

4. ANALYTICKÉ RIEŠENIE ÚLOH LP - SIMPLEXOVÁ METÓDA

Cieľ prednášky:

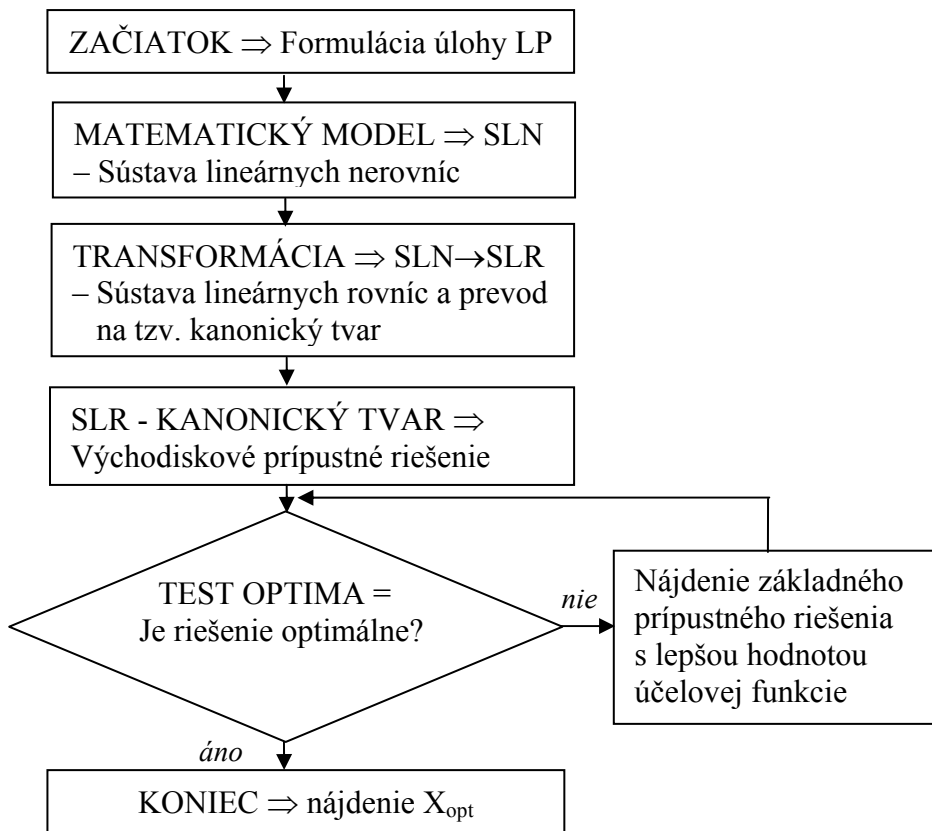
- definovať podstatu analytického riešenia ÚLP,
- uviesť princípy pre transformáciu matematického modelu úloh LP na kanonický tvar;
- pochopiť princíp fungovania simplexovej metódy
- vytvoriť predpoklady pre rozvoj schopnosti študentov nielen zostaviť adekvátny model ÚLP, ale aj pochopiť princíp analytického riešenia jednoduchších úloh LP a vedieť ho realizovať.

Objasnené budú základné princípy analytického riešenia modelov ÚLP, bude definovaný všeobecný postup tvorby kanonického tvaru modelu a prezentovaný všeobecný univerzálny postup riešenia lineárnych modelov, ako aj spôsoby a možnosti jeho realizácie.

Úvod

Univerzálnym postupom riešenia veľkej množiny úloh lineárneho programovania je tzv. **simplexová metóda** (simplexový algoritmus). Je to všeobecne použiteľný výpočtový postup pre určenie optimálneho riešenia typických lineárnych modelov t.j. **hľadania optimálnych riešení RP s obmedzujúcimi podmienkami**. Jej všeobecný algoritmus je uvedený na *obr. 4.1*.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie



Obr.4.1 Schéma všeobecného postupu simplexovej metódy

Pri riešení ÚLP simplexovou metódou je vždy najskôr potrebné získať tzv. **východiskové základné prípustné riešenie (VZPR)**.

K tomu je nutné, aby boli obmedzujúce podmienky matematického modelu ÚLP prevedené do tvaru sústavy lineárnych rovníc v tzv. **kanonickom (dohovorenom) tvare**. Doteraz sme v modeloch mali obmedzujúce podmienky, ako aj podmienky nezápornosti obvykle zadané v tvare nerovníc, ale vyskytujú sa aj v tvare rovníc.

Prvý hlavný krok v riešení matematického modelu ÚLP predstavuje **transformácia (prevod) sústavy lineárnych nerovníc (SLN) na sústavu lineárnych rovníc (SLR)**. Pokiaľ takto získaná – transformovaná – už sústava lineárnych rovníc nie je v dohovorenom tvare, tak je potrebné ju takýto dohovorený tvar previesť. Prevodom SLR do kanonického tvaru - je možné veľmi jednoducho získať prvé prípustné riešenie – tzv. **východiskové základné prípustné riešenie** úlohy.

Druhým dôležitým krokom je **testovanie optimálnosti aktuálneho riešenia** a slúži na preverenie toho, či získané základné riešenie už je alebo ešte nie je optimálne. V prípade, že test optimality preukáže, že VZPR už je optimálne - našli sme hľadané optimálne riešenie - a výpočet končí.

V prípade, ak aktuálne riešenie optimálne nie je - snažíme sa nájsť lepšie základné prípustné riešenie, t.j. riešenie buď *s vyššou hodnotou účelovej funkcie* (MAX - úloha maximalizačná), resp. *riešenie s hodnotou účelovej funkcie nižšou* (MIN - úloha minimalizačná). Na takého, v požadovanom smere optimalizácie – *vylepšené riešenie* - opäť aplikujeme test optima.

Takýmto cyklickým - iteračným - postupom pokračujeme dovtedy, pokiaľ nebude test optima splnený a teda pokým nebude nájdené riešenie optimálne.

4.1. PODSTATA ANALYTICKÉHO RIEŠENIA ÚLOH LP

Množina prípustných riešení ÚLP je v typickom prípade definovaná ako sústava lineárnych nerovníc (SLN). Matematicky však dokážeme lepšie riešiť skôr sústavy rovníc (SLR) ako SLN. Previesť (transformovať) SLN na SLR je však relatívne jednoduché. Prevod je možné vykonať tak, že k tej strane nerovnice, ktorá je menšia, pripočítame novú nezápornú premennú (ktorá v podstate vyjadruje rozdiel medzi oboma stranami pôvodnej nerovnice). Majme zadanú známu úlohu o naplánovaní výroby kávových zmesí pre maximalizáciu zisku.

Príklad 1: *Baliarne kávy plánujú výrobu 2 zmesí kávy (Z_1 =Mocca a Z_2 =Štandard). Pre ich výrobu majú od dodávateľov zaistenú dodávku 3 druhov kávových zŕn s objemom $K_1=40$ ton, $K_2=60$ ton a $K_3=25$ ton. Jednotlivé druhy kávových zŕn sa odlišujú kvalitou, ale aj nákupnou cenou. Pri výrobe je nutné dodržať technologické postupy určujúce, aké podiely (napr. percentuálne) jednotlivých druhov zŕn má zmes obsahovať. Skladba oboch zmesí (v tonách kávových zŕn na 1 tonu zmesi) a dispozičné množstvá kávových zŕn sú uvedené v Tabuľke 1.1. Na základe výrobných nákladov a plánovanej predajnej ceny zmesí bol vykalkulovaný nasledovný zisk: zmes Z_1 prinesie plánovaný zisk 2000 Eur / 1 t a zmes Z_2 prináša zisk 1400 Eur / 1 t zmesi. **Úloha:** naplánovať produkciu firmy tak, aby bol jej celkový zisk maximálny. Formulujte matematický model úlohy.*

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Polotovár (výrobný komponent)	Druh zmesi		Kapacita [tony]
	Mocca = Z1	Standard = Z2	
Kávové zrno - K1	0,5	0,25	40
Kávové zrno - K2	0,5	0,5	60
Kávové zrno - K3	-	0,25	25

Tab.4.1 Kvantitatívne údaje úlohy

Matematický model úlohy:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximalizovať} \\
 &z = 2000 \cdot x_1 + 1400 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX} \quad (\acute{U}F) \\
 &\text{za obmedzujúcich podmienok} \\
 &0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40 \\
 &0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \leq 60 \quad (\acute{S}P) \\
 &0,25 \cdot x_2 \leq 25 \\
 &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (OP)
 \end{aligned}$$

a vyjadruje riešenie problému **určenia extrém (MAX/MIN) účelovej funkcie** (ÚF) pri rešpektovaní všetkých obmedzujúcich podmienok, t.j. **štruktúrnych podmienok** (ŠP) a **obligatórnych podmienok** (OP), v tomto prípade v tvare **podmienok nezápornosti** (PN).

Majme teda napr. prvú nerovnicu z množiny OP v tvare

$$0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40,$$

ktorá v uvedenom **Príklade o výrobe kávových zmesí** predstavuje bilanciu medzi spotrebou kávových zŕn K1 a ich disponibilným množstvom.

Uvedenú nerovnicu môžeme upraviť na rovnicu tak, že k jej ľavej strane **pripočítame novú nezápornú premennú** (ozn. napríklad x_3). Podobne môžeme previesť aj zostávajúce 2 nerovnice obmedzujúcich podmienok. Po doplnení troch nových premenných x_3 , x_4 , x_5 získame z pôvodnej SLN ekvivalentnú SLR, obsahujúcu celkom 5 premenných (x_1 až x_5). Dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 + x_3 & = & 40 \\ 0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 + x_4 & = & 60 \\ 0,25 \cdot x_2 + x_5 & = & 25 \end{array}$$

Uvedená SLR vznikla z pôvodnej SLN jednoduchým doplnením nových premenných, ktoré nazývame **prídavné premenné**. Vzhľadom k uvažovaniu podmienok nezápornosti aj pre hodnoty prídavných premenných, bude mať uvedená SLR stále rovnakú množinu prípustných riešení ako pôvodná SLN (je tvorená sústavou ŠP - štruktúrne podmienky a OP - obligátne podmienky), vyjadrených v tvare nerovností. Uvedenú SLR nazývame **ekvivalentná sústava rovníc (ESR)**.

Prídavné premenné (PP) – slúžia k transformácii sústavy obmedzujúcich podmienok v tvare nerovníc na sústavu rovníc. V LP sa môžu vo všeobecnosti vyskytovať obmedzujúce podmienky definované buď ako nerovnice typu „ $\leq$ “ alebo „ $\geq$ “ príp. ako rovnice „ $=$ “.

Vzhľadom k podmienkam nezápornosti, ktoré musia platiť aj pre prídavné premenné, je pre vytvorenie ekvivalentnej sústavy rovníc nutné:

- u nerovníc typu „ $\leq$ “ prídavnú premennú k ľavej strane nerovnice pripočítať,
- u nerovníc typu „ $\geq$ “ prídavnú premennú od ľavej strany nerovnice odpočítať, **ale !!!!**
- u obmedzujúcich podmienok v tvare rovníc prídavné premenné potrebné nie sú.

Z čisto matematického hľadiska **prídavné premenné predstavujú rozdiel medzi pravou a ľavou stranou nerovnice typu „ $\leq$ “, resp. medzi ľavou a pravou stranou nerovnice typu „ $\geq$ “.**

Z uvedeného poznatku vyplýva aj jednoznačná **ekonomická interpretácia prídavných premenných**. Napríklad, ak je obmedzujúca podmienka bilancie medzi disponibilným množstvom suroviny a spotrebou tejto suroviny, potom prídavná premenná vyjadruje práve nevyužitú kapacitu tejto suroviny, t.j. **množstvo suroviny, ktoré sa pri aktuálnom riešení nespotrebuje**.

Ekvivalentná sústava rovníc môže mať vo všeobecnom prípade m rovníc a maximálne $(m+n)$ premenných. Vzhľadom k vyššiemu počtu premenných ako rovníc má takáto sústava obvykle **nekonečne mnoho riešení**.

Medzi takýmto nekonečným počtom riešení sú aj riešenia, ktoré môžeme ľahko získať tak, že ľubovoľných n premenných (tzv. *nezákladné premenné*) položíme rovné nule a hodnoty ostatných premenných (tzv. *základné premenné*) jednoducho dopočítame už zo zostávajúcich m rovníc s m premennými. Takto získané riešenie budeme označovať ako **základné riešenie ESR**.

Koľko ale takýchto základných riešení pre zadaný problém je? Základných riešení je toľko, koľkými spôsobmi je možné vybrať m základných premenných z celkového počtu $(m+n)$ premenných. Celkový počet základných riešení môžeme získať ako kombinačné číslo v tvare

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{(m+n-m)!m!} = \frac{(m+n)!}{n!m!}. \quad (4.1)$$

Nie všetky základné riešenia ESR však musia byť aj prípustnými riešeniami pôvodnej ÚLP. Pokiaľ vyberieme m základných premenných ľubovoľným spôsobom, môže ľahko nastať prípad, že niektoré z týchto premenných budú záporné a takéto riešenie, je najmä vzhľadom k podmienkam nezápornosti v ÚLP neprípustné.

Príklad o kávovej zmesi - platí: ESR je tvorená 3 obmedzujúcimi podmienkami (rovnice) a obsahuje celkom 5 premenných a preto môže mať maximálne

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

základných riešení, t.j. *spôsobov, ako možno vybrať 2 nezákladné (nulové) premenné z celkového počtu 5 premenných*. Všetky tieto základné riešenia sú uvedené v Tab.4.2.

Riešenie	Hodnoty premenných				
	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
x ⁽¹⁾	0	0	40	60	25
x ⁽²⁾	80	0	0	20	25
x ⁽³⁾	40	80	0	0	5
x ⁽⁴⁾	20	100	5	0	0
x ⁽⁵⁾	0	100	15	10	0
x ⁽⁶⁾	0	120	10	0	-5
x ⁽⁷⁾	0	160	0	-20	-15
x ⁽⁸⁾	30	100	0	-5	0
x ⁽⁹⁾	120	0	-20	0	25
x ⁽¹⁰⁾	Pri voľbe dvojice nezákladných premenných x ₂ =0 a x ₅ =0 riešenie neexistuje				

Tab.4.2 Základné riešenia ekvivalentnej sústavy rovníc

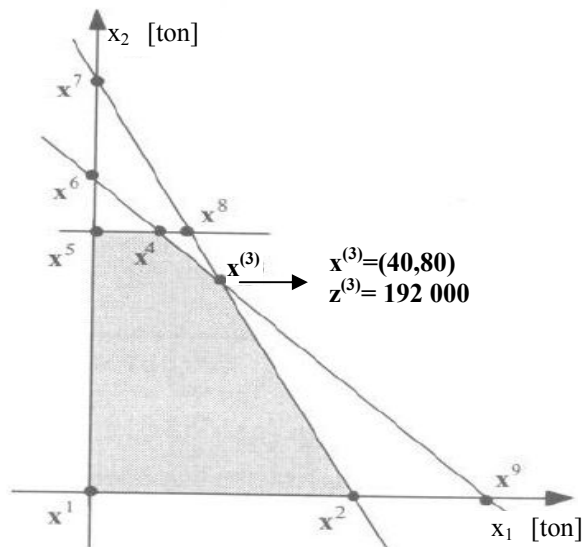
V každom riadku sú vždy 2 nezákladné premenné – sú vždy nulové a ostatné – základné premenné - sú vždy dorátané zo zostávajúcich 3 rovníc s 3 neznámymi.

V Tab.4.2 je uvedených celkom 9 základných riešení ESR – riešenie $\mathbf{x}^{(10)}$ neexistuje (príslušná sústava 3 rovníc s 3 neznámymi nemá v tomto prípade riešenie). Avšak niektoré z riešení ($\mathbf{x}^{(6)} - \mathbf{x}^{(9)}$) nespĺňajú podmienky nezápornosti pre všetky premenné (teda aj pre prídavné premenné).

Napr. riešenie $\mathbf{x}^{(6)}$ odpovedá výrobnému programu 120 ton zmesi Z2 (a 0 ton zmesi Z1), ale pri takomto programe by sa spotrebovalo 30 ton K1 (zostatok 10 ton), 60 ton K2 (úplne spotrebovaná) a 30 ton kávových zŕn K3.

POZOR: disponibilné množstvo K3 je však iba 25 ton (tzn. päť ton K3 chýba a preto je hodnota prídavnej premennej $x_5 = -5$). Z toho je zrejmé, že riešenie $\mathbf{x}^{(6)}$ síce **je základným riešením ESR, ale nie je prípustným riešením úlohy LP.**

Základné riešenie ESR je možné objasniť aj na grafickom vyjadrení ÚLP. Grafickým znázornením hľadaného základného riešenia musí byť bod, ležiaci vždy na priesečníku dvoch z celkového počtu 5 priamok (3 ŠP, 2 PN = osi x_1 a x_2). Obr.4.2 jednoznačne preukazuje, že iba 5 z celkového počtu 9 základných riešení ESR je prípustných.



Obr.4.2 Základné riešenia ekvivalentnej sústavy rovníc

Poznámka: Prípustným riešeniam obvykle odpovedajú iba krajné body množiny prípustných riešení (tzn. vrcholy).

Pri grafickom riešení ÚLP preto stačí optimálne riešenie hľadať iba medzi krajnými bodmi množiny prípustných riešení, t.j. iba medzi množinou *základných prípustných riešení*, ktoré budeme ďalej nazývať **základné (bázické) riešenie ÚLP**.

Vlastnosti základného riešenia úlohy LP:

1. Základné riešenie ÚLP **obsahuje maximálne m nenulových premenných**.
2. Ľubovoľné základné riešenie je možné získať tak, že položíme n zvolených (nezákladných) premenných rovných nule a zostávajúce (základné) premenné dopočítame zo vzniknutej sústavy m rovníc s m neznámymi.
3. V špeciálnom prípade však môže jedna alebo viac základných premenných vyjsť nulová a takéto základné riešenie nazývame **degenerované**. Platí teda, že degenerované základné riešenie má menej nenulových premenných ako je počet štruktúrnych premenných m .
4. Pre základné riešenie platí, že stĺpcové vektory štruktúrnych koeficientov, odpovedajúce m nenulovým premenným, **tvoria sústavu lineárne nezávislých vektorov**. Pokiaľ by to neplatilo, potom by sústava m rovníc o m neznámych nemala riešenie.
5. V grafickom vyjadrení sú základné riešenia obvykle vyjadrené ako krajné body množiny prípustných riešení, t.j. vo vrcholoch konvexného polyédra.

Pre riešenie ÚLP má zásadný význam tzv. **základná veta lineárneho programovania** a platí:

Ak má ÚLP optimálne riešenie, potom má aj optimálne riešenie základné.

Dôsledok: pri hľadaní optimálneho riešenia sa stačí zamerať iba na riešenia základné.

Podľa základnej vety LP by teda pre nájdenie optimálneho riešenia **Úlohy o kávovej zmesi** stačilo určiť všetky základné prípustné riešenia úlohy, vyčísliť ich hodnoty účelovej funkcie a ako optimálne riešenie vybrať to, ktoré má hodnotu účelovej funkcie najvyššiu.

Podľa Obr.4.2 ide o základné riešenie $\mathbf{x}^3=(40;80)$, ktorému odpovedá hodnota účelovej funkcie **$z = 192\ 000$** .

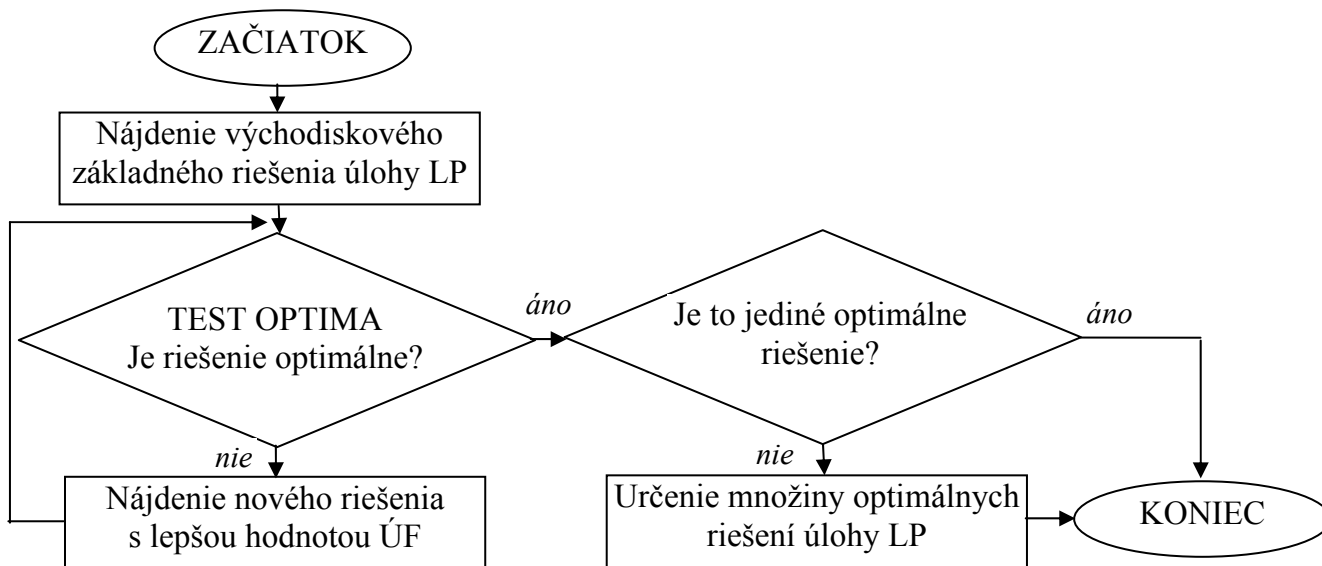
Riešenie	x_1	x_2	z
$\mathbf{x}^{(1)}$	0	0	0
$\mathbf{x}^{(2)}$	80	0	160 000
$\mathbf{x}^{(3)}$	40	80	192 000
$\mathbf{x}^{(4)}$	20	100	180 000
$\mathbf{x}^{(5)}$	0	100	140 000

Každému je však jasné, že takýto postup je s ohľadom na potenciálny počet základných riešení použiteľný iba pre úlohy veľmi malého rozsahu.

Pre riešenie praktických úloh LP bolo preto potrebné navrhnúť výpočtový postup - algoritmus, umožňujúci efektívne prehľadávanie množiny základných riešení a čo najrýchlejšiu konvergenciu k hľadanému riešeniu optimálnemu. Takýmto postupom je tzv. **simplexový algoritmus**, vhodný aj pre riešenie rozsiahlejších úloh LP v rámci praktických rozhodovacích problémov.

4.2. RIEŠENIE ÚLOH LP SIMPLEXOVÝM ALGORITMOM

Simplexová metóda (často aj simplexový algoritmus) je iteračný výpočtový postup pre nájdenie optimálneho riešenia ÚLP. Základný princíp je zrejмый z algoritmu, uvedeného na *Obr.4.3*.



Obr.4.3 Základná schéma iteračného postupu simplexovej metódy

Simplexový algoritmus je možné slovne charakterizovať nasledovne:

1. *Matematický model úlohy transformujeme na požadovaný – tzv. **kanonický tvar modelu**.*
2. *Uurčíme počiatočné (štartovacie) riešenie úlohy - tzv. **východiskové základné riešenie**.*
3. *Posúdime riešenie prostredníctvom tzv. **kritéria optimálnosti** (test optimality) riešenia.*
4. *Posúdime, **či je určené riešenie optimálne a či je jediné optimálne** alebo či existujú aj ďalšie, tzv. alternatívne riešenia. Ak je riešenie optimálne a jediné, výpočet končí.*
5. *Ak riešenie optimálne nie je, **vykonáme ekvivalentné úpravy** modelu a snažíme sa o zlepšenie riešenia v požadovanom smere optimalizácie, tzn. nárastu resp. poklesu cieľovej funkcie.*
6. *Pokračujeme v riešení bodom 3 dovtedy, pokiaľ základné prípustné riešenie nebude vyhovovať podmienke optimálnosti.*

Bolo by možné preukázať (*Veta o počte riešení SLR*), že pokiaľ má ÚLP riešenie, potom základných riešení musí byť vždy konečný počet. Na základe princípu simplexovej metódy platí, že k optimálnemu riešeniu ÚLP dospejeme po realizácii konečného počtu iteračných krokov.

Ak je matematický model úlohy prevedený na kanonický tvar, potom je po konečnom počte iteračných krokov simplexového algoritmu vždy možné nájsť optimálne riešenie.

Vieme už, že matematický model ÚLP je tvorený obvykle 3 základnými časťami :

1. **účelovou funkciou** v tvare lineárnej funkcie viacej premenných,
2. **sústavou obmedzujúcich podmienok štruktúrnych**, definovaných v tvare lineárnych nerovníc resp. rovníc a
3. **sústavou obmedzujúcich podmienok obligátnych**, najčastejšie tzv. *podmienky nezápornosti* ($x_i \geq 0$), ale aj *podmienky celočíselnosti* ($x_i \in \mathbb{Z}^+$), príp. *podmienky bivalentnosti* ($x_i = 0$ alebo ($x_i = 1$) štruktúrnych premenných (riaditeľné vstupy) obvykle v tvare lineárnych nerovníc alebo rovníc.

Pri aplikácii simplexovej metódy je bezpodmienečne nutné najskôr nájsť **východiskové (základné prípustné) riešenie**. Znamená to, že obmedzujúce podmienky vyjadríme vo forme sústavy lineárnych rovníc v **kanonickom tvare** s nezápornou pravou stranou všetkých rovníc modelu, t.j. $b_i \geq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, n$. Maticovo možno kanonický tvar zapísať nasledovne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-m} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A
I
x
b

$$\begin{aligned} x_j &\geq \text{ pre } j=1,\dots,n \\ b_i &\geq \text{ pre } i=1,\dots,m \\ m &< n \end{aligned}$$

(4.2)

Rozšírená matica $\mathbf{A}'$ s rozmerom (m,n) je rozdelená na dve submatice - **všeobecnú maticu** $\mathbf{A}$ s rozmerom $(m, n-m)$ a **jednotkovú maticu** $\mathbf{I}$ s rozmerom (m,m) . Pri takomto označení potom premenné $[x_{n-m+1}, x_{n-m}, \dots, x_n]$ tvoria tzv. **vektor jednotkovej bázy** (hovoríme o nich, že sú v báze).

Základný výpočtový postup simplexovej metódy je možné rozdeliť na dve hlavné fázy:

- 1. Nájdenie (výpočet) východiskového základného riešenia**
- 2. Realizácia iteračného postupu vedúceho k určeniu extrémnej hodnoty účelovej funkcie z.**

Zásadný problém je nájdenie tzv. **východiskového základného riešenia úlohy**. Pokiaľ je takéto riešenie už k dispozícii, simplexová metóda umožňuje v jednotlivých iteračných krokoch určiť vždy nové základné riešenie s lepšou/min. rovnakou – *napr. v prípade maximalizácie vyššou* – hodnotou účelovej funkcie. Po konečnom počte iteračných krokov umožňuje buď nájsť optimálne riešenie – t.j. s najlepšou hodnotou účelovej funkcie alebo zistiť, že také riešenie neexistuje.

V niektorých modeloch ÚLP je nájdenie východiskového základného riešenia triviálne. V takomto prípade celý postup riešenia nazývame **jednofázový simplexový algoritmus**.

Naopak, vo všeobecnosti nemusí byť nájdenie východiskového základného riešenia ÚLP vôbec jednoduché, príp. môžeme zistiť, že takéto riešenie vôbec neexistuje. V takomto prípade hovoríme o tzv. **dvojfázovom simplexovom algoritme**.

4.2.1 Jednofázový simplexový algoritmus

Využívaný v prípade, ak všetky obmedzenia ÚLP sú definované ako nerovnice typu „ $\leq$ “.

Po prevedení takejto SLN na ESR pomocou prídavných premenných dostaneme sústavu rovníc **v špeciálnom tvare**, ktorý výrazne uľahčuje získanie východiskového základného riešenia. Jedná sa o taký tvar sústavy rovníc, v ktorom matica štruktúrnych koeficientov obsahuje m jednotkových stĺpcových vektorov, ktoré je možné usporiadať do tzv. **jednotkovej matice**. Takýto tvar sústavy rovníc budeme nazývať ako **kanonický tvar matematického modelu ÚLP**.

4.2.1.1 Kanonický tvar a východiskové riešenie

Pokiaľ máme sústavu m lineárnych rovníc s $(m+n)$ premennými v kanonickom tvare, potom je možné odvodiť základné riešenie sústavy jednoducho. V kanonickom tvare sa vyskytujú dva druhy premenných a to:

- m tzv. **základných premenných** – sú premenné, ktorým odpovedajú jednotkové vektory a ktorých hodnoty sú v príslušnom základnom riešení rovné hodnotám pravej strany,
- n tzv. **nezákladných premenných** – sú všetky ostatné premenné, ktorých hodnoty sú v základom riešení rovné nule.

Postup riešenia si ukážeme na riešení známej **Úlohy výrobného plánovania kávových zmesí**. Sústavu štruktúrnych obmedzení (nerovnice typu „ $\leq$ “) už máme definovanú. Po doplnení tzv. **prídavných premenných** veľmi jednoducho pretransformujeme túto SLN na sústavu troch rovníc, ktoré však už neobsahujú dve (x_1, x_2), ale celkom päť premenných (x_1 až x_5).

ŠP = sústava nerovnic

$$0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 \leq 40$$

$$0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 \leq 60$$

$$0,25 \cdot x_2 \leq 25$$

$\Rightarrow$

ESR = sústava rovníc

$$0,5 \cdot x_1 + 0,25 \cdot x_2 + x_3 = 40$$

$$0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 + x_4 = 60$$

$$0,25 \cdot x_2 + x_5 = 25$$

Ekvivalentná sústava rovníc je už sústavou v tzv. **kanonickom tvare**, pretože odpovedajúca matica štruktúrnych koeficientov v tvare

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obsahuje práve tri (m) jednotkové vektory, ktoré je možné usporiadať do jednotkovej matice **I**.

Základné (bázické) premenné v ESR sú teda premenné x_3 , x_4 a x_5 . Nezákladné premenné sú x_1 a x_2 . Ak položíme všetky nezákladné premenné rovné nule ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$), potom z ESR ľahko získame hodnoty základných premenných a dostaneme: $\mathbf{x}_3 = b_1 = \mathbf{40}$, $\mathbf{x}_4 = b_2 = \mathbf{60}$, $\mathbf{x}_5 = b_3 = \mathbf{25}$.

Takto získaný vektor riešení patrí vzhľadom k nezápornosti všetkých jeho zložiek do množiny základných riešení a predstavuje tzv. **východiskové základné prípustné riešenie ÚLP**.

Ak sú v úlohe LP všetky obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc typu „ $\leq$ “, potom pre získanie východiskového základného riešenia stačí SLN previesť pomocou prídavných premenných na sústavu rovníc $SLR = ESR$. Tým je priamo vytvorená sústava rovníc v kanonickom tvare a tomu odpovedá aj jednoducho určiteľné východiskové základné riešenie úlohy LP.

Po získaní východiskového základného riešenia je možné vykonať **test jeho optimálnosti** a v prípade potreby aj realizovať vylepšovanie (konvergenciu) riešenia k hľadanému optimu.

Celý výpočet sa realizuje v tzv. **simplexovej tabuľke**.

Základné premenné	Vektor pravých strán	Štruktúrne premenné (nezákladné premenné)		Prídavné premenné (základné premenné)		
Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	40	1/2	1/4	1	0	0
x_4	60	1/2	1/2	0	1	0
x_5	25	0	1/4	0	0	1
z	0	-2000	-1400	0	0	0

Tab. 4.3a Východisková simplexová tabuľka

Červené = prvky vektora pravých strán, **modré** = štruktúrne koeficienty, **zelené** = jednotková báza, **oranžové** – koeficienty účelovej funkcie, ktorá je v tzv. *anulovanom tvare*.

Obsah tabuľky: vektor základných premenných (štruktúrne a prídavné), maticu štruktúrnych koeficientov, jednotkovú bázu a vektor pravých strán. Posledný riadok obsahuje koeficienty účelovej funkcie v tzv. *anulovanom tvare*, t.j. tvar, v ktorom sú všetky premenné modelu prevedené na ľavú stranu a na pravej strane je iba absolútny člen, udávajúci počiatočnú hodnotu účelovej funkcie (východiskové riešenie obvykle tvoria nulové štruktúrne premenné – t.j. bod **[0,0]** s hodnotou **$z = 0$**).

Anulovaný tvar účelovej funkcie má teda vo všeobecnosti tvar

$$z - c_1.x_1 - c_2.x_2 - \dots - c_n.x_n = 0,$$

a teda pre náš príklad platí

$$z - 2000.x_1 - 1400.x_2 = 0.$$

4.2.1.2 Testovanie optimality riešenia

Testovanie optimality riešenia spočíva v posúdení toho, či je možné nájsť v danom kroku výpočtu určitú tzv. **vstupujúcu premennú**, ktorá by jej zavedením do bázy (t.j. medzi základné premenné) vyvolala zvýšenie (pri úlohe MAX) resp. zníženie (pri MIN) hodnoty účelovej funkcie.

Ak nebude už možné takúto „vhodnú premennú“ v danom iteračnom kroku výpočtového postupu nájsť, znamená to, že základné riešenie získané v tomto kroku je už **riešením optimálnym**.

Prakticky to znamená, že riešenie ÚLP je optimálne vtedy, ak pri:

- **MAXIMALIZÁCII** účelovej funkcie sú koeficienty v riadku účelovej funkcie (tzv. redukované ceny) nezáporné, t.j. kladné alebo nulové.
- **MINIMALIZÁCII** účelovej funkcie sú koeficienty v riadku účelovej funkcie nekladné, t.j. záporné alebo nulové.

4.2.1.3 Nesplnený test optimality = výpočet nového základného riešenia

Pokiaľ v danom iteračnom kroku **nie je test optimality splnený**, znamená to, že je možné nájsť nové základné riešenie, ktoré bude mať hodnotu účelovej funkcie lepšiu ako riešenie aktuálne.

Samotná realizácia výpočtu nového základného riešenia prebieha v 3 krokoch:

- 1. voľba vstupujúcej premennej**
- 2. voľba vystupujúcej premennej**
- 3. prepočet simplexovej tabuľky.**

1. Voľba vstupujúcej premennej

Najjednoduchším spôsobom je zvoliť vstupujúcu premennú podľa jednotkovej zmeny hodnoty účelovej funkcie, tzn. podľa koeficientov z_j v riadku účelovej funkcie z . Čím vyšší bude v absolútnej hodnote koeficient z_j , tým vyššiu zmenu hodnoty účelovej funkcie je možné očakávať.

Pri voľbe vstupujúcej premennej je nutné však uvažovať, že:

- **záporné hodnoty z_k signalizujú možnosť zvýšenia hodnoty účelovej funkcie,**
- **kladné hodnoty z_k signalizujú možnosť zníženia hodnoty účelovej funkcie.**

Vo všeobecnosti pre voľbu vstupujúcej premennej platí pri:

- **maximalizácii ÚF je vstupujúca premenná (stĺpec tabuľky) určená hodnotou $z_k = \min z_j$, pričom $z_j < 0$.**
- **minimalizácii ÚF je vstupujúca premenná (stĺpec tabuľky) určená hodnotou $z_k = \max z_j$, pričom $z_j > 0$.**

Poznámka: Ak nemožno vstupujúcu premennú podľa z_j vybrať jednoznačne (rovnaká hodnota z_j u viac premenných), vyberieme ľubovoľnú z tých premenných, ktoré test optimality porušujú najviac (t.j. vždy najväčšie hodnoty z_j v absolútnom vyjadrení).

2. Voľba vystupujúcej premennej

Vystupujúcu premennú nájdeme tak, že vypočítame minimálny podiel transformovaných hodnôt pravej strany b_i a kladných štruktúrnych koeficientov u vstupujúcej premennej. Tento minimálny podiel určuje riadok simplexovej tabuľky, v ktorom bude aktuálna bázická (základná) premenná premennou vystupujúcou. Platí vzťah

$$w_i = \frac{b_i}{a_{kj}} \quad (4.2)$$

a pre vystupujúcu premennú (riadok) musí platiť

$$w = \min \left(\frac{b_i}{a_{kj}} \right) = \min w_i . \quad (4.3)$$

Poznámka: Ak nie je možné zvoliť vystupujúcu premennú jednoznačne, pretože $\min (b_i / a_{ik})$ vychádza rovnaký pre dva alebo viac riadkov, môžeme zvoliť ako vystupujúcu ľubovoľnú premennú určenú ktorýmkoľvek z týchto riadkov.

3. Prepočet simplexovej tabuľky

Vstupujúca premenná určuje v simplexovej tabuľke tzv. **riadiaci (kľúčový) stĺpec** a vystupujúca premenná tzv. **riadiaci (kľúčový) riadok**. Priesečníkom kľúčového riadka a stĺpca je **riadiaci (kľúčový) prvok – tzv. PIVOT**.

Pre prepočet simplexovej tabuľky používame štandardnú Gaussovú eliminačnú metódu. Prepočet je potrebné realizovať tak, aby **v stĺpci vstupujúcej premennej vznikol jednotkový vektor s jednotkou práve na mieste pivota.**

Samotný prepočet je možné realizovať nasledovne:

1. **Transformácia riadiaceho riadka** – celý riadok vydělíme pivotom (kľúčovým prvkom) a tým vždy získame na mieste pivota hodnotu 1.
2. **Transformácia i-teho riadku simplexovej tabuľky** (vrátane riadku účelovej funkcie) – všetky ostatné prvky simplexovej tabuľky prepočítame tak, aby sme každý prvok riadiaceho stĺpca (t.j. stĺpec vstupujúcej premennej) vynulovali. Cieľom je, aby všetky prvky riadiaceho stĺpca vytvorili jednotkový vektor s jednotkou na mieste pivota.

K prepočtu tabuľky je možné využiť aj tzv. **Gaussov eliminačný krok** v tvare

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \cdot a_{rj}, \quad (4.4)$$

ktorý môžeme slovne vyjadriť nasledovne:

Nový prvok (a_{ij}^*) dostaneme, ak od prvku pôvodného (a_{ij}) odrátame podiel prvku nulovaného (a_{ik}) a pivota (a_{rk}) vynásobený koeficientom z riadiaceho riadku a stĺpca nového prvku (a_{rj}).

Príklad o kávovej zmesi: riešenie simplexovou metódou

0.iteračný krok: Východisková simplexová tabuľka príkladu so zvýrazneným riadiacim riadkom a stĺpcom (žlté), vrátane výpočtu hodnoty w_i je uvedená v Tab 4.3.b.

0.iteračný krok

Základné premenné	Vektor pravých strán	Štruktúrne premenné (nezákladné)		Prídavné premenné (základné)			Pomocné výpočty
Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_i
x_3	40	1/2	1/4	1	0	0	40/0,5=80
x_4	60	1/2	1/2	0	1	0	60/0,5=120
x_5	25	0	1/4	0	0	1	25/0= ∞
z	0	-2000	-1400	0	0	0	max

Tab. 4.3 b Východisková simplexová tabuľka

Prípustné riešenie obsiahnuté v tabuľke (0.iteračný krok) je charakterizované vektorom $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,40,60,25)$ a hodnota účelovej funkcie tohto riešenia je $z^{(1)} = 0$.

Vo východiskovej tabuľke bude:

x_1 – vstupujúca premenná (pretože: redukovaná cena je $c_1=-2000$, tzn. na jednotku premennej x_1 dosiahneme prírastok (zvýšenie) hodnoty ÚF o 2000 Eur, ale napr. pre x_2 by bolo iba o 1400 Eur).

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

x_3 – **vystupujúca premenná** (pretože: pomocná hodnota $w = \min(w_i) = \min(w_3, w_4, w_5) = \min(40/0,5; 60/0,5; 25/0) = \min(80; 120; \infty)$ a preto $w = w_3$ a vystupujúcou premennou je x_3).

1.iteračný krok: uvedený v Tab.4.3c, bol získaný transformáciou východiskovej simplexovej Tab.4.3b. Za riadiaci prvok bol určený prvok (**$a_{31}=1/2$**) a bol aplikovaný postup Gaussovej eliminácie s cieľom: „**vyjednotkovať**“ **pivota** a „**vynulovať**“ **ostatné prvky riadiaceho stĺpca**.

1.iteračný krok

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_i
x_1	80	1	1/2	2	0	0	160
x_4	20	0	1/4	-1	1	0	80
x_5	25	0	1/4	0	0	1	100
z	160 000	0	-400	4000	0	0	max

Tab. 4.3c Prvý krok výpočtu simplexovou metódou

Po 1.iterácii získame prípustné (vylepšené) riešenie v tvare vektora $\mathbf{x}^{(1)}=(\mathbf{80,0,0,20,25})$, ktoré má hodnotu účelovej funkcie $\mathbf{z}^{(1)}=\mathbf{160\ 000}$. Prírastok účelovej funkcie vychádza skutočne

$$\Delta z(x_1) = z^1 - z^0 = 16000 - 0 = 16000 \quad \text{resp.} \quad \Delta z(x_1) = -w \cdot z_1 = -80 \cdot (-2000) = 160000.$$

Riešenie $\mathbf{x}^{(1)}$ nie je optimálne, pretože hodnota $c_2 = -400$ v riadku účelovej funkcie signalizuje, že ešte môže nastať zvýšenie hodnoty ÚF, ak by sa premenná x_2 stala vstupujúcou premennou.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Riešenie $\mathbf{x}^{(1)}$ ešte nie optimálne a preto ďalší výpočet.

2.iteračný krok: Hodnota $c_2 = -400$ určuje vstupujúcu (riadiacu) premennú x_2 , hodnota $w_4=80$ určuje vystupujúcu premennú x_4 . Pivotom (riadiacim prvkom) ďalšej úpravy simplexovej tabuľky bude prvok $\mathbf{a_{4,2}=1/4}$.

2.iteračný krok

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_i
x_1	40	1	0	4	-2	0	
x_2	80	0	1	-4	4	0	
x_5	5	0	0	1	-1	1	
z	192 000	0	0	2400	1600	0	MAX

Tab. 4.3d Druhý krok výpočtu – optimálne riešenie

Všimnime si: premenné x_1, x_2, x_5 sú teraz základnými (bázickými) premennými, x_3, x_4 sú aktuálne premenné nezákladné. **Oranžové** – tzv. redukované ceny, **zelené** – redukované cenové koeficienty (tzv. tieňové ceny). Tabuľka obsahuje riešenie $\mathbf{x}^{(3)} = (40, 80, 0, 0, 5)$ s hodnotou účelovej funkcie $\mathbf{z}^{(3)} = 192\,000$.

Prírastok hodnoty účelovej funkcie je tu skutočne

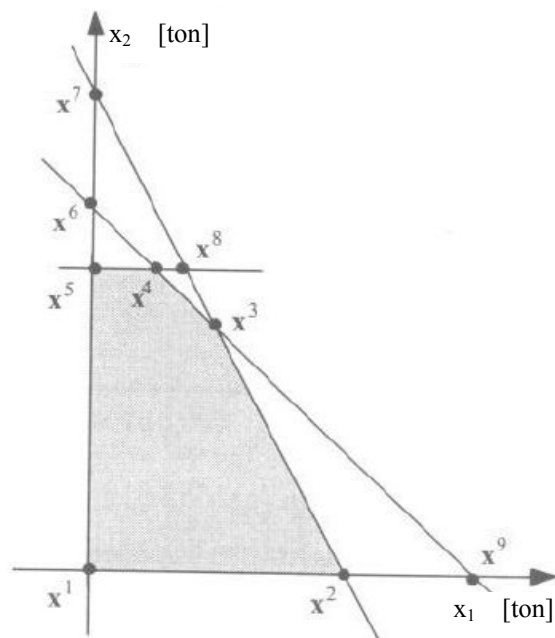
$$\Delta z(x_2) = z^3 - z^2 = 192000 - 160000 = 32000 \quad \text{resp.} \quad \Delta z(x_2) = -w_2 \cdot z_2 = -80 \cdot (-400) = 32000.$$

Riešenie v tabuľke 4.3d je už riešením optimálnym. Vieme to preto, lebo všetky hodnoty účelovej funkcie z u pôvodne nezákladných premenných (x_1 a x_2) sú kladné a teda nie je možné už dosiahnuť žiadne zvýšenie hodnoty účelovej funkcie.

Interpretácia výsledkov:

Optimálny výrobný program firmy predstavuje produkcia 40 ton kávovej zmesi Z1 a 80 ton zmesi Z2 a takýto program výroby prinesie firme zisk 192 000.

Poznámka: Riešenia $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ obsiahnuté v simplexových tabuľkách odpovedajú rovnako označeným bodom pri grafickej interpretácii množiny prípustných riešení úlohy o kávovej zmesi (obr.4.1e). Je vidieť, že riešenia určené v dvoch po sebe nasledujúcich iteráciách sú z hľadiska grafickej interpretácie susednými krajnými bodmi množiny prípustných riešení.



Obr.4.1e Základné riešenie ekvivalentnej sústavy rovníc

4.2.2 Dvojfázový simplexový algoritmus

V prípade, ak nie sú v matematickom modeli ÚLP všetky obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc typu „ $\leq$ “, potom získanie východiskového základného riešenia nie je také jednoduché, ako bolo uvedené doteraz. Jeho vyhľadanie predstavuje v podstate celú jednu (I.) fázu výpočtu. Až neskôr, v rámci ďalšej (II.) fázy výpočtu sa môžeme zaoberať úlohou extremalizácie (optimalizácie) zadanej účelovej funkcie. Druhá fáza je už úplne zhodná s vyššie uvedeným postupom.

Princíp a podstatu potreby zaradenia druhej fázy v rámci simplexového algoritmu si ukážeme na jednoduchom numerickom príklade.

Príklad: Majme zadaný matematický model úlohy napr. v tvare

maximalizovať

$$z = 2 \cdot x_1 + x_2$$

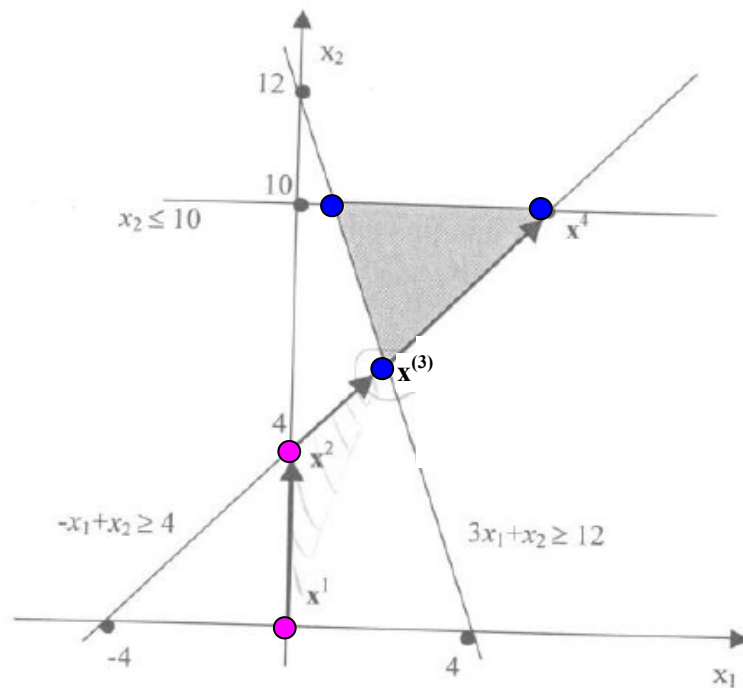
za obmedzujúcich podmienok

$$3 \cdot x_1 + x_2 \geq 12$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \leq 10$$

Grafické znázornenie množiny prípustných riešení je na Obr.4.4.



Obr.4.4 Množina prípustných riešení úlohy

Preved'me sústavu obmedzujúcich podmienok pomocou prídavných premenných na ekvivalentnú sústavu rovníc (ESR) a dostaneme sústavu 3 rovníc s piatimi neznámymi v tvare

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot x_1 + x_2 - x_3 & = & 12 \\ -x_1 + x_2 - x_4 & = & 4 \\ x_2 + x_5 & = & 10 \end{array} .$$

Ak zvolíme v sústave rovníc premenné x_1 a x_2 ako nezákladné ($x_1=0$, $x_2=0$) premenné, dostaneme hodnoty ostatných premenných $x_3=-12$, $x_4=-4$, $x_5=10$. Odpovedajúce riešenie – východiskové (základné) riešenie - zapísané ako vektor $\mathbf{x}^{(0)}=(\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{-12};\mathbf{-4};\mathbf{10})$ však nie je pre zadaný model riešením prípustným, pretože odporuje podmienkam nezápornosti.

Uvedená skutočnosť je zrejmá aj z *Obr.4.4* – množina prípustných riešení (šedá), kde riešenie $\mathbf{x}^{(1)}$ je vyznačené v počiatku. Je to spôsobené tým, že ESR nie je v požadovanom – **kanonickom** – tvare a preto matica štruktúrnych koeficientov neobsahuje potrebný počet jednotkových vektorov.

Pre získanie požadovaného tvaru musíme takúto ESR „umelo“ rozšíriť o ďalšie premenné, ktoré budeme nazývať **umelé (pomocné) premenné**, ozn. **u**. Umelé premenné sa potom jednoducho pripočítajú k ľavej strane tých rovníc, v ktorých chýba príslušný jednotkový vektor.

V takomto prípade budeme ESR rozšírenú o umelé premenné nazývať **rozšírená ekvivalentná sústava rovníc (RESR)**.

Pre zadaný **Príklad o kávovej zmesi** dostaneme rozšírenú sústavu rovníc v tvare

$$\begin{array}{rcccccl} 3x_1 + x_2 - x_3 & & & + u_1 & = & 12 \\ -x_1 + x_2 & & - x_4 & & + u_2 & = 4 \\ & x_2 & & + x_5 & & = 10 \end{array} .$$

Aké sú teda pravidlá pre dopĺňovanie umelých premenných ??

- ***U podmienok typu „ $\leq$ “ umelé premenné nedoplňujeme***, nakoľko prídavná premenná pripočítaná pri prevode nerovnice na rovnicu zaistí automaticky získanie jednotkového vektora v matici štruktúrnych koeficientov. Môže sa teda v tejto rovnici stať základnou premennou.
- ***U podmienok typu „ $\geq$ “ alebo „ $=$ “ je potrebné umelú premennú ku ľavej strane nerovnice alebo rovnice pripočítať***. Umelé premenné budú v takto získanej sústave rovníc základnými premennými.

Zhrnutie základných zásad dopĺňovania prídavných a umelých premenných pre všetky typy obmedzujúcich podmienok:

Typ obmedzenia	Prídavná premenná	Umelá premenná
„ $\leq$ “	+ x	
„ $\geq$ “	- x	+ u
„ $=$ “		+ u

Rozšírená sústava rovníc je už sústavou k kanonickom tvare a základné premenné tu predstavujú umelé premenné u_1, u_2, u_3 . Základné riešenie takejto sústavy je určené vektormi

$$\mathbf{x}^{(0)} = (0; 0; 0; 0; 10) \text{ a } \mathbf{u}^{(0)} = (12; 4)$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor hodnôt štruktúrnych a prídavných premenných, $\mathbf{u}$ predstavuje vektor hodnôt umelo doplnených premenných. Dosadením prvkov vektora $\mathbf{x}^{(0)}$ do zadanej SLN alebo do ESR zistíme, že ani riešenie rozšírenej ESR nie je prípustným riešením zadanej úlohy LP.

Obmedzenie	Ľavá strana	Relačné znamienko	Pravá strana	Splnené	Rozdiel	
					x	u
$3 \cdot x_1 + x_2 \geq 12$	0	$\geq$	12	nie	0	12
$-x_1 + x_2 \geq 4$	0	$\geq$	4	nie	0	4
$x_2 \leq 10$	0	$\leq$	10	áno	10	

Tab. 4.4 Hodnoty prídavných a umelých premenných

Čo vidíme? Prvá obmedzujúca podmienka nie je pre riešenie $\mathbf{x}^{(0)}$ splnená. Rozdiel medzi pravou a ľavou stranou je 12 a práve to je hodnota umelej premennej u_1 . Druhé obmedzenie tiež nie je splnené – rozdiel o koľko nie je splnené udáva hodnota 4 a zhoduje sa hodnotou umelej premennej u_2 . Posledná podmienka splnená je a prídavná premenná $x_5 = 10$.

Z toho vyplýva aj praktický význam prídavných a umelých premenných. Platí:

- **Prídavné premenné** - slúžia k prevodu sústavy obmedzujúcich podmienok na sústavu rovníc. Hodnoty týchto premenných môžu vyjadrovať napr. nevyužitú kapacitu alebo prekročenie určitého požiadavku. Majú teda určitú ekonomickú interpretáciu k riešenému problému.
- **Umelé premenné** – zabezpečujú iba získanie sústavy rovníc v kanonickom tvare. Ich kladné hodnoty signalizujú, že niektoré z obmedzujúcich podmienok nie sú splnené. Vyjadrujú teda mieru nesplnenia zadaných obmedzení.

Z uvedeného vyplýva, že prípustné riešenie ÚLP získame iba vtedy, ak budú všetky umelé premenné nulové.

Obsahom prvej fázy výpočtu dvojfázovým simplexom je preto vynulovanie všetkých umelých premenných RESR. Táto fáza môže byť pritom zakončená dvomi možnosťami:

1. **Všetky umelé premenné sa podarí vynulovať** a tým získame východiskové základné riešenie zadanej úlohy. Výpočet potom môže pokračovať optimalizáciou účelovej funkcie, teda druhou fázou riešenia. S umelými premennými už v druhej fáze neuvažujeme.
2. **Všetky umelé premenné sa vynulovať nepodarí.** V takomto prípade neexistuje žiadne riešenie, ktoré by vyhovovalo všetkým obmedzujúcim podmienkam. Úloha LP nemá teda žiadne prípustné riešenie a vo výpočte nemá zmysel pokračovať.

Ako ale zabezpečiť vynulovanie umelých premenných??

Je viac ciest. My uvedieme spôsob založený na minimalizácii tzv. *pomocnej účelovej funkcie*.

Minimalizáciu (chápeme vynulovanie) hodnôt umelých premenných je možné zabezpečiť tak, že zostrojíme *pomocnú účelovú funkciu* p , ktorá bude definovaná ako *súčet všetkých umelých premenných*. Takúto pomocnú účelovú funkciu budeme minimalizovať a teda

$$p = \sum_i u_i \rightarrow MIN.$$

Pokiaľ sa podarí získať minimálnu hodnotu $p = 0$, potom aj vzhľadom k nezápornosti všetkých premenných musia byť všetky umelé premenné rovné nule. Tým je možné získať východiskové prípustné riešenie ÚLP.

V prípade, ak je minimum $p > 0$, potom nie je možné získať také riešenie, v ktorom by všetky umelé premenné boli nulové. **Vtedy ÚLP nemá žiadne prípustné riešenie.**

Pokračovanie Príkladu o kávovej zmesi:

Ekvivalentná SLR (ESR)	Rozšírená ekvivalentná SLR (RESR)
$3.x_1 + x_2 - x_3 = 12$	$3.x_1 + x_2 - x_3 + u_1 = 12$
$-x_1 + x_2 - x_4 = 4$	$-x_1 + x_2 - x_4 + u_2 = 4$
$x_2 + x_5 = 10$	$x_2 + x_5 = 10$

Máme dve umelé premenné u_1 a u_2 a preto bude pomocná účelová funkcia p definovaná v tvare

$$p = u_1 + u_2 \rightarrow MIN.$$

Z RESR môžeme získať

$$u_1 = 12 - 3.x_1 - x_2 - x_3$$

$$u_2 = 4 + x_1 - x_2 + x_4$$

takže pre pomocnú ÚF dostaneme

$$p = u_2 + u_2 = 12 - 3.x_1 - x_2 - x_3 + 4 + x_1 - x_2 + x_4 \rightarrow MIN$$

$$p = 16 - 2.x_1 - 2.x_2 + x_3 + x_4$$

V anulovanom tvare (t.j. s nulovou pravou stranou) má potom pomocná ÚF tvar

$$p + 2.x_1 + 2.x_2 - x_3 - x_4 = 16.$$

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Východisková simplexová tabuľka, rozšírená o umelé premenné a riadok pomocnej ÚF:

Základné premenné	Vektor pravých strán	Štruktúrne premenné (nezákladné premenné)		Prídavné premenné (základné premenné)			Umelé (pomocné) premenné		Pom. výpoč.
Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	w_i
u_1	12	3	1	-1	0	0	1	0	12
u_2	4	-1	1	0	-1	0	0	1	4
u_3	10	0	1	0	0	1	0	0	10
z	0	-2	-1	0	0	0	0	0	max
p	16	2	2	-1	-1	0	0	0	min

Tab. 4.5a Východisková simplexová tabuľka pre dvojfázový simplex

Vstupujúca premenná: v I.fáze volíme podľa pomocnej ÚF a teda to môže byť jedna z premenných x_1 alebo x_2 (obidve majú rovnaké redukované cenové koeficienty $c=2$, volíme x_2).

Vystupujúca premenná: volíme bežným spôsobom podľa hodnoty w .

Prepočtom tabuľky by sme postupne získali riešenia:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0; 4; 0; 0; 6) \text{ a } \mathbf{u}^{(1)} = (8; 0), \mathbf{z}^{(1)} = 4, \mathbf{p}^{(1)} = 8.$$

Ďalší krok: vstupujúca premenná x_1 , vystupujúca premenná u_1 a riešenie podľa Tab.4.5b

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	w_i
x_1	2	1	0	-1/4	1/4	0	1/4	-1/4	-
x_2	6	0	1	-1/4	-3/4	0	1/4	3/4	-
x_5	4	0	0	1/4	3/4	1	-1/4	-3/4	16
z	10	0	0	-3/4	-1/4	0	-1	-1	max
p	0	0	0	0	0	0	-1	-1	MIN

Tab. 4.5b Simplexová tabuľka pre dvojfázový simplex – 2.iterácia

Získané riešenie

$$\mathbf{x}^{(2)} = (2; 6; 0; 0; 4) \text{ a } \mathbf{u}^{(2)} = (0; 0), z^{(2)} = 10, p^{(2)} = 0.$$

je optimálnym riešením rozšírenej ESR.

Vzhľadom k tomu, že je hodnota účelovej funkcie $p=0$, má zmysel pokračovať v riešení. Riešenie $\mathbf{x}^{(2)}=(2;6;0;0;4)$ bude preto predstavovať súčasne východiskové riešenie pôvodnej úlohy LP. Túto skutočnosť ilustruje aj Obr.4.4 v ktorom sú jednotlivé kroky výpočtu zvýraznené šípkami.

Nájdением východiskového riešenia sa I.fáza výpočtu končí. ***Tak ako pomocnú ÚF, ani umelé premenné už v ďalšom výpočte neuvažujeme.*** Vstupujúca premenná sa ďalej už volí podľa koeficientov pôvodnej účelovej funkcie z .

V tomto prípade (Tab. 4.5b): vstupujúca premenná je x_3 , vystupujúca premenná x_5 .

Po opätovnom prepočítaní tabuľky dostaneme

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_i
x_1	6	1	0	0	2	1	
x_2	10	0	1	0	1	1	
x_3	16	0	0	1	3	4	
z	22	0	0	0	2	3	MAX

Tab. 4.5c Simplexová tabuľka pre dvojfázový simplex – optimálne riešenie

z ktorej vyplýva optimálne riešenie ÚLP v tvare

$$\mathbf{x}^{(3)} = (6; 10; 16; 0; 0), \mathbf{z}^{(3)} = 22.$$

Zhrnutie:

Základné úpravy všeobecného matematického modelu ÚLP na kanonický tvar.

- a) Pri nesplnení *podmienky nezápornosti pravej strany* ($b_i < 0$) sa celá rovnica násobí (-1) .
- b) Pri nesplnení *podmienky nezápornosti premennej x_j* je potrebné:
ak ($x_j \leq 0$), vykonať tzv. substitúciu, t.j. dosadiť do rovnice premennú $x_j' = -x_j$, pre ktorú je podmienka nezápornosti splnená a po ukončení riešenia sa vrátiť k premennej pôvodnej;
ak x_j je ľubovoľné, tzn. môže nadobúdať kladných i záporných hodnôt, nahradíme ju 2 novými premennými podľa vzťahu $x_j = x_j'' - x_j'$, pre ktoré platí $x_j'' \geq 0$, $x_j' \geq 0$, pretože každé (kladné i záporné) číslo je možné vyjadriť ako rozdiel dvoch kladných čísiel.
- c) *Nerovnice typu „ $\leq$ “* sa prevedú na rovnice pripočítaním tzv. *prídavných premenných*. Napr. $3.x_1 + 2.x_2 \leq 3$ sa zmení na $3.x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3$.
- d) *Nerovnice typu „ $\geq$ “* môžeme previesť na rovnice, ak prídavnú premennú x_{n+k} od rovnice odpočítame a pripočítame tzv. *umelú premennú (u_j)*. Napr. $3.x_1 + 2.x_2 \geq 3$ sa zmení na $3.x_1 + 2.x_2 - x_3 + u_1 = 3$.

- e) V nerovnostiach typu „ $\leq$ “ sa jednotková báza vytvorí automaticky z prídavných premenných. U rovníc (príp. aj nerovníc typu „ $\geq$ “, ktoré sme podľa d) na rovnice previedli) je nutné jednotkovú bázu vytvoriť a to buď vhodným výpočtovým postupom (napr. Gauss–Jordanova eliminácia) alebo častejšie využívaným zaradením tzv. **umelých premenných**. Pri ich zaradení je však nutné do kanonického tvaru modelu ÚLP doplniť (zaviesť) ďalšiu a to tzv. **doplňkovú (pomocnú) účelovú funkciu**.

Komplexný všeobecný postup realizácie simplexovej metódy

1. Kanonický tvar modelu ÚLP prepíšeme do simplexovej tabuľky.
2. Určíme **riadiaci (kľúčový) stĺpec**, ktorý určuje *novu zaradovanú premennú* do bázy a to podľa toho, ktorý záporný (úlohy typu MAX), resp. kladný (úlohy typu MIN) **koefficient v riadku účelovej funkcie má najväčšiu absolútnu hodnotu**.
3. Určíme **riadiaci (kľúčový) riadok**, t.j. *vylučovanú premennú*, podľa toho, ktorý podiel v tvare $w_i = b_i / a_{ik}$, pre všetky $a_{ik} > 0$, zapisovaný v poslednom stĺpci tabuľky je najmenší.
4. Určíme tzv. **riadiaci prvok (pivot) úprav**, ako priesečník riadiaceho riadku a riadiaceho stĺpca.

5. Vykonáme **úplnú elimináciu**, tzn. vydelíme všetky prvky riadiaceho riadku pivotom, prvky riadiaceho stĺpca nahradíme prislúchajúcim základným stĺpcovým jednotkovým vektorom a ostatné prvky v simplexovej tabuľke dorátame (napr. pomocou Gaussovej eliminácie, príp. podľa odvodeného vzťahu pre prepočet prvkov simplexovej tabuľky).

6. Posúdime **splnenie kritéria optimálnosti**, t.j. pokiaľ nebudú všetky koeficienty v riadku účelovej funkcie nezáporné (úloha typu MAX), resp. nekladné (úlohy typu MIN). Ak to splnené nie je, vrátime sa do kroku 2.

7. Celý **výpočtový postup opakujeme** dovtedy, pokiaľ podmienka optimality nebude splnená. Až vtedy je možné konštatovať, že bolo nájdené optimálne riešenie.

V prípadoch, že nie je možné riadiaci riadok alebo stĺpec a teda aj pivota úprav určiť, tzn. všetky koeficienty v riadiacom stĺpci sú záporné ($a_{ik} < 0$), **úloha optimálne riešenie nemá**.

4.3. DUALITA ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Porovnaním nižšie uvedených modelov (východiskové riešenia a posledná iterácie riešenia - Tab.4.6 a, b) je možné zistiť, že je medzi nimi určitá súvislosť.

A) Príklad 4.5

$$\begin{array}{rcl} 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 & \leq & 600 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 & \leq & 800 \\ \hline z = 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 & \rightarrow & MAX \end{array}$$

B) Príklad 4.7

$$\begin{array}{rcl} 2.x_1 + 3.x_2 & \geq & 54 \\ x_1 + 2.x_2 & \geq & 45 \\ 3.x_1 + 2.x_2 & \geq & 52 \\ \hline z = 600.x_1 + 800.x_2 & \rightarrow & MIN \end{array}$$

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	z	w
x ₄	600	2	1	1	1	0	0	300
x ₅	800	3	2	2	0	1	0	800/3
z	0	-54	-45	-52	0	0	1	MAX

x ₃	100	1/4	0	1	1/2	-1/4	0	
x ₂	300	5/4	1	0	-1/2	3/4	0	
z	18 700	61/4	0	0	7/2	83/4	1	MAX

Tab.4.6 a : Východisková a výsledná iterácia riešenia modelu A

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p
u_1	54	2	3	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_2	45	1	2	0	-1	0	0	1	0	0	0
u_3	52	3	2	0	0	-1	0	0	1	0	0
z	0	-600	-800	0	0	0	0	0	0	1	0
p	151	6	7	-1	-1	-1	0	0	0	0	1

x_2	83/4	0	1	0	-3/4	1/4	0	3/4	-1/4	0	0
x_3	61/4	0	0	1	-5/4	-1/4	-1	5/4	1/4	0	0
x_1	7/2	1	0	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0	0
z	18700	0	0	0	-300	-200	0	300	100	1	0
p	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1

Tab.4.6 b : Východisková a výsledná iterácia riešenia príkladu 5.2.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Porovnanie bude výraznejšie pri ich maticovom vyjadrení (parametre a premenné modelu B budú označené napr. s pruhom).

A)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{MAX})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 54 \\ 45 \\ 52 \end{bmatrix}$$

B)

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{c}}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{MIN})$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 54 \\ 45 \\ 52 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \end{bmatrix}$$

Obidva modely majú veľa spoločného a to predovšetkým:

- **Matica sústavy prvej úlohy je rovná transponovanej matici sústavy úlohy druhej** ($\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^T$).
- **Vektor koeficientov pravej strany sústavy A) je rovný vektoru koeficientov účelovej funkcie sústavy B) a naopak, t.j. platí** ($\mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{c}}$).

Úlohy sa pritom líšia iba v znamienkach nerovnosti a smere optimalizácie.

Zatiaľ čo v úlohe A sú znamienka nerovníc typu „ $\leq$ “ a účelová funkcia sa maximalizuje, v úlohe B sú nerovnice typu „ $\geq$ “ a účelová funkcia sa minimalizuje. Takéto úlohy v lineárnom programovaní nazývame **duálne symetrické**. Ich spoločné rysy sa neobmedzujú iba na matematický model, ale sú jednoznačne definovateľné aj v konečnom riešení úloh. Platí napr.:

- **Obidve úlohy majú rovnaké hodnoty účelovej funkcie pre ich optimálne riešenia.**
- **Riešenie úlohy A možno nájsť v riadku účelovej funkcie (konkrétne v stĺpcoch pôvodných bázických premenných) úlohy druhej a naopak.**

Pre duálne združené úlohy platí základná veta (Veta o dualite úloh LP):

Ak má jedna z úloh (primárna alebo duálna) optimálne riešenie, má optimálne riešenie aj druhá, pričom extrémne hodnoty ich účelových funkcií sú rovnaké.

Ak účelová funkcia jednej z úloh nie je ohraničená, druhá úloha nemá prípustné riešenie.

Príklady duálne nesymetrických úloh, napr. k problému zadanému maticovo v tvare

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MIN}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad x_i \geq 0,$$

je duálne združený problém definovaný v tvare

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{MAX}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c}.$$

Prípadne pre úlohu

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

je duálna úloha v tvare

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{MIN}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}, \quad \bar{x}_i \geq 0.$$

Praktické použitie javu duality ÚLP:

Najčastejšie pre riešenie úloh, v ktorých sú obmedzujúce podmienky iba v tvare nerovníc typu „ $\geq$ “ (prípadne aj v tvare rovníc) a ktoré je nutné riešiť dvojfázovým simplexovým algoritmom, t.j. so zavedením umelých premenných a pomocnej účelovej funkcie p .

Riešeniu takto zadaného modelu ÚLP je možné sa vyhnúť práve vyriešením úlohy duálne symetrickej, ktorej riešenie by vyžadovalo „iba“ využitie jednoduchého simplexového algoritmu.

Využívame pritom uvedené vlastnosti duálnych úloh – t.j. ***rovnaká hodnota účelovej funkcie a hľadané riešenie duálne združenej úlohy je obsiahnuté v riadku účelovej funkcie.***

Poznámka: Ak v primárnej úlohe koeficienty c_i znamenajú napr. ceny procesov, premenné x_i množstvá a koeficienty a_{ij} množstvo i -teho činiteľa na j -ty proces, potom premenné $\bar{x}_i$ majú v duálnej úlohe rozmer [cena / činiteľ], tzn. oceňujú činitele a zvyknú sa nazývať **duálne** (fiktívne, tieňové) **ceny**.

PRÍKLADY NA SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

Príklad 1: Preved'te zadaný matematický model úlohy výrobného plánovania na kanonický tvar, vhodný pre aplikáciu simplexového algoritmu.

Riešenie:

Matematický model úlohy:

$$\begin{array}{rcl} z = 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 & \rightarrow & \text{MAX} \\ \hline 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 & \leq & 600 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 & \leq & 800. \end{array}$$

Jeho úprava na kanonický tvar:

$$\begin{array}{rcl} z - 54.x_1 - 45.x_2 - 52.x_3 & & = 0 \rightarrow \text{MAX} \\ \hline 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 + x_4 & = & 600 \\ 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 & + x_5 = & 800. \end{array}$$

Poznámka: Budeme používať čiastočne odlišný postup oproti štandardne používanému postupu v literatúre a to síce v tom, že rovnicu účelovej funkcie priradíme k ostatným rovniciam získaným úpravou účelových podmienok tak, že „z“ považujeme za ďalšiu bázickú premennú. Výhoda tohto postupu sa prejaví pri vlastnom riešení.

Príklad 2: Zapište úlohu LP zadanú jej matematickým modelom do simplexovej tabuľky

$$\begin{aligned} z &= 3.x_1 + 2.x_2 \rightarrow \text{MAX} \\ 2.x_1 + 5.x_2 &\leq 1000 \\ 4.x_1 + x_2 &\leq 1100, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:

Pomocou doplnkových premenných a anulovaním účelovej funkcie získame sústavu troch lineárnych rovníc (s piatimi neznámymi), ktorá je v tzv. kánonickom tvare. Dostaneme

$$\begin{aligned} z - 3.x_1 - 2.x_2 &= 0 \rightarrow \text{MAX} \\ 2.x_1 + 5.x_2 + x_4 &= 1000 \\ 4.x_1 + x_2 + x_5 &= 1100, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Z uvedenej sústavy je možné získať východiskové základné prípustné riešenie v tvare

$$\mathbf{x} = (0, 0, 1000, 1100).$$

Sústavu rovníc v kanonickom tvare môžeme prepísať do simplexovej tabuľky (Tab.2.1).

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b_i	x_1	x_2	x_4	x_5	z	$w_i = b_i / a_{ik}$
x_4	1000	2	5	1	0	0	
x_5	1100	4	1	0	1	0	
z	0	-3	-2	0	0	1	

Tab.2.1 Simplexová tabuľka príkladu 2

Jednotlivé časti tabuľky:

1. stĺpec = stĺpec bázických (základných) premenných, tzv. **báza**;
 2. stĺpec $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1100 \end{pmatrix} = \text{stĺpec pravých strán}$ (tzv. absolútnych členov) b_i ;
 - 3.- 6. stĺpec $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = prvky v stĺpcoch premenných x_i a x'_i tvoria **maticu koeficientov** a_{ij} ;
 7. stĺpec - $w_i = b_i / a_{ik}$ = stĺpec, slúžiaci pre určenie tzv. **riadiaceho (kľúčového) riadku**;
 4. riadok, t.j. vektor $(-3 \quad -2 \quad 0 \quad 0)$ - je riadok koeficientov tzv. **anulovanej účelovej funkcie**;
- jediné políčko v stĺpci b_i a riadku z - predstavuje aktuálnu hodnotu účelovej funkcie, prislúchajúcu aktuálne určenému základnému prípustnému riešeniu.

V prípade tzv. **iniciačnej tabuľky** – t.j. prvá tabuľka v simplexovom algoritme (0. iteračný krok) vždy platí $z = 0$. Je to dané charakterom vých. riešenia, vychádzajúceho z kanonického tvaru.

Príklad 3: Riešte úlohu LP zadanú jej matematickým modelom pomocou simplexovej metódy

$$\begin{aligned} z &= 7.x_1 + 6.x_2 \rightarrow MAX \\ 7.x_1 + 5.x_2 &\leq 850 \\ 2.x_1 + 2.x_2 &\leq 300, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:

Zavedením doplnkových premenných x_{n+k} prevedieme sústavu lineárnych nerovníc na sústavu lineárnych rovníc a súčasne anulujeme účelovú funkciu Z tak, že od oboch strán účelovej rovnice odpočítame jej pravú stranu. Ak zanedbáme podmienky nezápornosti, získame takto sústavu 3 lineárnych rovníc s celkom 5 neznámymi (x_1, x_2, x_3, x_4, z). Dostaneme

$$\begin{aligned} z - 7.x_1 - 6.x_2 &= 0 \rightarrow MAX \\ 7.x_1 + 5.x_2 + x_3 &= 850 \\ 2.x_1 + 2.x_2 + x_4 &= 300 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tým sme získali kanonický tvar sústavy lineárnych rovníc s nezápornými pravými stranami a môžeme teda prikročiť k riešeniu. To realizujeme v simplexovej tabuľke (tab.3.1).

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	850	(7)	5	1	0	0	850/7
x_4	300	2	2	0	1	0	300/2
z	0	-7	-6	0	0	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_1	850/7	1	5/7	1/7	0	0	170
x_4	400/7	0	(4/7)	-2/7	1	0	100
z	850	0	-1	1	0	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_1	50	1	0	1/2	-5/4	0	
x_2	100	0	1	-1/2	7/4	0	
z	950	0	0	1/2	7/4	1	MAX

Tab.3.1 Simplexová tabuľka k príkladu 3

V poslednom kroku tabuľky, v riadku účelovej funkcie už nie je žiadny **záporný koeficient** (úloha je typu MAX) a preto má optimálne riešenie tvar

$$\mathbf{x}_{OPT} = (50, 100, 0, 0)$$

a maximálna hodnota účelovej funkcie je $z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 950$.

Overenie výsledku: $z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 7.50 + 6.100 = 950$. **Skúste nájsť lepšie riešenie???**

Príklad 4: Riešte úlohu LP zadanú jej matematickým modelom (od Príkladu 3 sa líši iba tvarom účelovej funkcie) pomocou simplexovej metódy

$$\begin{aligned} z &= 2.x_1 + 7.x_2 \rightarrow \text{MAX} \\ 7.x_1 + 5.x_2 &\leq 850 \\ 2.x_1 + 2.x_2 &\leq 300, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riešenie:

Prevedieme SLN na SLR a získame kanonický tvar SLR s nezápornými pravými stranami

$$\begin{aligned} z - 2.x_1 - 7.x_2 &= 0 \rightarrow \text{MAX} \\ 7.x_1 + 5.x_2 + x_3 &= 850 \\ 2.x_1 + 2.x_2 + x_4 &= 300, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kanonický tvar SLR zapíšeme do simplexovej tabuľky a nájdeme optimálne riešenie (tab.4.1).

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	850	7	5	1	0	0	170
x_4	300	2	(2)	0	1	0	150
z	0	-2	-7	0	0	1	max

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b_i	x_1	x_2	x'_1	x'_2	z	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	100	2	0	1	-5/2	0	
x_2	150	1	1	0	1/2	0	
z	1050	5	0	0	7/2	1	MAX

Tab.4.1 Simplexová tabuľka k príkladu

Optimálne riešenie a maximálna hodnota účelovej funkcie je

$$\mathbf{x}_{OPT} = (0, 150, 100, 0) \text{ a } z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 2.0 + 7.150 = 1050.$$

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Príklad 5: Opravovňa robí 3 druhy opráv O1, O2, O3, na ktoré spotrebováva 2 druhy súčiastok S1 a S2. Zisky z jednotlivých opráv sú po rade 54, 45 a 52 jednotiek. Na opravu O1 (1.typu) sa pritom spotrebujú 2 súčiastky S1 a 3 súčiastky S2, na opravu O2 je potrebná 1 súčiastka S1 a 2 súčiastky S2 a na O3 potrebujeme 3 súčiastky S1 a 2 súčiastky S2. Na sklade je pritom 600 súčiastok S1 a 800 súčiastok S2. Úloha: naplánovať počet opráv tak, aby zisk opravovne za ich vykonanie bol maximálny. Vyriešte úlohu pomocou simplexovej metódy.

Riešenie:

Matematický model úlohy:

$$\begin{aligned}
 z &= 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 \rightarrow \text{MAX} \\
 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 &\leq 600 \\
 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 &\leq 800 \\
 x_1 \leq 0; x_2 \leq 0; x_3 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

Kanonický tvar modelu:

$$\begin{aligned}
 z - 54.x_1 - 45.x_2 - 52.x_3 &= 0 \\
 2.x_1 + x_2 + 3.x_3 + x_4 &= 600 \\
 3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 + x_5 &= 800
 \end{aligned}$$

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	z	w
x ₄	600	2	1	1	1	0	0	300
x ₅	800	3	2	2	0	1	0	<u>800/3</u>
z	0	-54	-45	-52	0	0	1	max

Tab.5.1a: Simplexová tabuľka a počiatočné východiskové riešenie - 0.iterácia.

Z tabuľky môžeme okamžite určiť prvé - **počiatočné (východiskové) bázičné riešenie** v tvare

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}; \mathbf{x}_4 = 600, \mathbf{x}_5 = 800$$

a jemu odpovedajúca hodnota účelovej funkcie $\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Je zrejmé, že uvedené riešenie formálne patrí do množiny prípustných riešení, ale už z toho, že nenulové hodnoty nadobudli prídavné premenné vyplýva, že zrejme nepôjde o riešenie optimálne. Potvrdzujú to aj koeficienty v riadku účelovej funkcie, kde sú až tri záporné hodnoty. Najväčšia z nich v absolútnej hodnote („najzápornejšia“) je hodnota $c_{13} = -54$ v prvom stĺpci. Znamená to, že riešenie úlohy sa vylepší v zmysle požadovaného smeru optima, ak do bázy zaradíme práve premennú x_1 . Zostáva určiť, ktorú premennú je vhodné z bázy vyradiť.

Kritériom sú pomocné hodnoty: $w_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{600}{2} = 300$, $w_2 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{800}{3} = 266 \frac{2}{3}$.

Najmenšia z nich je w_2 a preto z bázy vyradíme premennú x_5 . Riadiacim riadkom úpravy bude preto riadok druhý a riadiacim prvkom (pivotom) ďalších úprav bude prvok $a_{21} = 3$. Tým sme získali potrebné informácie pre úpravy tabuľky v rámci prvej iterácie.

Po úprave musí byť prvok $a_{21} = 1$ a prvky $a_{11} = a_{31} = 0$ - tzv. nulované prvky. Po úpravách je ďalší krok riešenia v *tab.5.1.b*.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	w
x_4	200/3	0	-1/3	5/3	1	-2/3	0	<u>40</u>
x_1	800/3	1	2/3	2/3	0	1/3	0	400
z	14 400	0	-9	-16	0	54/3	1	max

Tab.5.1.b: Riešenie simplexovou metódou – 1.iterácia

Ak rovnakým postupom posúdime tabuľku po 1.iterácii, vidíme, že riešenie po prvej iterácii je

$$\mathbf{x}_1 = 800/3, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = 0, \quad \mathbf{x}_4 = 200/3, \quad \mathbf{x}_5 = 0$$

ktorému prislúcha hodnota účelovej funkcie $\mathbf{z}^{(1)} = 14\,400$.

Poznámka: Kontrolou správnosti môže byť dosadenie určených hodnôt x_1 , x_2 , a x_3 , do pôvodného tvaru účelovej funkcie. Dostaneme

$$z^{(1)} = 54 \cdot (800/3) + 45 \cdot 0 + 52 \cdot 0 = 14\,400.$$

Riešenie však stále nie je optimálne, pretože v riadku účelovej funkcie zostali dva záporné koeficienty. Za novo zaradenú bázickú premennú zvolíme x_3 , za vyradovanú premennú x_4 a vyššie uvedený postup zopakujeme. Tvar simplexovej tabuľky po vykonaní ďalších dvoch iteračných krokov je v *tab.5.1.c*.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	w
x_3	40	0	-1/5	1	3/5	-2/5	0	-200
x_1	240	1	4/5	0	-2/5	3/5	0	<u>300</u>
z	15 040	0	-61/5	0	48/5	58/5	1	max

x_3	100	1/4	0	1	1/2	-1/4	0	
x_2	300	5/4	1	0	-1/2	3/4	0	
z	18 700	61/4	0	0	7/2	83/4	1	MAX

Tab.5.1.c: Riešenie simplexovou metódou – 2.iterácia a 3.iterácia = optimálne riešenie

Optimálne riešenie nebolo dosiahnuté ani po 2.iterácii ($a_{32} = -61/5$ v riadku účelovej funkcie). Bola nutná ešte 3.iterácia (vyradiť x_1 , zaradiť x_2), ktorá viedla k nájdeniu optimálneho riešenia.

Optimálne riešenie úlohy: **$x_1 = 0$, $x_2 = 300$, $x_3 = 100$**
s prislúchajúcou hodnotou účelovej funkcie **$z^{(opt)} = 18\,700$** .

Interpretácia výsledkov:

Vráťme sa k pôvodnému zadaniu úlohy a môžeme tvrdiť, že optimálny plán výroby z hľadiska maximálneho zisku je: **nevyrábať žiadny výrobok V_1 , vyrábať 300 výrobkov V_2 a 100 výrobkov V_3 . Predpokladaný dosiahnutý zisk z ich výroby bude 18 700 jednotiek.**

Overenie výsledkov:

Po dosadení hodnôt do obmedzujúcich podmienok úlohy a zvolenej účelovej funkcie vidíme, že vlastné obmedzujúce podmienky

$$2.0 + 300 + 3.100 = 600 \quad (= 600)$$

$$3.0 + 2.300 + 2.100 = 800 \quad (= 800)$$

$$z = 54.0 + 45.300 + 52.100 = 18700 \rightarrow \text{MAX}$$

sú splnené.

Príklad 6: Riešte úlohu LP zadanú jej matematickým modelom pomocou metódy umelej bázy.

$$\begin{array}{rcl} z = & 2.x_1 - 3.x_2 & \rightarrow \text{MAX} \\ \hline & 2.x_1 + x_2 & \leq 10 \\ & -2.x_1 + 3.x_2 & \leq 9 \\ & 2.x_1 + 4.x_2 & \geq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & \end{array}$$

Riešenie:

SLN prevedieme na SLR (cez prídavné premenné), anulujeme účelovú funkciu a dostaneme

$$\begin{array}{rcl} z - 2.x_1 + 3.x_2 & & = 0 \quad (\text{MAX}) \\ \hline & 2.x_1 + x_2 + x_3 & = 10 \\ & -2.x_1 + 3.x_2 + x_4 & = 9 \\ & 2.x_1 + 4.x_2 - x_5 & = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. & \end{array}$$

Sústava rovníc však nie je v kanonickom tvare, nakoľko v tretej rovnici chýba *základná premenná* $x_{n+3} \geq 0$ a preto ju musíme do tretej rovnice „umelo“ doplniť, tzn. pridať premennú $u_1 \geq 0$.

Úlohu musíme doplniť aj o tzv. *pomocnú účelovú funkciu* $p = u_1 \rightarrow \text{MIN}$.

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Po jej anulovaní vykonaním ekvivalentných úprav dostaneme $p - u_1 = 0$ a RESR bude v tvare

$$\begin{array}{rcl}
 z - 2.x_1 + 3.x_2 & & = 0 \quad (\text{MAX}) \\
 p & & - u_1 = 0 \quad (\text{MIN}) \\
 \hline
 2.x_1 + x_2 + x_3 & & = 10 \\
 -2.x_1 + 3.x_2 & + x_4 & = 9 \\
 2.x_1 + 4.x_2 & & - x_5 + u_1 = 8 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, u_1 \geq 0.
 \end{array}$$

Pripísaním rovnice pomocnej účelovej funkcie sme však porušili kanonický tvar (teraz už sústavy 5 rovníc s 8 premennými – x_1 až x_5 , u_1 , z , p). Preto rovnicu pomocnej účelovej funkcie sčítame so všetkými rovnicami, v ktorých sa umelé premenné tiež vyskytujú (v tomto prípade iba s tretou rovnicou) a takouto rovnicou nahradíme pôvodnú pomocnú účelovú funkciu. Dostaneme

$$\begin{array}{rcl}
 z - 2.x_1 + 3.x_2 & & = 0 \quad (\text{MAX}) \\
 p + 2.x_1 + 4.x_2 & & - x_5 = 8 \quad (\text{MIN}) \\
 \hline
 2.x_1 + x_2 + x_3 & & = 10 \\
 -2.x_1 + 3.x_2 & + x_4 & = 9 \\
 2.x_1 + 4.x_2 & & - x_5 + u_1 = 8, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, u_1 \geq 0.
 \end{array}$$

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Skôr ako začneme riešiť pôvodnú úlohu (1.fáza), musíme vyriešiť úlohu pomocnú (2.fáza). Pomocná úloha v podstate umožňuje nájsť základné prípustné riešenie úlohy pôvodnej, t.j. riešenie rozšírenej úlohy v prípade, že $p=0$. Snažíme sa preto **pomocnú účelovú funkciu minimalizovať**, najlepšie **vynulovať**. Postupujeme štandardným simplexovým algoritmom.

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	z	p	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	10	2	1	1	0	0	0	0	0	10
x_4	9	-2	3	0	1	0	0	0	0	3
x_5	8	2	(4)	0	0	-1	1	0	0	2
z	0	-2	3	0	0	0	0	1	0	$\max_2$
p	8	2	4	0	0	-1	0	0	1	$\min_1$

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	z	p	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	8	3/2	0	1	0	1/4	-1/4	0	0	10
x_4	3	-7/2	0	0	1	3/4	-3/4	0	0	3
x_2	2	1/2	1	0	0	-1/4	1/4	0	0	2
z	-6	-7/2	0	0	0	3/4	-3/4	1	0	$\max_2$
p	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	$\min_1$

Tab.6.1a: Simplexová tabuľka (1.fáza)

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

(1.fáza) - po prvom kroku sme našli optimálne riešenie rozšírenej úlohy, $p=0$. (2.fáza) - klasický simplexový algoritmus (vypustíme riadok p a stĺpec u_i) a dostaneme:

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	8	3/2	0	1	0	1/4	0	16/3
x_4	3	-7/2	0	0	1	3/4	0	-
x_2	2	(1/2)	1	0	0	-1/4	0	4
z	-6	-7/2	0	0	0	3/4	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	2	0	-3	1	0	(1)	0	2
x_4	17	0	7	0	1	-1	0	-
x_1	4	1	2	0	0	-1/2	0	-
z	8	0	7	0	0	-1	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_5	2	0	-3	1	0	1	0	
x_4	19	0	4	1	1	0	0	
x_1	5	1	1/2	1/2	0	0	0	
z	10	0	4	1	0	0	1	MAX

Tab.6.1 b: Simplexová tabuľka (2.fáza)

V poslednom kroku simplexovej tabuľky sme dospeli k optimálnemu riešeniu (pôvodnej) úlohy. Optimálne riešenie a maximálna hodnota účelovej funkcie je

$$\mathbf{x}_{OPT} = (5, 0, 0, 19, 2) \text{ a } z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 2.5 - 3.0 = 10$$

Poznámky:

1. Ak je hodnota pomocnej účelovej funkcie, príslušná optimálnemu riešeniu rozšírenej úlohy, kladná, t.j. ak $p_{\min} > 0$, znamená to, že **pôvodná úloha nemá žiadne prípustné, a teda ani optimálne, riešenie**.
2. Umelé premenné u_i pritom nemajú žiadny vecný (ekonomický) význam. Ich význam je čisto matematický a slúžia výhradne k nájdeniu východiskového základného prípustného riešenia úlohy pôvodne zadanej.

Záver:

Zhrnutie a charakteristika základných fáz riešenia metódou umelej bázy:

1. Minimalizujeme (nulujeme) pomocnú účelovú funkciu p a to na princípe postupného vyradovania umelých premenných z množiny základných premenných a zaradovaním základných premenných, ktoré majú svoju vecnú interpretáciu. Nastať môžu pritom 2 prípady:
 - a) $p_{\min} > 0$ - pôvodná úloha **ne má žiadne prípustné riešenie**,
 - b) $p_{\min} = 0$ - získali sme hľadané **východiskové prípustné riešenie** pôvodnej úlohy.
 2. V prípade, ak $p_{\min} = 0$, môžeme riešiť pôvodnú úlohu aj vzhľadom k pôvodnej účelovej funkcii z .

Príklad 7: Riešte úlohu LP zadanú jej matematickým modelom pomocou metódy umelej bázy.

$$2.x_1 + 3.x_2 \geq 54$$

$$x_1 + 2.x_2 \geq 45$$

$$3.x_1 + 2.x_2 \geq 52$$

$$z = 600.x_1 + 800.x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

Riešenie:

Zadaný matematický model prevedieme na rovnice odčítaním prídavných premenných x_3, x_4, x_5 . Pomocou tzv. *umelých premenných* u_1, u_2, u_3 a tzv. *pomocnej účelovej funkcie „p“* potom môžeme relatívne jednoducho vytvoriť jednotkovú bázu, potrebnú pre kanonický tvar, tzv. rozšírenú maticu sústavy. Po úpravách budú obmedzujúce podmienky v tvare

$$2.x_1 + 3.x_2 - x_3 + u_1 = 54$$

$$x_1 + 2.x_2 - x_4 + u_2 = 45,$$

$$3.x_1 + 2.x_2 - x_4 + u_3 = 52$$

pôvodná účelová funkcia z bude mať tvar

$$z - 600.x_1 - 800.x_2 = 0 \quad (\text{MIN}).$$

a pomocná účelová funkcia p bude

$$p - u_1 - u_2 - u_3 = 0 \quad (\text{MIN}).$$

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

Je zrejmé, že tvar pomocnej účelovej funkcie p požiadavke na bázický tvar nevyhovuje (rovnica obsahuje iba premenné u_1, u_2, u_3). To môžeme odstrániť napr. jej sčítaním s rovnicami obmedzujúcich podmienok, v ktorých vystupujú zavedené umelé premenné. Po takomto kroku bude rovnica pomocnej účelovej funkcie p v tvare

$$p + 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 151 \quad (\text{MIN}).$$

Ďalší postup riešenia úlohy je obdobný ako pri základnom – jednofázovom – algoritme, iba s tým, že riešenie je rozdelené na dve fázy. V prvej fáze riešime úlohu ako minimalizáciu pomocnej účelovej funkcie „ p “ (tzn. v riadku pre p nesmú zostať žiadne nenulové hodnoty). Súbežne s jej ekvivalentnými úpravami môžeme priebežne upravovať aj pôvodnú ÚF „ z “. Po dosiahnutí minima pomocnej ÚF ($p=0$) riadok p , aj stĺpce premenných u už v simplexovej tabuľke neuvažujeme.

V druhej fáze hľadáme už požadované optimálne riešenie pre pôvodnú účelovú funkciu z .

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p	w
u_1	54	2	<u>3</u>	-1	0	0	1	0	0	0	0	<u>18</u>
u_2	45	1	2	0	-1	0	0	1	0	0	0	45/2
u_3	52	3	2	0	0	-1	0	0	1	0	0	26
z	0	-600	-800	0	0	0	0	0	0	1	0	
p	151	6	<u>7</u>	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	MIN

Prednáška 4: Simplexová metóda, dualita úloh, celočíselné riešenie

x_2	18	$2/3$	1	$-1/3$	0	0	$1/3$	0	0	0	0	27
u_2	9	$-1/3$	0	$2/3$	-1	0	$-2/3$	1	0	0	0	-27
u_3	16	$5/3$	0	$2/3$	0	-1	$-2/3$	0	1	0	0	$48/5$
z	14400	$-200/3$	0	$-800/3$	0	0	$800/3$	0	0	1	0	
p	25	$4/3$	0	$4/3$	-1	-1	$-7/3$	0	0	0	1	MIN

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p	w
x_2	$58/5$	0	1	$-3/5$	0	$2/5$	$3/5$	0	$-2/5$	0	0	$-58/3$
u_2	$61/5$	0	0	$4/5$	-1	$-1/5$	$-4/5$	1	$1/5$	0	0	$61/4$
x_1	$48/5$	1	0	$2/5$	0	$-3/5$	$-2/5$	0	$3/5$	0	0	24
z	15040	0	0	-240	0	-40	240	0	40	1	0	
p	$61/5$	0	0	$4/5$	-1	$-1/5$	$-9/5$	0	$-4/5$	0	1	MIN

x_2	$83/4$	0	1	0	$-3/4$	$1/4$	0	$3/4$	$-1/4$	0	0	
x_3	$61/4$	0	0	1	$-5/4$	$-1/4$	-1	$5/4$	$1/4$	0	0	
x_1	$7/2$	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	
z	18700	0	0	0	-300	-200	0	300	100	1	0	MIN
p	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	MIN

Tab.7.1 : Riešenie dvojfázového simplexového algoritmu

Zo stavu tabuľky po 3.iterácii vyplýva že :

- pomocná účelová funkcia už bola minimalizovaná (jej hodnota je rovná nule, takisto umelé premenné u_1, u_2, u_3 sú rovné nule);
- ak stĺpce umelých premenných z riešenia vypustíme, zistíme že súčasne bolo dosiahnuté aj minimum pôvodnej účelovej funkcie z a teda riešenie pôvodne zadaného problému je

$$x_1 = 7/2 = 3,5, \quad x_2 = 83/4 = 20,75$$

a jemu prislúchajúca hodnota účelovej funkcie (minimálna) je $z = 18\,700$.

Aj tu sa môžeme presvedčiť o správnosti riešenia dosadením do obmedzujúcich podmienok a pôvodného tvaru účelovej funkcie :

$$\begin{array}{rcll} 2.3,5 + 3.20,75 & = & 69,25 & (\geq 54) \\ 3,5 + 2.20,75 & = & 45 & (\geq 45) \\ 3.3,5 + 2.20,75 & = & 52 & (\geq 52) \\ \hline z = 600.3,5 + 800.20,75 & = & 18700 & (= \text{MIN}) \end{array}$$

V prípade, ak by po vyradení (vynulovaní) pomocnej účelovej funkcie (p), t.j. po vyradení umelých premenných (u_i) z riešenia, pôvodná účelová funkcia z nevyhovovala podmienke optima, bolo by nutné vykonať ďalšie iteračné kroky (2. fáza riešenia), avšak už iba s pôvodnými a prídavnými premennými (x_i) a pôvodnou účelovou funkciou (z) až do splnenia podmienok optima.