázornené tieto polroviny samostatne (a vždy iba v rámci prvého kvadrantu) a potom aj ich spoločný prienik (obrázok 4.2).



**Obr. 4.1** Zakreslenie obmedzujúcich podmienok pri grafickom riešení

Vieme, že priamka je určená 2 bodmi, ktoré **najľahšie zistíme tak, že vždy jednu z premenných položíme rovnú nule a hodnotu druhej ľahko dorátame.**

Takto získame priesečníky priamky s obidvomi súradnicovými osami a dostaneme body sú súradnicami  $[80,0]$  a  $[0,160]$ . Takto definovaná „hraničná“ priamka rozdeľuje rovinu na dve polroviny. To, ktorá z týchto dvoch polrovín je obrazom danej nerovnice môžeme určiť tak, že do nej za hodnoty premenných dosadíme súradnice počiatku  $[0,0]$  a zistíme, či je nerovnosť splnená alebo nie. V našom prípade platí  $0 \leq 40$ , čo znamená, že polrovina, vyhovujúca danej nerovnici, obsahuje počiatok zvoleného súradnicového systému.



**Obr.4.2** Množina prípustných riešení ÚLP

Ak hraničná priamka neprechádza počiatkom systému súradníc, za predpokladu nezápornosti koeficientov pravej strany je možné využiť nasledujúce pravidlo:

- u nerovníc typu „ $\leq$ “ sa jedná o polrovinu obsahujúcu počiatok,
- u nerovníc typu „ $\geq$ “ sa jedná o polrovinu neobsahujúcu počiatok,

## 2. Určenie optimálneho riešenia ÚLP

Pre určenie optimálneho riešenia úlohy LP je potrebné do *Obr.4.2*, obsahujúceho množinu všetkých prípustných riešení (ako prienik polrovín VO a 1. kvadrantu), zakresliť účelovú funkciu – t.j. **priamku**. Jednou z možností je, že znázorníme priamku, ktorá je určená nulovou hodnotou účelovej funkcie ( $z = 0$ ). Pre dve premenné bude mať takáto priamka vo všeobecnosti tvar

$$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = 0.$$

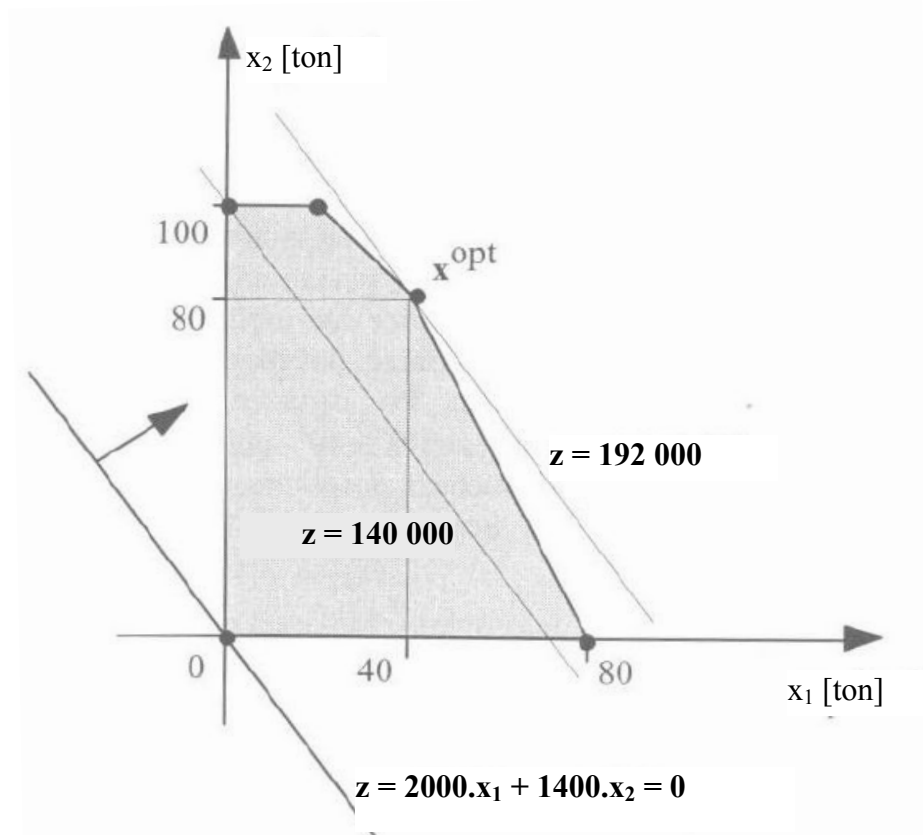
a pre zadaný príklad bude mať tvar

$$z = 2000 \cdot x_1 + 1400 \cdot x_2 = 0.$$

Priamka  $z = 0$  vždy prechádza bodom so súradnicami  $[0,0]$ , t.j. počiatkom zvoleného systému súradníc. Druhým bodom pre jednoznačné určenie smeru priamky môže byť napr. bod  $[c_2, -c_1]$ . Potom platí, že všetky body ležiace na tejto priamke majú hodnotu účelovej funkcie rovnú nule.

V prípade, ak je cieľom **maximalizácia (minimalizácia) hodnoty ÚF**, potom je potrebné zistiť, v akom smere sa hodnota účelovej funkcie zlepšuje (tzn. kedy pri MAX rastie, kedy pri MIN klesá).

K tomu stačí zistiť hodnotu účelovej funkcie ľubovoľného bodu v jednej z polrovín, ktoré sú určené hraničnou priamkou  $z = 0$ . Pokiaľ je táto hodnota väčšia / menšia ako nula, potom účelová funkcia rastie / klesá v smere určenom príslušnou polrovinou. Napr. na *Obr. 4.3* je smer nárastu hodnoty účelovej funkcie určený šípkou.



Obr.4.3 Grafické riešenie zadanej ÚLP

Do Obr.4.3 je možné zakresliť niekoľko tzv. **izokvant**, ktoré určujú body s rovnakou hodnotou ÚF. Pre ilustráciu, na obrázku sú zakreslené izokvanty  $z = 140\,000$  a  $z = 192\,000$ . Sú to samozrejme priamky rovnobežné so smerom pôvodnej izokvanty  $z = 0$ .

Z Obr.4.3 je zrejmé, že najvyššia izokvanta (tá s najvyššou hodnotou na pravej strane), ktorá ešte pretína množinu prípustných riešení je izokvanta  $z = 192\,000$ . Jej priesečníkom s množinou prípustných riešení je jediný bod so súradnicami  $[40,80]$ , ktorému odpovedá aj hľadané optimálne riešenie ÚLP. Riešením úlohy je teda vektor

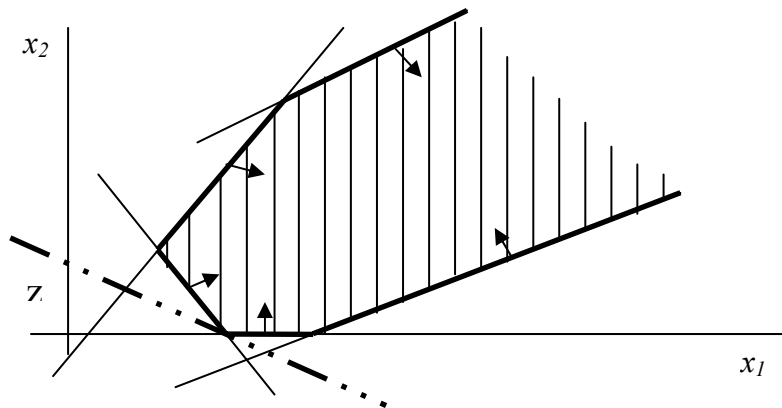
$$\mathbf{x}^{\text{opt}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (40, 80) \text{ s hodnotou účelovej funkcie } \mathbf{z}^{(\text{opt})} = 192\,000 \text{ [Eur].}$$

Množinu prípustných riešení ÚLP obvykle tvorí tzv. konvexná polyedrická množina. Takáto množina je obvykle určená konečným počtom krajných bodov. V našom prípade je týchto bodov 5 a sú na Obr.4.3 zvýraznené. Je veľmi pravdepodobné, že optimálne riešenie bude jedným z týchto krajných bodov, t.j. jedným z krajných bodov **množiny prípustných riešení**.

Vzhľadom k tomu, že týchto bodov býva obvykle konečný počet, optimálne riešenie teda hľadáme iba medzi konečným počtom krajných bodov. Uvedený poznatok má veľký význam pre analytické riešenie ÚLP, ktorý vo všeobecnosti aj pri riešení obvykle využívame. Základný postup riešenia analytického tvorí tzv. **simplexová metóda**.

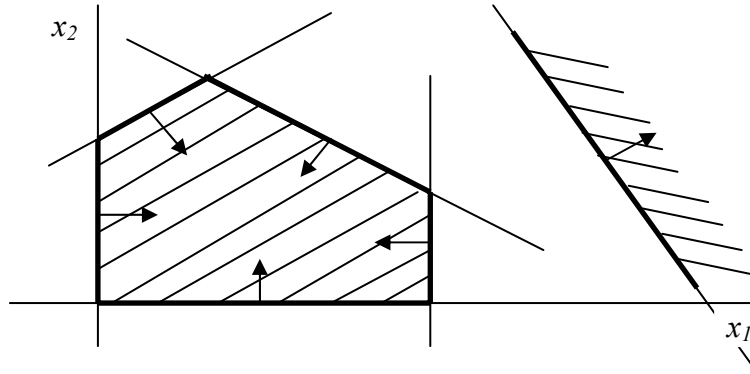
### Poznámky

1. Z geometrického vyjadrenia je zrejmé, že vo všeobecnosti môže mať ÚLP
  - **optimálne riešenie jedno jediné** a to buď pre
    - *obidva smery optimalizácie* (ako v našom prípade – MAX (40,80), MIN (0,0))
    - *jeden smer optimalizácie* (obr.4.4), ak je oblasť prípustných riešení neohraničená.



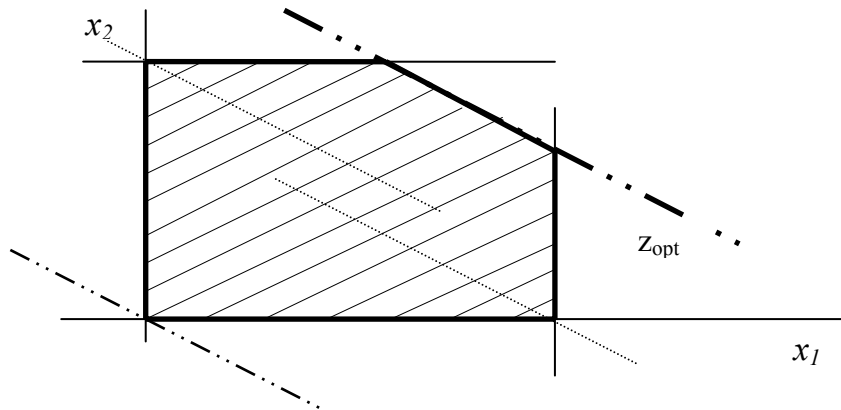
**Obr.4.4.** Neohraničená oblasť prípustných riešení

- **žiadne riešenie** - ak obmedzujúce podmienky nevytvoria prienik – t.j. oblasť prípustných riešení nevznikne (obr.4.5),



**Obr.4.5.** *Prázdna množina prípustných riešení.*

- **nekonečne veľa riešení**, ak je smernica účelovej funkcie totožná so smernicou niektorej z obmedzujúcich podmienok (obr.4.6).

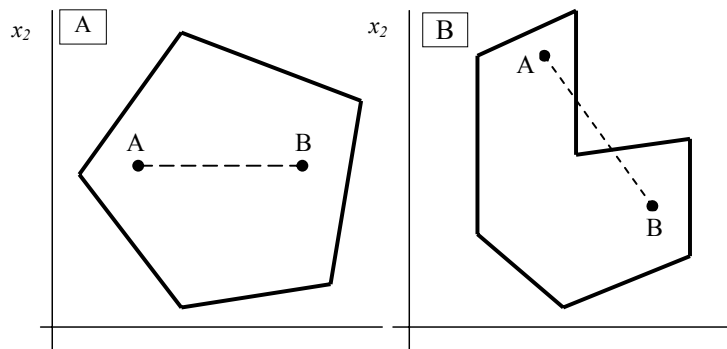


**Obr.4.6.** Problém s nekonečne veľa optimálnymi riešeniami.

2. Pre úplnosť objasníme pojmy: **konvexná oblasť prípustných riešení** a **krajný bod**.

**Konvexná množina** (oblasť) – stačí názorne uviesť hlavný rozdiel medzi konvexnou a nekonvexnou množinou (obr.4.7a,b). Zjednodušene platí: spojnica ľubovoľných dvoch bodov konvexnej množiny celá do príslušnej množiny patrí; u nekonvexnej množiny to možné nie je.

**Krajný bod (vrchol)** množiny - taký bod, ktorý nie je možné vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie bodov iných, ale ktorý predsa k množine patrí.



**Obr.4.7.** Konvexná oblasť (množina A) a nekonvexná oblasť (množina B)

3. Grafické vyjadrenie umožňuje názorne ilustrovať rozdiel medzi obmedzujúcou podmienkou zadanou v tvare nerovnice (A5) a rovnice (B5) (obr.4.8).

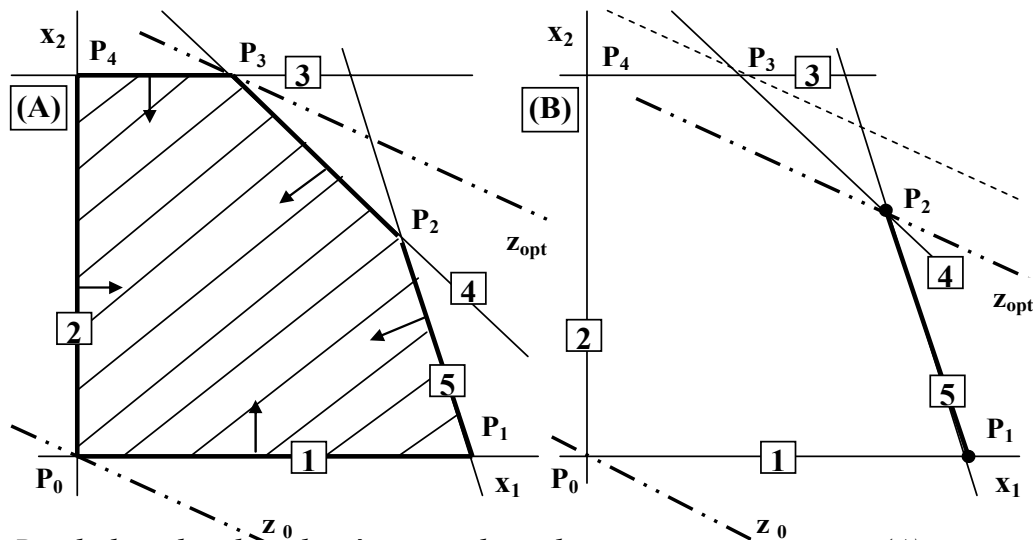
**A**

- 1)  $x_1 \geq 0$ ,
- 2)  $x_2 \geq 0$ ,
- 3)  $x_2 \leq b_3$
- 4)  $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1$
- 5)  $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2$

**B**

- 1)  $x_1 \geq 0$ ,
- 2)  $x_2 \geq 0$ ,
- 3)  $x_2 \leq b_3$
- 4)  $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1$
- 5)  $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$

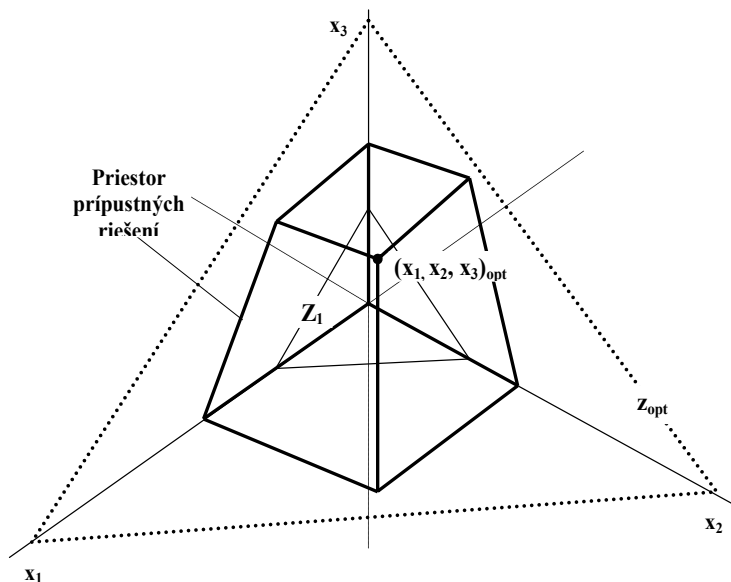
$$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$



**Obr.4.8.** Rozdiel medzi obmedzujúcimi podmienkami v tvare nerovnice (A) a rovnice (B).

Aj keď sú výrazy v obidvoch príkladoch formálne podobné, je zrejmé, že ak pre obr.4.8.b platí podmienka (5) v tvare rovnice, oblasť prípustných riešení sa redukuje z päťuholníka ( $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ) iba na úsečku ( $P_1$ ,  $P_2$ ), čo navyše pri naznačenom smere účelovej funkcie zmení aj hodnotu optimálneho riešenia (a to **z bodu  $P_3$  do  $P_2$** ). Znamená to, že sa zmenia aj hodnoty premenných  $x_1$  a  $x_2$  pre optimálne riešenie a teda sa musí zmeniť aj hodnota účelovej funkcie  $z_{opt}$ .

4. Grafické vyjadrenie je pri vhodne zvolenej metóde premietania možné využiť aj pre úlohy s tromi premennými (*obr.4.9*). Obmedzujúce podmienky majú aj v tomto prípade tvar nerovníc, v ktorých však vystupujú 3 premenné. Každá z obmedzujúcich podmienok rozdeľuje priestor na dva **polpriestory**. Jeden, v ktorom je podmienka splnená a druhý, kde splnená nie je. Prienikom takýchto polpriestorov je mnohosten (konvexný polyéder), určujúci tzv. **priestor prípustných riešení**.



**Obr.4.9.** Grafické riešenie optimalizačnej úlohy s 3 premennými

Takisto účelová funkcia vytvára pre rôzne zvolené hodnoty  $z = \textit{konšt.}$  sústavu rovnobežných rovín, pričom o optimálnych riešeniach platí to isté, ako u rovinného prípadu. Znamená to, že pokiaľ existuje riešenie, môže byť: **jediné** (t.j. v niektorom z vrcholov mnohostenu) alebo ich môže byť **nekonečne veľa** (t.j. na niektorej z hrán, resp. na celej stene) príp. riešenie **nemusí existovať**.

Pre problémy s viac ako 3 premennými už s grafickým vyjadrením nevystačíme, pretože nám to už neumožňuje ľudská predstavivosť.