

6. DUALITA V ÚLOHÁCH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Cieľ prednášky:

- objasniť pojem dualita úlohy v lineárnom programovaní,
- naučiť sa zostavovať k zadanej úlohe LP úlohu duálnu,
- zoznámiť sa s možnosťami určenia optimálneho riešenia zadanej úlohy pomocou riešenia úlohy duálne združenej.

Objasnené budú základné princípy vytvorenia duálnej úlohy k primárnej ÚLP, spôsob nájdenia optimálneho riešenia zo simplexovej tabuľky úlohy k nej duálnej, ekonomická interpretácia duálnej úlohy (duálne premenné, duálne riešenie, duálne obmedzujúce podmienky).

Ako bolo uvedené v predchádzajúcich kapitolách, úlohy lineárneho programovania sú buď maximalizačného alebo minimalizačného typu, obsahujú m obmedzujúcich podmienok s n neznámymi. Dnes preukážeme, že ku každej ÚLP je možné zostaviť úlohu „v istom zmysle symetrickú“, ktorú budeme nazývať **duálna úloha**. Takáto úloha má taktiež svoju ekonomickú interpretáciu a existuje hlbší vzájomný vzťah oboch úloh a ich optimálnych riešení.

6.1 Pojem duality a konštrukcia duálnej úlohy

Uvažujme všeobecnú úlohu lineárneho programovania, t.j. úlohu nájdenia takého riešenia sústavy **vlastných obmedzujúcich podmienok** v tvare

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

aby súčasne **boli splnené aj podmienky nezápornosti** v tvare

$$x_i \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n$$

a aby **účelová funkcia** v tvare

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

nadobudla extrémnu hodnotu (maximum / minimum). Vyskytujú sa tu 3 druhy koeficientov:

$a_{ij} \dots$ **štruktúrne koeficienty** = vzťahy medzi procesmi, činiteľmi a cieľom optimalizácie,

$b_i \dots$ **koeficienty pravej strany** = celkové úrovne činiteľov,

$c_j \dots$ **cenové koeficienty** = dosiahnutie stanoveného efektu (všetky pre $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Všetky uvedené koeficienty sú v matematických modeloch navzájom prepojené prostredníctvom premenných x_j . Koeficienty a_{ij} , b_i sa vyskytujú v *štruktúrnych (vlastných) obmedzeniach*, koeficienty c_j sa vyskytujú v *účelovej funkcii*. Takto formulovaný matematický model budeme nazývať **primárny matematický model**.

Ku každej úlohe LP je možné sformulovať úlohu duálnu, podľa nižšie uvedených pravidiel jej vytvorenia. **Dualitou** nazývame matematický vzťah medzi dvomi modelmi LP a to medzi – primárnou a duálnou úlohou, ktoré tvoria dvojicu tzv. **duálne združených úloh**.

Platí veta o tzv. **reflexívnosti duality**, vyjadrená slovne:

Duálna úloha k duálnej úlohe je pôvodná primárna úloha.

Dôkaz vyplýva priamo z dvojnásobného aplikovania pravidiel pre tvorbu duálnej úlohy.

Dôsledkom je skutočnosť, že reflexívnosť duality umožňuje z vlastností a riešenia primárnej úlohy určiť vlastnosti a riešenie duálnej úlohy, a naopak. Platí teda, že duálnu úlohu je možné získať transformáciou (podľa nižšie uvedených pravidiel), z úlohy primárnej vtedy, ak je primárna úloha v tzv. štandardnom tvare. Pokiaľ úloha v štandardnom tvare nie je, je potrebné ju na štandardný tvar previesť. To je možné urobiť vždy.

Definícia štandardného tvaru úlohy LP

a) **MAX úloha je v štandardnom tvare**, všetky obmedzujúce podmienky typu „ $\leq$ “ alebo „ $=$ “, tzn. napr. v tvare

$$\begin{array}{l} \underline{z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow MAX} \\ a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{array}$$

b) **MIN úloha je v štandardnom tvare**, všetky obmedzujúce podmienky sú typu „ $\geq$ “ alebo „ $=$ “, tzn. napr. v tvare

$$\begin{array}{l} \underline{z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow MIN} \\ a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \geq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \geq b_m \end{array}$$

Ku každej primárnej ÚLP je možné jednoznačne priradiť duálnu úlohu, a to na základe pravidiel:

- **Primárnej úlohe typu MAX prislúcha duálna úloha typu MIN, a naopak.**
- **Každému vlastnému obmedzeniu primárnej úlohy odpovedá jedna štruktúrna premenná úlohy duálnej, a naopak.**
- **Matica štruktúrnych koeficientov primárnej úlohy a matica štruktúrnych koeficientov úlohy duálnej sú navzájom transponované.**
- **Vektor pravých strán primárnej úlohy je vektorom cien úlohy duálnej, a naopak.**

Schematicky možno uvedené súvislosti primárnej a duálnej úlohy popísať nasledovne.

Primárny matematický model	Duálny matematický model
Účelová funkcia MAX (resp. MIN)	Účelová funkcia MIN (resp. MAX)
Vlastné obmedzenia primárnej úlohy (v počte m)	Podmienky nezápornosti duálnych premenných (v počte m)
Podmienky nezápornosti primárnych premenných (v počte n)	Vlastné obmedzenia duálnej úlohy (v počte n)

Matematický zápis primárneho modelu:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T \leq \mathbf{b}^T,$$

$$x_j \geq 0, \text{ pre } j = 1, 2, \dots, n$$

Matematický zápis duálneho modelu:

$$f = \sum_{i=1}^m b_i u_i \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}^T \geq \mathbf{c}^T,$$

$$u_i \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m$$

Dualita ÚLP predstavuje jednoznačné priradenie dvojice matematických modelov s rovnakými koeficientmi a_{ij} , b_i , c_j , ktoré **sú iba inak v modeloch umiestnené**.

- Ak sa v primárnej úlohe objavujú vlastné obmedzujúce podmienky iba v tvare nerovníc (nie rovníc) a podmienky nezápornosti sú definované na všetky premenné, tvorí primárna úloha spolu s úlohou duálnou dvojicu tzv. **symetricky duálne združených úloh**.
- Ak sa medzi štruktúrnymi obmedzujúcimi podmienkami primárnej úlohy vyskytuje rovnica, resp. pokiaľ sa nevyžaduje nezápornosť niektorej primárnej premennej, primárnu úlohu spolu s úlohou duálnou tvorí dvojicu tzv. **nesymetricky duálne združených úloh**.

Príklad 6.1: Podnik vyrába dva druhy výrobku V1 a V2. V tabuľke sú uvedené koeficienty spotreby surovín S1 a S2 v kg na výrobu 1 ks výrobku V1, resp. V2, ako aj disponibilné množstvo surovín. Zisk z každého výrobku V1 je 3 Eurá a z 1 ks V2 je 2 Eurá. Stanovte optimálny výrobný plán tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk. Zostavte matematický model duálnej úlohy a nájdite riešenie duálne združenej úlohy.

	V1	V2	Disponibilné množstvo
S1 [kg/ks]	2	5	1000
S2 [kg/ks]	4	1	1100
Zisk [Eur/ks]	3	2	max

Tab. 7.1 Ekonomický model úlohy

Riešenie:

Najskôr zostavíme základný (primárny) matematický model úlohy, ktorý má tvar

$$z = 3.x_1 + 2.x_2 \rightarrow MAX$$

$$2.x_1 + 5.x_2 \leq 1000$$

$$4.x_1 + x_2 \leq 1100$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

kde x_1 predstavuje počet kusov výrobku V1, resp. x_2 predstavuje počet kusov výrobku V2.

Primárna úloha je typu maximalizačného (MAX) a všetky štruktúrne obmedzujúce podmienky sú v tvare nerovností (typ „ $\leq$ “). Hovoríme, že matematický model je v **štandardnom tvare**. Obidve premenné musia byť súčasne aj nezáporné, preto bude primárna úloha a úloha k nej duálne združená, tvoriť dvojicu **duálne symetrických úloh**.

Primárna úloha má dve vlastné obmedzenia, preto duálna úloha bude mať dve duálne premenné (označenie y_1, y_2). Uplatnením pravidiel zostavíme matematický model duálnej úlohy:

$$\begin{array}{rcl} z = 1000.y_1 + 1100.y_2 & \rightarrow & MIN \\ \hline 2.y_1 + 4.y_2 & \geq & 3 \\ 5.y_1 + y_2 & \geq & 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Znamienka v štruktúrnych obmedzujúcich podmienkach, ako aj existencia podmienok nezápornosti určujú, že ide o dvojicu symetrických duálne združených úloh v štandardnom tvare.

Ak nebudeme uvažovať s možnosťou grafického riešenia úloh, k dispozícii máme v zásade dve možnosti, ako riešenie duálnej úlohy zistiť:

- 1. samostatným riešením duálnej úlohy (simplexovou metódou – dvojfázový algoritmus) alebo**
- 2. zo simplexovej tabuľky vyriešenej primárnej úlohy.**

1. Samostatné riešenie duálnej úlohy (simplexová metóda)

A. Vyriešime najskôr simplexovou metódou primárnu úlohu.

PRIMÁRNA ÚLOHA

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	1000	2	5	1	0	0	500
x_4	1100	(4)	1	0	1	0	275
z	0	-3	-2	0	0	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	z	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	450	0	(18/4)	1	-1/2	0	100
x_1	275	1	1/4	0	1/4	0	1100
z	825	0	-5/4	0	3/4	1	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x'_1	x'_2	z	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_2	100	0	1	2/9	-1/9	0	
x_1	250	1	0	-1/18	5/18	0	
z	950	0	0	5/18	11/18	1	MAX

V poslednom kroku simplexovej tabuľky získame optimálne riešenie primárnej úlohy

$$x_{OPT} = (250, 100, 0, 0) \text{ a } z_{\max} = z(x_{OPT}) = 3 \cdot 250 + 2 \cdot 100 = 950.$$

B. Vyriešime úlohu duálnu. Nutné použiť metódu umelej bázy – dvojfázový algoritmus.

DUÁLNA ÚLOHA

Báza	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	u_1	u_2	z	p	$w_i=b_i/a_{ik}$
u_1	3	2	4	-1	0	1	0	0	0	3/2
u_2	2	(5)	1	0	-1	0	1	0	0	2/5
z	0	-1000	-1100	0	0	0	0	1	0	$\min_2$
p	5	7	5	-1	-1	0	0	0	1	$\min_1$

Báza	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	u_1	u_2	z	p	$w_i=b_i/a_{ik}$
u_1	11/5	0	(18/5)	-1	2/5	1	-2/5	0	0	11/18
y_1	5/2	1	1/5	0	-1/5	0	1/5	0	0	2
z	400	0	-900	0	-200	0	200	1	0	$\min_2$
p	11/5	0	18/5	-1	2/5	0	-7/5	0	1	$\min_1$

Báza	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	u_1	u_2	z	p	$w_i=b_i/a_{ik}$
y_2	11/18	0	1	-5/18	2/18	5/18	-2/18	0	0	11/18
y_1	5/18	1	0	1/18	-4/18	-1/18	4/18	0	0	2
z	950	0	0	-250	-100	250	100	1	0	$\min_2$
p	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	$\min_1$

Tab. 5.2 Simplexová tabuľka k príkladu (duálna úloha)

V poslednom kroku tabuľky sme dospeli k optimálnemu riešeniu duálnej úlohy

$$\mathbf{u}_{OPT} = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18} \right) \text{ a } f_{\min} = f(\mathbf{x}_{OPT}) = 1000 \cdot \frac{5}{18} + 1100 \cdot \frac{11}{18} = \frac{5000}{18} + \frac{12100}{18} = 950.$$

Z uvedeného príkladu vyplýva aj základná veta o dualite:

Ak má jedna z dvojice duálne združených úloh lineárneho programovania optimálne riešenie, potom má optimálne riešenie aj úloha druhá a hodnoty účelových funkcií (pre ich optimálne riešenia) sú rovnaké.

2. Riešenie duálnej úlohy zo simplexovej tabuľky vyriešenej úlohy primárnej

Riešenie duálnej úlohy môžeme získať aj z posledného kroku simplexovej tabuľky primárnej úlohy. Analogicky, na základe **vety o reflexivite duality** platí, že optimálne riešenie primárnej úlohy je možné určiť z posledného kroku simplexovej tabuľky duálnej úlohy (ak optimálne riešenie duálnej úlohy existuje), a naopak.

V *tab.7.2* a *tab.7.3*, je uvedené schematické znázornenie posledného tvaru simplexovej tabuľky, v ktorom je dosiahnuté optimálne riešenie úlohy primárnej (7.2), resp. úlohy duálnej (7.3).

Dualita úloh LP, možnosti ukončenia výpočtu ÚLP, celočíselné programovanie

Báza	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$	b_i
:	:	:	:
:	:	:	:
Z	$y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}$	$y_1, y_2, \dots, y_m$	$z = f$

Tab.7.2 Riešenie duálnej úlohy v tabuľke úlohy primárnej

Báza	$y_1, y_2, \dots, y_m$	$y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m}$	b_i
:	:	:	:
:	:	:	:
f	$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$	$x_1, x_2, \dots, x_n$	$f = z$

Tab.7.3 Riešenie primárnej úlohy v tabuľke úlohy duálnej

Účelom tabuliek je poukázať, kde máme hľadať optimálne riešenie tzv. **duálne združeného problému**, t.j. riešenie duálnej, resp. primárnej, úlohy.

Optimálne riešenie duálnej úlohy je tvorené premennými y_i , pre $i=1,2,\dots,m$, ktoré sa rovnajú koeficientom prídavných premenných x_{n+i} , pre $i=1,2,\dots,m$ z anulovanej ÚF pri optimálnom riešení primárnej úlohy, a doplnkovými premennými y_{n+i} , pre $i=1,2,\dots,n$, rovnajúcimi sa koeficientom u premenných x_i z posledného riadku simplexovej tabuľky optimálneho riešenia primárnej úlohy.

Analogicky (opäť s uplatnením reflexívnosti duality) **môžeme interpretovať aj optimálne riešenie primárnej úlohy** „vyčítané“ z posledného kroku simpl. tabuľky pri riešení úlohy duálnej.

Poznámka: *Pokiaľ je úloha minimalizačná, je potrebné koeficienty v anulovanej účelovej rovnici vynásobiť číslom (-1) , a až potom je možné ich uvažovať ako duálne premenné.*

Aké kombinácie optimálnych riešení (a ich vlastností) duálne združených úloh sú prípustné? Platí, že ak primárna úloha:

- ***má jediné optimálne riešenie***, aj duálna úloha má jediné optimálne riešenie, a naopak,
- ***má alternatívne riešenia***, optimálne riešenie duálnej úlohy je degenerované, a naopak,
- ***nemá optimálne riešenie*** (t.j. má prípustné riešenia, ale účelová funkcia môže neobmedzene rásť / klesať, podľa toho, či ide o maximalizačnú alebo minimalizačnú, úlohu), duálna úloha taktiež nemá žiadne prípustné riešenie, a naopak.

6.2 Ekonomická interpretácia duálnej úlohy LP

Doteraz sme duálnu úlohu (duálne premenné, obmedzenia, účelovú funkciu) vnímali iba čisto matematicky, bez uvedenia ekonomickej súvislosti s primárnou úlohou. Takúto súvislosť sa pokúsime objasniť na prípade úlohy výrobného plánovania.

Zadanie **Príkladu 6.1** bolo: Podnik vyrába dva druhy výrobku V1 a V2. Tab. 6.4 udáva spotrebu surovín S1 a S2 v kg na výrobu 1 ks výrobku V1, resp. V2, ako aj disponibilné množstvo týchto surovín. Zisk z každého výrobku V1 je 3 Eurá a z 1 ks V2 je zisk 2 Eurá.

	V1	V2	Disponibilné množstvo
S1 [kg/ks]	2	5	1000
S2 [kg/ks]	4	1	1100
Zisk [Eur/ks]	3	2	max

Tab. 6.4 Ekonomický model úlohy výrobného plánovania

Určiť optimálny výrobný plán podniku, aby bol dosiahnutý maximálny zisk - už bolo určené pri riešení Príkladu 6.1. V takomto štandardnom prípade sa suroviny transformujú na výrobky a tie sa následne (so ziskom) predávajú.

V duálne združenej úlohe však uvažujeme inak. Cieľom riešenia je zostaviť úlohu (t.j. jej matematický model) pre prípad, keď nebudeme zo surovín vyrábať výrobky a tie predávať, ale budeme predávať priamo suroviny, ktoré má podnik k dispozícii.

Riešenie:

Uvažujeme teda prípad priameho predaja surovín. Otázkou, ktorá nás zaujíma je, aké by museli byť ceny surovín (a aký najmenší možný zisk pritom dosiahneme), aby sa ich priamy predaj vyplatil. Označme preto zatiaľ **neznámu cenu jednotkového množstva suroviny S1** symbolom y_1 a **neznámu cenu jednotkového množstva suroviny S2** symbolom y_2 . Predajná cena celkového množstva surovín je potom určená funkciou v tvare

$$f = 1000 \cdot y_1 + 1100 \cdot y_2.$$

Aby sa priamy predaj surovín vyplatil (oproti výrobe – t.j. transformácii surovín na výrobky), je nutné zaistiť, aby sa priamym predajom surovín, potrebných na výrobu 1 ks výrobku V1, dosiahol aspoň rovnaký zisk ako v prípade jeho výroby a predaja, t.j. *aspoň 3 Eurá*.

Dostávame teda podmienku v tvare

$$2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 \geq 3.$$

Analogicky, vzhľadom k surovinám potrebným k výrobe výrobku V2 platí podmienka

$$5 \cdot y_1 + y_2 \geq 2,$$

Ceny surovín uvažujeme nezáporné, tzn. musia platiť aj podmienky nezápornosti

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Ako už bolo zmienené, hľadáme také riešenie (ceny surovín za ich jednotkové množstvo) a najmenší možný celkový zisk tak, aby sa ich priamy predaj (namiesto výroby) ešte vyplatil. Účelová funkcia f musí byť preto typu minimalizačného. Matematický model duálnej úlohy potom bude

$$\begin{array}{rcl} f = 1000.y_1 + 1100.y_2 & \rightarrow & MIN \\ \hline 2.y_1 + 4.y_2 & \geq & 3 \\ 5.y_1 + y_2 & \geq & 2 \\ y_1 \geq 0, & y_2 \geq & 0. \end{array}$$

Jedná sa o matematický model úlohy duálnej k pôvodne zadanej úlohe výrobného plánovania. V Príklade 6.1 sme takúto úlohu riešili a získali sme optimálne riešenie v tvare

$$\mathbf{y}_{OPT} = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18} \right) \text{ a } f_{\min} = f(\mathbf{x}_{OPT}) = 950.$$

6.3 Duálna simplexová metóda

Skôr ako si objasníme algoritmus duálnej simplexovej metódy, uveďme niektoré pojmy.

- *Riešenie nazývame **primárne prípustné riešenie**, ak spĺňa všetky vlastné obmedzujúce podmienky a podmienky nezápornosti.*
- *Riešenie úlohy typu MAX nazývame **duálne prípustné riešenie**, ak koeficienty v anulovanon tvare účelovej funkcie (z) sú nezáporné.*
- *Riešenie úlohy typu MIN nazývame **duálne prípustné riešenie**, ak koeficienty v anulovanom tvare účelovej funkcie (z) sú nekladné.*

Znamená to, že platí:

Riešenie je primárne prípustné, ak je prípustným riešením primárnej úlohy, resp. riešenie je duálne prípustné, ak je prípustným riešením duálnej úlohy. Platí preto tiež: Riešenie je súčasne primárne aj duálne prípustné práve vtedy, keď je optimálne.

Postup duálne simplexovej metódy:

1. Stanovíme riadiaci (kľúčový) riadok.

Určíme najmenšiu hodnotu pravých strán obmedzujúcich podmienok. Nech je táto hodnota v r -tom riadku, teda ($\min_i b_i = b_r$).

- ak je $\mathbf{b}_r > \mathbf{0}$, potom riešenie je aj primárne prípustné, a teda je aj optimálne.
- ak je $\mathbf{b}_r = \mathbf{0}$, potom je riešenie optimálne, ale degenerované.
- ak je $\mathbf{b}_r < \mathbf{0}$, potom je nutné pokračovať bodom 2, kedy r -tý riadok uvažujeme ako riadiaci.

2. Určíme riadiaci (klúčový) stĺpec.

Uvažujeme iba záporné koeficienty v riadiacom riadku, tj. koeficienty $a_{rj} < 0$.

3. Určíme podiely $w = c_j / a_{rj}$, pre $a_{rj} < 0$, kde c_j je príslušný koeficient v účelovej funkcii.

4. Určíme $\min_{a_{rj} < 0} \left\{ \left| \frac{c_j}{a_{rj}} \right| \right\}$. Stĺpec, v ktorom dosiahneme takéto minimum uvažujeme ďalej ako riadiaci stĺpec.

5. Riadiaci (klúčový) prvok – tzv. **pivot** - je v priesečníku riadiaceho riadku a riadiaceho stĺpca. Tabuľka sa prepočíta úplnou elimináciou. Tzn., opäť delíme všetky prvky riadiaceho riadku pivotom, prvky riadiaceho stĺpca nahradíme príslušným základným stĺpcovým jednotkovým vektorom a ostatné prvky dopočítame (napr. podľa krížového pravidla).

6. Pokračujeme bodom 1. pre novo získané základné riešenie.

Príklad 6.2. Duálne simplexovou metódou vyriešte úlohu zadanú matematickým modelom

$$z = 1000.x_1 + 1100.x_2 \rightarrow MIN$$

$$2.x_1 + 4.x_2 \geq 3$$

$$5.x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Riešenie: Úloha je typu minimalizačného a v anulovanej účelovej funkcii v tvare

$$z - 1000.x_1 - 1100.x_2 = 0$$

sú koeficienty u obidvoch premenných nekladné.

Východiskové základné riešenie ktoré rátame bude preto duálne prípustné, a preto duálne simplexová metóda je použiteľná. Zavedením prídavných premenných prevedieme štruktúrne obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc do tvaru rovníc a platí

$$2.x_1 + 4.x_2 - x_3 = 3$$

$$5.x_1 + x_2 - x_4 = 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Kanonický tvar sústavy rovníc, z ktorého už možno priamo získať základné východiskové riešenie, dostaneme jednoduchou ekvivalentnou úpravou, a to vynásobením dvoch rovníc vlastných obmedzení číslom (-1) , tzn. dostaneme sústavu rovníc v tvare

$$\begin{array}{rcl} z - 1000.x_1 - 1100.x_2 & & = 0 \text{ (MIN)} \\ -2.x_1 & -4.x_2 + x_3 & = -3 \\ -5.x_1 & -x_2 + x_4 & = -2, \\ x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{array}$$

Sústavu LR môžeme prepísať do simplexovej tabuľky a použiť na riešenie duálne simplexovú metódu. U každého kroku tabuľky vypisujeme príslušné primárne aj duálne základné riešenie a ich primárnu i duálnu prípustnosť (PP,DP) resp. neprípustnosť (PN,DN).

DUÁLNA SIMPLEXOVÁ METÓDA

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	w_i
x_3	-3	-2	(-4)	1	0	
x_4	-2	-5	-1	0	1	
z	0	-1000	-1100	0	0	min

$$x = (0, 0; -3, -2) \quad PN$$

$$y = (0, 0; 1000, 1100) \quad DP$$

$$\min \left\{ \left| \frac{-1000}{-2} \right|, \left| \frac{-1100}{-4} \right| \right\} = \frac{1100}{4}$$

Dualita úloh LP, možnosti ukončenia výpočtu ÚLP, celočíselné programovanie

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	w_i
x_2	3/4	1/2	1	-1/4	0	
x_4	-5/4	(-9/2)	0	-1/4	1	
z	825	-450	0	-275	0	min

$$x = (0, 3/4; 0, -5/4) \quad PN$$

$$y = (275, 0; 450, 0) \quad DP$$

$$\min \left\{ \left| \frac{-450}{-9/2} \right|, \left| \frac{-275}{-1/4} \right| \right\} = \frac{450}{9/2}$$

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	w_i
x_2	11/18	0	1	-5/18	1/9	
x_1	5/18	1	0	1/18	-2/9	
z	950	0	0	-250	-100	MIN

$$x = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18}; 0, 0 \right) \quad PP$$

$$y = (250, 100; 0, 0) \quad DP$$

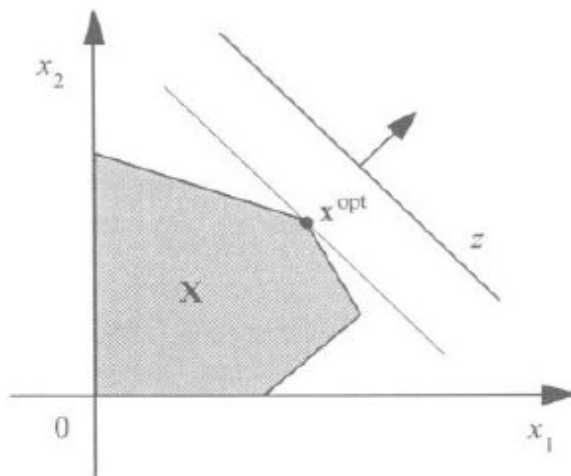
Je potrebné si uvedomiť, že sa jedná o matematický model úlohy duálnej vzhľadom k pôvodnej úlohe výrobného plánovania. V Príklade 6.1 sme takúto úlohu už riešili a získali rovnaké optimálne riešenie úlohy v tvare

$$\mathbf{u}_{OPT} = \left(\frac{5}{18}, \frac{11}{18} \right) \text{ s hodnotou účelovej funkcie } f_{\min} = f(\mathbf{x}_{OPT}) = 950.$$

7. MOŽNOSTI UKONČENIA VÝPOČTU V ÚLOHÁCH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Akými spôsobmi je možné výpočet simplexovej metódy zakončiť?

- **Prípad 1:** Štandardný spôsob ukončenia výpočtu (t.j. nájdenie jediného optimálneho riešenia úlohy) bol preukázaný na viacerých príkladoch.



Prípad 1: Štandardný prípad = jediné optimálne riešenie

Úloha lineárneho programovania ***má jediné optimálne riešenie***, ak sú v simplexovej tabuľke všetky redukované cenové koeficienty z_j u nezákladných premenných kladné v prípade úlohy typu MAX resp. záporné pri úlohe typu MIN.

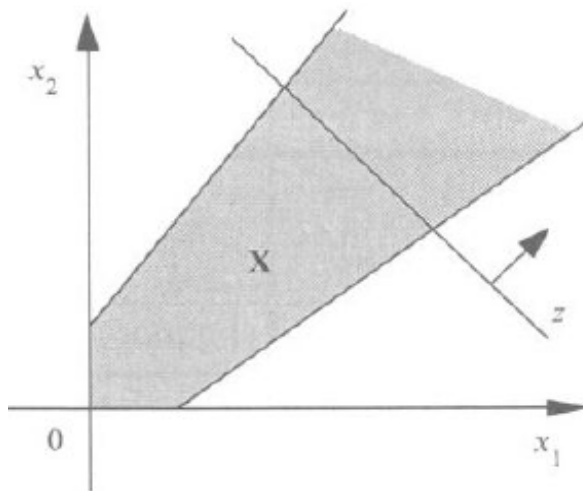
Vo všeobecnosti však môžu nastať aj ďalšie prípady.

- **Prípad 2: neobmedzená množina prípustných riešení (MPR)**

V simplexovej tabuľke maximalizačnej úlohy existuje $z_j < 0$. Tabuľka ešte neobsahuje optimálne riešenie, ale v príslušnom stĺpci s vybranom podľa *stĺpcového pravidla* sú všetky hodnoty a_{is} záporné alebo nulové, t.j. ***nie je možné nájsť „pivota“***. Znamená to: nájdené riešenie ešte nie je optimálne, ale nové prípustné riešenie nemožno určiť („leží v nekonečne“). Inak povedané, pre riešenia, stále ešte spĺňajúce obmedzujúce podmienky, hodnota ÚF maximalizačnej úlohy rastie nad všetky medze. Ide teda o prípad, kedy platí:

OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY NEEXISTUJE a to z dôvodu NEOBMEDZENOSTI MPR.

Úloha na zamyslenie: skúste vyriešiť simplexovým algoritmom napr. jednoduchú úlohu: $z = x_1 \rightarrow \text{MAX}$, za podmienok $x_1 \leq 1$, $x_1 \leq 3$. Je jasné, že ide o úlohu s neobmedzenou množinou prípustných riešení, kedy optimálne riešenie „leží v nekonečne“.



Prípád 2: Neobmedzená množina prípustných riešení = riešenie iba pre typ extrém

Úloha lineárneho programovania **nemá obmedzenú hodnotu účelovej funkcie**, pokiaľ sú všetky koeficienty zvoleného riadiaceho (kľúčového) stĺpca nekladné.

- **Prípad 3: množina prípustných riešení neexistuje**

Pri objasňovaní významu umelých (pomocných) premenných pri riešení ÚLP bolo uvedené, že vo výslednej simplexovej tabuľke musia byť hodnoty umelých premenných nulové (*u dvojfázového simplexového algoritmu sa v prvej fáze snažíme o minimalizáciu pomocnej účelovej funkcie p – t.j. snažíme sa o jej vynulovanie $p = 0$*). Pokiaľ sa ich vynulovať podarí, znamená to, že sa podarilo odstrániť neprípustnosť riešení a získať východiskové riešenie zadanej úlohy.

Pokiaľ je však minimum pomocnej účelovej funkcie p väčšie ako 0 ($p > 0$), potom nie je možné neprípustnosť základných riešení odstrániť a daná úloha LP nemá žiadne prípustné riešenie.

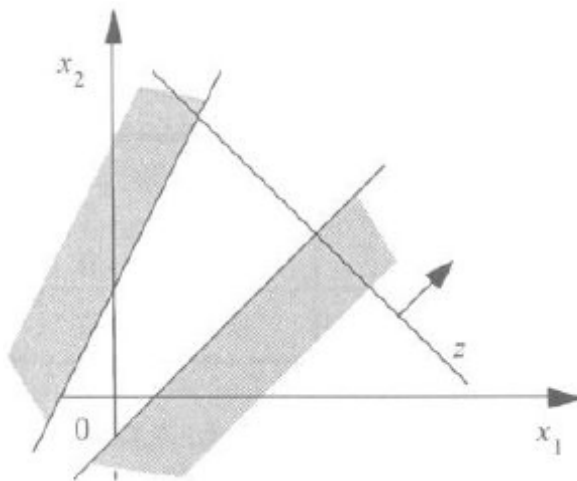
Poznámka: Umelé premenné slúžia iba pre získanie modelu úlohy v kanonickom tvare. Umelé premenné vyjadrujú mieru nesplnenia obmedzujúcich podmienok.

Ak sa v optimálnom riešení v báze vyskytuje nenulová umelá premenná, potom platí:

OPTIMÁLNE RIEŠENIE ÚLOHY NEEXISTUJE z dôvodu **NEEXISTENCIE ŽIADNEHO PRÍPUSTNÉHO RIEŠENIA**.

Úloha na zamyslenie: vyriešte simplexovým algoritmom napr. úlohu: $z = x_1 \rightarrow \text{MAX}$ za podmienok $x_1 \geq 3$, $x_1 \leq 1$. Je úplne zrejmé, že tento model nemá riešenie (t.j. neexistuje také x_1 aby jeho hodnota bola ≥ 3 a súčasne ≤ 1).

Pokiaľ dôsledne dodržíme postup simplexovej metódy, musíme prísť k záveru, že v báze optimálnej tabuľky zostane umelá premenná, ktorej hodnota bude 2. Bolo dokázané, že miera nesplnenia jednej z podmienok musí byť aspoň 2, čo v tomto príklade predstavuje minimálny rozdiel medzi prípustnými hodnotami v obidvoch podmienkach).

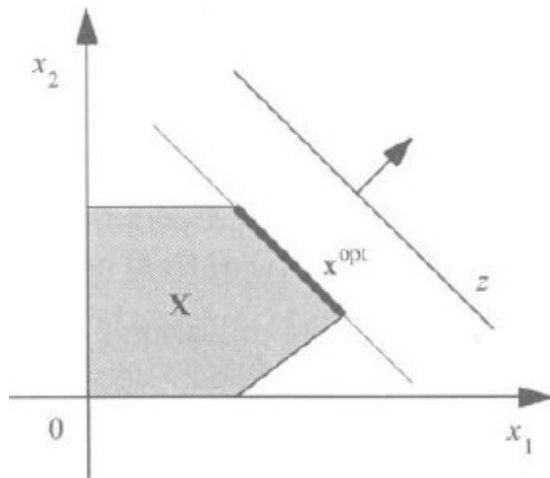


Prípado 3: Prázdna množina prípustných riešení = neexistuje žiadne riešenie

Úloha lineárneho programovania **nemá prípustné riešenie**, ak je minimum pomocnej účelovej funkcie väčšie ako nula ($p > 0$).

- **Prípad 4:**

Špeciálnym prípadom je problém, keď má ÚLP alternatívne optimálne riešenie, t.j. **optimum nastáva pre viac krajných bodov MPR**, a tým **aj pre všetky ich konvexné lineárne kombinácie**. Toto rozpoznáme tak, že v riadku účelovej funkcie výslednej simplexovej tabuľky sa vyskytuje aspoň jedna hodnota $z_j = 0$ pre inú ako základnú premennú. Pokiaľ by sme premennú z takéhoto stĺpca, v ktorom $z_j = 0$, zaradili do bázy – získame iné riešenie, ale hodnota ÚF neklesne ani nevzrastie.



Prípad 4: Alternatívne optimálne riešenie = nekonečne mnoho riešení

Platí: Ak bolo optimálne pôvodné riešenie, musí byť optimálne aj každé ďalšie – alternatívne - prípustné riešenie s rovnakou hodnotou ÚF!

Úloha lineárneho programovania ***má aj ďalšie prípustné – alternatívne - riešenie***, ak všetky redukované ceny z_j vyhovujú podmienkam optimality ($z_j > 0$ pre MAX, $z_j < 0$ pre MIN) a zároveň ***aspoň jeden koeficient z_j u nezákladnej premennej je nulový.***

- **Prípad 5:**

V inom špecifickom prípade môže v simplexovej metóde prísť k tzv. „***zacykleniu***“, t.j. výpočet neskončí žiadnym z vyššie uvedených prípadov, ale neustále sa cyklicky opakuje. Tento prípad nastáva obvykle vtedy, pokiaľ sa počas výpočtu vyskytne tzv. ***degenerované bázičné riešenie***. Softwarové aplikácie využívajúce simplexovú metódu preto obsahujú rôzne procedúry, ktoré zacyklenie aj v prípade degenerovaných riešení eliminujú.

Degenerované riešenie môžeme rozpoznať podľa toho, že

Hodnoty jednej alebo viac základných premenných sú v prípustnom riešení nulové (t.j. v stĺpci pravých strán simplexovej tabuľky sa vyskytujú aj nulové hodnoty).

8. CELOČÍSELNÉ RIEŠENIE ÚLOH LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Cieľ prednášky:

- objasniť pojem celočíselnosť riešenia úlohy v lineárnom programovaní,
- pochopiť princíp metód riešenia úloh tzv. celočíselného programovania,
- spoznať podstatu metódy sečných nadrovín (Gomoryho algoritmus) a zvoleného kombinatorického prístupu (metóda Branch and Bound).

Objasnené budú základné princípy podmienok celočíselnosti riešenia, typy celočíselných úloh LP, spôsoby určovania celočíselných riešení, princípy zvolených metód riešenia, Gomoryho algoritmus, metóda Vetvenia a hraníc, základné pojmy z analýzy citlivosti úloh LP.

Celočíselné lineárne programovanie sa od všeobecného lineárneho programovania líši iba tým, že všetky alebo iba niektoré premenné môžu nadobúdať iba celočíselne hodnoty. Aj takáto zdanlivo maličkosť dokáže riešenie výrazne skomplikovať. Úlohy celočíselného programovania sú obvykle ťažšie riešiteľné ako úlohy bez podmienky celočíselnosti.

8.1 Úvod do oblasti tzv. celočíselného programovania

Všetky doteraz uvedené algoritmy riešenia úloh lineárneho programovania predstavujú matematický aparát, ktorý za podmienky správnosti zostaveného matematického modelu rozhodovacieho problému v kanonickom tvare vedie po konečnom počte iterácií vždy k zisteniu toho, *či zadaný problém má optimálne riešenie a ak áno, optimálne riešenie umožní určiť*.

Z princípu vykonávaných úprav (Gauss-Jordanova eliminácia) však vyplýva, že výsledné optimálne riešenie nie vždy vyhovuje charakteru riešeného problému.

Ide hlavne o to, že niektoré úlohy zo svojej podstaty **vyžadujú iba riešenie celočíselné**, napr. v úlohách LP to môže byť množstvo výrobkov, počet vykonaných opráv, počty využitých variantov rezania, množstvo jednotlivých zložiek zmesi a pod.

Úlohy celočíselného (lineárneho) programovania obvykle radíme medzi špeciálne úlohy lineárneho programovania. Jedná sa v podstate o štandardné úlohy lineárneho programovania, ktoré sú však doplnené o tzv. **podmienky celočíselnosti**, t.j. podmienky, ktoré zabezpečujú, aby všetky alebo prípadne iba niektoré premenné mohli nadobudnúť len celočíselné hodnoty.

Podmienky celočíselnosti obvykle priamo vyplývajú z formulácie všeobecného ekonomického modelu riešenej ÚLP. Ak v modeli vyjadruje premenná napr. úroveň nejakého procesu, počet kusov alebo počet opakovaní nejakej aktivity, je zrejmé, že **hodnoty musia byť celočíselné**.

Napr. pre úlohy výrobného plánovania – premenné $x_1, x_2, \dots, x_n$ vyjadrujú počet kusov vyrábaných výrobkov; v úlohe o delení materiálu premenné predstavujú počet realizácií rezného plánu (koľkokrát je možné pre zadanú dĺžku polotovaru použiť každý z definovaných spôsobov ich rezania) a pod. Z interpretácie vyššie uvedených príkladov premenných je zrejmé, že všetky by mali byť nezáporné celé čísla.

Okrem všeobecne definovaných podmienok celočíselnosti sa v úlohách LP môžu vyskytovať aj podmienky, aby premenné mohli nadobudnúť iba tzv. bivalentných hodnôt (napr. 0 alebo 1, áno alebo nie, priradiť alebo nepriradiť apod.) a nazývame ich **bivalentné premenné**.

Takéto druhy premenných využívame predovšetkým pri formulácii úloh typu prirad'ovacieho, pokrývacieho alebo okružného dopravného problému. V konečnom dôsledku to znamená, že aj uvedené druhy úloh sú tiež úlohami celočíselného programovania.

Jedno z členení úloh celočíselného programovania je ich rozdelenie podľa toho, či podmienky celočíselnosti sú požadované pre všetky premenné modelu – tzv. **rýdzo celočíselné úlohy LP** alebo iba na ich podmnožinu – tzv. **zmiešané celočíselné úlohy LP**.

Riešenie úloh celočíselného programovania je výpočtovo dosť náročné. U zložitejších a rozmernejších modelov je aj samotný čas výpočtu prostredníctvom softvérovej podpory dlhší rádovo, ako u modelov LP bez podmienky celočíselnosti = relaxované úlohy. *Napr. neceločíselná úloha s niekoľko tisíc premennými a stovkami vlastných obmedzení trvá niekoľko sekúnd, naproti tomu rovnaká úloha ale aj s podmienkami celočíselnosti môže trvať pri rovnakých podmienkach výpočtového procesu aj niekoľko hodín, pokiaľ sa podarí výpočet vôbec ukončiť.*

8.2 Metódy riešenia úloh tzv. celočíselného programovania

V prípade, že optimálne riešenie ÚLP nie je celočíselné, sú k dispozícii v zásade 2 možnosti :

- 1. Neceločíselné riešenie zaokrúhliť** na najbližšie nižšie celočíselné hodnoty a opraviť hodnotu účelovej funkcie.
- 2. Aplikovať exaktné metódy celočíselného programovania** a určiť optimálne riešenie z množiny základných prípustných riešení v obore celých čísiel ($x_i \in Z^+$).

Prvá možnosť je najjednoduchšia, ale nie vždy vedie ku korektnému výsledku. Použiť ju môžeme vtedy, keď zlomková (neceločíselná) časť riešenia je oproti jeho celočíselnej časti malá (štatisticky nevýznamná). Napr. ak výsledok $x_1 = 2732 \frac{1}{3}$, zaokrúhlením riešenia na $x_1 = 2732$ sa zrejme veľkej chyby nedopustíme. Pokiaľ sú ale výsledné hodnoty premenných povedzme $x_1 = 3,38$ a $x_2 = 2,65$, zaokrúhlenie na najbližšie nižšie (príp. aj vyššie) hodnoty by už znamenalo významnejšiu zmenu riešenia a samozrejme aj hodnoty účelovej funkcie.

Podľa charakteru je možné metódy pre celočíselné riešenie úloh LP rozdeliť na:

- 1. Metódy empirické** – najčastejšie sa používa *metóda celočíselného zaokrúhľovania* alebo tzv. *enumeratívna metóda* (*metóda hrubej sily*).
- 2. Metódy exaktné** – najčastejšie založené na princípe určovania tzv. *sečných nadrovín* alebo kombinatorických postupov, napr. metóda **Branch and Bound** (*vetvenia a hraníc*).
- 3. Metódy špeciálne** - pre riešenie úloh so špecifickou štruktúrou alebo niektoré heuristické algoritmy, ktoré pre inak exaktne neriešiteľné úlohy dokážu určiť aspoň riešenie hľadanému optimu blízke. Nimi sa bližšie zaoberať nebudeme.

Charakteristika základných metód celočíselného programovania

1.1 Metóda celočíselného zaokrúhľovania

Prvý nápad pri celočíselnom riešení úlohy LP je založený na myšlienke, že zanedbáme (tzv. *relaxujeme*) podmienky celočíselnosti, úlohu vyriešime bez nich a potom výsledok jednoducho zaokrúhlime na celé čísla.

Je nutné si však uvedomiť, že zaokrúhlením často dostaneme buď neprípustné riešenie, príp. často nie je zrejmé či máme zaokrúhľovať všeobecné riešenie smerom nahor alebo nadol. Ďalší problém je skutočnosť, že riešenie neceločíselnej „relaxovanej“ úlohy môže byť niekedy výrazne vzdialené od hľadaného celočíselného optima a niekedy nie je isté, či celočíselná úloha vôbec nejaké celočíselné riešenie vôbec má.

V praxi sa zaokrúhlenie riešenia používa a to najmä v prípadoch, keď vieme, že chyba, ktorej sa tým dopustíme, *je prijateľná*. Napr. pre veľkopekáreň, ktorá denne vyrobí desaťtisíce kusov pečiva, môžeme celočíselnú povahu optimalizačnej úlohy pokojne zanedbať, pretože zaokrúhlením plánu výroby na celé čísla vznikne zanedbateľná chyba, porovnateľná s inými chybami a neurčitostami, ktoré ekonomický model oproti realite má. Pokiaľ sú však počty vyrábaných výrobkov malé a ich cena naopak vysoká, potom brať do úvahy celočíselnosť riešenia je priam nutnosťou.

1.2 Metóda hrubej sily (tzv. enumeratívna metóda).

Spočíva v prácnom vyskúšaní všetkých možností „zceločíslenia“ neceločíselného riešenia. Je vhodná, pokiaľ je množina prípustných riešení úlohy obmedzená, t.j. celá je obsiahnutá v určitom konečnom (mnohorozmernom) priestore. Stačí potom pre každú premennú x_i nájsť taký interval, kde pre všetky prípustné riešenia premenná x_i leží určite v tomto intervale. Následne na to postupne vyskúšame všetky body kvádra s celočíselnými súradnicami, pre každý z nich overíme platnosť obmedzujúcich podmienok a pokiaľ je takto definovaný bod prípustným riešením úlohy, vypočítame hodnotu účelovej funkcie a porovnáme ju s najlepším doteraz nájdeným riešením.

Závažnou nevýhodou metódy je jej veľká výpočtová náročnosť. Napr. úlohu s desiatimi binárnymi premennými je možné takto vyriešiť (počet možností je „iba“ 1024). Ale úlohu so sto binárnymi premennými by všetky výkonné počítače sveta riešili aj niekoľko rokov.

2.1 Metódy rezných (sečných) nadrovín.

Sú vhodné pre riešenie rýdzo ale aj zmiešaných celočíselných úloh LP, kde uvažujeme iba všeobecne definované podmienky celočíselnosti. Vychádzajú z množiny prípustných riešení úlohy bez podmienok celočíselnosti, tzv. *relaxované úlohy*. Známou aplikáciou simplexovej metódy je možné z množiny prípustných riešení určiť *riešenie optimálne* (obvykle neceločíselné), ktoré *slúži ako východiskové riešenie pre zvolenú verziu metódy sečných nadrovín*.

Podstatou je výpočtový proces, kedy v každom ďalšom iteračnom kroku pridávame dodatočné obmedzenie, ktoré oddelí (odreže) z množiny prípustných riešení určitú podmnožinu. ***Tá však nesmie obsahovať žiadne prípustné celočíselné riešenie.*** Pre takto zúženú množinu prípustných riešení opäť určíme optimálne riešenie a testujeme, či toto riešenie už je celočíselné alebo ešte nie. Po konečnom počte iteračných krokov takto definovaný výpočtový postup obvykle skonverguje k optimálnemu celočíselnému riešeniu úlohy LP. Najznámejším zástupcom tejto skupiny metód je tzv. ***Gomoryho algoritmus.***

2.2 Kombinatorické metódy

Sú univerzálnym nástrojom pre riešenie väčšiny typov úloh v rámci celočíselného programovania. Ich podstatou je efektívne prehľadávanie buď všetkých prípustných celočíselných riešení pri rýdzo celočíselných problémoch alebo generovanie početných kombinácií hodnôt celočíselných premenných u zmiešaných problémov celočíselného programovania.

Základom algoritmov pre riešenie celočíselných úloh LP sú vhodné kombinatorické postupy / metódy a najznámejšou z nich je tzv. ***metoda Branch and Bound (metóda vetvenia a hraníc).***

8.3 Grafické riešenie úlohy celočíselného programovania

Príklad 8.1: Majme úlohu optimálnej ochrany objektu, ktorej matematický model má tvar:

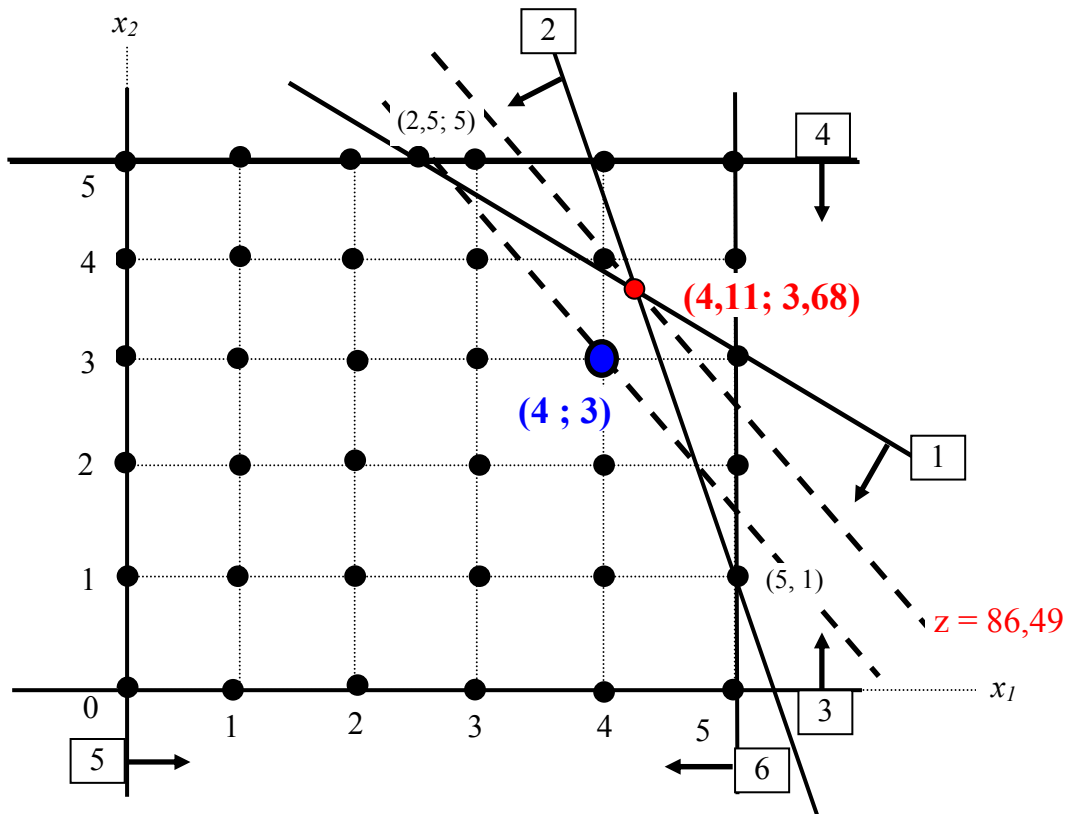
$$\begin{aligned} z &= 13 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX} \\ 7 \cdot x_1 + 8,5 \cdot x_2 &\leq 60 \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 32 \\ 0 \leq x_1 &\leq 5 \\ 0 \leq x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

Grafickým riešením nájdite celočíselné riešenie úlohy pre maximálnu hodnotu účelovej funkcie.

Riešenie:

Ide o úlohu s dvomi premennými, optimálne riešenie môžeme získať aj graficky (*Obr.8.1*). Z grafického vyjadrenia zistíme, že optimálne riešenie $\mathbf{x}=(x_1, x_2)=(4, 11; 3, 68)$, $z = 86,49$ nevyhovuje vyžadovaným podmienkam celočíselnosti riešenia (premenné x_i znamenajú počty rakiet).

Ak do *Obr.8.1* doplníme celočíselnú sieť vidíme, že prípustné riešenia by mali ležať na priesečníkoch siete, pričom najbližšie k teoretickej hodnote riešenia neceločíselného ležia hodnoty $x_1=4$, $x_2=3$ a im odpovedajúce riešenie $\mathbf{x}=(4; 3)$ s hodnotou účelovej funkcie $z = 79 \rightarrow \text{MAX} ???$.



Obr.8.1 Celočíselné grafické riešenie

Príklad 8.2: *Majme úlohu celočíselného programovania zadanú matematickým modelom*

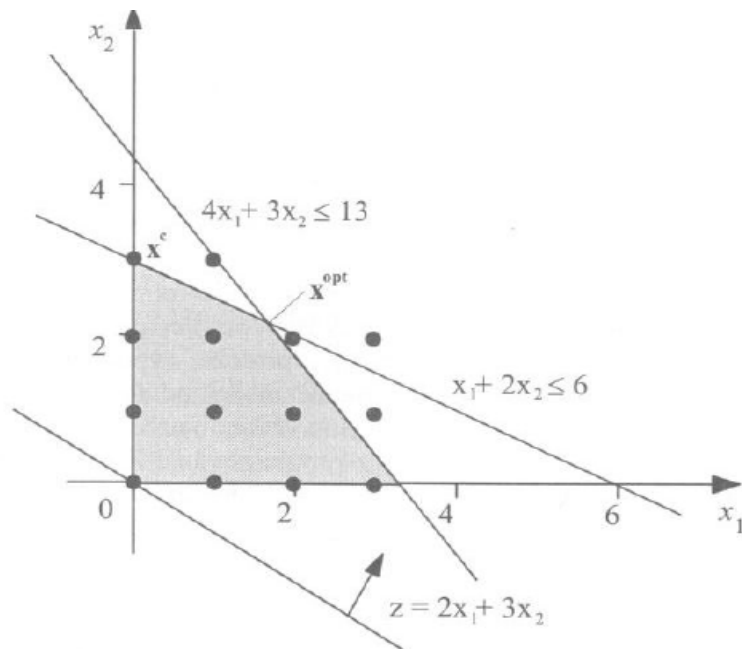
$$\begin{aligned} z &= 2.x_1 + 3.x_2 \rightarrow MAX \\ 4.x_1 + 3.x_2 &\leq 13 \\ x_1 + 2.x_2 &\leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &- \text{celočíselné.} \end{aligned}$$

Grafickým postupom preukážte podstatu určovania množiny prípustných riešení v úlohe celočíselného programovania a určite celočíselné optimálne riešenie úlohy.

Riešenie:

Grafické znázornenie množiny prípustných riešení úlohy je na *Obr.8.2*. Množina prípustných riešení úlohy bez podmienok celočíselnosti je tieňovaná. Mriežka diskretných bodov, ležiacich vo vnútri oblasti prípustných riešení (diskretných bodov je celkom 10) reprezentuje **množinu prípustných riešení celočíselnej úlohy**.

Z *Obr.8.2* by bolo možné (po jeho znázornení v zvolenej mierke a odmeraní súradníc bodu $\mathbf{x}^{\text{OPT}}$) určiť optimálne riešenie neceločíselnej úlohy.



Obr.8.2: Množina prípustných riešení úlohy celočíselného programovania

Riešenie neceločíselnej, tzv. relaxovanej úlohy je v tvare:

$$\mathbf{x}^{opt} = \left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5} \right), \quad z^{MAX} = \frac{49}{5}.$$

Pri pokuse o získanie celočíselného riešenia nám ako prvé napadne zaokrúhliť neceločíselné optimum. V tomto prípade akýmkoľvek zaokrúhlením prvkov vektora $\mathbf{x}^{\text{opt}}$ optimálne celočíselné riešenie nemožno získať. Optimálne riešenie – ako vyplýva z Obr.8.2 - je určené vektorom $\mathbf{x}_{OPT}^{(C)} = (0, 3)$ s hodnotou účelovej funkcie $z_{MAX}^{(C)} = 9$.

Bežne používaným spôsobom zaokrúhľovania – t.j. do 0,5 vrátane zaokrúhliť smerom nadol, nad 0,5 nahor) získame vektor $\mathbf{x}_{CEL} = (2, 2)$, ktorý dokonca nie je ani prípustným riešením úlohy.

Vybrané kombinácie prípustných riešení:

$$\mathbf{x}^1 = (1, 2), z = 8 ;$$

$$\mathbf{x}^2 = (2, 1), z = 7 ;$$

$$\mathbf{x}^3 = (0, 2), z = 6 ;$$

$$\mathbf{x}^4 = (3, 0), z = 6 \text{ atď.}$$

Výsledok: $\mathbf{x}_{OPT}^{(C)} = (0, 3)$, hodnota účelovej funkcie $z_{MAX}^{(C)} = 2.0 + 3.3 = 9$.

8.4 Exaktné metódy riešenia úloh tzv. celočíselného programovania

8.4.1 Metoda sečných nadrovín

Metoda sečných nadrovín vychádza z optimálneho riešenia neceločíselnej (relaxovanej) úlohy. Ak je optimálne riešenie relaxovanej úlohy celočíselné, potom je ďalší výpočet zbytočný, pretože je zároveň optimálnym riešením pôvodnej celočíselnej úlohy.

Ak je však riešenie úlohy neceločíselné, je nutné k jej matematickému modelu pridať ďalšiu obmedzujúcu podmienku, ktorá

- nevylúči žiadne celočíselné prípustné riešenie, ale
- vylúči určené optimum relaxovanej úlohy (uvažuje ho ako riešenie neprípustné).

Geometrická interpretácia: pridaná obmedzujúca podmienka vymedzí polpriestor ohraničený nadrovinou, ktorá z množiny prípustných riešení pôvodnej relaxovanej úlohy „usekne“ určitú podmnožinu neceločíselných riešení. Hovoríme preto o **metóde sečných nadrovín** (ang. *Cutting plane method*).

Úlohu s umelo pridanou – **doplnkovou** - obmedzujúcou podmienkou potom riešime rovnakým spôsobom ako úlohu pôvodnú. Platí teda: zanedbáme podmienky celočíselnosti, nájdeme optimum relaxovanej úlohy a opäť testujeme, či sme dostali riešenie celočíselné. Uvedený iteračný postup opakujeme dovtedy, pokiaľ nie sú všetky súradnice riešenia celočíselné.

Sečné nadroviny je možné generovať viacerými spôsobmi, najznámejší z nich je tzv. **Gomoryho algoritmus**.

K pochopeniu a popisu podstaty algoritmu je však potrebné zadať pojem dolná časť reálneho čísla. **Dolná celá časť reálneho čísla x** je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x . Dolnú celú časť čísla x označíme $\lfloor x \rfloor$. Napríklad

$$\lfloor 2,5 \rfloor = 2 \text{ alebo } \lfloor -2,5 \rfloor = -3.$$

Každé reálne číslo x je možné zapísať v tvare $x = \lfloor x \rfloor + r$, kde r je neceločíselná časť a spĺňa podmienku $0 \leq r < 1$.

Gomoryho metóda je použiteľná na tzv. **celočíselne celočíselné úlohy**, t.j. na úlohy, kde všetky premenné sú celočíselné, ako aj všetky konštanty v obmedzujúcich podmienkach (t.j. všetky a_{ij} a b_i) sú celé čísla.

Algoritmus odvodzuje sečnú nadrovinu zo simplexovej tabuľky, reprezentujúcej **optimálne neceločíselné riešenie** relaxovanej úlohy. Vychádzame z takého jej i -teho riadku, ktorý má na pravej strane neceločíselnú hodnotu b_i . Zvolený i -ty riadok reprezentuje rovnica v tvare

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i \quad (8.1)$$

Konštanty a_{ij} a b_i , vystupujúce v rovnici (8.1) rozložíme na dolnú celú časť a neceločíselný zvyšok a teda platí

$$a_{i,j} = \lfloor a_{i,j} \rfloor + r_j b_i \quad \text{a} \quad b_i = \lfloor b_i \rfloor + r. \quad (8.2)$$

K úlohe pridáme ďalšiu obmedzujúcu podmienku – tzv. **doplnkovú rovnicu**, definovanú v tvare

$$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n \geq r. \quad (8.3)$$

Zdôvodnenie Gomoryho algoritmu:

V rovnici (8.1), ktorú sme dostali z poslednej simplexovej tabuľky riešenia relaxovanej úlohy rozpíšeme všetky konštanty a_{ij} a b_i podľa rovnice (8.2) a rovnicu (8.1) upravíme tak, že na ľavú stranu prevedieme všetky členy s neceločíselnými koeficientmi a na pravú stranu všetky členy s koeficientmi celočíselnými. Dostaneme tak rovnicu v tvare

$$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n - r = \lfloor b_i \rfloor - \lfloor a_{i,1} \rfloor \cdot x_1 - \lfloor a_{i,2} \rfloor \cdot x_2 - \dots - \lfloor a_{i,n} \rfloor \cdot x_n \quad (8.4)$$

Nakoľko sú všetky x_j nezáporné a $r < 1$, ľavá strana rovnice (8.4) aj spĺňa podmienku

$$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n - r > -1. \quad (8.5)$$

Zároveň, pretože všetky x_j majú byť celočíselné, bude pravá strana rovnice 8.4 tiež celočíselná. Ľavá strana preto musí byť celé číslo a to celé číslo výrazne väčšie ako -1.

Ak má teda byť premenná x_j prípustná a celočíselná, musí platiť

$$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n - r \geq 0 \quad (8.6)$$

odkiaľ jednoznačne vyplýva aj tvar pridávanej doplnkovej rovnice (8.3). Znamená to, že doplnková rovnica má všeobecný tvar

$$r_1 \cdot x_1 + r_2 \cdot x_2 + \dots + r_n \cdot x_n \geq r.$$

Príklad 8.3: Vyriešte úlohu celočíselného programovania zadanú matematickým modelom v tvare

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

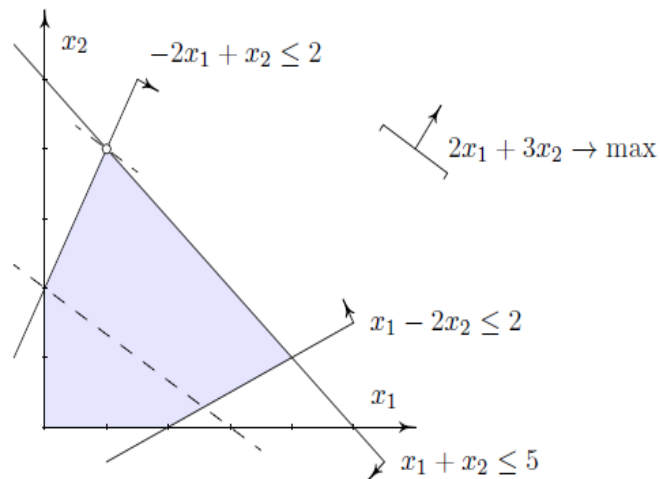
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Obr.8.3 Optimálne riešenie úlohy

Najskôr nájdeme optimálne riešenie relaxovanej (bez podmienok celočíselnosti) úlohy.

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	2	1	-2	1	0	0	-1
x_4	2	-2	(1)	0	1	0	2
x_5	4	1	1	0	0	1	4
z	0	-2	-3	0	0	0	max

Dualita úloh LP, možnosti ukončenia výpočtu ÚLP, celočíselné programovanie

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	6	-3	0	1	2	0	-2
x_2	2	-2	1	0	1	0	-1
x_5	2	(3)	0	0	-1	1	2/3
z	6	-8	0	0	3	0	max

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$w_i=b_i/a_{ik}$
x_3	8	0	0	1	2	1	
x_2	10/3	0	1	0	1/3	2/3	
x_1	2/3	1	0	0	-1/3	1/3	
z	34/3	0	0	0	1/3	8/3	MAX

Simplexová tabuľka a výsledky neceločíselného riešenia príkladu 8.3

Optimálne riešenie relaxovanej úlohy je $\mathbf{x}_{OPT} = (2/3; 10/3; 8; 0; 0)$ nie je celočíselné a jeho hodnota účelovej funkcie $z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$.

Hľadanú „Gomoryho sečnú nadrovinu“ získame napr. podľa prvej neceločíselnej hodnoty t.j. $x_1=2/3$. Do tabuľky preto pridáme doplnkovú obmedzujúcu podmienku r_1 v tvare $\frac{2}{3} \cdot x_4 + \frac{1}{3} \cdot x_5 \geq \frac{1}{3}$, čo sa v simplexovej tabuľke prejaví ako štvrtý riadok a šiesty stĺpec.

Dualita úloh LP, možnosti ukončenia výpočtu ÚLP, celočíselné programovanie

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_1	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	8	0	0	1	2	1	0	
x_2	10/3	0	1	0	1/3	2/3	0	10/3=3+1/3
x_1	2/3 =0+2/3	1 =1+0	0 =0+0	0 =0+0	-1/3 =-1+2/3	1/3 =0+1/3	0 =0+0	2/3=0+2/3
r_1	-2/3	0	0	0	(-2/3)	-1/3	1	
z	34/3	0	0	0	1/3	8/3	0	max

Na pravej strane je záporné číslo ($b_i < 0$), musíme preto použiť duálnu simplexovú metódu. Riadiaci prvok (-2/3) je na mieste (4,4) a po vykonaní Gaus-Jordanovej eliminácie platí

Báza	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	r_1	$w_i = b_i/a_{ik}$
x_3	7	0	0	1	0	1/2	-1	
x_2	3	0	1	0	0	2/3	1/2	
x_1	1	1	0	0	0	1/2	-1/2	
x_4	1	0	0	0	1	1/2	-3/2	
z	11	0	0	0	0	5/2	1/2	MAX

Optimálne riešenie úlohy je

$$\mathbf{x}_{OPT} = (1; 3; 7; 1; 0; 0)$$

ktoré už je celočíselné a hodnota účelovej funkcie pre x_{opt} je

$$z_{\max} = z(\mathbf{x}_{OPT}) = 2.1 + 3.3 = 11.$$

Poznámka:

1. Výber riadiaceho stĺpca : stĺpec novo zaradovanej premennej do bázy (nahradí premennú r_1) získame tak, že vyrátame podiely z_j / r_{ij} pre všetky stĺpce a riadiaci stĺpec indikuje minimálna absolútna hodnota tohto podielu zo všetkých stĺpcov simplexovej tabuľky..
2. Gomoryho metóda sečných nadrovin nie je príliš efektívna, obvykle vyžaduje veľa iterácií. Pre špeciálne úlohy LP (napr. problém obchodného cestujúceho) sú známe dokonalejšie postupy tvorby sečných nadrovin, ktoré „odsekávajú“ nepotrebné riešenia „po väčších kusoch“ a smerujú k optimálnemu riešeniu rýchlejšie.

Zovšeobecnenie praktického postupu Gomoryho algoritmu

- 1.krok: Najskôr **určíme optimálne riešenie** zadanej úlohy simplexovou metódou bez ohľadu na podmienku celočíselnosti – t.j. riešenie relaxovanej úlohy.
- 2.krok: V každej rovnici s neceločíselným riešením **rozdelíme hodnotu b_i (pravá strana) na dolnú celú časť - celočíselná časť d_i a zlomkovú časť r_i** , tzn. do tvaru $b_i = d_i + r_i$.
- 3.krok: Zvolíme rovnicu i , v ktorej požadujeme získanie celočíselného riešenia a v ktorej je neceločíselná časť r_i maximálna. V rovnici **rozložíme aj všetky koeficienty ľavej strany na ich celočíselnú časť d_{ij} a zlomkovú časť r_{ij}** tzn. do tvaru $a_{ij} = d_{ij} + r_{ij}$.

4.krok: K rovnici i zvolenej a rozloženej na časti d_i a r_i v bode 3 **vytvoríme doplnkovú rovnicu** v tvare

$$-r_{i1} \cdot x_1 - r_{i2} \cdot x_2 - \dots - r_{in} \cdot x_n + r = -r_{ib} ,$$

o ktorú riešenú sústavu rozšírime a v ktorej r predstavuje nová premennú pridanú do bázy.

5.krok: Pokračujeme v riešení tak, že **pripojený riadok (r_i) považujeme za riadiaci riadok** úpravy. Riadiaci stĺpec, t.j. stĺpec novo zaraďovanej premennej do bázy určíme tak, že vyrátame podiely z_j / r_{ij} pre všetky stĺpce a $\min |z_j / r_{ij}|$ jednoznačne určuje najvhodnejší **riadiaci stĺpec**.

6.krok: Vyriešenie takto rozšíreného problému by malo viesť k „sceločíselneniu“ aspoň jednej premennej. Ak takto získame celočíselné hodnoty aj pre ostatné premenné, výpočet končíme. Ak sú hodnoty základných premenných aj naďalej neceločíselné, postup od kroku 2 opakujeme tak, že sústavu rozšírime o ďalšiu rovnicu s novou premennou r_2 atď.

Príklad 8.4: Stavebný podnik má k dispozícii 8 nakladačov, 16 nákladných automobilov a 10 buldozérov. Z nich môže zostaviť 3 rôzne pracovné zostavy. Zostava Z1 v zložení 1 nakladač, 3 nákladné automobily a 1 buldozér má výkon 70 m^3 premiestnenej zeminy za zmenu. Zostava Z2 s 1 nakladačom, 4 nákladnými automobilmi a 1 buldozérom premiestni 88 m^3 /zmena a zostava Z3 – 1 buldozér je schopný premiestniť 8 m^3 /zmena. Ako rozmiestniť stroje, aby bol výkon maximálny?

Riešenie:

Stroj	Zostava	Z_1	Z_2	Z_3	K dispozícii
Nakladač		1	1	0	8
Nákladné auto		3	4	0	16
Buldozér		1	1	1	10
Výkon		70	88	8	MAX

Matematický model úlohy v tvare

$$\begin{aligned}
 z &= 70.x_1 + 88.x_2 + 8.x_3 \rightarrow \text{MAX} \\
 x_1 + x_2 &\leq 8 \\
 3.x_1 + 4.x_2 &\leq 16 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10
 \end{aligned}$$

Po zápise modelu do simplexovej tabuľky získame východiskové riešenie.

Dualita úloh LP, možnosti ukončenia výpočtu ÚLP, celočíselné programovanie

Východiskové riešenie úlohy

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	z	
x ₄	8	1	1	0	1	0	0	0	0. iterácia
x ₅	16	3	4	0	0	1	0	0	
x ₆	10	1	1	1	0	0	1	0	
z	0	-70	-88	-8	0	0	0	1	

Po vykonaní troch iteračných krokov *získame optimálne neceločíselné riešenie.*

Optimálne neceločíselné riešenie úlohy – 3. iterácia

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	z	r ₁	
x ₄	2 2/3	0	- 1/3	0	1	- 1/3	0	0	0	3. iterácia
x ₁	5 1/3	1	4/3	0	0	1/3	0	0	0	
x ₃	4 2/3 =4+2/3	0 =0+0	-1/3 = -1+2/3	1 =1+0	0 =0+0	-1/3 = -1+2/3	1 =1+0	0	0	
z	1232/3	0	8/3	0	0	62/3	8	1	0	
r ₁	- 2/3	0	- 2/3	0	0	-2/3	0	0	1	dopl.r.

Maximálna neceločíselná časť (2/3) je u premenných x_4 a x_3 . Nakoľko x_4 je iba prídavná premenná, doplnkovú rovnicu r_1 podľa bodu 4 postupu určíme k rovnici pre premennú x_3 .

Doplnková rovnica r_1 je uvedená v riadku pod účelovou funkciou z .

Poznámka: Prvky v matici sa rozkladajú na celočíselnú **plus** zlomkovú časť, takže napr. $-1/3 = -1 + 2/3$.

Absolútna hodnota podielu koeficientov riadku ÚF a novej rovnice r_1 je v druhom stĺpci 4 a v piatom 31, z čoho vyplýva, že **novou zaradenou bázičkou premennou bude x_2** . Po preprataní tabuľky dostaneme riešenie, ktoré je už riešením optimálnym aj s podmienkami celočíselnosti.

Optimálne celočíselné riešenie úlohy

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
x_4	3	0	0	0	1	$-2/3$	0	0
x_1	4	1	0	0	0	-1	0	0
x_3	5	0	0	1	0	0	1	0
x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
z	408	0	0	0	0	9	0	1

Celočíselné optimálne riešenie je

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5$$

ktoré už podmienkam celočíselnosti vyhovuje a ktorého hodnota účelovej funkcie $z = 408$ je lepšia ako pri jednoduchom zaokrúhlení neceločíselného riešenia a je zrejmé, že je dostatočne blízko k určenému neceločíselnému optimu ($z = 410,666$).

Poznámka : Ak by sme túto úlohu riešili iba rutinne, zaokrúhlením hodnôt x_1 na 5 a x_3 takisto na 5, dostali by sme síce riešenie prípustné, ale jeho hodnota účelovej funkcie by bola iba $z = 70 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 390$, čo je hodnota ÚF významne nižšia, ako hodnota získaná Gomoryho algoritmom.

V skutočných rozhodovacích problémoch nemusia mať predpísané celočíselné hodnoty všetky premenné a vtedy hovoríme o **zmiešanej úlohe celočíselného programovania**.

Špeciálny prípad celočíselného programovania predstavujú úlohy, v ktorých môžu premenné nadobúdať iba hodnoty „0“ alebo „1“, už uvedené tzv. **bivalentné premenné**. Môžeme sa s nimi stretnúť predovšetkým v úlohách využívajúcich tzv. *binárne rozhodovanie*. Najznámejším prípadom takéhoto typu úloh je tzv. **priradovací problém**.

8.4.2 Kombinatorické metódy

Metóda „**Branch and Bound**“ je z postupov celočíselného programovania založených na princípoch kombinatoriky najznámejšia. Jej princíp spočíva v tom, že sa pri riešení postupne menia hranice jednotlivých premenných, čím sa vytvárajú nové úlohy lineárneho programovania a po ich vyriešení sa spätne posudzuje, či riešenie vyhovuje podmienkam celočíselnosti a aká je jeho aktuálna hodnota účelovej funkcie.

Podstata metódy vetvenia a hraníc (Branch and Bound = vetvenia a medzí)

Metóda „**Branch and Bound**“ patrí medzi tzv. *kombinatorické algoritmy*. Jej princíp je natoľko všeobecný, že je možné ho využiť nielen v rámci celočíselného programovania, ale (vždy však po istej úprave) aj pre riešenie viacerých typov úloh. Postup je vhodný nielen pre riešenie rýdzo celočíselných problémov, ale aj zmiešaných celočíselných ÚLP. Jediným predpokladom je, že koeficienty účelovej funkcie budú v celé čísla (to vo všeobecnosti nie je problém zaistiť v akejkolvek úlohe LP).

Zovšeobecnený základný postup metódy Branch and Bound:

1.krok: Štandardným postupom (napr. *simplexovou metódou*) určíme optimálne riešenie úlohy bez uvažovania podmienok celočíselnosti tzv. *relaxovaná úloha*. Vektor určeného optimálneho riešenia označme napr. $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ a jeho hodnotu účelovej funkcie z^0 .

2.krok: Ak určené neceločíselné riešenie vyhovuje aj podmienkam celočíselnosti, zároveň predstavuje aj optimálne riešenie celočíselné a výpočet končí. To sa však nestáva často.

3.krok: Ak požadované základné premenné ešte celočíselné nie sú, vyberieme z množiny prípustných riešení relaxovanej úlohy jedno riešenie (úloha $\mathbf{X}^0$). Vytvoríme z neho dve pod-úlohy – ozn. $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$, čo v podstate reprezentuje „proces vetvenia“ množiny $\mathbf{X}^0$ na dve pod-úlohy $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$.

Z vektora $\mathbf{x}^0$ vyberieme ľubovoľnú (alebo podľa vyžadovaných podmienok celočíselnosti určenú) premennú, ktorá podmienku celočíselnosti zatiaľ nespĺňa. Nech sa jedná napr. o premennú x_k , ktorej hodnota je vo vektore riešenia $\mathbf{x}^0$ rovná x_k .

Množina $\mathbf{X}^1$ je potom charakterizovaná rozšírením o podmienku v tvare

$$x_k \geq \lceil x_k^0 \rceil + 1$$

a množina $\mathbf{X}^2$ je vytvorená z množiny $\mathbf{X}^0$ rozšírením o podmienku v tvare

$$x_k \leq \lfloor x_k^0 \rfloor,$$

kde výraz $\lceil x_k^0 \rceil$ predstavuje celú časť zo zatiaľ neceločíselnej hodnoty x_k^0 . Napríklad, ak je neceločíselná hodnota riešenia $x_k^0 = 8/5$, potom bude množina $\mathbf{X}^1$ určená podmienkou v tvare

$$x_k \geq \lceil 8/5 \rceil + 1 \Rightarrow x_k = 2$$

a množina $\mathbf{X}^2$ bude určená podmienkou v tvare

$$x_k \leq \lfloor 8/5 \rfloor \Rightarrow x_k = 1.$$

4.krok: V každej z obidvoch vetiev (množiny $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$) musíme opäť určiť optimálne riešenie bez uvažovania podmienok celočíselnosti (ako relaxovaná úloha) a v takto definovanom procese vetvenia pokračovať dovtedy, pokiaľ nebude nájdené najlepšie celočíselné riešenie.

Súčasť algoritmu tvorí aj možnosť, že v každej vetve je odvodzovaná (odhadovaná) tzv. **horná hranica, horná medza** (za predpokladu úlohy typu MAX) pre hodnotu ÚF celočíselného riešenia.

Napríklad, na množine $\mathbf{X}^0$ je v zadanom *Príklade 8.5* optimálne riešenie určené vektorom $\mathbf{x}^0$ s hodnotou účelovej funkcie $z^0 = 49/5$. Nakoľko to je na množine $\mathbf{X}^0$ jediné optimálne riešenie je zrejmé, že „rýdzo celočíselné riešenie“ nemôže mať hodnotu účelovej funkcie vyššiu ako $49/5$, tzn. maximálne $z = 9$. To znamená, že **horná medza na množine $\mathbf{X}^0$ bude rovná 9**.

- U *rýdzo celočíselných úloh* získame hornú hranicu pre hodnotu ÚF celočíselného riešenia na množine $\mathbf{X}^k$ ako $\lceil z^k \rceil$, kde z^k je optimálna hodnota neceločíselného optima na množine $\mathbf{X}^k$.
- U *zmiešano celočíselných úloh* (nevyžaduje sa, aby všetky premenné a teda ani hodnota účelovej funkcie museli byť celočíselné) bude horná hranica v danej vetve priamo rovná vypočítanej hodnote ÚF pre vyrátané neceločíselné optimum na určenej množine.

Uvedený (opäť iteračný) postup celočíselného riešenia metódou „Vetvenia a hraníc“ pokračuje dovtedy, pokiaľ všetky vytvorené vetvy nie sú uzavreté jedným z troch nasledovných spôsobov:

- **vo vetve je nájdené riešenie**, ktoré vyhovuje podmienkam celočíselnosti,
- **vo vetve neexistuje žiadne prípustné riešenie**,

- **vo vetve je nájdené neceločíselné riešenie a horná hranica pre hodnotu účelovej funkcie, odvodená z tohto riešenia, je nižšia ako hodnota účelovej funkcie riešenia celočíselného, nájdeného už skôr v rámci niektorej z ostatných vetiev.**

Po uzavretí všetkých vetiev vyberieme najlepšie doteraz určené celočíselné riešenie (s extrémnou hodnotou z , príp. zistíme, či také riešenie vôbec existuje) súčasne predstavuje aj ***hľadané optimálne riešenie úlohy LP s podmienkami celočíselnosti.***

Príklad 8.5: *Majme úlohu celočíselného programovania určenú matematickým modelom*

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \text{MAX} \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 13 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2 &\text{ – celočíselné.} \end{aligned}$$

Metódou vetvenia a hraníc určite celočíselné optimálne riešenie optimalizačnej úlohy.

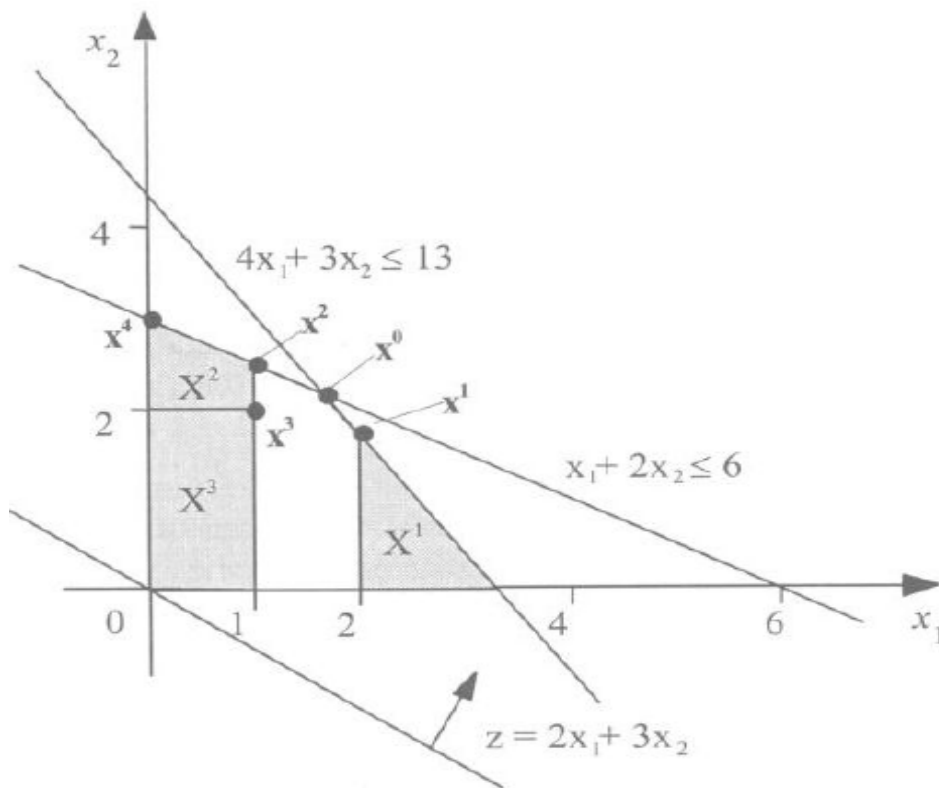
Riešenie:

Pre ilustráciu je na obr.8.4 uvedené grafické znázornenie spôsobu delenia (definovania sečnej nadroviny) pôvodnej množiny prípustných riešení $\mathbf{x}^0$ na podmnožiny v jednotlivých vetvách, ako aj optimálne riešenie získané na týchto podmnožinách ($\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4$).

1.krok: určenie optimálneho riešenia $\mathbf{x}^0$ na celej množine prípustných riešení, t.j. bez uvažovania podmienok celočíselnosti. Hľadané riešenie je

$$\mathbf{x}^0 = \left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5} \right) \text{ a } z^0 = \frac{49}{5}.$$

Horná hranica (medza) pre hodnotu účelovej funkcie hľadaného celočíselného riešenia bude rovná hodnote najviac $[49/5] \Rightarrow \mathbf{hh}^{(0)} = 9$.



Obr.8.4 Výpočet celočíselného optima metódou vetvenia hraníc

2.krok: Riešenie $\mathbf{x}^0$ nie je ešte celočíselné, preto musíme množinu riešení vetviť,

3.krok: Pre vetvenie vyberieme, napr. prvú neceločíselnú zložku vektora $\mathbf{x}^0$ (t.j. $x_1^0 = 8/5$) a z pôvodnej množiny $\mathbf{X}^0$ vytvoríme dve podmnožiny $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$ a to tak, že sústavu obmedzujúcich podmienok rozšírime o podmienku (uvedené aj na Obr. 8.4.) v tvare

$$x_1 \geq [8/5] + 1 = 2,$$

resp. o podmienku v tvare

$$x_1 \leq [8/5] = 1.$$

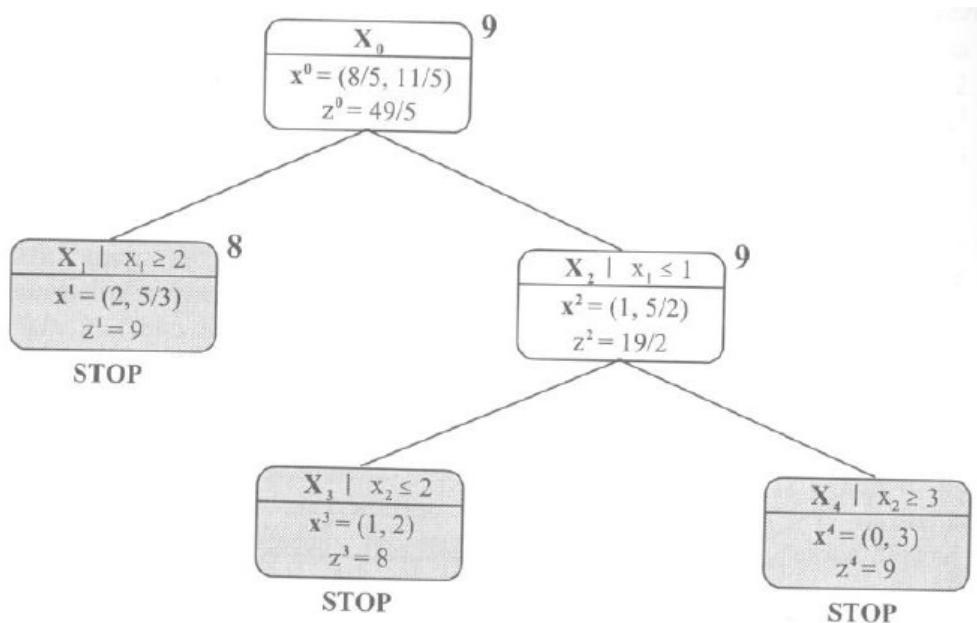
Množiny $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$ sú na Obr.8.4 zvýraznené vytieňovaním.

1.krok: Na množinách $\mathbf{X}^1$ a $\mathbf{X}^2$ opäť určíme ich optimálne riešenie a dostali by sme

$$\mathbf{x}^1 = \left(2, \frac{5}{3}\right), z^1 = 9 \quad \text{a} \quad \mathbf{x}^2 = \left(1, \frac{5}{2}\right), z^2 = \frac{19}{2}.$$

2.krok: Na podmnožinách odvodených z množiny $\mathbf{X}^1$ nie je možné získať celočíselné riešenie, ktoré by malo hodnotu účelovej funkcie vyššiu ako 8 (tzn. $\mathbf{hh}^{(1)} = 8$), Na množine $\mathbf{X}^2$ je horná hranica rovná $[19/2] \Rightarrow \mathbf{hh}(2) = 9$. Vidíme však, že ani jedno z riešení $\mathbf{x}^1$ resp. $\mathbf{x}^2$ nie je ešte rýdzo celočíselné – a preto musíme vetviť ďalej.

3.krok: Pre ďalšie vetvenie pripadajú do úvahy obidve množiny $\mathbf{X}^1$ aj $\mathbf{X}^2$. Množina $\mathbf{X}^2$ je však pre vetvenie „perspektívnejšia“, pretože hodnota jej hornej hranice ($\mathbf{hh}^{(2)} = 9$) je vyššia ako ($\mathbf{hh}^{(1)} = 8$) na množine $\mathbf{X}^1$. Znamená to, že na množine $\mathbf{X}^2$ môžeme očakávať zisk riešenia s vyššou hodnotou účelovej funkcie, naopak vetvenie množiny $\mathbf{X}^1$ môžeme zastaviť.



Obr.8.5. Grafické znázornenie postupu riešenia metódou vetvenia a hraníc

Z množiny $\mathbf{X}^2$ preto vetvením vytvoríme dve podmnožiny $\mathbf{X}^3$ a $\mathbf{X}^4$ tak, že ju doplníme o obmedzujúce podmienky v tvare

$$x_2 \leq \lceil 5/2 \rceil = 2, \text{ resp. } x_2 \geq \lfloor 5/2 \rfloor + 1 = 3.$$

1.krok: Vyriešením oboch takto rozšírených úloh v rámci podmnožín (pod-úloh) $\mathbf{X}^3$, $\mathbf{X}^4$ už získame rýdzo celočíselné riešenie. Konkrétne sa jedná o riešenie v tvare:

- pre množinu $\mathbf{X}^3$ je $\mathbf{x}^3 = (1, 2)$, $z^3 = 8$
- pre množinu $\mathbf{X}^4$ je $\mathbf{x}^4 = (0, 3)$, $z^4 = 9$.

Nakoľko sa jedná o celočíselné riešenia na oboch množinách, nie je už potrebné vo vetvení pokračovať (vid'. *Pravidlo 1 – nájdenie celočíselného riešenia*). Súčasne však môžeme ukončiť vetvenie aj na množine $\mathbf{X}^1$, pretože horná hranica na nej je rovná $hh^{(1)} = 8$, ale my sme našli celočíselné riešenie s hodnotou ÚF = 9 (vid'. *Pravidlo 3 pre ukončenie vetvenia*).

Takto je ukončené vetvenie na všetkých množinách a výpočet môže skončiť.

Výsledky: najlepšie celočíselné riešenie úlohy je určené vektorom riešení v tvare

$$\mathbf{x}^4 = (0, 3)$$

s hodnotou účelovej funkcie $z^4 = 9$ a reprezentuje *optimálne celočíselné riešenie úlohy*.

Príklad 8.6: Majme už uvedený model úlohy optimálnej ochrany objektu (Príklad 8.1), ktorej matematický model má tvar

$$\begin{aligned} z &= 13 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX} \\ 7 \cdot x_1 + 8,5 \cdot x_2 &\leq 60 \\ 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 32 \\ 0 \leq x_1 &\leq 5 \\ 0 \leq x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

Metódou vetvenia a hraníc určte celočíselné riešenie, ktoré zaistí MAX hodnotu ÚF.

Riešenie:

Po realizácii simplexovej metódy získame nasledovné riešenie:

$$\mathbf{x}^0 = (4,11; 3,68), \quad z^0 = 86,49$$

Vidíme, že počet rakiet prvého typu by v ideálnom prípade mal byť $R_1 = 4,11$ a druhého typu $R_2 = 3,68$. Maximálny počet pre oba typy rakiet je stanovený na max. 5 ks.

Pretože x_1 môže nadobudnúť iba celočíselné hodnoty, môže sa rovnať iba niektorej z hodnôt 0 až 4 (Pod-úloha 1) alebo 5 (Pod-úloha 2). Môžeme preto vytvoriť – rozvetviť - dve nové optimalizačné úlohy, a to ak zavedieme nové obmedzenia v tvare $x_1 \leq 4$ a $x_2 \leq 5$.

V strome úloh sú aj s ich riešením označené ako Pod-úloha 1 (jej riešenie je $x_1=4$ a $x_2=3,76$, $z=85,88$) a ako Pod-úloha 2 (jej riešenie je $x_1=5$ a $x_2=1$, $z=74$).

Riešenie Pod-úlohy 2 teda podmienke celočíselnosti vyhovuje.

V riešení Pod-úlohy 1 je hodnota x_1 celočíselná, ale hodnota x_2 nie. Preto je možné smerom k premennej x_2 v Pod-úlohe 1 naformulovať 2 nové úlohy, označené ako Pod-úloha 3 a Pod-úloha 4.

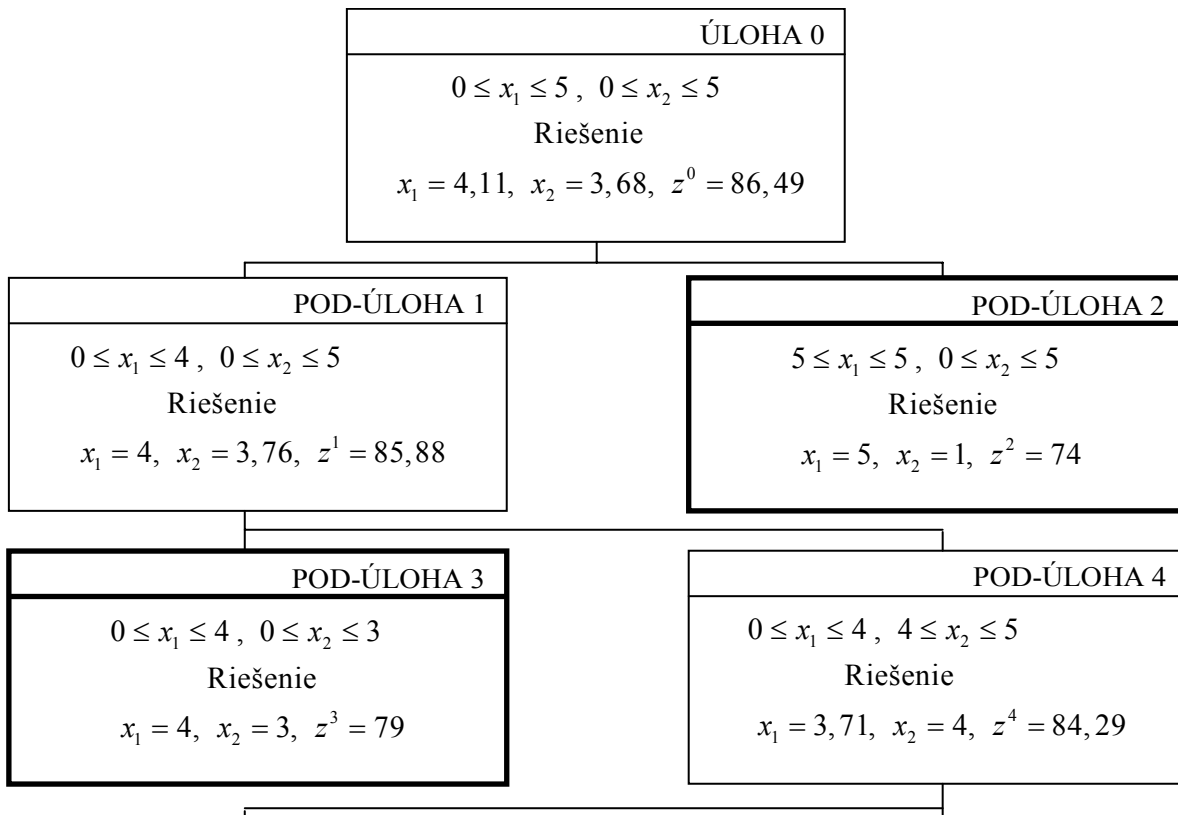
Pod-úloha 4 má riešenie $x_1=3,71$ a $x_2=4$, $z=84,29$, zatiaľ čo Pod-úloha 3 má riešenie už celočíselné. Pretože v Pod-úlohe 4 nie je celočíselné x_1 , môžeme úlohu ďalej vetviť a vytvoriť 2 nové pod-úlohy (Pod-úloha 5 a Pod-úloha 6).

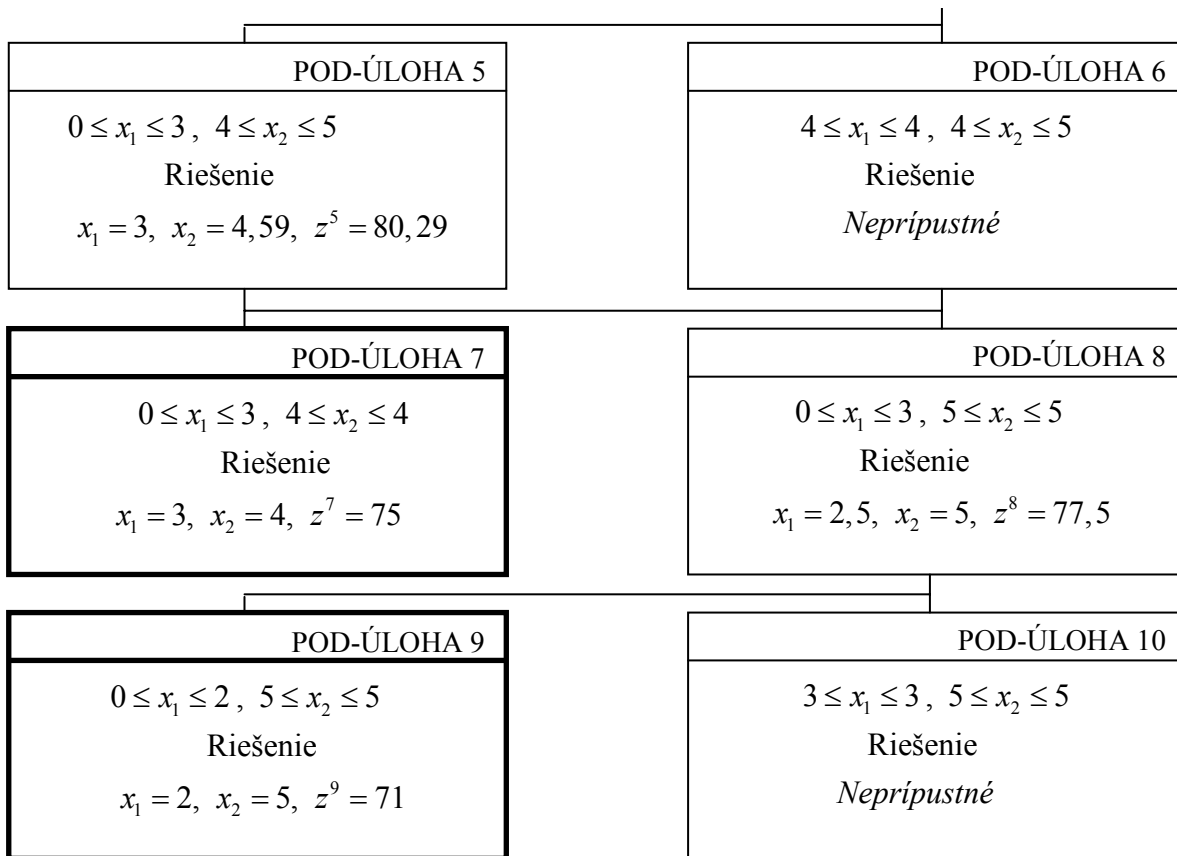
Riešenie Pod-úlohy 6 je neprípustné, pričom Pod-úloha 5 má neceločíselné riešenie. Analogicky pokračujeme ďalej tak, že ju rozčleníme na pod-úlohy 7 a 8. Pod-úloha 7 celočíselné riešenie má, Pod-úlohu 8 s neceločíselným riešením preto môžeme rozvetviť na dve nové pod-úlohy (Pod-úlohu 9 a Pod-úlohu 10).

Pod-úloha 9 má riešenie $x_1=2$ a $x_2=5$, $z=71$ a Pod-úloha 10 prípustné riešenie nemá.

Úlohu už nie je možné vetviť, čím je rozvoj stromu riešení ukončený.

Strom úloh pre problém optimalizácie obrany objektu.





Iba 4 riešené pod-úlohy majú celočíselné riešenie pre obe premenné. Najvyššiu hodnotu ÚF dáva riešenie Pod-úlohy 3 a môžeme ho považovať za hľadané optimálne riešenie úlohy LP.

Sumarizácia riešení úloh v metóde Branch and Bound.

Pod-úloha číslo	Riešenie		
	x_1	x_2	z
0	4,11	3,68	86,49
1	4	3,76	85,88
2	5	1	74,00
3	4	3	79,00 = OPT
4	3,71	4	84,29
5	3	4,59	80,29
6	Neprípustné riešenie		
7	3	4	76,00
8	2,5	5	77,5
9	2	5	71,00
10	Neprípustné riešenie		

Interpretácia výsledkov: pre optimálnu mieru ochrany objektu pri zadaných obmedzeniach počtov rakiet, financií a personálu je potrebné využiť 4 rakety typu R_1 a 3 rakety typu R_2 , ktoré zabezpečia ochranu chráneného záujmu na úrovni 79%.

9. ANALÝZA CITLIVOSTI OPTIMÁLNEHO RIEŠENIA ÚLP

Často sa v praxi vyskytujú situácie, keď v riadenom systéme dochádza k zmene vstupných údajov, ktoré môžu mať (a obvykle aj majú) vplyv na optimálne riešenie problému. Zmeny sa môžu týkať buď *prvkov vektora pravých strán obmedzujúcich podmienok* (napr. zmena množstva zdrojov), *koeficientov účelovej funkcie* (napr. zmena ceny výrobku), ale aj *štruktúrnych koeficientov* (napr. zmena noriem spotreby surovín, príp. parametrov výrobného zariadenia a pod.).

Analýza citlivosti (senzitivnosti) riešenia ÚLP skúma vplyv zmeny ľubovoľného parametra úlohy na optimálne riešenie a tvorí súčasť tzv. *post-optimalizačnej analýzy*. Umožňuje analyzovať riadený systém, jeho štruktúru a poukázať na následky zmien. Obvykle skúmame vplyv zmien typu:

- *zmeny (jedného alebo viacerých) koeficientov účelovej funkcie,*
- *zmeny prvkov vektora pravej strany,*
- *zmeny štruktúrnych koeficientov,*
- *zmeny v počte ohraničení,*
- *zmeny v počte rozhodovacích premenných,*
- *zmeny koeficientov účelovej funkcie alebo prvkov pravej strany v závislosti od jedného alebo viacerých explicitne zadaných parametrov.*

Základ tvoria úlohy, pri ktorých sa nemení množina základných riešení – báza. Jedná sa hlavne o úlohy týkajúce sa najčastejšie realizovaných zmien a to:

- 1. zmeny ľubovoľného prvku pravej strany a zistenie prípustného intervalu zmeny = analýza citlivosti pravých strán modelu.**
- 2. zmeny ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie a určenie prípustného intervalu nožnej zmeny = analýza citlivosti zmeny cenových koeficientov.**

Podstata analýzy citlivosti spočíva v určení tzv. **prípustného intervalu zmeny prvku pravej strany** a vplyvu tejto zmeny na zachovanie určeného optima. Zisťovanie prípustného intervalu zmeny ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie je založené na podobných princípoch a preto sa ním nebudeme ďalej bližšie zaoberať.

Zmenu v niektorých prvkoch pravej strany obmedzujúcich podmienok je možné chápať ako problém, ktorého cieľom riešenia je zistenie vplyvu uvažovanej zmeny na bázu vypočítaného optimálneho riešenia (napr. *o koľko sa môže množstvo uvažovaného zdroja zmeniť bez toho, aby sa zmenila optimálnosť určeného riešenia*).

Základným predpokladom však zostáva fakt, že všetky ďalšie vstupné údaje (koeficienty účelovej funkcie, ostatné prvky pravej strany, štruktúrne koeficienty) pritom zostávajú nezmenené.