

1. ŠPECIÁLNE ÚLOHY LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Doteraz sme sa zaoberali typickými úlohami LP, v ktorých bola optimalizovaná účelová funkcia na množine riešení, ktorá bola určená sústavou vlastných obmedzení a obligátnymi podmienkami (nezápornosti, celočíselnosti).

Medzi typickými úlohami LP sa však vyskytujú aj úlohy, vyznačujúce sa niektorými špecifickými vlastnosťami, ktoré sa môžu týkať špeciálnej štruktúry modelov, spôsobov ich riešenia a pod. U niektorých z týchto špeciálnych úloh sa obmedzíme iba na formuláciu ekonomického a matematického modelu, u významnejších modelov popíšeme aj základné spôsoby ich riešenia.

Medzi najtypickejšie špeciálne úlohy LP patria tzv. **distribučné problémy**. Z úloh tohto typu sa ako najvýznamnejšie prezentujú úlohy:

- **Klasický dopravný problém** - rieši optimálny plán rozvozu tovaru (materiálu).
- **Modifikácie klasického dopravného problému** - napr. kontajnerový dopravný problém, okružný dopravný problém.
- **Všeobecný distribučný problém** – rieši optimálny plán rozvozu, ak kapacity zdrojov a požiadavky odberateľov nie sú uvedené v rovnakých jednotkách.

6. Distribučné problémy

- **Úlohy optimálneho rozmiestnenia zdrojov** – riešia tzv. alokačné problémy, umiestnenia zdrojov na určitom území pri uvažovaní ďalších obmedzení alebo požiadaviek.
- **Prirad'ovací problém** – rieši optimálne priradenie objektov na miesta určenia.
- **Úloha o pokrytí** – rieši rozhodnutie o výstavbe K obslužných staníc, ktoré môžu byť umiestnené v n obvodoch ($K < n$) a priradiť jednotlivým staniciam aj rozsah ich pôsobnosti, t.j. určiť obvody, ktoré budú týmito stanicami obsluhované.

Medzi špeciálne úlohy lineárneho programovania sa zaraďujú aj úlohy **celočíselného programovania**, ktoré predstavujú bežné úlohy LP v ktorých je požadované, aby niektoré alebo všetky premenné nadobudli iba celočíselné hodnoty.

Ďalšou špecifickou oblasťou LP je tzv. **cieľové programovanie**, ktoré predstavuje techniku riešenia optimalizačných úloh, ktorá namiesto optimalizácie účelovej funkcie minimalizuje odchýlky od vopred zadaných „cieľových hodnôt“.

2. DISTRIBUČNÉ PROBLÉMY

Cieľom prednášky je pochopiť princíp dopravnej úlohy, naučiť sa riešiť vyrovnané ako aj nevyrovnané dopravné úlohy, naučiť sa poznávať základné vlastnosti uvažovaného riešenia (či je degenerované, alternatívne) a správne interpretovať výsledky.

Spoločným znakom množiny všetkých tzv. **distribučných problémov** je skutočnosť, že ich matematický model je možné riešiť aj simplexovým algoritmom. Takýto spôsob však väčšinou vedie na úlohy veľkého rozsahu, ktorých riešenie je „výpočtovo neefektívne“ (t.j. pracujeme s veľkou množinou premenných, iteračný proces je dlhý a výpočtovo náročný). Z tohto dôvodu boli vyvinuté oveľa efektívnejšie algoritmy pre ich riešenie, ktoré prihliadajú aj na špecifické vlastnosti matematických modelov jednotlivých typov úloh.

2.1 Dopravný problém

V dopravnom probléme sa v jeho typickej podobe jedná o rozvrhnutie rozvozu tovaru alebo materiálu z dodávateľských miest (ZDROJE) ku odberateľom (CIEĽOVÉ MIESTA) tak, aby boli minimalizované celkové náklady súvisiace s týmto rozvozom.

1.1 Základné pojmy a matematický model dopravnej úlohy

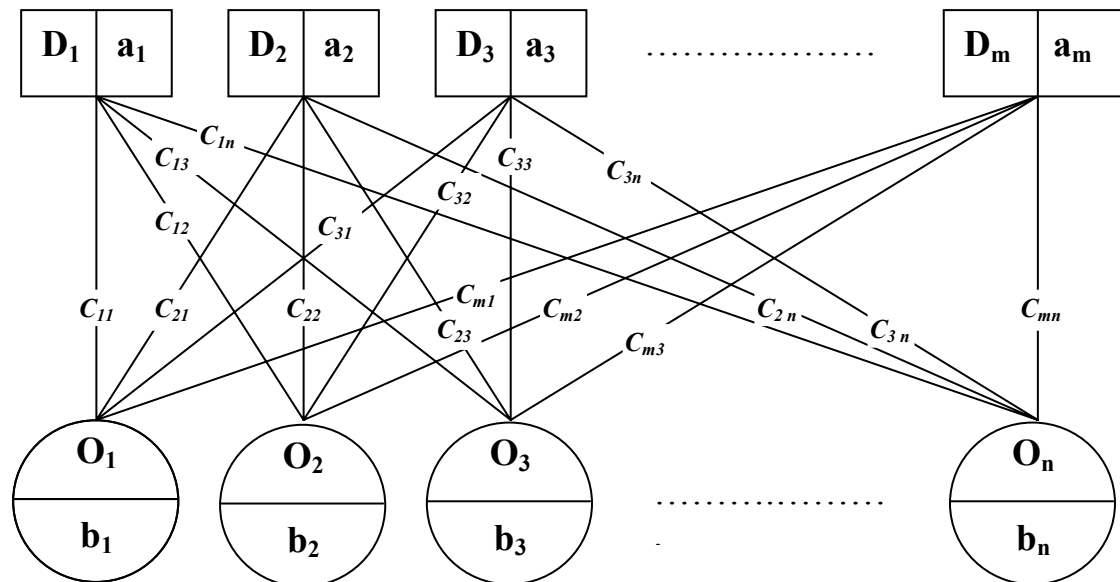
Základný cieľ riešenia dopravnej úlohy (DU): zostrojenie **optimálneho plánu (programu) rozvozu** tovaru od dodávateľov (zdroj, výrobca) definovaných svojimi kapacitami k jednotlivým odberateľom (cieľ, zákazník), charakterizovaným svojimi požiadavkami.

Z pohľadu potrebných vstupných údajov je možné dopravný problém vyjadriť:

- počtom dodávateľov m a ich obmedzenými kapacitami $a_1, a_2, \dots, a_m$, t.j. množstvom, ktoré sú schopní dodávatelia v danom období dodať – tvoria tzv. **vektor kapacít $\mathbf{a}$** ,
- počtom odberateľov n a ich požiadavkami $b_1, b_2, \dots, b_n$, t.j. množstvom, ktoré zákazníci v danom období vyžadujú – tvoria tzv. **vektor požiadaviek $\mathbf{b}$** a
- ohodnotením vzťahu každej dvojice zdroj – cieľ hodnotou - c_{ij} , pre $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, ktoré obsahujú ohodnotenie napr. jednotkových nákladov na prepravu tovaru od i -teho dodávateľa k j -temu odberateľovi - tvoria tzv. **maticu sadzieb $\mathbf{C}$** . Takýmto ohodnotením môžu byť vykalkulované náklady na prepravu jednej jednotky tovaru medzi zdrojom a cieľovým miestom alebo kilometrická vzdialenosť medzi zdrojom a cieľovým miestom.

Rozvoz je obvykle popísaný nákladmi na prepravu určitého „jednotkového množstva tovaru“ z konkrétneho zdroja k príslušnému cieľovému miestu tzv. *sadzbou* – c_{ij} . (obr.6.1)

6. Distribučné problémy



Obr.6.1. Grafické znázornenie dopravnej úlohy

Cieľom riešenia dopravného problému je naplánovať prepravu medzi zdrojmi a cieľovými miestami, t.j. stanoviť objem prepravy medzi každou dvojicou zdroj – cieľové miesto tak, aby neboli prekročené kapacity zdrojov a aby boli uspokojené požiadavky cieľových miest.

6. Distribučné problémy

Z hľadiska matematického sa jedná o určenie hodnôt premenných x_{ij} , pre $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,m$, ktoré vyjadrujú objem prepravy medzi i -tym zdrojom (dodávateľom) a j -tým cieľovým miestom (odberateľom).

Pre názornejšie vyjadrenie základnej formulácie dopravnej úlohy je vhodný prepis do typizovanej tabuľky (tab.6.1), ktorá sa využíva k „ručnému“ riešeniu jednoduchších úloh.

Tab. 6.1. Tabuľka dopravnej úlohy

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃		O _n	a
D ₁	c_{11} x ₁₁	c_{12} x ₁₂	c_{13} x ₁₃		c_{1n} x _{1n}	a ₁
D ₂	c_{21} x ₂₁	c_{22} x ₂₂	c_{23} x ₂₃		c_{2n} x _{2n}	a ₂
D ₃	c_{31} x ₃₁	c_{32} x ₃₂	c_{33} x ₃₃		c_{3n} x _{3n}	a ₃
⋮						⋮
D _m	c_{m1} x _{m1}	c_{m2} x _{m2}	c_{m3} x _{m3}		c_{mn} x _{mn}	a _m
b	b ₁	b ₂	b ₃		b _n	$\sum a_i = \sum b_j$

6. Distribučné problémy

Cieľ riešenia dopravnej úlohy:

Určiť prepravované množstvá x_{ij} tovaru zo všetkých zdrojov na všetky cieľové miesta, ktoré budú spĺňať nasledujúce požiadavky :

- a) *vyhovejú požiadavkám všetkých dodávateľov,*
- b) *naplnia kapacity všetkých dodávateľov a*
- c) *náklady na celú realizáciu rozvozu budú minimálne, resp. maximálne.*

Vyrovnaný dopravný problém - základný predpoklad pre tvorbu matematického modelu dopravnej úlohy ako úlohy lineárneho programovania tvorí požiadavka, aby sa súčet kapacít zdrojov rovnal súčtu požiadaviek cieľových miest

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (6.1)$$

tzn. aby dopravná úloha bola tzv. **vyrovnaná**. V takomto prípade platí, že všetky požiadavky budú presne uspokojené a všetky kapacity budú vyčerpané. Je zrejmé, že pri riešení praktického problému sa iba vo výnimočnom prípade bude jednať o úlohu vyrovnanú.

Nevyrovnaný dopravný problém vznikne vtedy ak platí

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j . \quad (6.2)$$

6. Distribučné problémy

Riešenie nevyrovnanej dopravnej úlohy je možné až po jej prevode na úlohu vyrovnanú. To docielime zavedením jedného tzv. **fiktívneho činiteľa** – buď dodávateľa alebo odberateľa.

Rozlišujeme dva typy nevyrovnaných dopravných úloh: či prevyšuje celková kapacita zdrojov na strane dodávateľov nad celkovými požiadavkami všetkých spotrebiteľov alebo je to naopak.

- **Ak** $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ = **deficit spotreby**.

Celková kapacita tovaru na strane dodávateľov prevyšuje celkové požiadavky všetkých spotrebiteľov. Vtedy zavedieme **fiktívneho spotrebiteľa FS** s jeho požiadavkou o veľkosti

$$b_F = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j . \quad (6.3)$$

Znamená to, že pri zavedení FS_i bude tabuľka úlohy rozšírená o jeden nový stĺpec.

- **Ak** $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ = **deficit zdrojov**.

Celkové požiadavky spotrebiteľov prevyšujú celkovú kapacitu dodávateľov. Je nutné zaviesť **fiktívneho dodávateľa FD** s kapacitou

$$a_F = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i . \quad (6.4)$$

Znamená to, že pri zavedení FD_i bude tabuľka úlohy rozšírená o jeden nový riadok.

6. Distribučné problémy

- Ocenenie vzťahu medzi zdrojmi a cieľovými miestami je u fiktívnych činiteľov, úplne logicky pretože reálne neexistujú, nulové ($c_{ij} = 0$).

Týmto síce získame dopravné úlohy, ktoré majú oproti úlohe pôvodnej o jedného spotrebiteľa resp. dodávateľa viac, ale ide už o dopravnú úlohu vyrovnanú.

Pri vlastnom riešení takto vyrovnanej dopravnej úlohy je nutné všetkých spotrebiteľov resp. dodávateľov – či už sa jedná o skutočného alebo fiktívneho činiteľa – uvažovať ako rovnocenných. Skutočnosť, či sa jedná o reálneho alebo fiktívneho činiteľa je dôležité až pri interpretácii výsledkov riešenia.

Napríklad, keby *dodávateľ* D_r mal dodať x_{rf} jednotiek tovaru *fiktívnemu spotrebiteľovi* FS , v skutočnosti by tento tovar dodaný nebol (nakolko spotrebiteľ FS reálne neexistuje), tzn. zostal by dodávateľovi D_r na sklade a preto aj prepravné náklady po ceste $D_r - FS$ budú nulové. Preto platí: $c_{if} = 0$, pre $i = 1, 2, \dots, m$.

Analogicky, keby mal *fiktívny dodávateľ* FD dodať x_{fs} jednotiek tovaru *spotrebiteľovi* S_s , v skutočnosti by tento tovar dodaný nebol (nakolko neexistuje ani dodávateľ, a teda ani jeho tovar), požiadavka spotrebiteľa S_s by nebola úplne uspokojená. Prepravné náklady po ceste $FD-S_s$ sú preto nulové a preto tiež platí $c_{fj} = 0$, pre $j = 1, 2, \dots, n$.

6. Distribučné problémy

Príklad 1: Stavebná firma pracuje na troch rôznych stavbách v miestach A, B a C. V ďalšom týždni je potrebné na tieto stavby zabezpečiť dodávky betónu o objeme 45 m^3 pre stavbu A, 30 m^3 pre stavbu B a 60 m^3 pre stavbu C. Firma vlastní dve betonárky, ktoré môžu v požadovaný týždeň pre účely stavieb A, B a C poskytovať najviac 80 m^3 (Betonárka 1) a 65 m^3 (Betonárka 2). Náklady na prepravu jedného m^3 betónu boli vykalkulované pre každú možnú trasu prepravy, t.j. z každej betonárky na každú zo stavieb. Tieto náklady sú uvedené v tabuľke 6.2. Úloha: zabezpečiť stavby požadovaným množstvom betónu tak, aby celkové náklady na jeho prepravu boli čo najnižšie.

Riešenie:

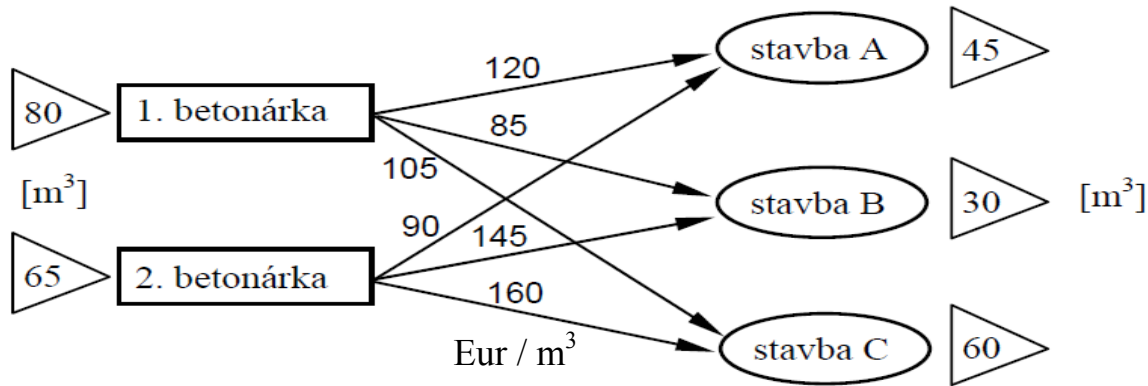
1. Neriaditeľné vstupy (koeficienty úlohy)

Všetky neriaditeľné vstupy analyzovanej úlohy môžeme zapísať do tabuľky:

Náklady v Eur / m^3	<i>Stavba A</i>	<i>Stavba B</i>	<i>Stavba C</i>	<i>Kapacita [m^3]</i>
Betonárka 1	120	85	105	80
Betonárka 2	90	145	160	65
Požiadavky [m^3]	45	30	60	

Tab.6.2 Súhrn údajov dopravnej úlohy (neriaditeľné vstupy)

Často môže pochopenie závislostí a vzťahov v riešenej úlohe výrazne uľahčiť grafické znázornenie. Pre náš rozhodovací problém je zadaná situácia znázornená na Obr.6.2.



Obr. 6.2 Grafické znázornenie dopravnej úlohy

Z nákresu situácie vyplýva, že prepravu betónu medzi 2 betonárkami a 3 stavbami je možné uskutočniť po celkom šiestich rôznych trasách (šípky v obrázku) s určenými jednotkovými nákladmi, t.j. podľa Tab. 6.2, sú prepočítané na 1 m³ prepravovaného betónu.

2. Definovanie premenných (riaditeľné vstupy)

Otázka: *Koľko a aké číselné údaje musíme poznať pre to, aby bola úloha vyriešená?*

Riešenie problému: ak bude známe množstvo betónu, ktoré je nutné previezť po jednotlivých možných trasách. Preto pre každú možnú trasu definujeme jednu premennú, ktorá bude vyjadrovať množstvo betónu [m³] prepravovaného po tejto trase.

6. Distribučné problémy

Celkom teda bude šesť premenných, ozn. x_{ij} :

$x_{1,1}$ počet m^3 betónu prepraveného z 1. betonárky na stavbu A,

$x_{1,2}$ počet m^3 betónu prepraveného z 1. betonárky na stavbu B, ...

Všeobecne: **x_{ij} počet m^3 betónu prepraveného z i -tej betonárky na j -tu stavbu.**

3. Cieľ realizovanej analýzy (kritérium)

Cieľom firmy je minimalizácia celkových dopravných nákladov pri preprave betónu. Účelová funkcia modelu musí preto tieto náklady vyjadrovať a musí teda platiť:

Celkové dopravné náklady = súčet nákladov na všetkých trasách, pričom platí:

Náklady na jednej trase = náklady na prevoz $1 m^3$ * počet vezených m^3 betónu.

Napríklad: - *dopravné náklady na trase z 1. betonárky na stavbu A budú $120 * x_{1,1}$*

- *dopravné náklady na trase z 2. betonárky na stavbu C budú $160 * x_{2,3}$*

Účelová funkcia z , vyjadrujúca celkové dopravné náklady, má potom tvar:

$$z = 120 x_{1,1} + 85 x_{1,2} + 105 x_{1,3} + 90 x_{2,1} + 145 x_{2,2} + 160 x_{2,3} \quad (6.5)$$

Funkčnú hodnotu ÚF z sa pri riešení výsledného modelu snažíme **minimalizovať**.

4. Obmedzujúce podmienky

Zo zadania vyplýva, že pri preprave musíme:

- a) *neprekročiť kapacity jednotlivých betonárok (zdrojov);*
- b) *splniť požiadavky všetkých stavieb (zákazníkov).*

Uvedené obmedzenia môžeme sformulovať do podoby obmedzujúcich podmienok:

4.1 Kapacitné obmedzujúce podmienky

Betonárka 1 môže poskytovať najviac 80 m^3 a *Betonárka 2* najviac 65 m^3 betónu. Znamená to, že celkové množstvo betónu vyvážané z každej z betonárok nesmie prevýšiť uvedené kapacity: - *celkové množstvo betónu vyvážané z 1. betonárky ($v [\text{m}^3]$) ≤ 80 ;*

- celkové množstvo betónu vyvážané z 2. betonárky ($v [\text{m}^3]$) ≤ 65 .

Z *Betonárky 1* vyvážame $x_{11} \text{ m}^3$ betónu na stavbu A, $x_{12} \text{ m}^3$ na stavbu B a $x_{13} \text{ m}^3$ na stavbu C. Celkom z *Betonárky 1* vyvážame $(x_{11}+x_{12}+x_{13}) \text{ m}^3$ betónu. Podobne z *Betonárky 2* vyvážame $(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \text{ m}^3$ betónu.

Výsledné kapacitné podmienky zapíšeme v tvare:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 65$$

(6.6)

6. Distribučné problémy

4.2 Podmienky zabezpečujúce splnenie požiadaviek jednotlivých stavieb

Stavby A, B a C požadujú po rade 45, 30 a 60 m³ betónu. Celkové množstvo betónu dovezené na tieto stavby z oboch betonárok musí splniť uvedené požiadavky:

- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu A ($v [m^3]$) ≥ 45 ;
- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu B ($v [m^3]$) ≥ 30 ;
- celkové množstvo betónu dovezené na stavbu C ($v [m^3]$) ≥ 60 .

Na *Stavbu A* privážame z *Betonárky 1* x_{11} m³ betónu a z *Betonárky 2* privážame x_{21} m³ betónu. Celkom teda na *Stavbu A* privážame $(x_{11}+x_{21})$ m³ betónu. Podobne na *Stavbu B* privážame $(x_{12}+x_{22})$ m³ a na *Stavbu C* $(x_{13}+x_{23})$ m³ betónu. Výsledné podmienky zabezpečujúce splnenie požiadaviek jednotlivých stavieb zapíšeme v tvare:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &\geq 45 \\x_{12} + x_{22} &\geq 30 \\x_{13} + x_{23} &\geq 60\end{aligned}\tag{6.7}$$

5. Podmienky nezápornosti

Je zrejmé, že nie je možné prevážať záporné množstvo betónu. Preto pro premenné definované v modeli úlohy musí platiť:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ pre } i = 1,2; j = 1,2,3\tag{6.8}$$

6. Výsledný lineárny matematický model

Rozhodovacím problémom je určenie spôsobu zásobovania stavieb požadovaným množstvom betónu tak, aby celkové náklady na jeho prepravu boli minimálne. Z hľadiska matematického modelovania sa opäť jedná o úlohu nájdenia minimálnej hodnoty *účelovej funkcie* (6.5) pri rešpektovaní *vlastných obmedzujúcich podmienok* (6.6), (6.7) a *podmienok nezápornosti* (6.8).

minimalizovať

$$z = 120.x_{11} + 85.x_{12} + 105.x_{13} + 90.x_{21} + 145.x_{22} + 160.x_{23} \rightarrow \text{MIN} \quad (6.5)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 80$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 65 \quad (6.6)$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 45$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 30$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 60 \quad (6.7)$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0 \quad (6.8)$$

$$\text{t.j. } x_{ij} \geq 0, \text{ pre } i = 1, 2; j = 1, 2, 3.$$

6. Distribučné problémy

Znamená to, že pri formulácii matematického modelu je nutné uviesť:

- **Model bude obsahovať $m \cdot n$ premenných x_{ij}** , vyjadrujúcich objem prepravy medzi i -tým zdrojom a j -tým cieľovým miestom,
- **Model bude obsahovať $(m+n)$ vlastných obmedzení**,
- **Prvých m podmienok predstavuje bilanciu pre jednotlivé zdroje** – súčet dodávok zo zdrojov k jednotlivým cieľovým miestam nesmie (vzhľadom k vyrovnanosti úlohy) presiahnuť kapacitu zdrojov. Riadkové súčty sa musia rovnať príslušným kapacitám.
- **Ďalších n podmienok prislúcha jednotlivým cieľovým miestam** - súčet dodávok do jednotlivých cieľových miest sa musí (vzhľadom k vyrovnanosti úlohy) rovnať požiadavkám. Stĺpcové súčty premenných sa musia rovnať príslušným požiadavkám.

6. Distribučné problémy

Všeobecný matematický model vyrovnanej dopravnej úlohy:

1. Účelová funkcia

$$Z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \dots + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + \dots + c_{2n} \cdot x_{2n} + \dots + c_{m1} \cdot x_{m1} + c_{m2} \cdot x_{m2} + \dots + c_{mn} \cdot x_{mn} \rightarrow MIN \quad (6.9)$$

2. Obmedzujúce podmienky

$$\begin{array}{rcll}
 x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & & = a_2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m \\
 \hline
 x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} & = b_1 \\
 & x_{12} & + x_{22} & + x_{m2} = b_2 \\
 & & \vdots & \vdots \\
 & x_{1n} & + x_{2n} & + x_{mn} = b_n \\
 \hline
 x_{ij} \geq 0, & \text{pre } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. & &
 \end{array} \quad (6.10)$$

6. Distribučné problémy

Uvedený matematický model môžeme prepísať do tzv. **sumačného tvaru** a dostaneme

minimalizovať

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow MIN$$

za podmienok

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad pre \ i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad pre \ j = 1 \dots n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad pre \ i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

(6.11)

s už uvedenou základnou požiadavkou na vyrovnanosť úlohy (6.1) v tvare

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Cieľ riešenia klasickej dopravnej úlohy:

Z množiny všetkých prípustných riešení nájsť také, pri ktorom nadobudne účelová funkcia najmenšiu možnú hodnotu, samozrejme pri dodržaní všetkých obmedzujúcich podmienok (štruktúrnych, aj obligátnych podmienok, najmä nezápornosť premenných x_{ij}).

6. Distribučné problémy

Je zrejmé, že *ide o špecifický tvar úlohy LP*, vyznačujúci sa týmito vlastnosťami:

- Všetky koeficienty a_{ij} v matici úlohy sú rovné 1 (t.j. $a_{ij} = 1$, pre $i = 1..m$, $j = 1..n$).
- Všetky obmedzujúce podmienky majú priamo tvar rovníc.
- Matematický model úlohy nie je v bázickom tvare.

Znamená to, že množina prípustných riešení vyrovnaného dopravného problému je určená *sústavou $(m+n)$ rovníc, obsahujúcich $(m.n)$ premenných a $(m.n)$ podmienok nezápornosti*.

Znamená to, že každé základné riešenie takejto SLR, vyhovujúce aj všetkým podmienkam nezápornosti, je zároveň aj základným prípustným riešením dopravného problému. Je možné však preukázať, že hodnosť rozšírenej matice sústavy rovníc (6.6) v tvare

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & a_1 \\ & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & a_2 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & a_m \\ \hline 1 & & & & & 1 & & & & 1 & & b_1 \\ & 1 & & & & & 1 & & & & 1 & b_2 \\ & & \ddots & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & 1 & & & & 1 & b_n \end{array} \right]$$

nie je rovná $(m+n)$, ale iba $(m+n-1)$.

6. Distribučné problémy

Dôsledok:

V základnom riešení vyrovnaného dopravného problému je preto iba $(m+n-1)$ základných premenných, pričom každá zo základných premenných je obvykle kladná.

Ak niektorá (resp. niektoré) zo základných premenných sú nulové, ide o tzv. **degenerované základné riešenie**.

Základné riešenie vyrovnanej dopravnej úlohy má $(m+n-1)$ základných premenných, ktoré navzájom nevytvárajú uzavretý okruh.

Ak je počet základných premenných menší ako $(m+n-1)$, hovoríme, že základné riešenie úlohy je degenerované.

Čo to znamená pre výpočet DÚ?? Pokiaľ by sme chceli využiť pre riešenie DÚ simplexový algoritmus, museli by sme **zaviesť $(m + n)$ umelých premenných, pomocnú účelovú funkciu p** a úlohu riešiť využitím dvojfázovej simplexovej metódy a k tomu je obvykle vyžadovaná aj celočíselnosť riešenia. Takýto prístup je najmä pri rozsiahlejších úlohách ťažko realizovateľný aj pomocou softvérovej podpory.

Preto bol vyvinutý špeciálny algoritmus tzv. **metóda potenciálov**.

1.2 Formulácia podstaty a postup riešenia metódou potenciálov

Základné teoretické odvodenie metódy je založené na riešení duálnej úlohy (avšak duálne nesymetrickej) vzhľadom k základnému matematickému modelu dopravného problému. Všeobecný rámcový postup je formálne zhodný so simplexovým algoritmom, v detailoch sú však jednotlivé kroky od simplexovej metódy zásadne odlišné.

Základná schéma realizácie metódy potenciálov pozostáva z 3 hlavných krokov :

1. **Štart výpočtu = získanie východiskového bázického riešenia.**
2. **Test optimality = kontrola optimálnosti riešenia.**
3. **Modifikácia aktuálneho riešenia = iteračný postup až do dosiahnutia optima.**

6. Distribučné problémy

Príklad 2: Majme dopravnú úlohu s 3 dodávateľmi a 3 odberateľmi, kapacity dodávateľov, požiadavky odberateľov a sadzby jednotkových nákladov na prepravu sú tab.6.2.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	15	22	11	5 000
D ₂	20	30	26	2 700
D ₃	18	26	13	2 300
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

Tab.6.2. Zadanie dopravnej úlohy.

Náhodne vybrané prípustné riešenia z množiny všetkých riešení sú napr. tab.6.3.a – d).

a)

4 200	0	800
0	0	2 700
1 300	1 000	0

$$x_{11} = 4\,200$$

$$x_{13} = 800$$

$$x_{23} = 2\,700 \quad \mathbf{z = 191\,400}$$

$$x_{31} = 1\,300$$

$$x_{32} = 1\,000$$

6. Distribučné problémy

b)

3 800	0	1 200
1 700	0	1 000
0	1 000	1 300

$$x_{11} = 3\,800$$

$$x_{13} = 1\,200$$

$$x_{21} = 1\,700$$

$$x_{23} = 1\,000$$

$$x_{32} = 1\,000$$

$$x_{33} = 1\,300$$

$$z = 173\,000$$

Vidíme, že rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou je 27 000, čo je vyše 16 %.

c)

3 200	0	1 800
0	1 000	1 700
2 300	0	0

$$x_{11} = 3\,200$$

$$x_{13} = 1\,800$$

$$x_{22} = 1\,000$$

$$x_{23} = 1\,700$$

$$x_{31} = 2\,300$$

$$z = 183\,400$$

Pri riešení rozsiahlych úloh v praxe (napr. každodenný rozvoz pečiva v okrese a pod.) schopnosť nájsť optimálne riešenie plánu rozvozu môže znamenať úspory prepravných nákladov, ale aj menšiu ekologickú záťaž, zlepšenie prejazdnosti komunikácií...

d)

1 500	0	3 500
2 700	0	0
1 300	1 000	0

$$x_{11} = 1\,500$$

$$x_{13} = 3\,500$$

$$x_{21} = 2\,700$$

$$x_{31} = 1\,300$$

$$x_{32} = 1\,000$$

$$z = 164\,400$$

Tab.6.3 : Prípustné riešenia príkladu

1.2.1 Určenie východiskového bázičného riešenia dopravnej úlohy

Obmedzujúce podmienky vytvárajú v dopravnej úlohe $(m+n)$ rovníc pre $(m.n)$ neznámych. Úloha je však navyše viazaná podmienkou vyváženosti kapacít a požiadaviek, čo znamená, že iba $(m + n - 1)$ rovníc je **lineárne nezávislých**.

Ak zvolíme rovnaký zásadný prístup ako v simplexovej metóde a položíme $(m.n) - (m+n-1)$ premenných rovných nule, môžeme zvyšných $(m+n-1)$ neznámych premenných dorátať.

Už vieme, že v prípade klasickej dopravnej úlohy tvorí množinu základných riešení celkom $(m+n-1)$ nenulových premenných. Ak sa pri hľadaní východiskových bázičných premenných nepodarí získať $(m+n-1)$ nenulových základných riešení, hovoríme, že riešenie je **degenerované** a to jedenkrát, dvakrát atď., podľa toho či do úplného bázičného riešenia chýba jedna, dve, ..., nenulové premenné.

Pre určenie východiskového riešenia je známych viac metód. Od najjednoduchších, poskytujúcich síce východiskové riešenie veľmi rýchlo, ale hodnota ÚF prislúchajúca takémuto riešeniu je úplne nezávislá na tvare matice sadzieb až po komplikované postupy, ktorými môžeme získať buď riešenia priamo optimálne alebo veľmi blízke optimu. Vtedy už nie je nutné realizovať ich zdĺhavé iteračné spresňovanie.

6. Distribučné problémy

Medzi základné metódy pre určovanie východiskového riešenia klasickej DÚ patria:

- I. Metóda severozápadného rohu,**
- II. Metóda indexová,**
- III. Metóda Vogelova aproximačná.**

I. Metóda severozápadného rohu (SZR)

Princíp metódy severozápadného rohu (SZR) spočíva v tom, že pri priradovaní hodnôt bázičných premenných ako prvú nenulovú premennú vždy určíme x_{11} (leží v „severozápadnom rohu“ tabuľky). Priradíme jej pritom maximálnu možnú hodnotu tak, aby sa buď vyčerpali kapacity 1.dodávateľa alebo naplnili požiadavky 1.odberateľa. Znamená to, že premenná x_{11} bude rovná menšej z hodnôt a_1 a b_1 ($x_{11} = \min(a_1, b_1)$). Týmto z bázičného riešenia vyradíme buď všetky premenné v prvom riadku alebo premenné v prvom stĺpci (ostatné budú rovné nule).

Prakticky: najskôr sme priradili hodnotu 5000 premennej $x_{11} = \min(5000, 5500)$ t.j. „obsadili“ sme políčko (1,1), čím sa vyčerpala kapacita 1.dodávateľa, tzn., premenné x_{12} a x_{13} musia byť nulové. Ďalej sme priradili hodnotu 500 premennej x_{21} (naplnila sa kapacita 1.odberateľa). Analogicky priradením hodnôt $x_{22} = 1000$ naplníme požiadavku 2. odberateľa, $x_{23} = 1200$ vyčerpajú sa kapacity 2.dodávateľa a $x_{33} = 2300$ naplní kapacity 3.dodávateľa aj požiadavku 3. odberateľa.

6. Distribučné problémy

Tým je určovanie východiskového riešenia ukončené a výsledné riešenie je v *tab.6.4*.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	¹⁵ 5 000	²² 0	¹¹ 0	5 000
D ₂	²⁰ 500	³⁰ 1 000	²⁶ 1 200	2 700
D ₃	¹⁸ 0	²⁶ 0	¹³ 2 300	2 300
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$$x_{11} = 5\,000$$

$$x_{21} = 500$$

$$x_{22} = 1\,000$$

$$x_{23} = 1\,200$$

$$x_{33} = 2\,300$$

$$z^{(0)} = 176\,100$$

Tab.6.4. Východiskové bázičné riešenie metódou severozápadného rohu.

Na záver vykonáme kontrolu, či je bázičné riešenie úplné (t.j. či nie je degenerované). Vidíme, že počet nenulových premenných (počet obsadených políčok tabuľky) $p=5$, čo sa rovná $(m+n-1)=(3+3-1)=5$.

Dostali sme tzv. **úplné (nedegenerované) východiskové bázičné riešenie**. Kvalita je však nejasná (jednotlivé hodnoty premenných boli určené bez ohľadu na veľkosť prepravných nákladov).

Východiskové riešenie SZR:

$$x_{11} = 5\,000, \quad x_{21} = 500, \quad x_{22} = 1\,000, \quad x_{23} = 1\,200, \quad x_{33} = 2\,300, \quad \mathbf{Z}^{(0)} = 176\,100$$

II. Metóda indexová (MI)

Snaha o odstránenie nevýhody SZR. Priradíme maximálne možné hodnoty premenným v poradí podľa veľkosti ich sadzieb, t.j. najlepšia sadzba pri MIN úlohe je predsa sadzba najmenšia.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	¹⁵ 1 500	²² 0	¹¹ 3 500	5 000
D ₂	²⁰ 1 700	³⁰ 1 000	²⁶ 0	2 700
D ₃	¹⁸ 2 300	²⁶ 0	¹³ 0	2 300
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$$x_{11} = 1\,500$$

$$x_{13} = 3\,500$$

$$x_{21} = 1\,700$$

$$x_{22} = 1\,000$$

$$x_{31} = 2\,300$$

$$z^{(0)} = 166\,400$$

$$i_1 \Rightarrow c_{13} = 11$$

$$i_4 \Rightarrow c_{31} = 18$$

$$i_{7,8} \Rightarrow c_{23} = 26$$

$$i_2 \Rightarrow c_{33} = 13$$

$$i_5 \Rightarrow c_{21} = 20$$

$$i_{7,8} \Rightarrow c_{32} = 26$$

$$i_3 \Rightarrow c_{11} = 15$$

$$i_6 \Rightarrow c_{12} = 22$$

$$i_9 \Rightarrow c_{22} = 30$$

Tab.6.5. Východiskové bázičné riešenie metódou indexovou.

Sadzby zoradíme od minimálnej sadzby, ktorej priradíme index „1“ ($i=1$) neklesajúco tak, že ďalším sadzbám v poradí sa už priradia indexy s postupne narastajúcimi poradovými číslami.

6. Distribučné problémy

Priradovanie potom prebieha analogicky ako v metóde SZ rohu, tzn. premennej s najnižšou sadzbou (najnižším indexom) priradíme maximálne možné množstvo tak, aby vyhovovalo obmedzujúcim podmienkam. V priradovaní pokračujeme dovtedy, pokiaľ nie sú naplnené kapacity všetkých dodávateľov a požiadavky všetkých odberateľov.

V zadanom príklade (tab.6.5) je minimálna sadzba $c_{13}=11$, ktorej priradíme index i_1 , ďalšia v poradí je sadzba $c_{33}=13$ s indexom i_2 atď. Pri vlastnom priradovaní potom ako prvú určíme premennú $x_{13}=3500$ (obmedzenie požiadavkou 3.odberateľa). Premenné x_{23} a x_{33} tým nadobudnú nulových hodnôt. Sazdbu s indexom i_2 nie je preto možné využiť a v priradovaní pokračujeme premennou x_{11} , ktorej priradíme hodnotu $x_{11}=1500$. V ďalšom poradí priradíme hodnoty $x_{31}=2300$, $x_{21}=1700$ a nakoniec $x_{22}=1600$.

Kontrolou tzv. **bázickosti riešenia** $(m+n-1)=p$ môžeme zistiť, že podobne ako v predchádzajúcom prípade je východiskové bázické riešenie úplné. Po uvedomení si, že sme uvedeným postupom boli nútení priradiť nenulovú hodnotu aj premennej s úplne najvyššou sadzbou ($c_{22}=30$) v celej matici sadieb C je pravdepodobné, že ani toto riešenie (aj keď je lepšie ako riešenie získané metódou SZR), tiež nebude ešte riešením optimálnym.

Východiskové riešenie MI:

$$x_{11} = 1\,500, \quad x_{13} = 3\,500, \quad x_{21} = 1\,700, \quad x_{22} = 1\,000, \quad x_{31} = 2\,300, \quad \mathbf{Z}^{(0)} = 166\,400$$

III. Vogelova aproximačná metóda (VAM)

Vychádza z myšlienky, že k najviac nežiaducej zmene hodnoty účelovej funkcie dochádza vtedy, keď sa nepodarí v riadku alebo stĺpci priradiť hodnotu premennej s minimálnou sadzbou a sme tak nútení vykonať priradenie aj tam, kde je rozdiel medzi minimálnou a najbližšou vyššou sadzbou veľký. Základná podstata algoritmu VAM - v každom riadku aj stĺpci najskôr určiť rozdiely medzi minimálnou a najbližšou vyššou sadzbou (pre úlohy typu MIN).

Ako prvú potom priradíme nenulovú hodnotu premennej s najnižšou sadzbou v takom riadku alebo stĺpci, kde je uvedený **rozdiel** (t.j. rozdiel medzi najnižšou a najbližšou vyššou sadzbou) **najväčší**. Tým vyradíme z riešenia hodnoty v jednom riadku alebo stĺpci.

Určené rozdiely opäť prehodnotíme a v priradovaní pokračujeme (vždy v riadku resp. stĺpci s najväčším rozdielom) až do naplnenia všetkých obmedzujúcich podmienok.

V tab.6.6 je najväčší rozdiel medzi sadzbami c_{21} a c_{23} v druhom riadku ($d=6$). Znamená to, že maximálnu možnú hodnotu musíme v 2.riadku priradiť premennej s minimálnou sadzbou a tou je x_{21} ($c_{21} = 20$), ktorá nadobudne hodnoty $x_{21}=2700$. Tým 2.riadok z riešenia vypadne (nehrozí, že budú musieť byť využité najväčšie sadzby $c_{22} = 30$ a $c_{23} = 26$). Okrem vyradenia 2. riadku nie je potrebné ostatné rozdiely prehodnocovať a preto sa priradí v 3.riadku ($d=5$) maximálna hodnota premennej s najnižšou sadzbou t.j. $x_{33} = 2300$.

6. Distribučné problémy

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a	
D ₁	¹⁵ 2 800	²² 1 000	¹¹ 1 200	5 000	<i>d = 4, 7</i>
D ₂	²⁰ 2 700	³⁰ 0	²⁶ 0	2 700	<i>d = 6</i>
D ₃	¹⁸ 0	²⁶ 0	¹³ 2 300	2 300	<i>d = 5</i>
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000	
	<i>d = 3</i>	<i>d = 4</i>	<i>d = 2</i>		

Tab.6.6. *Východiskové bázičné riešenie metódou Vogelovou.*

Rovnako pokračujeme ďalej a postupne priradíme hodnoty premenným $x_{13}=1200$ ($d=4$), $x_{11}=2800$ ($d=7$) a nakoniec $x_{12}=1000$.

Získaná hodnota účelovej funkcie $z=161\,100$ je zo všetkých doteraz získaných hodnôt ÚF najnižšia a je teda zrejmé, že uvedený postup VAM má svoj význam. Priradili sme premenným 5 nenulových hodnôt, čo znamená, že aj tu sme získali **úplné bázičné riešenie**.

Východiskové riešenie VAM:

$$x_{11} = 2\,800, \quad x_{12} = 1\,000, \quad x_{13} = 1\,200, \quad x_{21} = 2\,700, \quad x_{33} = 2\,300, \quad Z^{(0)} = 161\,100.$$

1.2.2 Kritérium optima a iteračné úpravy v tabuľke dopravnej úlohy

Podstata testovania optimálnosti východiskového (resp. aj vylepšeného) riešenia DÚ metódou potenciálov spočíva v určení prvkov tzv. **matice diferencií D**. Jej získanie je však podmienené poznaním prvkov tzv. **matice nepriamych sadzieb C***, pri určovaní ktorej je potrebné vyrátať tzv. **riadkové a stĺpcové čísla**, vychádzajúce zo zadanej matice sadzieb **C** (je už známa zo zadania).

Postup testovania optimálnosti riešenia:

Každému riadku priradíme jedno riadkové číslo (r_i) a každému stĺpcu jedno stĺpcové číslo (s_j). Určíme ich z podmienky, že pre každú premennú z báziického riešenia musí platiť:

Súčet riadkového a stĺpcového čísla sa rovná príslušnej sadzbe, t.j. ($r_i + s_j = c_{ij}$).

Nenulových premenných základného riešenia dopravnej úlohy je $(m+n-1)$ a hľadaných hodnôt r_i a s_j je $(m+n)$, z uvedenej podmienky získame $(m+n-1)$ rovníc pre $(m+n)$ neznámych. Znamená to, že jednu hodnotu riadkového alebo stĺpcového čísla musíme zvoliť (obvykle ju definujeme rovnú nule, TIP: najlepšie v riadku alebo stĺpci, kde je najviac báziických premenných) a ostatné riadkové a stĺpcové čísla zo sústavy $(m+n)$ rovníc dorátať.

Po určení príslúchajúcich riadkových a stĺpcových čísiel už maticu nepriamych sadzieb **C*** môžeme vytvoriť a to tak, že pre **všetky jej prvky** musí platiť:

6. Distribučné problémy

Hodnota nepriamej sadzby je rovná súčtu príslušného riadkového a stĺpcového čísla t.j.

$$c^*_{ij} = r_i + s_j, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Z rozdielu matice C pôvodných sadzieb a matice nepriamych sadzieb C^* určíme tzv. **maticu diferencií D** pre ktorú platí

$$D = C - C^*$$

ktorá je súčasne aj **kritériom optimálnosti riešenia**. Platí: ak všetky prvky d_{ij} matice D sú nezáporné ($d_{ij} \geq 0$) $\Rightarrow$ **zadané bázičné riešenie je už optimálne**.

Matica diferencií slúži súčasne aj ako kontrola správnosti riešenia, ale aj ako kritérium jeho jedinečnosti, t.j. toho, či existujú aj iné – tzv. **alternatívne - optimálne riešenia**.

Riešenie je správne, ak bázičným premenným x_{ij} prislúchajú práve nulové diferencie d_{ij} . Platí:

- **Riešenie je jediné optimálne**, ak je počet nulových diferencií (prvkov v matici diferencií) v matici rovnaký ako počet bázičných premenných ($m+n-1$).
- **Existuje aj ďalšie optimálne – alternatívne – riešenie**, ak je nulových diferencií v matici D viac, ako počet bázičných premenných ($m+n-1$). Znamená to, že je možné nájsť viac riešení s rovnakou hodnotou ÚF – a určíme ho tzv. presunom v cykle.

1.2.3 Iteračné úpravy v metóde potenciálov

Ak je v matici **D** jeden alebo viac prvkov záporných (pre MIN), je nutné hľadať nové riešenie (úpravou riešenia starého) tak, aby sa hodnota ÚF zmenila v požadovanom smere. Modifikáciu riešenia realizujeme tzv. **presunom v cykle**. Premennej, ktorej prislúchala v absolútnej hodnote najväčšia záporná diferencia, priradíme najväčšiu možnú hodnotu.

Presun v cykle musí pritom spĺňať dva základné požiadavky :

- **nesmú byť porušené obmedzujúce podmienky (musia zostať zachované riadkové aj stĺpcové súčty) a**
- **nesmie byť narušená bázickosť riešenia (jedna základná premenná sa novo vytvorí, iná zo základných premenných musí byť preto z riešenia vyradená - „vynulovaná“).**

Takto získané nové základné riešenie musíme znovu podrobiť testu optima (musíme určiť nové matice nepriamych sadzieb **C*** a matice diferencií **D**). Uvedený iteračný postup opakujeme až do splnenia testu optimálnosti riešenia.

Pokračovanie **Príkladu 2**: východiskové bázické riešenie získané metódou indexovou je uvedené v *tab.6.7*.

6. Distribučné problémy

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	¹⁵ 1 500	²² 0	¹¹ 3 500	5 000
D ₂	²⁰ 1 700	³⁰ 1 000	²⁶ 0	2 700
D ₃	¹⁸ 2 300	²⁶ 0	¹³ 0	2 300
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$$x_{11} = 1\,500$$

$$x_{13} = 3\,500$$

$$x_{21} = 1\,700$$

$$x_{22} = 1\,000$$

$$x_{31} = 2\,300$$

$$z^{(0)} = 166\,400$$

Tab.6.7.a. Východiskové bázičné riešenie dopravnej úlohy

Už vieme, že toto riešenie optimálne nie je, pretože aplikáciou VAM sme získali riešenie s nižšou hodnotou ÚF. Metódou potenciálov to aj preukážeme. K tomu sú však potrebné tzv. riadkové a stĺpcové čísla, ktoré dostaneme zo sústavy rovníc v tvare

$$r_1 + s_1 = 15 \quad r_2 + s_2 = 30 \quad r_3 + s_1 = 18$$

$$r_1 + s_3 = 11 \quad r_2 + s_1 = 20$$

Máme 6 premenných ale iba 5 rovníc. Preto ak zvolíme, napr. $s_1 = 0$ (v sústave rovníc sa vyskytuje trikrát), okamžite dostaneme $r_1 = 15$, $r_2 = 20$ a $r_3 = 18$. Z podmienky $r_1 + s_3 = 11$ určíme $s_3 = -4$ a z podmienky $r_2 + s_2 = 30$ vyplýva $s_2 = 10$.

6. Distribučné problémy

Teraz je už možné určiť maticu nepriamych sadziieb

$$\mathbf{C}^{*(0)} = \begin{bmatrix} r_1 + s_1, & r_1 + s_2, & r_1 + s_3 \\ r_2 + s_1, & r_2 + s_2, & r_2 + s_3 \\ r_3 + s_1, & r_3 + s_2, & r_3 + s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+0, & 15+10, & 15-4 \\ 20+0, & 20+10, & 20-4 \\ 18+0, & 18+10, & 18-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 11 \\ 20 & 30 & 16 \\ 18 & 28 & 14 \end{bmatrix}$$

a následne na to maticu diferencií

$$\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(0)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 15 & 11 \\ 20 & 30 & 16 \\ 18 & 28 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-3) & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Z výsledného tvaru matice diferencií $\mathbf{D}$ vyplýva, že riešenie :

- **je správne** (nulové diferencie na miestach bázických premenných), ale
- **nie je optimálne**, pretože v matici diferencií sú až tri záporné prvky.

Je preto potrebné vykonať úpravu riešenia (1.iteráciu) tak, že zvolíme novú bázickú premennú x_{12} (odpovedá jej „najzápornejšia“ diferencia **(-3)**). Nové bázické riešenie vytvoríme z riešenia aktuálneho vhodným **presunom v cykle**. Nájdenie vhodnej „cesty presunu“ je často náročné, ale nie nezvládnutelné. Objasníme si ho v skrátenej tabuľke úlohy (*tab.6.7.b*).

6. Distribučné problémy

1 500 { - }		3 500	5 000
1 700 { + }	1 000 { - }		2 700
2 300			2 300
5 500	1 000	3 500	

Tab.6.7.b.: Hľadanie cesty presunu v cykle pri 1. iterácii.

Na podfarbené políčko (1,2) je nutné presunúť maximálne možné množstvo tak, aby :

- zostali zachované riadkové a stĺpcové súčty a
- nenarušila sa bázickosť riešenia.

Je zrejmé, že ak premennú x_{12} chceme „novo vytvoriť“, k jej aktuálnej nulovej hodnote musíme niečo pripočítať (políčko označíme znamienkom $\{+\}$). Znamená to, že v 1.riadku, aj v 2. stĺpci musíme tú istú hodnotu od doterajších bázických premenných odpočítať. Zatiaľ musíme v 2. stĺpci, pretože tam je jediná nenulová premenná x_{22} . Označíme si políčko (2,2) znamienkom $\{-\}$.

6. Distribučné problémy

Zostáva však určiť o **akú presúvanú hodnotu v rámci riešenia pôjde**. Je logické, že to musí byť menšia hodnota z premenných x_{11} a x_{22} , od ktorých sa odpočítava tzn. $\min(x_{11}, x_{22}) = 1000$. Z pohľadu na východiskové bázické riešenie je zrejmé, že je to hodnota $x_{22} = 1000$, ktorú presunieme na políčko (1,2), odpočítame od premennej x_{11} a pripočítame k premennej x_{21} . Tým dostaneme nové bázické riešenie po 1. iterácii v tvare podľa tab.6.7.c. Z hodnoty jeho účelovej funkcie je zrejmé, že postup riešenia zvoleným presunom v cykle je správny. Je potrebné opäť určiť prostredníctvom riadkových a stĺpcových čísiel maticu nepriamych sadzieb **C*** a maticu diferencií **D**.

Tab.6.7.c. Bázické riešenie po 1. iterácii

		$s_1=15$	$s_2=22$	$s_3=11$	
	D O	O ₁	O ₂	O ₃	a
$r_1=0$	D ₁	15 500	22 1 000	11 3 500	5 000
$r_2=5$	D ₂	20 2 700	30 0	26 0	2 700
$r_3=3$	D ₃	18 2 300	26 0	13 0	2 300
	b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$x_{11} = 500$
 $x_{12} = 1\,000$
 $x_{13} = 3\,500$
 $x_{21} = 2\,700$
 $x_{31} = 2\,300$

 $z^{(0)} = 163\,900$

6. Distribučné problémy

Riadkové a stĺpcové čísla sú vedľa tabuľky a matica diferencií $\mathbf{D}^{(1)}$ bude v tvare:

$$\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(1)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 22 & 27 & 16 \\ 18 & 25 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & (-1) \end{bmatrix}.$$

Vidíme však, že riešenie ešte stále nie je optimálne ($D(3,3) = -1$) a že je možnosť jeho vylepšenia zaradením premennej x_{33} do bázy. Vhodný presun v cykle je v *tab.6.7.d*.

500	1 000	3 500	5 000
{ + }			{ - }
2 700			2 700
<u>2 300</u>			2 300
{ - }			{ + }
5 500	1 000	3 500	min

Tab.6.7.d. Hľadanie cesty presunu v cykle pri 2. iterácii

6. Distribučné problémy

Z uvedených podmienok vyplýva, že presunúť možno hodnotu premennej $x_{31} = 2300$, takže bázické riešenie po 2. iterácii bude v tvare podľa *tab.6.7.e*.

Tab.6.7.e. Riešenie po 2.iterácii

		$s_1=15$	$s_2=22$	$s_3=11$		
	O	O ₁	O ₂	O ₃	a	
$r_1=0$	D ₁	¹⁵ 2 800	²² 1 000	¹¹ 1 200	5 000	$x_{11} = 2\,800$ $x_{12} = 1\,000$ $x_{13} = 1\,200$
$r_2=5$	D ₂	²⁰ 2 700	³⁰ 0	²⁶ 0	2 700	$x_{21} = 2\,700$ $x_{33} = 2\,300$
$r_3=2$	D ₃	¹⁸ 0	²⁶ 0	¹³ 2 300	2 300	$z^{(0)} = 161\,100$
	b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\,000$	$\Rightarrow$ OPTIMUM

Riešenie opäť podrobíme testu optima a získame maticu diferencií $\mathbf{D}^{(2)}$ v tvare

$$\mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(2)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 27 & 16 \\ 17 & 24 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Distribučné problémy

Z hodnôt matice diferencií vidíme, že riešenie po 2.iterácii je už optimálne. Matica diferencií svojim tvarom odpovedá bázickému riešeniu a získané riešenie je jednoznačné.

Záver: porovnaním riešenia s východiskovým základným riešením podľa VAM vidíme, že VAM našla optimálne riešenie ihneď. To samozrejme nemusí platiť vždy, ale je možné tvrdiť, že východiskové riešenia získané VAM dávajú veľmi dobrý odhad riešenia, blízky optimu, takže jeho prípadné spresnenie vyžaduje minimum iteračných krokov.

1.3 Nevyrovnaná úloha a degenerované bázické riešenie

Doteraz sme riešili dopravné úlohy, ktoré boli **vyrovnané**, t.j. súčet kapacít všetkých dodávateľov sa rovnal súčtu požiadaviek všetkých odberateľov a súčasne sme dostali vždy úplné východiskové bázické riešenia.

1.3.1 Nevyrovnaný dopravný problém

Vyrovnané dopravné úlohy sa vyskytujú v praxi skôr výnimočne. V skutočnosti prevyšuje buď ponuka dodávateľov dopyt odberateľov alebo naopak ponuka dopytu nestačí. V takých prípadoch hovoríme o **dopravnej úlohe nevyrovnanej**.

6. Distribučné problémy

Odstránenie takejto, tzv. **nevyrovnanosti úlohy** je jednoduché. Nevyrovnanú úlohu prevedieme na úlohu vyrovnanú tým, že do riešenia zaradíme tzv. **fiktívneho činiteľa**, a to buď **fiktívneho dodávateľa** FD (požiadavky odberateľov sú vyššie ako kapacity dodávateľov) alebo **fiktívneho odberateľa** FO (kapacity dodávateľov sú vyššie ako požiadavky odberateľov). Prisúdime im práve také množstvo, ktoré úlohu vyrovná a priradíme im nulové hodnoty sadzieb. Úlohu riešime ďalej už ako úlohu vyrovnanú – t.j. **metódou potenciálov** - založenou na určení východiskového bázičného riešenia a testovaní jeho optimálnosti.

1.3.2 Degenerované riešenie dopravnej úlohy

Čo ak východiskové riešenie nemá požadovaný počet $(m+n-1)$ základných, t.j. nenulových premenných. Ak do „úplnosti riešenia“ chýba iba jedna hodnota, **priradíme jednej „vhodne“ zvolenej premennej, hodnotu „ ε “**, t.j. hodnota veľmi blízka nule ($\varepsilon \rightarrow 0$). Postupujeme ďalej štandardným spôsobom: premennú „ ε “ považujeme za premennú základnú. Ak chýbajú 2 a viac nenulových premenných, do východiskového riešenia priradíme viac hodnôt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Slovo „vhodne“ znamená, že hodnotu ε je žiaduce priradiť práve takej premennej (t.j. obsadiť ňou také políčko), aby sme **mohli vytvoriť cyklus presunu**, pretože hodnotu ε sa snažíme z riešenia vyradiť - snažíme sa získať úplné (nedegenerované) riešenie úlohy.

6. Distribučné problémy

Príklad 3: Majme dopravnú úlohu s 3 dodávateľmi a 5 odberateľmi, kapacity dodávateľov, požiadavky odberateľov a sadzby jednotkových nákladov na prepravu sú tab.6.8.a.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a
D ₁	7	5	8	5	4	80
D ₂	8	9	6	7	5	70
D ₃	11	10	9	7	5	50
b	50	100	30	90	30	300 200

Tab.6.8.a. Zadanie dopravnej úlohy

Úloha je nevyrovnaná, pretože súčet kapacít výrobcov je 200 a súčet požiadaviek odberateľov je 300. Pre vyrovnanie úlohy je nutné zaradiť *fiktívneho dodávateľa FD* (výrobcu), ktorému priradíme chýbajúcu kapacitu (100) a nulové sadzby (tab.6.8.b).

Ak pre takúto - už vyrovnanú dopravnú úlohu - hľadáme východiskové základné riešenie napr. indexovou metódou (**Platí: riadok fiktívneho výrobcu obsadzujeme až posledný**) zistíme, že sa podarilo priradiť iba 7 nenulových hodnôt premenných, zatiaľ čo úplné riešenie má mať $(5+4-1) = 8$. K vyriešeniu degenerácie priradíme premennej x_{35} hodnotu ε a budeme ju považovať za bázickú.

6. Distribučné problémy

Keď známym postupom určíme riadkové a stĺpcové čísla (sú uvedené vedľa tabuľky) a maticu nepriamych sadzieb C^* získame maticu diferencií D .

		$s_1 = 5$	$s_2 = 5$	$s_3 = 5$	$s_4 = 6$	$s_5 = 4$	
		O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a
$r_1 = 0$	D_1	⁷ 0	⁵ 50	⁸ 0	⁵ 0 $\{ + \}$	⁴ 30 $\{ - \}$	80
$r_2 = 1$	D_2	⁸ 0	⁹ 0	⁶ 30	⁷ 40 $\downarrow$	⁵ 0 $\uparrow$	70
$r_3 = 1$	D_3	¹¹ 0	¹⁰ 0	⁹ 0	⁷ 50 $\downarrow$ $\{ - \}$	⁵ ϵ $\uparrow$ $\{ + \}$	50+ϵ
$r_4 = -5$	FD	⁰ 50	⁰ 50	⁰ 0	⁰ 0	⁰ 0	100
	b	50	100	30	90	30+ϵ	$\Sigma=300$

$x_{12} = 50, \quad x_{15} = 30, \quad x_{23} = 30, \quad x_{24} = 40, \quad x_{34} = 50 \quad \mathbf{z}^{(0)} = 1\ 180$

Tab.6.8.b. Úprava na vyrovnanú úlohu a východiskové bázičné riešenie

6. Distribučné problémy

Pre východiskové bázičné riešenie bude mať matica diferencií $\mathbf{D}$ tvar

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sú v nej 2 záporné hodnoty, prednosť dáme skutočnej premennej x_{14} pred fiktívnou (x_{44}) a presunom v cykle cez x_{34} , x_{35} a x_{15} presunieme na pole (1,4) hodnotu 30. Riešenie je v *tab.6.8.c*.

		$s_1=5$	$s_2=5$	$s_3=4$	$s_4=5$	$s_5=3$	
		O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a
$r_1=0$	D ₁	7 0	5 50	8 0	5 30	4 0	80
$r_2=2$	D ₂	8 0	9 0	6 30	7 40	5 0	70
$r_3=2$	D ₃	11 0	10 0	9 0	7 20	5 30	50
$r_4=-5$	FD4	0 50	0 50	0 0	0 0	0 0	100
	b	50	100	30	90	30	Σ=300

6. Distribučné problémy

$$x_{12} = 50, x_{14} = 30, x_{23} = 30, x_{24} = 40, x_{34} = 20, x_{35} = 30 \quad \mathbf{Z^{(0)} = 1\ 150}$$

Tab.6.8.c Riešenie po prvej iterácii

Z hodnôt matice diferencií vyplýva, že :

$$\mathbf{D^{(1)}} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 2 \end{bmatrix}$$

- *riešenie je už optimálne,*
- *nie je však jednoznačné, pretože matica diferencií obsahuje viac núl, ako je členov bázičného riešenia (vid'. **0** (červeným písmom)).*

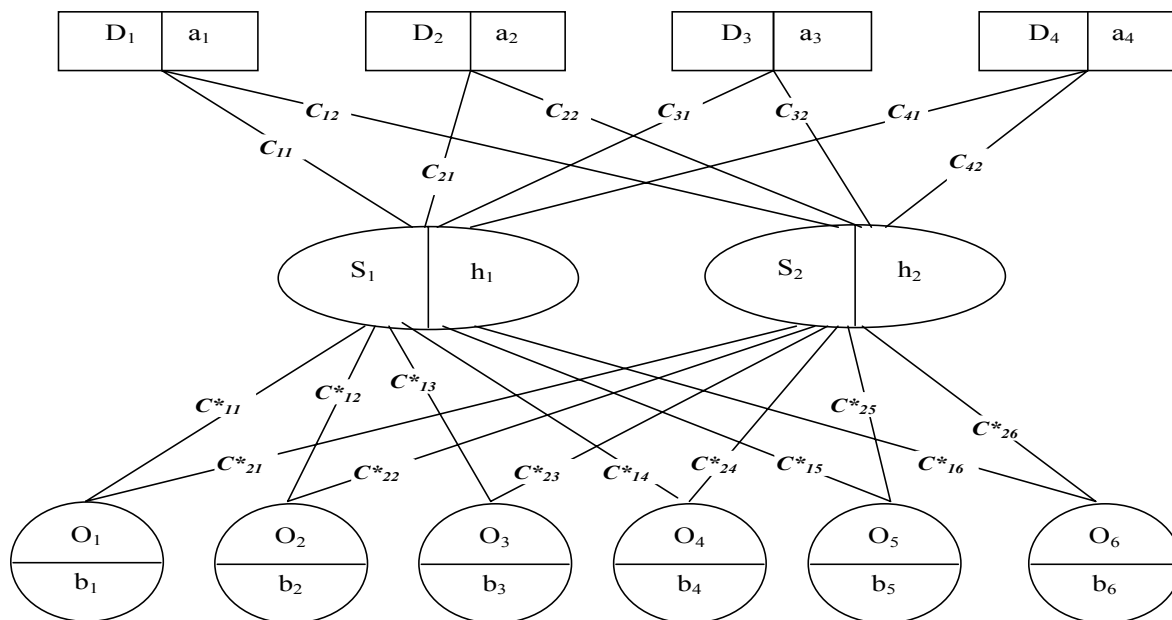
Napr. presun hodnoty 30 na políčko (2,5) presunom v cykle cez políčka (2,4) a (3,4)

(2, 4)	7	(2, 5)	5
40/10	← {-}	0/30	{+}
(3, 4)	7	(3, 5)	5
20/50	↓ {+}	30/0	{-}

je zrejmé, že hodnota ÚF sa nezmení, pretože presuny v stĺpcoch boli vykonané medzi premennými s rovnakou veľkosťou sadzby.

1.4 Viacrozmerná dopravná úloha

Reálnejší model rozvozu tovaru zvyčajne nesmeruje od dodávateľov (výrobcov) priamo ku koncovým odberateľom (spotrebiteľom), ale uskutočňuje sa tak, že sa tovar od dodávateľov naväža do skladov (napr. veľkoobchod) a až odtiaľ sa rozváža ku koncovým odberateľom (*obr.6.3*).



Obr.6.3. : Schéma dvojrozsmernej dopravnej úlohy

6. Distribučné problémy

Vzniká tak tzv. **dvojfázová (dvojrozmerná) dopravná úloha**. Ak úloha v oboch fázach distribúcie vyhovuje teoretickým požiadavkám, najmä podmienke vyrovnanosti, predpoklad, že výsledné náklady budú súčtom nákladov obidvoch čiastkových úloh a teda aj hľadané výsledné optimálne riešenie plánu rozvozu bude tvorené súčtom obidvoch čiastkových optimálnych riešení.

Takéto teoretické predpoklady sú v praktických aplikáciách splnené iba výnimočne. Najčastejšie sa vyskytuje situácia, že ***najmenšie sú požiadavky odberateľov, väčšie kapacity dodávateľov a najväčšie sú kapacity skladov.***

U takto definovaných „nevyrovaných viacstupňových úloh“ je vo väčšine prípadov možné nájsť také riešenia, ktorých výsledná hodnota ich účelovej funkcie bude nižšia, ako je súčet optimálnych hodnôt čiastkových úloh. Takéto riešenie je možné dosiahnuť iba vtedy, ak úlohu riešime ako jeden „viacstupňový“ distribučný problém.

6. Distribučné problémy

Príklad 4: Majme štyroch dodávateľov, tri sklady a päť koncových odberateľov, pričom údaje dopravného problému sú zadané v tab.6.9.a,b. Určte optimálne riešenie takto definovaného dopravného problému riešeného oddelene a ako jeden dvojstupňový problém.

D \ O	S ₁	S ₂	S ₃	a
D ₁	4	7	13	135
D ₂	6	9	14	40
D ₃	3	4	10	295
D ₄	4	6	11	65
h	180	180	180	540 535

Tab.6.9.a. Dvojmerná dopravná úloha -1. fáza (Dodávatelia – sklady)

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	h
S ₁	10	13	12	8	6	180
S ₂	7	16	10	5	3	180
S ₃	11	20	12	8	6	180
b	120	115	120	65	100	520 540

Tab.6.9.b. Dvojmerná dopravná úloha – 2.fáza (Sklady – odberatelia

6. Distribučné problémy

Je možné sa presvedčiť, že úloha je v oboch fázach nevyrovnaná.

Postup riešenia:

1. Nájdeme optimálne riešenia oboch čiastkových úloh oddelene, začneme pritom riešením druhej fázy. Následné riešenie 1.fázy hľadáme iba pre množstvá rovné súčtu kapacít dodávateľov.
2. Fázy spojíme do jednej viacstupňovej úlohy, pričom spájajúcim riadkom bude v tomto prípade riadok fiktívneho odberateľa.
3. Skontrolujeme podmienky optima. Tie sú definované širšie ako v jednostupňovej úlohe. Ak označíme riadkové a stĺpcové čísla 1.fázy (r_i, s_j) a druhej fázy (r^*_i, s^*_j), musia okrem základných podmienok pre jednotlivé prvky matíc diferencií ($d_{ij} \geq 0, d^*_{ij} \geq 0$) platiť aj dve **prídavné podmienky**. Tieto sú definované v tvare $r_i \leq 0$ pre všetky i a $s_j + s^*_j \leq 0$ pre všetky j . Podmienka rovnosti $r_i = 0$ platí pritom pre riadok, v ktorom je nenulová hodnota fiktívnej premennej (v stĺpci FS) a podmienka $s^*_j = -s_j$ pre stĺpce s nenulovou hodnotou v riadku fiktívneho odberateľa FO.
4. Ak východiskové riešenie podmienkam optima nevyhovuje, vykonáme presun v cykle ako v úlohe jednostupňovej, ale s tým rozdielom, že prechod cez riadok fiktívneho odberateľa budeme považovať za jeden z vrcholov cyklu pri presune.

Podľa uvedeného postupu určené optimálne riešenie 2.fázy je v tabuľke *tab.6.10.a* a optimálne riešenie 1.fázy v *tab.6.10.b*.

6. Distribučné problémy

Prvá fáza bola riešená iba pre kapacity rovné súčtu kapacít dodávateľov a tabuľka druhej fázy úlohy je (z praktických dôvodov, aby bolo možné obidve tabuľky spojiť do jednej) otočená o 90°.

Tab.6.10.a. Čiastkové optimálne riešenie 2.fázy

O \ D	S ₁	S ₂	S ₃	b
O ₁	¹⁰ -	⁷ 120	¹¹ -	120
O ₂	¹⁹ 55	¹⁶ 60	²⁰ -	115
O ₃	¹² 105	¹⁰ -	¹² 15	120
O ₄	⁸ -	⁵ -	⁸ 65	65
O ₅	⁶ -	³ -	⁶ 100	100
FO	⁰ 20	⁰ -	⁰ -	20
h	180	180	180	540 540

$$z_2^{(0)} = 5\,405$$

6. Distribučné problémy

Tab.6.10.b. Čiastkové optimálne riešenie 1. fázy.

D \ S	S ₁	S ₂	S ₃	FS	a
D ₁	4 135	7	13	0	135
D ₂	6 25	9	14	0 15	40
D ₃	3 ε	4 180	10 115	0	295
D ₄	4	6	11 65	0	65
h	160	180	180	15	535 535

Obidve úlohy - riešené každá samostatne - dávajú celkovú hodnotu účelovej funkcie, ktorú dostaneme ako súčet účelových funkcií oboch čiastkových optimálnych riešení a platí

$$\mathbf{z}_{1s}^{(0)} = \mathbf{z}_1^{(0)} + \mathbf{z}_2^{(0)} = 3\,275 + 5\,405 = 8\,680.$$

Ak by sme obidve úlohy spojili do jedinej tabuľky, dostaneme východiskové riešenie uvedené v *tab.6.11.a*.

Tab.6.11.a : Dvojrozmerná dopravná úloha – východiskové riešenie.

	$s_1 = 6$	$s_2 = 7$	$s_3 = 13$	FS	a	
	S ₁	S ₂	S ₃			
D ₁	4 135	7	13	0	135	$r_1 = -2$
D ₂	6 25	9	14	0 15	40	$r_2 = 0$
D ₃	3 ϵ { + }	4 180	10 115 { - }	0	295	$r_3 = -3$
D ₄	4 ↓ { ↓ }	6 ↑	11 65	0	65	$r_4 = -2$
FO	0 20 { ↓ }	0	0 { + }		b	
O ₁	10 ↓ { + }	7 120	11 ↑		120	$r_1^* = 16$
O ₂	19 55	16 60	20		115	$r_2^* = 25$
O ₃	12 105 { + }	10	12 15 { - }		120	$r_3^* = 18$
O ₄	8 ↓ →	5 ↑	8 65		65	$r_4^* = 14$
O ₅	6	3	6 100		100	$r_5^* = 12$
h	180	180	180			
	$s_1^* = -6$	$s_2^* = -9$	$s_3^* = -6$			

$z_1^{(0)} = 3275$

$z_2^{(0)} = 5405$

$z^{(0)} = 8680$

S určovaním riadkových a stĺpcových čísiel sme začali v druhom riadku (s fiktívnou premennou $x_{24}=15$), v ktorom zvolíme $r_2=0$. Ostatné hodnoty dourčíme bežným postupom.

Pri kontrole optima zistíme, že riešenie v 3.stĺpci nevyhovuje podmienke $s_3 + s_3^* \leq 0$. V skutočnosti $13 - 6 = 7 > 0$ a preto je potrebné v 3. stĺpci na políčko v riadku fiktívneho odberateľa presunúť v cykle najväčšie možné množstvo (tým je podľa naznačeného cyklu hodnota **15**). Riešenie úlohy po vykonaní naznačeného presunu v rámci prvej iterácie spresňovania riešenia je uvedené v tab.6.11.b.

Tab.6.11.b. Dvojmerná dopravná úloha – riešenie po 1.iterácii

	$s_1 = 6$	$s_2 = 7$	$s_3 = 13$			
	S_1	S_2	S_3	FS	a	
D_1	4 135	7	13	0	135	$r_1 = -2$
D_2	6 25	9	14	0	40	$r_2 = 0$
D_3	3 15 {+}	4 180	10 100 {-}	0	295	$r_3 = -3$
D_4	4 ↓	6 ↑	11 65	0	65	$r_4 = -2$
FO	0 ↓ {-}	0	0 15 {+}		b	
O_1	10 ↓	7 120 ↑	11		120	$r_1^* = 16$
O_2	19 55 ↓	16 60	20		115	$r_2^* = 25$
O_3	12 120 ↓	10	12		120	$r_3^* = 18$
O_4	8 ↓ {+}	5 ↑	8 65 {-}		65	$r_4^* = 21$
O_5	6 ↓	3	6 100		100	$r_5^* = 19$
h	180	180	180			
	$s_1^* = -6$	$s_2^* = -9$	$s_3^* = -13$			

$z_1^{(1)} = 3170$

$z_2^{(1)} = 5405$

$z^{(1)} = 8575$

Pri kontrole optima zistíme, že podmienkam optima nevyhovuje už matica diferencií D^* , pretože diferencie d_{41}^* , d_{42}^* , d_{51}^* , d_{52}^* sú rovné hodnote -7 . Presun môžeme vykonať na ktorékoľvek z uvedených políčok. Zvolíme napr. políčko $(4,1)^*$ a hodnota, ktorú budeme presúvať bude rovná 5.

Po vykonaní naznačeného presunu je nové riešenie po 2. iterácii uvedené v tab.6.11.c

Tab.6.11.c. Dvojrozmerná dopravná úloha - riešenie po 2.iterácii - OPTIMUM

	$s_1 = 6$	$s_2 = 7$	$s_3 = 13$			
	S ₁	S ₂	S ₃	FS	a	
D ₁	4 135	7	13	0	135	$r_1 = -2$
D ₂	6 25	9	14	0 15	40	$r_2 = 0$
D ₃	3 20	4 180	10 95	0	295	$r_3 = -3$
D ₄	4	6	11 65	0	65	$r_4 = -2$
FO	0	0	0 20		b	
O ₁	10	7 120	11		120	$r_1^* = 23$
O ₂	19 55	16 60	20		115	$r_2^* = 32$
O ₃	12 120	10	12		120	$r_3^* = 25$
O ₄	8 5	5	8 60		65	$r_4^* = 21$
O ₅	6	3	6 100		100	$r_5^* = 19$
h	180	180	180			
	$s_1^* = -13$	$s_2^* = -16$	$s_3^* = -13$			

$$z_1^{(2)} = 3\ 135$$

$$z_2^{(2)} = 5\ 405$$

$$z^{(2)} = 8\ 540$$

Po určení riadkových a stĺpcových čísiel r_i , s_j a r_i^* , s_j^* a po kontrole optima zistíme, že získané riešenie už **všetkým štyrom podmienkam optima vyhovuje** a preto hľadané optimálne riešenie pre viacstupňovú úlohu má tvar

$$x_{11}=135 \quad x_{21}=25 \quad x_{31}=20 \quad x_{32}=180 \quad x_{33}=95 \quad x_{43}=65 \quad z_1=3\ 135$$

$$x_{12}^*=120 \quad x_{21}^*=55 \quad x_{22}^*=60 \quad x_{31}^*=120 \quad x_{41}^*=5 \quad x_{43}^*=60 \quad x_{53}^*=100 \quad z_2=5\ 405,$$

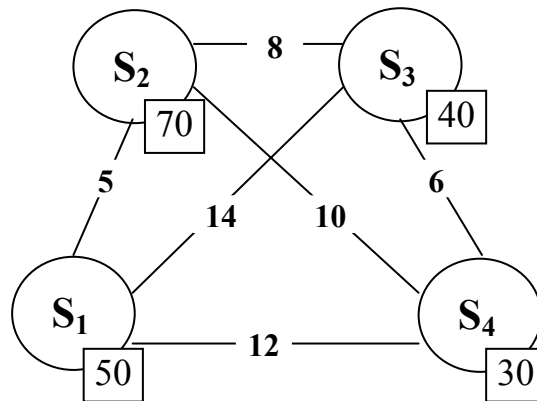
čo dáva výslednú hodnotu účelovej funkcie $z_{2s}^{(2)} = z_1^{(2)} + z_2^{(2)} = 8\ 540$.

Je možné sa presvedčiť, že proti pôvodnej hodnote účelovej funkcie $z_{1s}=8\ 680$, získanej ako súčet optimálnych riešení dvoch jednostupňových úloh, sa hodnota účelovej funkcie úlohy viacstupňovej $z_{2s}=8\ 540$, znížila celkovo o 140 jednotiek.

1.5 Optimálne rozmiestňovanie zdrojov

Jednoduchou aplikáciou čiastočne modifikovaného dopravného problému s pomerne širokým uplatnením je úloha optimálneho rozmiestňovania zdrojov – tzv. **alokačná úloha**.

Príklad 5: Firma má za úlohu zabezpečiť 4 stavby dodávkami betónu. Stavby sú rozmiestnené podľa obr. 6.4., v ktorom sú uvedené tiež vzájomné vzdialenosti medzi stavbami a požiadavky jednotlivých stavieb na dodávky betónu. Úlohou je navrhnúť, na ktorých dvoch stavbách je najvýhodnejšie vybudovať betonárky a s akými kapacitami tak, aby súčet najazdených $\text{m}^3 \cdot \text{km}$ bol minimálny.



Obr.6.4 Schéma rozmiestnenia stavieb

6. Distribučné problémy

Riešenie:

Ak pre zadanú úlohu budeme považovať za sadzby vzdialenosti stavieb, potom účelovú funkciu môžeme vytvoriť ako súčet súčinov prevezených množstiev a najazdených vzdialeností ($\text{m}^3 \cdot \text{km}$), úloha bude mať taký istý formálny tvar (matica sadzieb, vektor požiadaviek, vektor kapacít, účelová funkcia) ako klasická dopravná úloha.

Možností, ako umiestniť na 4 stavby 2 betonárky (kombinácií), je celkom

$$\binom{4}{2} = 6.$$

To v podstate znamená, potrebu vytvoriť 6 čiastkových dopravných úloh, u každej z nich určiť optimálne riešenie a zo všetkých možných variantov vybrať ten, ktorého hodnota účelovej funkcie je najmenšia. Všetky varianty budú mať pritom rovnaký vektor požiadaviek, vektor kapacít budeme však musieť pre každú úlohu tvoriť samostatne.

Spôsob riešenia objasníme na riešení prvého možného variantu (umiestnenie výrobní betónu na stavbách S_1 a S_2) podľa *tab.6.12.a*. Ostatné varianty sú v prehľade usporiadané v *tab.6.12.b*.

6. Distribučné problémy

Tab.6.12.a. Prvý variant umiestnenia zdrojov

Variant		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	a	Riešenie
1 (S ₁ , S ₂)	z ₁	0 60	5 -	14 -	12 -	60	x ₁₁ =60, x ₂₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30
	z ₂	5 -	0 70	8 40	10 30	140	
	b	60	70	40	30	200	Z₁=620

Do matice sadzieb zapíšeme v 1.riadku vzdialenosti medzi stavbou S₁ a všetkými ostatnými, v 2.riadku medzi stavbou S₂ a všetkými ostatnými. Druhým krokom je vytvorenie jeho optimálnej podoby pre riešený variant. Napr. podľa zásad indexovej metódy priradujeme maximálne možné množstvá premenným podľa veľkosti ich sadzieb. V prvom rade to budú premenné x_{11} a x_{22} ($c_{11} = c_{22} = 0$), ktorým priradíme hodnoty požiadaviek b_1 a b_2 (t.j. stavieb S₁ a S₂) a pokračujeme v 3. a 4. stĺpci, priradením požiadaviek b_3 a b_4 premenným x_{23} a x_{24} (majú minimálne sadzby).

K doriešeniu úlohy zostáva dourčiť celkové kapacity oboch zdrojov (súčet v riadku), napr. kvôli posúdeniu kapacitných možností vytvárajúcej betonárky. Získané riešenie je z pohľadu kritérií klasických DÚ degenerované (t.j. nenulových má byť $m+n-1=5$ premenných), ale výhodnejšie riešenie už nájsť nedokážeme. Znamenalo by to iba v cykle neefektívne presúvanie „ε“ a hľadanie

6. Distribučné problémy

jeho správneho umiestnenia). Je možné sa o tom presvedčiť tak, že do jedného políčka tabuľky priradíme hodnotu ε a štandardne napr. metódou potenciálov optimálnosť riešenia preveríme.

Tab.6.12.b. Zostávajúce varianty rozmiestnenia betonárok

Variant		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	a	Riešenie
2 (S ₁ , S ₃)	z ₁	0 60	5 70	14 -	12 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30 Z₂=530
	z ₂	14 -	8 -	0 40	6 30	70	
3 (S ₁ , S ₄)	z ₁	0 60	5 70	14 -	12 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30 Z₃=590
	z ₂	12 -	10 -	6 40	0 30	70	
4 (S ₂ , S ₃)	z ₁	5 60	0 70	8 -	10 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30 Z₄=480
	z ₂	14 -	8 -	0 40	6 30	70	
5 (S ₂ , S ₄)	z ₁	5 60	0 70	8 -	10 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30 Z₅=540
	z ₂	12 -	10 -	6 40	0 30	70	

6. Distribučné problémy

6 (S ₃ , S ₄)	z ₁	14 -	8 70	0 40	6 -	110	x ₁₂ =70, x ₁₃ =40, x ₂₁ =60, x ₂₄ =30
	z ₂	12 60	10 -	6 -	0 30	140	
	b	60	70	40	30	200	Z₆=1280

Z tabuliek všetkých variantov vyplýva, že najvýhodnejšie (optimálne) rozmiestnenie výrobní (betonárok) bude na stavbách **S₂ a S₃ (variant 4)** s kapacitami betonárok 130 a 70, pri ktorých účelová funkcia nadobúda hodnotu **z = 480**. Naopak najhorší je variant 6 (stavby S₃ a S₄), kde účelová funkcia má hodnotu až z=1280. Tu vidíme, aké úspory / zvýšenie nákladov na dopravu môže priniesť kvalifikované / nekvalifikované rozhodnutie.

1.6 Záverečné poznámky k riešeniu dopravných problémov

Ak napr. zo zadania úlohy vyplynie, že pri nevyrovnanej úlohe je potrebné prednostne zásobovať určitých odberateľov príp. prednostne využiť kapacity vopred definovaných dodávateľov, obvykle to môžeme realizovať jednoduchou úpravou matice sadzieb (napr. doplnenie sadzby $M \rightarrow \infty$). Podobne je možné tzv. **prohibítnymi sadzbami** zabezpečiť, že k definovaným odberateľom (napr. definovaný medzisklad) bude navázaný až posledný zvyšok tovaru, až po uspokojení všetkých ostatných požiadaviek.

6. Distribučné problémy

Všetky doteraz uvedené postupy určovania východiskového bázičkého riešenia, ako aj celý postup metódy potenciálov pri testovaní optimálnosti riešenia, boli formulované iba pre *minimalizáciu účelovej funkcie*. Niekedy je však rozhodovací problém, formálne zadaný rovnakým matematickým modelom ako dopravná úloha, potrebné *maximalizovať*.

Možnosti riešenia dopravnej úlohy ako úlohy typu MAX:

- **Vynásobenie matice sadzieb hodnotou (-1)** – najjednoduchší spôsob prevodu dopravnej úlohy typu MIN na typ MAX. Potom problém riešime štandardne ako minimalizačný, ale pri interpretácii výsledkov je nutné vychádzať z pôvodnej matice sadzieb.
- **Zmeniť kritérium optima** - analogicky ako u simplexového algoritmu. Ak u hodnoty účelovej funkcie úlohy typu MIN bolo kritériom optima dosiahnutie nezáporných hodnôt u všetkých prvkov matice diferencií **D**, kritériom u typu MAX zrejme bude, aby všetky prvky matice diferencií **D** boli nekladné. Takisto môžeme analogicky obrátiť i postup vytvárania východiskových bázičkových riešení metódou indexovou, príp. VAM, u ktorej zrejme budeme najskôr obsadzovať premenné s maximálnou sadzbou v riadku alebo stĺpci, kde je rozdiel medzi maximálnou sadzbou a sadzbou najbližšou nižšou najväčší.

6. Distribučné problémy

Príklad 6: Majme dopravnú úlohu s 3 dodávateľmi a 3 odberateľmi, kapacity dodávateľov, požiadavky odberateľov a sadzby jednotkového zisku z realizácie prepravy 1 ks výrobku sú v tab.6.13. Nájdite také riešenie, ktoré zabezpečí pre špedičnú firmu maximálny zisk.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	15	22	11	5 000
D ₂	20	30	26	2 700
D ₃	18	26	13	2 300
b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\,000$

Tab.6.13. Zadanie dopravnej úlohy.

Riešenie:

Východiskové bázičné riešenie určíme pre zmenu Vogelovou aproximačnou metódou (tab.6.13a).

6. Distribučné problémy

Tab.6.13 a: Dopravná úloha ako problém maxima.

$$s_1=15 \quad s_2=23 \quad s_3=11$$

D \ O		O ₁	O ₂	O ₃	a
$r_1=0$	D ₁	15 4 200	22 -	11 800	5 000
$r_2=15$	D ₂	20 -	30 -	26 2700	2 700
$r_3=3$	D ₃	18 1 300	26 1 000	13 -	2 300
b		5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$$x_{11} = 4\,200$$

$$x_{13} = 800$$

$$x_{23} = 2\,700$$

$$x_{31} = 1\,300$$

$$x_{32} = 1\,000$$

$$z^{(0)} = 191\,400 \text{ (MAX)}$$

Matica diferencií bude v tvare

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 23 & 11 \\ 30 & 38 & 26 \\ 18 & 26 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čo znamená, že východiskové riešenie získané pomocou VAM je hneď optimálne.

2. Prirad'ovacia úloha

Cieľom prednášky je pochopiť podstatu a matematický model prirad'ovacej úlohy, naučiť sa prirad'ovací problém typu MIN, ako aj typu MAX riešiť a správne interpretovať získané výsledky v procese rozhodovania.

Prirad'ovacia úloha je ďalšou zo špecifických typov ÚLP. Účelom jej riešenia je optimálne priradenie (rozmiestnenie) určeného počtu **objektov priradenia O** na rovnaký počet **miest určenia M** tak, aby *účelová funkcia nadobudla minimálnu alebo maximálnu hodnotu*. Ohodnotením všetkých možných priradení je aj v tomto prípade **matica sadzieb**.

Prirad'ovací problém = úloha, v ktorej sa jedná o nájdenie vzájomne jednoznačného priradenia dvojice „určitých jednotiek“ z dvoch odlišných skupín tak, aby toto priradenie prinieslo čo najvyšší efekt. V prirad'ovacej úlohe sú teda štandardne definované dve skupiny „jednotiek“, u ktorých môžeme predpokladať, že majú rovnaký počet prvkov (a pokiaľ aj nemajú, *je možné podobne ako u dopravnej úlohy, jednu zo skupín „fiktívnymi“ jednotkami doplniť*). Ohodnotenie každej možnosti priradenia pre každú dvojicu jednotiek je určené opäť cenovým koeficientom (sadzbou, ocenením) c_{ij} .

6. Distribučné problémy

Cieľ riešenia: rozhodnutie, či i -ta jednotka z prvej skupiny **bude** alebo **nebude priradená** j -tej jednotke zo skupiny druhej.

Podľa takejto úvahy sa ako výhodné javí zaviesť do matematického modelu premenné x_{ij} , pre všetky $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$, ktoré **môžu nadobúdať iba dve hodnoty** a to:

- **hodnotu 1** - ak i -ta jednotka z prvej skupiny **bude priradená** j -tej jednotke zo skupiny druhej,
- **hodnotu 0** - ak i -ta jednotka z prvej skupiny **nebude priradená** j -tej jednotke zo skupiny druhej.

Takéto „dvojhodnotové“ premenné obvykle nazývame **bivalentné premenné** (často aj binárne, resp. 0–1 premenné). Napríklad, môže sa jednať o *optimálne priradenie strojov na pracovisko, pracovníkov ku stroju, zákazníkov k poskytovateľom služieb a pod.*, za predpokladu, že práve jeden činiteľ 1. druhu bude priradený práve jednému činiteľovi 2. druhu.

Priradovací problém možno chápať ako špecifický prípad dopravnej úlohy kedy platí:

- *počet dodávateľov je rovný počtu spotrebiteľov* (t.j. matica sadzieb je štvorcová, rádu n),
- *kapacity všetkých dodávateľov a požiadavky všetkých spotrebiteľov pritom predstavuje rovnaká hodnota* (tzn. je možno vyjadriť, že v pomere sú všetky rovné jednej).
- *vždy hľadáme iba celočíselné riešenie.*

6. Distribučné problémy

Príklad 7: Autopožičovňa dostala objednávky na zapožičanie vozidiel s luxusným vybavením od troch zákazníkov. K dispozícii má práve tri vozidlá požadovanej kategórie, avšak každé je umiestnené v inej filiálke alokovanej v rôznych častiach regiónu. Vozidlá majú byť zákazníkom pristavené pred dom a za túto zvláštnu službu firma účtuje iba paušálny poplatok. Dispečer firmy zistil vzdialenosti medzi sídlom každého zákazníka a každej filiálky (Tab.6.14). Úloha pre dispečera: z ktorej filiálky pristaviť auto zadanému zákazníkovi tak, aby priradenie znamenalo čo najnižšie náklady pre firmu (t.j. aby bolo pri presune vozidiel na miesto určenia prejdených čo najmenej „neplatených“ kilometrov).

Vzdialenosti v km	Zákazník 1	Zákazník 2	Zákazník 3
Filiálka 1	28	8	36
Filiálka 2	24	28	12
Filiálka 3	44	20	27

Tab. 6.14 Vzdialenosti zákazníkov a filiálok firmy (cij)

Riešenie:

Prirad'ovacia úloha je v podstate iba špeciálnym prípadom úlohy dopravnej, kedy platí: **počet zdrojov aj zákazníkov je rovnaký a požiadavky každého zákazníka a zároveň kapacity každého zdroja sú rovné jednej (tzn. všetci majú rovnaké požiadavky aj kapacity).**

6. Distribučné problémy

Zo zadania úlohy súčasne vyplýva, že **požiadavky zákazníkov nie je možné deliť**, t.j. napríklad splniť požiadavky určitého zákazníka tak, že mu splníme jednu časť jeho požiadavky z jedného zdroja a ďalšiu časť zo zdroja iného. Znamená to, že nás nezaujíma akú časť požiadaviek zákazníka splníme z daného zdroja, ale iba to, či budeme jeho požiadavku z daného zdroja plniť alebo nie – t.j. **priradíme jeden celý zdroj k jednému celému požiadavku**.

1. Neriaditeľné vstupy (koeficienty úlohy)

Pre každú dvojicu zdroj - zákazník máme iba dve možnosti: **Buď bude zákazník z tohto zdroja vybavený** (dostane z danej filiálky auto) alebo **vybavený nebude** (auto dostane odinakiaľ). Na základe toho môžeme zdefinovať premenné x_{ij} pre model úlohy.

2. Definovanie premenných (riaditeľné vstupy)

Otázka: **Z ktorej filiálky pôjde auto k danému zákazníkovi.**

Takáto formulácia by sa ťažko vyjadrovala vo forme premenných a preto sa ju pokúsime vyjadriť trochu inak: **Musíme rozhodnúť, či určitá filiálka pristaví vozidlo určitému zákazníkovi alebo nie**. Pokiaľ budeme takúto informáciu poznať pre všetky možnosti priradenia filiálky a zákazníka, úloha je vyriešená.

6. Distribučné problémy

Pre každé možné priradenie jednej filiálky (t.j. konkrétneho automobilu) a jedného zákazníka definujeme vždy jednu premennú, ktorá bude vyjadrovať iba **dve možnosti**, ktoré môžu nastať a to:

- **priradenie sa uskutoční (hodnota premennej = 1)** alebo
- **priradenie sa neuskutoční (hodnota premennej = 0).**

V úlohe existuje celkom $3 \times 3 = 9$ možných variantov priradenia vozidiel a zákazníkov.

Preto bude v modeli definovaných celkom 9 premenných x_{ij} s nasledovným významom:

- $x_{ij} = 1$ auto z i -tej filiálky **pristavíme** k j -temu zákazníkovi;
 - $x_{ij} = 0$ auto z i -tej filiálky **nepristavíme** k j -temu zákazníkovi;
- pre $i = 1, 2, 3$ (filiálky) a $j = 1, 2, 3$ (zákazníci).

Z hľadiska typu použitých premenných sa jedná o **celočíselné premenné** (nesmú nadobúdať iné ako celočíselné hodnoty) a v tomto prípade hovoríme o tzv. **bivalentnej** (dvojhodnotovej, nula - jednotkovej) **celočíselnej premennej**.

3. Účelová funkcia (kritérium)

Cieľom autopožičovne je minimalizácia celkového počtu prejdených (neplatených – iba paušál) kilometrov pri pristavovaní vozidiel k zákazníkovi. **Účelová funkcia** modelu preto musí najazdené kilometre vyjadrovať a platí:

6. Distribučné problémy

Celkom najazdené kilometre = súčet najazdených kilometrov na jednotlivých trasách,
a kde platí, že:

*najazdené kilometre na jednej trase = dĺžka tejto trasy * rozhodnutie, či bude trasa využitá alebo nebude (formou bivalentnej (0 – 1) rozhodovacej premennej).*

Napr. ak priradíme auto z *Filiálky 1* napr. *Zákazníkovi 3*, bude $x_{13} = 1$ a teda najazdené kilometre budú: $36 * x_{13} = 36 * 1 = 36$.

Napr. ak auto z *Filiálky 1* *Zákazníkovi 3* nepriradíme, bude $x_{13} = 0$, a teda najazdené kilometre budú $36 * x_{13} = 36 * 0 = 0$.

Účelovú funkciu z vyjadrujúcu celkom najazdené kilometre môžeme zapísať v tvare:

$$z = 28 x_{11} + 8 x_{12} + 36 x_{13} + 24 x_{21} + 28 x_{22} + 12 x_{23} + 44 x_{31} + 20 x_{32} + 27 x_{33} \quad (7.1)$$

Funkčnú hodnotu takejto funkcie budeme pri riešení takto zadaného modelu **minimalizovať**.

4. Obmedzujúce podmienky

Zo zadania vyplýva, že pri pristavovaní automobilu musíme dodržať, aby:

- a) každý zákazník dostal aspoň jedno vozidlo;**
- b) každá filiálka môže poskytnúť najviac jedno vozidlo.**

Takéto obmedzenia sformulujeme v podobe nasledovných *obmedzujúcich podmienok*:

6. Distribučné problémy

4.1 Splnenie požiadavku zákazníkov

Každý zákazník dostane aspoň jedno vozidlo, t.j. aspoň z jednej filiálky musí byť automobil zákazníkovi priradený. Znamená to, že aspoň jedna z premenných x_{ij} musí byť pre daného j -teho zákazníka rovná jednej. To musí platiť pre všetkých zákazníkov a preto:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 1 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 1 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 1\end{aligned}\tag{7.2}$$

4.2 Neprekročenie kapacít filiálok

Každá filiálka môže poskytnúť najviac jedno vozidlo, t.j. z jednej filiálky môže byť priradený automobil najviac jednému zákazníkovi. Znamená to, že najviac jedna z premenných x_{ij} môže byť pre danú i -tu filiálku rovná jednej. Táto skutočnosť musí platiť pre všetky filiálky a preto platí:

$$\begin{aligned}x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} &\leq 1 \\x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} &\leq 1 \\x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} &\leq 1\end{aligned}\tag{7.3}$$

4.3 Obligátne podmienky

Premenné definované v modeli môžu nadobúdať iba 2 hodnoty - **0 alebo 1** a preto platí:

$$x_{ij} \in \{0 ; 1\}, \text{ pre } i = 1,2,3; j = 1,2,3\tag{7.4}$$

5. Výsledný lineárny matematický model úlohy

minimalizovať

$$z = 28.x_{11} + 8.x_{12} + 36.x_{13} + 24.x_{21} + 28.x_{22} + 12.x_{23} + 44.x_{31} + 20.x_{32} + 27.x_{33} \rightarrow \text{MIN} \quad (7.1)$$

za obmedzujúcich podmienok

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 1 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, \text{ pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \quad (7.4)$$

Skutočnosť, že každý zákazník musí dostať **aspoň jedno** vozidlo, je možné v prípade jednoznačného priradenia chápať aj tak, že každý zákazník musí dostať **práve jedno** vozidlo. Podobne, každá filiálka môže poskytnúť **najviac jedno** vozidlo (vozidiel je presne toľko ako zákazníkov), t.j. každá filiálka musí poskytnúť **práve jedno** vozidlo.

6. Distribučné problémy

2.1 Matematický model prirad'ovacieho problému

Ak znázorníme prirad'ováciu úlohu vo forme tabuľky (tab.6.15) vidíme, že formálne vyzerá rovnako ako tabuľka úlohy dopravnej, model má však zásadné odlišnosti.

Tab.6.15. Tabuľka prirad'ovacej úlohy.

O	M	M_1	M_2	M_3		M_n	a
O_1		c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}		c_{1n} x_{1n}	1
O_2		c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}		c_{2n} x_{2n}	1
O_3		c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}		c_{3n} x_{3n}	1
:							:
O_n		c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	c_{n3} x_{n3}		c_{nn} x_{nn}	1
b		1	1	1		1	$\Sigma = n$

Vyplýva: premenná x_{ij} je premenná **bivalentná** tzn. môže nadobúdať iba hodnoty 0 alebo 1 (priradenie i -teho objektu na j -te miesto sa realizuje ($x_{ij}=1$) alebo nerealizuje ($x_{ij}=0$)). Každý objekt je možné priradiť iba na jedno miesto, resp. na jedno miesto je možné priradiť iba jediný objekt.

Všeobecný model prirad'ovacieho problému:

1. Účelová funkcia

$$z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \dots + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + \dots + c_{2n} \cdot x_{2n} + \dots + c_{n1} \cdot x_{n1} + c_{n2} \cdot x_{n2} + \dots + c_{nn} \cdot x_{nn} \rightarrow MIN \quad (7.5)$$

2. Obmedzujúce podmienky

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= 1 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \underline{x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{nn}} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} &= 1 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \underline{x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{nn}} &= 1 \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}, \text{ pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \approx (x_{ij} = 0 \wedge 1) \quad (7.7)$$

Prakticky to znamená: v každom riadku a stĺpci tabuľky prirad'ovacej úlohy môže byť iba jediná nenulová premenná a matica sadzieb takejto úlohy je vždy štvorcová.

6. Distribučné problémy

Zápis pomocou sumácie:

minimalizovať	
$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \text{MIN}$	(7.5)
za obmedzujúcich podmienok	
$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } j = 1, 2, 3$	
$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad , \quad \text{pre } i = 1, 2, 3$	(7.6)
$x_{ij} \in \{0; 1\}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3.$	(7.7)

Z modelu je zrejmé, že celkom máme $2n$ štruktúrnych podmienok (rovníc), n^2 premenných, pričom n premenných nadobúda hodnoty 1, $(n^2 - n)$ premenných je rovných 0. Základných premenných v úlohe je $(2n-1)$. Ide teda o špeciálny prípad dopravnej úlohy, v ktorej platí: $m = n$).

S výnimkou triviálneho prípadu, ak $n=1$ sa preto **vždy bude jednať o degenerované riešenia** (pretože počet základných premenných, nadobúdajúcich nulové hodnoty, t.j. **stupeň degenerácie u PÚ je vždy rovný $n-1$**).

2.2 Riešenie prirad'ovacieho problému

Z doteraz prezentovaných metód je zrejmé, že prirad'ovací problém môžeme riešiť ako:

- úlohu celočíselného lineárneho programovania - s využitím simplexovej metódy a niektorej z metód celočíselného riešenia alebo
- úlohu dopravnú.

Pri prvej možnosti sa stretneme s rovnakými problémami ako u úlohy dopravnej (umelé premenné $\Rightarrow$ veľa premenných, pomocná ÚF) plus problém celočíselného riešenia.

Pri snahe o využitie algoritmu riešenia ako dopravnej úlohy dostaneme úlohu maximálne degenerovanú vo všetkých jej iteračných krokoch, čo zasa prináša veľa neefektívnych presunov hodnôt „ ε “ (tzv. fiktívnych núl „0“) pri nutných presunoch v cykle.

Pre takéto typ rozhodovacích úloh je okrem klasického riešenia, založeného na aplikácii *simplexového algoritmu* pre sústavu $2.n$ rovníc s $2.n$ neznámymi, príp. *metódy potenciálov*, navrhnutej pre riešenie dopravných úloh, s výhodou možné využiť špeciálny algoritmus pre riešenie minimalizačnej prirad'ovacej úlohy, tzv. **maďarskú metódu**.

2.2.1 Maďarská metóda

Maďarská metóda v základnej podobe (podobne ako metóda potenciálov pre dopravné úlohy) bola vyvinutá ako úloha minimalizačná, t.j. algoritmus hľadajúci prípustné riešenie, ktoré zaistí minimálnu hodnotu účelovej funkcie z . Analogicky s dopravnou úlohou, jednoduchou úpravou môžeme priradovaciu úlohu typu MIN transformovať na úlohu typu MAX.

Najskôr sa však zoznámime s podstatou riešenia minimalizačných úloh, následne uvedieme aj podstatu riešenia priradovacích úloh maximalizačných.

I. Minimalizačný priradovací problém

Formálny postup riešenia priradovacej úlohy pozostáva z 3 hlavných fáz:

1. získanie východiskového riešenia,
2. posúdenie jeho optimálnosti a
3. modifikácia riešenia v prípade, že riešenie podmienkam optima ešte nevyhovuje.

Východiskové bázičné riešenie v priradovacej úlohe je možné získať napr. **metódou redukcie sadzieb**, podstata ktorej spočíva v základnej vlastnosti riešenia ÚLP a to:

Riešenie ÚLP sa nezmení, ak od niektorých rovníc (riadku alebo stĺpca matice sadzieb) odpočítame rovnaké číslo (zmení sa iba hodnota účelovej funkcie).

Základné kroky výpočtového postupu:

A. Redukcia sadzieb

- V každom riadku nájdeme minimálnu sadzbu c_{ij} , ktorú od ostatných sadzieb v riadku odpočítame (tým je zaistené, že v každom riadku vznikne minimálne jedna tzv. *nulová redukovaná sadzba*).
- Skontrolujeme, či sú nulové redukované sadzby aj v každom stĺpci.
- Ak nie sú, vykonáme redukciu sadzieb aj v stĺpcoch, kde doteraz žiadna nulová sadzba nie je. Tým zabezpečíme, že v každom riadku i stĺpci je aspoň jedna nulová red. sadzba.

B. Určenie východiskového riešenia

- Pokúsime sa priradiť maximálne možné množstvo nenulových hodnôt premenným s nulovými redukovanými sadzbami. Prednostne pritom priraďujeme nenulové hodnoty tým premenným, v ktorých riadkoch alebo stĺpcoch je minimálne množstvo nulových redukovaných sadzieb (najlepšie je, ak je v riadku / stĺpci iba jediná).

C. Posúdenie optimálnosti riešenia

- Ak sa podarí priradiť všetky objekty na miesto určenia, t.j. **ak počet všetkých nenulových hodnôt premenných x_{ij} je rovný rozmeru úlohy n** , bolo dosiahnuté optimálne riešenie. Hodnotu jeho účelovej funkcie dourčíme z pôvodnej matice sadzieb.

- Ak sa po priradení nepodarí všetky objekty priradiť na cieľové miesta, riešenie ešte optimálne nie je. Riešenie je potrebné vhodne modifikovať, t.j. vykonať jeho úpravy.

D. Postup úprav neoptimálneho riešenia

- Všetky premenné s nulovými redukovanými sadzbami sa snažíme prekryť minimálnym počtom tzv. **krycích čiar**. Najskôr sa pritom prekrývajú tie riadky alebo stĺpce, v ktorých je nulových redukovaných sadzieb najviac. Podľa tzv. **Königovej vety** musí platiť: ***Minimálny počet krycích čiar je rovný počtu získaných nenulových premenných (súčasne aj kontrola správnosti riešenia).***
- U krycími čiarami neprekrytých premenných nájdeme minimálnu sadzbu a túto:
 - Odpočítame od sadzieb neprekrytých premenných.***
 - Pripočítame ku sadzbám premenných dvakrát prekrytých (krycie čiary sa križujú).***
 - Sadzbý premenných jedenkrát prekrytých zostávajú nezmenené.***

Takto získame nový modifikovaný tvar matice redukovaných sadzieb. V nej sa opäť snažíme vykonať priradenie, pričom celý postup opakujeme až do splnenia kritéria optimálnosti, tzn. realizácie priradenia všetkých objektov na miesta určenia, ktoré sú v matici redukovaných sadzieb charakterizované nulovými redukovanými sadzbami.

6. Distribučné problémy

Príklad 8: Majme zadany problém priradenia s rozmerom 5×5 s maticou sadzieb podľa tab.6.16.a.

Riešenie:

Tab.6.16.a. *Riešenie priradovacej úlohy – zadanie a prvé redukcie sadzieb.*

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	a
O ₁	0, 20	20, 40	35, 50, 70	40, 60	5, 25	1
O ₂	10, 30	25, 45	0, 15, 35	0, 20	0, 20	1
O ₃	5, 40	0, 35	30, 45, 80	5, 40	10, 45	1
O ₄	40, 60	0, 20	5, 20, 40	15, 35	50, 70	1
O ₅	5, 35	0, 30	20, 35, 65	20, 50	30, 60	1
b	1	1	1	1	1	Σ = 5

Po prvej redukcii sadzieb (po riadkoch) sú nulové redukované sadzby už aj vo všetkých stĺpcoch, okrem stĺpca M₃. Ak vykonáme redukciiu aj v ňom, výsledná matica redukovaných sadzieb prvého pokusu o východiskové priradenie je uvedená v tab.6.16.b.

6. Distribučné problémy

Tab.6.16.b. Výsledná matica sadzieb po 1. redukcii (nulte iterácii) a úvodné priradenie.

O	M	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	a
O ₁		0	20	35	40	5	
		①					1
O ₂		10	25	0	0	0	
				①			1
O ₃		5	0	30	5	10	
			①				1
O ₄		40	0	5	15	50	
							1
O ₅		5	0	20	20	30	
							1
b		1	1	1	1	1	Σ = 5

Podľa vyššie uvedených zásad priradíme nenulové hodnoty „1“ najskôr premenným $x_{11} = 1$ (jediná nulová redukovaná sadzba v riadku i stĺpci), $x_{32} = 1$ (jediná v riadku) a $x_{23} = 1$ (jediná v stĺpci). Možnosti priradenia sú vyčerpané, pretože zvyšné nulové sadzby v 2. riadku a v 2. stĺpci už nie je možné využiť.

6. Distribučné problémy

Počet priradených nenulových hodnôt ($p=3$) je menší ako rozmer úlohy ($n=5$), preto je nutné východiskového priradenie modifikovať.

V prvej fáze prekryjeme všetky nulové zredukované sadzby kryciami čiarami. Prvý prekryjeme druhý riadok a druhý stĺpec, v ktorých sú po 3 nulové sadzby. Zostane potom iba jediná (c_{11}), ktorú prekryjeme vodorovne (riešené stále v *tab.6.16.b*). Počet krycích čiar ($k=p=3$) sa rovná počtu priradených nenulových premenných, podľa Konigovej vety je zrejmé, že riešenie prebieha správne.

V druhej fáze nájdeme neprekrytú minimálnu sadzbu ($c_{31} = c_{24} = c_{43} = c_{51} = 5$) a túto

- ***odpočítame od všetkých sadzieb neprekrytých a***
- ***pripočítame ku všetkým sadzbám dvakrát prekrytým (c_{12} a c_{22}).***

Matica sadzieb po tejto redukcii je uvedená v *tab.6.16.c*.

Pri nasledujúcom priradovaní v poradí $x_{11}=1$ (jediná v riadku i stĺpci), $x_{52}=1$ (jediná využiteľná v 5.riadku), $x_{25}=1$ (jediná využiteľná v 5.stĺpci) a $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$, je zrejmé, že sa už podarilo priradiť nenulové hodnoty práve piatim premenným.

Získané priradenie je už preto riešením optimálnym a jemu odpovedajúca hodnota ÚF (musíme sa však vrátiť do pôvodnej matice sadzieb) bude

$$z^{(1)} = 20 + 20 + 40 + 40 + 30 = 150 \text{ (optimum).}$$

6. Distribučné problémy

Tab.6.16.c. Riešenie priradovacej úlohy – výsledná matica sadzieb po 1.iterácii.

O	M	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	a
O ₁		0 ①	25 -	35 -	40 -	5 -	1
O ₂		10 -	30 -	0 -	0 -	0 ①	1
O ₃		0 -	0 -	25 -	0 ①	5 -	1
O ₄		35 -	0 -	0 ①	10 -	45 -	1
O ₅		0 -	0 ①	15 -	15 -	25 -	1
b		1	1	1	1	1	Σ = 5

$z^{(1)} = 150$ (MIN) – optimum

II. Maximalizačný priradovací problém

Zatiaľ čo u dopravnej úlohy je v štandardnom prípade problém maximalizácie účelovej funkcie skôr výnimočný, pri formulácii priradovacích problémov sa úloha typu MAX (zaist'ujúca maximálnu hodnotu ÚF) vyskytuje pomerne často. Napr. úloha priradenia osôb na pracoviská pre dosiahnutie maximálneho výkonu, priradenie zákazníkov predajcovi pre maximálne uspokojenie ich požiadaviek a preferencií alebo problém „partner“ – t.j. problém priradenia napr. tanečníkov, príp. športových dvojíc z pohľadu ich vzájomných sympatií, predpokladov a pod.).

U dopravnej úlohy boli uvedené dva spôsoby transformácie úlohy typu MIN na typ MAX, ktoré pri priradovacej úlohe nemôžeme plnohodnotne využiť. Častejšie sa používa jednoduchý spôsob transformácie (je využiteľný napr. aj pri riešení dopravnej úlohy typu MAX) a jeho slovné vyjadrenie je nasledovné :

1. *V matici sadzieb nájdeme maximálnu sadzbu $m = \max(c_{ij})$.*
2. *Vytvoríme novú maticu sadzieb C^* , v ktorej každý prvok vznikne ako $c^*_{ij} = m - c_{ij}$.*
3. *Riešime štandardné optimálne priradenie pre maticu C^* (minimalizácia ÚF).*
4. *Po nájdení optimálneho priradenia určíme hodnotu účelovej funkcie pre pôvodnú maticu sadzieb, čím získame hodnotu ÚF pre maximálne možné priradenie.*

6. Distribučné problémy

Príklad 9: Pre priradovací problém (tab.6.17) nájdite riešenie, ktoré zaistí maximálnu hodnotu ÚF.

Riešenie:

Maximálna sadzba v úlohe je $m = c_{33} = 80$, nová matica sadzieb C^* je v tab.6.17.

Tab.6.17. Úloha maximálneho priradenia – transformovaná matica sadzieb.

	M₁	M	M	M	M	a
O₁	60 , 40 , 30 -	40, 20 -	10 -	20, 0 ①	55 , 35 -	1
O₁	50 , 15 , 5 -	35 , 0 ①	45 -	60 , 25 -	60 , 25 -	1
O₁	40 -	45 -	0 ①	40 -	35 -	1
O₁	20, 10 , 0 ①	60 , 50 -	40 -	45 , 35 -	10 , 0 -	1
O₁	45 , 25 , 15 -	50 , 30 -	15 -	30 , 10 -	20, 0 ①	1
b	1	1	1	1	1	$\Sigma = 5$

$Z^{(0)} = 305$ (MAX) - optimum

6. Distribučné problémy

Postup riešenia:

V novej (redukovanej) matici C^* sa vykonaním redukcie automaticky vytvorí minimálne jedna nulová sadzba $c^*_{33}=0$. Redukciou po riadkoch sa nulová sadzba nevytvorí iba v prvom stĺpci, v ktorom musíme vykonať ešte ďalšiu redukciu (t.j. odrátať -10). Takto jednoducho sme získali maticu redukovaných sadzieb pre prvú iteráciu (prvé priradenie = východiskové riešenie).

Ľahko zistíme, že priradením nenulových hodnôt $x_{14}=1$, $x_{22}=1$, $x_{33}=1$, $x_{41}=1$ a $x_{55}=1$ sa podarilo ihneď priradiť $p=n=5$ nenulových hodnôt premenných. Znamená to, že *kritérium optimality* je splnené a určené priradenie je optimálne.

Hodnota účelovej funkcie (s využitím hodnôt pôvodnej matice sadzieb) je

$$z^{(opt)} = 60 + 45 + 80 + 60 + 60 = 305 \text{ (MAX)}.$$

3. Záverečné poznámky k distribučným úlohám

Doteraz uvedené dva základné typy distribučných problémov – **úloha dopravná a úloha prirad'ovania** – s ich rozličnými modifikáciami (napr. *kontajnerový dopravný problém, všeobecne definovaný distribučný problém a pod.*) ani zďaleka neobsiahli možnú rozmanitosť problémov distribúcie zdrojov (technických, ľudských, prírodných a pod.).

Všeobecne platí, že pri formulácii takýchto typov úloh je vždy nutné starostlivo zostaviť ich adekvátny matematický model a až v závislosti na tvare a špecifikách modelu zvoliť adekvátnu metódu riešenia.

Charakteristika ďalších typov distribučných problémov:

- **Kontajnerový dopravný problém (KDP)** – modifikácia základnej formulácie dopravnej úlohy, pri ktorej preprava medzi dodávateľmi a odberateľmi je realizovaná výlučne pomocou kontajnerov, ktoré majú určitú definovanú kapacitu K jednotiek. Náklady na prepravu nie sú teda vzťahnuté na jednu jednotku prepravovaného tovaru, ale sú uvažované ako jeden kontajner. S prepravou jedného kontajnera sú spojené náklady, ktoré sú však rovnaké, bez ohľadu na to, či je kontajner plný alebo poloprázdny. Optimálne riešenie KDP by malo viesť k tomu, aby jednotlivé kontajnery, ktoré budú prepravované, boli využité čo najefektívnejšie.

6. Distribučné problémy

- **Všeobecný distribučný problém (VDP)** – líši sa od klasického dopravného problému hlavne v tom, že kapacity zdrojov a požiadavky odberateľov nie sú uvedené v rovnakých jednotkách. Pre ich vzájomnú porovnateľnosť je preto do modelu potrebné doplniť určité „prevodné koeficienty“. Napríklad, kapacita výrobnjej linky (hod), požiadavka odberateľa (ks) – prevodný koeficient = koeficient výkonu (ks / hod).

Ďalšie typy úloh môžu vzniknúť rôznymi kombináciami už riešených úloh, ako napr.:

- **Alokačné problémy** (allocation problems) - riešia optimálne združovanie miest odberu tovaru do rajónov obsluhovaných z jednotlivých zdrojov. Medzi najznámejšie patrí tzv. **úloha o pokrytí**. Ide o optimalizáciu rozhodnutia, kde postaviť K obslužných staníc (stanice rýchlej pomoci, požiarne stanice, centrá pre triedenie zásielok a pod.) do jednotlivých obvodoch $O_1, O_2, \dots, O_n$, pričom $n < K$. Súčasne je potrebné im priradiť aj ich územnú pôsobnosť, t.j. určiť obvody, ktoré budú týmito centrami obsluhované.
- **Úloha optimálneho rozmiestnenia zdrojov**, v ktorej však nie je vyžadovaná podmienka pre rozmiestnenie zdrojov priamo v miestach odberu a pod.
- **Úlohy obchodného cestujúceho (okružný dopravný problém), úlohy okružných ciest** a niektoré ďalšie, ktorými sa budeme zaoberať v rámci teórie grafov.