

9. PROJEKTOVÉ PLÁNOVANIE

Ciel prednášky: *definovať a objasniť základné pojmy sieťovej analýzy, projekt a hľadiská vyhodnocovania jeho kvality; formulovať projekt definovaný súborom elementárnych činností pomocou sieťového grafu, vysvetliť metódy pre časovú analýzu projektov a uviesť ich praktické využitie, zvládnuť použitie metódy CPM pre účely časovej analýzy projektu.*

Obsah prednášky *priblíži možnosti využitia analýzy sieťových grafov v projektovom manažmente, t.j. aplikáciu sieťových grafov pre potreby analýzy konkrétnych projektov z niekoľkých hľadísk (čas, náklady, využitie zdrojov).*

Obsahom prednášky bude jedna z typicky ekonomických aplikácií teórie grafov a to **analýza projektov** (resp. **riadenie projektov, projektové plánovanie**).

Modelové riešenie takýchto problémov je založené na možnosti zobrazit' každý projekt pomocou špeciálneho typu grafu – tzv. **sieťového grafu, siete**. Sieťové grafy umožňujú názorne zachytiť nadväznosti a vzťahy vyskytujúce sa v každom projekte a preto takéto modely nadväzných projektov nazývame ako **modely sieťovej analýzy**.

Sieťový graf predstavuje určitú vizuálnu formu modelu projektu (sledu činností realizovaných v rámci projektu). Štandardne sa jedná o orientovaný, ohodnotený, súvislý graf, ktorý neobsahuje cyklus a obsahuje práve jeden vstupný vrchol (z neho hrany iba vychádzajú) a práve jeden výstupný vrchol (do neho hrany iba vstupujú).

Ich výhodou je prehľadná interpretácia a štruktúra procesu, umožňujúca grafické vyjadrenie vzájomných nadväzností a vzťahov. To je pre rozhodovateľa väčšinou zrozumiteľnejšie, ako napr. formulácia problému v podobe matematického modelu.

Sieťová analýza spolu s teóriou grafov tvoria relatívne samostatnú oblasť operačnej analýzy, ktorej dôležitosť vzrástla najmä s rozvojom *projektového riadenia (project management)* pri riadení rozličných nadväzných procesov v praxi. Sieťová analýza svojim obsahom nadväzuje na teóriu grafov a predpokladá znalosti základných pojmov analýzy v grafoch, ale aj bežne používané pojmy z ekonomiky. Poskytuje kvantitatívne nástroje a metódy, ktoré sú využívané pri zvyšovaní efektívnosti projektového riadenia.

Sieťová analýza – nástroj pre riadenie projektov, zaoberá sa vyhodnocovaním kvality projektov z rôznych hľadísk – najčastejšie z hľadiska doby trvania projektu, celkových nákladov na projekt a potrebných zdrojov pre realizáciu projektu.

Sieťová analýza tvorí relatívne samostatnú oblasť aplikácie základných poznatkov teórie grafov do oblasti plánovania zložitých akcií (projektov), ktorých realizácia vyžaduje splnenie väčšieho množstva na seba nadväzujúcich tzv. *elementárnych činností*.

Takéto činnosti obvykle majú vzhľadom na svoj charakter odlišný obsah, dĺžku trvania, náklady, nároky na zdroje a je medzi nimi určitý vzťah – napr. nezávislosť, časová následnosť, vzájomná podmienenosť apod.

Z hľadiska zatriedenia do základnej oblasti metód OA patria metódy sieťovej analýzy skôr medzi *postupy heuristické*, pretože ich rozhodujúcu etapu – t.j. zostavenie zoznamu elementárnych činností a logicky definovaného sieťového grafu sa doteraz nepodarilo vhodne algoritmizovať.

Pri výklade problematiky projektového plánovania budeme využívať iba *hranovo orientované grafy* a preto je potrebné definovať z tohto pohľadu aj dva základné pojmy a to:

- **Uzol** - predstavuje stav dosiahnutý realizáciou určitej činnosti. Predstavuje okamih začatia alebo ukončenia jednej alebo súboru viacerých elementárnych činností. Vyjadruje väzbu medzi činnosťami, ktorá znamená, že činnosti z uzla vystupujúce nemôžu začať skôr, ako skončia všetky činnosti do uzla vstupujúce,

- **Hrana** - v sieťovom grafe vyjadruje realizáciu konkrétnej elementárnej činnosti. Môže pritom reprezentovať buď **činnosť reálnu** (skutočne vykonávanú) a zobrazuje sa plnou čiarou alebo **činnosť fiktívnu** (zdanlivú), určenú iba pre vyjadrenie časových a technologických nadväzností v sieťovom grafe (zobrazenie čiarkovanou čiarou).

Medzi základné metódy sieťovej analýzy v oblasti deterministicky definovaných predpokladov patrí najmä **metóda kritickej cesty (CPM)** a jej modifikácia **CPM-GE**, vhodná na objektívnejšie prerozdelenie vznikajúcich rezerv v sieťovom grafe. Známe sú aj ďalšie metódy, ako napr. **MPM**, **GERT**, alebo pravdepodobnostne orientovaná metóda **PERT**.

9.1 Analýza kvality projektov

Realizácia väčšiny reálnych projektov je náročná. Zostavenie rozsiahlejších projektov z hľadiska časových nadväzností jednotlivých aktivít a z hľadiska hospodárneho vykonania projektu nie je vôbec jednoduchou záležitosťou.

Každý projekt je možné vo všeobecnosti definovať ako súhrn jednotlivých elementárnych (základných) činností (resp. aktivít, operácií a pod.). Návrh konkrétnej realizácie projektu je potom podmienený vzájomnou závislosťou resp. nezávislosťou týchto základných činností.

Je zrejmé, že začatie niektorých elementárnych činností projektu je podmienené ukončením iných činností konkrétneho projektu (napr. nemožno stavať steny domu, ak nie sú základy).

Projekt – súbor konkrétnych elementárnych činností so vzájomnými časovými a logickými väzbami, týkajúcimi sa ich realizácie

Najčastejšie sú hľadané odpovede na otázky typu:

- *Aká je očakávaná (najkratšia) doba realizácie celého projektu, prípadne aká je pravdepodobnosť odchýlky od takto určenej doby.*
- *Ktoré elementárne činnosti sú z hľadiska dodržania konečného termínu projektu kľúčové (ide o určenie tzv. kritických činností v projekte).*
- *Aké veľké sú rezervy v nekritických činnostiach, t.j. o koľko je možné predĺžiť realizáciu takýchto činností, aby nebol ovplyvnený konečný termín projektu.*
- *Aký má byť časový rozvrh realizácie jednotlivých základných činností.*
- *Aká je závislosť celkových nákladov na projekt a doby realizácie projektu.*
- *Aké je najvhodnejšie využitie dostupných zdrojov (hlavne materiál, pracovná sila, pracovné prostriedky) pre jednotlivé činnosti.*

Získanie odpovedí na tieto a mnohé ďalšie otázky je kľúčové nielen pri samotnej realizácii projektu, ale aj vo fáze jeho návrhu a schvaľovania. Pre realizáciu dnešných projektov býva totiž kľúčová hlavne rýchlosť ich realizácie pri rozumných nákladoch.

Pre ilustráciu niekoľko príkladov projektov, kde je možné využiť metódy sieťovej analýzy:

- *realizácia stavebných projektov, ako je výstavby či rekonštrukcia budov, dopravnej a energetickej infraštruktúry, obchodných centier a pod.*
- *výskum, vývoj a uvedenie nového produktu na trh,*
- *reklamné a obchodné kampane*
- *zavedenie novej alebo inovovanej výrobnéj technológie v podniku,*
- *inštalácia nového počítačového systému,*
- *realizácia záchranných operácií, evakuácie, proces krízového plánovania, dočasnej obnovy prvkov infraštruktúry a mnoho ďalších.*

Väčšie projekty môžu zahŕňať stovky až tisíce elementárnych činností a závislostí medzi nimi a preto bolo potrebné hľadať efektívne nástroje pre analýzu a riadenie takýchto projektov.

Všeobecne je možné povedať, že sieťová analýza sa zaoberá vyhodnocovaním kvality projektov z rôznych hľadísk. Takýmito hľadiskami obvykle býva:

- **ČAS = časová analýza projektu**

Ide o zistenie najkratšej možnej doby realizácie celého projektu, vrátane rozloženia jednotlivých činností v čase. Hovoríme o tzv. *časovej analýze projektu*.

Časová analýza projektu – zistenie najkratšej možnej doby realizácie celého projektu vrátane rozloženia jednotlivých činností v čase a zistenie ich prípadných časových rezerv.

- **NÁKLADY = nákladová analýza projektu**

Hľadanie odpovedí na otázky typu: aké budú náklady na projekt pri rôznych dobách realizácie projektu. Je efektívne zaplatiť za skrátenie realizácie projektu o x časových jednotiek sumu y Eur navyše? V takomto prípade hovoríme o tzv. *nákladovej analýze projektu*.

Nákladová analýza – zistenie konkrétnych nákladových charakteristík projektu, najmä tzv. nákladovej krivky projektu, t.j. závislosti celkových nákladov projektu na celkovej dobe trvania projektu.

- **VYUŽITIE ZDROJOV = zdrojová analýza projektu**

Zistenie a analýza úrovne a rozloženia čerpania zdrojov potrebných pre vykonanie jednotlivých elementárnych činností počas realizácie projektu, napr. s cieľom:

- *čo najrovnomernejšieho využitia zdrojov* (zabránenie prípadu, kedy napr. jeden týždeň potrebujeme naraz 8 zariadení, na ďalší týždeň iba jedno a v treťom týždni až dvanásť takýchto zariadení),
- *určenia minimálnej doby trvania projektu*, pokiaľ sú určité zdroje z hľadiska ich paralelného nasadenia obmedzené. V takýchto prípadoch hovoríme o tzv. **zdrojovej analýze projektu**.

Zdrojová analýza projektu – analýza úrovne a rozloženia čerpania zdrojov potrebných pre vykonanie jednotlivých elementárnych činností počas realizácie projektu, napr. s cieľom čo najrovnomernejšieho využitia zdrojov alebo stanovenie minimálnej doby trvania projektu za predpokladu obmedzenia možností paralelného nasadenia určitých zdrojov.

Realizovať určitý projekt znamená vykonať všetky elementárne činnosti a to pri rešpektovaní všetkých vopred zadaných závislostí. Každá z elementárnych činností je charakterizovaná buď:

- predpokladanou dobou trvania alebo
- predpokladanými nákladmi na jej realizáciu príp.

- požiadavkami na zdroje /technické zariadenie, pracovné sily, materiál a pod.), ale tiež
- zoznamom tzv. *bezprostredných predchodcov* t.j. musí byť známy súbor činností, ktoré musia byť ukončené, aby mohla začať realizácie danej elementárnej činnosti.

Elementárna činnosť (aktivita) – jednotlivá (z hľadiska zvoleného pohľadu a podrobnosti popisu projektu) už ďalej nedeliteľná aktivita, ktorú je nutné vykonať pre úspešnú realizáciu celého projektu.

Elementárna činnosť je charakterizovaná:

- **dobou trvania** vyjadrenou deterministicky (metódy CPM, MPM) alebo stochasticky (PERT),
- **nákladmi** na realizáciu činnosti,
- **požiadavkami** na materiálne, technické, personálne a iné zaistenie činnosti,
- **zoznamom činností**, ktoré musia túto činnosť predchádzať, t.j. musia byť vykonané a dokončené skôr, ako realizácie danej činnosti začne.

Rámcový postup analýzy sieťového grafu, ako modelu nadväzného procesu = 3 fázy :

1.fáza - Zostavenie zoznamu všetkých elementárnych činností potrebných pre realizáciu zadaného projektu. Dôležité je najmä vyhodnotenie typu väzieb medzi jednotlivými činnosťami – t.j. ich

bezprostredná časová následnosť, súbežnosť príp. iný vzájomný vzťah a ohodnotenie jednotlivých hrán siete (normatívne, kalkuláciou alebo odhadom).

2.fáza - Vytvorenie grafického modelu projektu – sieťového grafu - rešpektujúceho všetky vyššie uvedené vlastnosti a väzby jednotlivých elementárnych činností.

3.fáza - Vlastný výpočet všetkých významných charakteristík sieťového grafu (kritické činnosti, kritická cesta, analýza rezerv, príp. ich prerozdelenie), analýza a interpretácia výsledkov, vyvodenie záverov pre jednotlivé činnosti projektu, ale aj pre projekt ako celok.

9.2 Zoznam elementárnych činností projektu

Prvým krokom pri analyzovaní zadaného projektu je definovanie jednotlivých elementárnych činností (aktivít, operácií) a zistenie ich vzájomných závislostí.

Správne určenie závislostí medzi jednotlivými činnosťami je veľmi dôležité, pretože chyby na tejto úrovni môžu viesť k nepresnému alebo v skutočnosti nevykonateľnému rozvrhu jednotlivých aktivít. Takto definovaný súhrn elementárnych činností a závislostí medzi nimi, doplnený ďalšími údajmi, napr. o dobe trvania týchto činností, príp. náklady na ich realizáciu, požadované zdroje a pod., tvorí tzv. **zoznam elementárnych činností projektu**.

Takýto zoznam je východiskovým krokom pre analýzu projektu a pred samotným výpočtom sieťového grafu musí byť definovaný. Pre každú činnosť vo vytváranom zozname elementárnych činností vyhradíme jeden riadok, ktorý obvykle obsahuje: označenie činnosti, príp. jej slovný popis; zoznam jej bezprostredných predchodcov; čas potrebný pre jej realizáciu (príp. ďalšie údaje, ako náklady na výkon činnosti, požadované zdroje, apod.).

Príklad 1: V Tab.9.1 je príklad možného zoznamu elementárnych činností pre potreby objasnenia realizácie časovej analýzy, v tomto prípade pre projekt so 7 aktivitami.

Tab.9.1 Zoznam elementárnych činností pre ilustračný príklad jednoduchého projektu

Aktivita	Popis	Bezprostredný predchodca	Čas	Náklady	Zdroje
I	Získanie povolenia	-	2	-	-
II	Výber realizátora	-	3	-	-
III	Výber lokality	I	3	-	-
IV	Finančné krytie	I, II	5	-	-
V	Oslovenie lektorov	II	1	-	-
VI	Príprava miestnosti	III	2	-	-
VII	Výber lektorov	IV, V	2	-	-

Úloha: skúste si doma zostaviť vlastný Zoznam elementárnych činností a prekreslite ho do sieťového grafu. Vykonajte napr. predbežnú časovú analýzu pre jednoduchý prípad projektu, napr. stavba rodinného domu, organizácia súťaže, a pod.

Do zoznamu *bezprostredných predchodcov* konkrétnej aktivity zapisujeme iba tie činnosti, na ukončenie ktorých sa viaže začiatok realizácie tejto aktivity.

Naopak, do zoznamu *bezprostredných predchodcov nezahrňame* činnosti, ktoré nie sú predchodcom sledovanej aktivity, t.j. činnosti, ktoré síce musia byť tiež vykonané, avšak ich nasledovníkom bola činnosť, ktorá je tiež predchodcom práve sledovanej aktivity. *Napr. pri stavbe domu bezprostredným predchodcom stavby krovu nebude zhotovenie základov (krov bez základov nie je možné postaviť, pretože krov stavíme až po dokončení obvodových múrov, vrátane železobetónového venca). Zhotovenie základov môžeme ale uvažovať ako o bezprostrednom predchodcovi stavby obvodových múrov a stavbu múrov považovať za predchodcu stavby krovu.*

Ďalšie údaje o jednotlivých elementárnych činnostiach (čas trvania, náklady, zdroje) obvykle vyplývajú z použitej technológie a budeme ich považovať za vstupné veličiny. Určovanie ich konkrétnych hodnôt je obvykle náplňou špecializovaných (technických, ekonomických, administratívnych) disciplín a nie operačnej analýzy.

9.3 Konštrukcia sieťového grafu projektu

Elementárne činnosti a ich nadväznosti znázorňujeme v **sieťovom grafe**. Každý projekt je možné znázorniť pomocou sieťového grafu dvomi spôsobmi a to ako:

- **Hranovo ohodnotený sieťový graf** – jednotlivé elementárne činnosti sú reprezentované pomocou orientovaných hrán (ohodnotenie hrany udáva dobu trvania činnosti) a vrcholy udávajú ukončenie predchádzajúcich a začiatok nasledujúcich činností.
- **Vrcholovo ohodnotený sieťový graf** - jednotlivé elementárne činnosti sú vyjadrené prostredníctvom vrcholov a hrany predstavujú väzby medzi činnosťami.

V rámci prednášky sa budeme zaoberať výhradne hranovo ohodnotenými sieťovými grafmi (často sa nazývajú aj ako **hranovo definované sieťové grafy**).

Hranovo ohodnotený sieťový graf by mal obsahovať práve toľko hrán, koľko je v projekte definovaných elementárnych činností.

Pri tvorbe sieťového grafu však môže nastať stav, kedy nie je možné požadované väzby jednotlivých činností znázorniť iba pomocou hrán, reprezentujúcich reálne aktivity. V takýchto prípadoch použijeme tzv. **fiktívne hrany**, reprezentujúce tzv. **fiktívne činnosti**.

Jedná sa o činnosti, ktoré sa v skutočnosti v reálnom projekte nevyskytujú a teda nespotrebovávajú žiadny čas ani náklady ani zdroje. Fiktívne činnosti v sieťovom grafe obvykle označujeme čiarkovanou orientovanou hranou s nulovým ohodnotením.

Fiktívna činnosť – fiktívna hrana sieťového grafu, ktorá sa v reálnom projekte nevyskytuje, ale jej použitie pri tvorbe sieťového grafu je nevyhnutné pre znázornenie požadovaných väzieb jednotlivých činností.

Pri konštrukcii sieťového grafu dodržiavame nasledovné pravidlá:

- *Elementárne činnosti znázorňujeme pomocou orientovaných hrán, t.j. pokiaľ možno pomocou rovných šípok smerujúcich zľava doprava.*
- *Každá činnosť musí začínať a končiť v niektorom z vrcholov znázornených pomocou krúžku, do ktorého vpisujeme číslo vrcholu.*
- *Dva vrcholy môžu byť spojené iba jednou hranou (ak sa v projekte vyskytnú dve alebo viac paralelných činností, s rovnakými pred aj následnými činnosťami, znázorníme ich pomocou fiktívnej činnosti tak, aby bolo pravidlo zachované).*
- *Sieťový graf obsahuje jediný východiskový vrchol (**zdroj**), z ktorého vychádzajú všetky hrany reprezentujúce aktivity, ktoré nemajú žiadne predchádzajúce činnosti.*

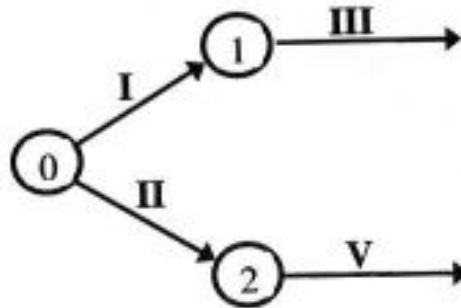
- *Hrany reprezentujúce aktivity, ktoré v projekte nemajú žiadne následné činnosti, smerujú do jediného spoločného cieľového vrcholu, ktorý reprezentuje okamžik ukončenia projektu (tzv. ústie sieťového grafu).*
- *POZOR: Fiktívne hrany využívame iba vtedy, ak nie je možné bez ich použitia zachovať predpísané väzby jednotlivých aktivít a vyššie uvedené pravidlá.*

Samotné zostavenie sieťového grafu je tvorivá a logická činnosť. Tvorbu sieťového grafu najčastejšie realizujeme tak, že postupne pridávame jednotlivé činnosti (t.j. hrany) zo zoznamu elementárnych činností pri rešpektovaní všetkých predpísaných väzieb. Vždy začíname zakreslením východiskového vrcholu (zdroja), ktorý znázorňuje okamžik začatia celého projektu. Zo zdroja vychádzajú činnosti, ktoré nemajú žiadneho bezprostredného predchodcu, t.j. také činnosti, ktorými je možné projekt začať.

Príklad 1: Majme zadaný projekt, so zoznamom činností podľa v *Tab. 9.1*.

Z východiskového vrcholu (0) budú preto vychádzať hrany reprezentujúce činnosti I a II, nakoľko týmto činnostiam nepredchádzajú žiadne iné aktivity. Pokračujeme pridaním novej hrany reprezentujúcej činnosť III, ktorej predchodcom je iba činnosť I. Činnosť I preto ukončíme uzlom a činnosť III bude vychádzať práve z tohto uzla.

Podobne činnosť V závisí iba na ukončení činnosti II a bude teda vychádzať z uzla, ktorým je ukončená hrana reprezentujúca činnosť II. Stav tvorby sieťového grafu po tomto kroku je uvedený na Obr.9.1.



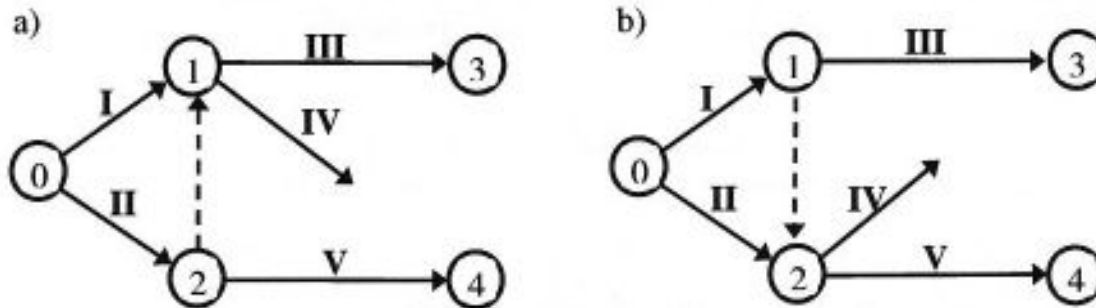
Obr.9.1 Úvodná etapa tvorby sieťového grafu pre zadaný zoznam činností

Na rozdiel od zakreslenia predchádzajúcich činností I, II, III a V, ktoré bolo pomerne jednoduché, pri znázornení činnosti IV sa stretieme s problémom.

Aktivite IV totiž bezprostredne predchádzajú činnosti I a II. Znamenalo by to, že tieto činnosti by mali končiť v rovnakom vrchole. To však nie je možné, nakoľko po týchto činnostiach bezprostredne nasledujú iné, odlišné aktivity.

Takýto problém sa pokúsime vyriešiť pomocou fiktívnych činností:

- a) predpokladajme, že činnosť IV vychádza z vrcholu 1 (má teda ako predchodcu aktivitu I) a súčasne vytvoríme fiktívnu činnosť z vrcholu 2 do vrcholu 1, čím zabezpečíme, aby činnosť IV mala ako predchodcu aj činnosť II (Obr.9.2 a)
- b) predpokladajme, že činnosť IV vychádza v vrcholu 2 (má teda ako predchodcu aktivitu II) a súčasne vytvoríme fiktívnu činnosť z vrcholu 1 do vrcholu 2, čím zabezpečíme, aby predchodcom činnosti IV bola aj činnosť I (Obr.9.2 b).



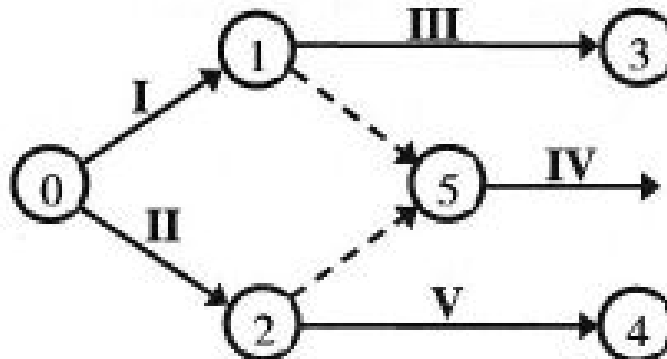
Obr.9.2 Nesprávne varianty zakreslenia nadväznosti činností

Obidva uvedené varianty znázornenia činnosti IV sú však nesprávne.

Prečo? V prípade variantu a) totiž činnosť IV správne predchádza činnosť I a použitím fiktívnej hrany aj pre činnosť II, ale podľa Obr.9.2 a sú obidve tieto hrany súčasne predchodcami aj pre činnosť III, čo je v rozpore so zadaním v zozname činností.

Analogicky, pre variant b) sú činnosti I a II predchodcami nielen aktivity IV, ale aj aktivity V.

Problém je možné vyriešiť iba tak, že činnosť IV nebude vychádzať ani z vrcholu 1 ani z vrcholu 2, ale z nového, samostatného vrcholu. Aby aktivity I a II predchádzali činnosť IV, musíme použiť fiktívnu hranu aj z vrcholu 1, ale aj z vrcholu 2 (obr.9.3).



Obr.9.3 Správne zakreslenie nadväznosti činnosti

Pri znázornení jednotlivých činností na Obr.9.3 je zrejmé, že všetky požadované väzby medzi doteraz znázorenými aktivitami sú splnené. Konkrétne platí:

- činnostiam I a II nepredchádza žiadna aktivita,
- činnosti III predchádza iba aktivita I,
- činnosti IV predchádzajú aktivity I a II (zaistené prostredníctvom fiktívnych hrán),
- činnosti V predchádza iba aktivita II.

Zostáva už iba doplniť činnosti VI a VII, čo je už jednoduché. Činnosť VI má ako predchodcu uvedenú aktivitu III a bude teda vychádzať z vrcholu, v ktorom je aktivita III ukončená (vrchol 3).

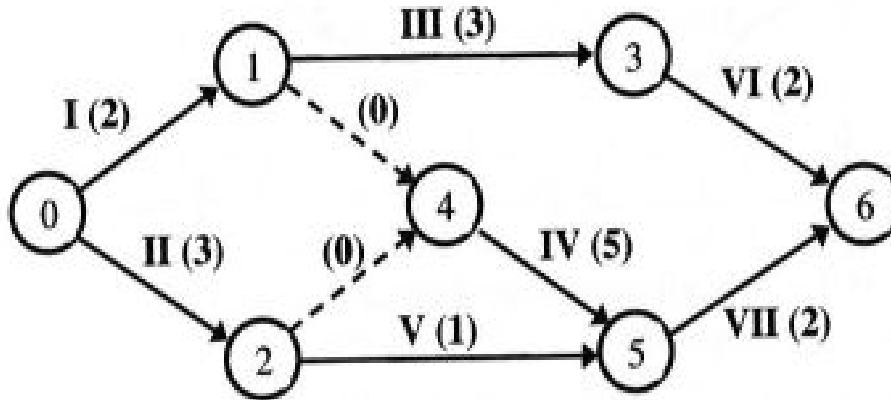
Činnosť VII má ako predchodcu uvedené aktivity IV a V.

Činnosti IV, V nie sú predchodcom žiadnej inej činnosti a znázorníme ich tak, že končia v spoločnom vrchole, z ktorého vychádza aktivita VII (obr.9.3, vrchol 4).

Projekt neobsahuje žiadne ďalšie elementárne činnosti.

Aktivity VI a VII nie sú predchodcami žiadnej inej činnosti (t.j. nemajú žiadnych nasledovníkov) a preto ich vedieme do spoločného koncového vrcholu sieťového grafu (t.j. do ústia), ktorým celý projekt končí.

Výsledný zostrojený sieťový graf pre zadaný projekt je na obr.9.4.



Obr.9.4 Výsledný sieťový graf pre zadaný zoznam činností

Poznámka: Oproti predchádzajúcemu znázorneniu sme vykonali prečíslovanie vrcholov 4 a 5 tak, aby bolo dodržané číslovanie vrcholov sieťového grafu podľa vyššie uvedeného pravidla.

9.4 Časová analýza projektov – metóda CPM

Hlavným cieľom časovej analýzy projektu je zistenie najkratšej možnej doby realizácie celého projektu, vrátane rozloženia jednotlivých činností v čase.

Dôležité sú tiež informácie o prípadných časových rezervách jednotlivých činností, pretože ich odhalením môžeme prispieť k celkovej optimalizácii realizácie projektu aj z iných sledovaných hľadísk, ako je čas.

Kľúčom pre určenie najkratšej možnej doby realizácie projektu je identifikácia tzv. **kritických činností**.

Kritická činnosť – elementárna činnosť v projekte, ktorej predĺžením o ľubovoľný počet časových jednotiek dôjde aj k predĺženiu celého projektu o rovnaký počet časových jednotiek, t.j. činnosť s nulovou časovou rezervou.

Kritické činnosti tvoria v sieťovom grafe tzv. **kritické cesty**. Kritická cesta (KC) v sieťovom grafe je určená sledom kritických činností medzi zdrojom (začiatok projektu) a ústím (koniec projektu). KC je možné definovať aj ako najdlhšiu možnú cestu medzi počiatočným a koncovým vrcholom daného projektu.

Kritická cesta – sled kritických činností medzi zdrojom a ústím sieťového grafu; je to najdlhšia možná cesta medzi zdrojom a ústím sieťového grafu.

Z hľadiska dodržania doby realizácie projektu je nutné dodržať dobu realizácie všetkých kritických činností. Inými slovami to znamená, že pri realizácii kritických činností nie je k dispozícii žiadna časová rezerva a v prípade sklzu (predĺženia ktorejkoľvek z nich) nutne nastane aj predĺženie realizácie celého projektu.

Časová rezerva činnosti – čas, o ktorý je možné maximálne oneskoriť začiatok danej činnosti alebo predĺžiť túto činnosť tak, aby nedošlo k predĺženiu celého projektu (rozlišujeme celkovú, voľnú, závislú a nezávislú časovú rezervu činnosti).

Úloha: skúste zdôvodniť predchádzajúce tvrdenie a vyvrátiť zdanlivý rozpor medzi tým, že KC, ktorej dĺžka udáva najkratšiu možnú dobu trvania projektu, je definovaná ako najdlhšia cesta v projekte. *Odpoveď: Aj pri najkratšej dobe trvania projektu musia byť vykonané všetky činnosti a teda aj tie činnosti, ktoré ležia na najdlhšej ceste v projekte. Práve dĺžka tejto cesty je potom limitujúca pre dobu trvania celého projektu.*

Identifikácia KC v sieťovom grafe projektu podáva odpoveď na uvedený hlavný cieľ časovej analýzy projektu, t.j. **zistenie najkratšej novej doby realizácie celého projektu**. Najkratšia možná doba realizácie projektu je určená dĺžkou KC v sieťovom grafe (t.j. súčtom dôb trvania všetkých činností ležiacich na tejto kritickej ceste).

V sieťovom grafe môže existovať aj viac rôznych kritických ciest. Z predchádzajúcej formulácie však vyplýva, že vtedy musia mať všetky takéto rôzne KC rovnakú dĺžku (t.j. rovnaký súčet ohodnotení všetkých činností ležiacich na KC).

K samotnému riešeniu sieťového grafu pristupujeme až po vytvorení ohodnoteného sieťového grafu. K riešeniu pomocou algoritmu metódy CPM je nutné navyše splniť 2 predpoklady a to:

- 1. Sieťový graf musí mať vždy iba jeden uzol počiatkový (do ktorého nevstupuje žiadna činnosť) a jeden uzol koncový (z ktorého žiadna činnosť nevystupuje).*
- 2. Pre každú ľubovoľnú hranu h_{ij} musí platiť $i < j$, t.j. poradové číslo počiatkového uzla každej orientovanej hrany grafu musí byť nižšie ako poradové číslo uzla koncového.*

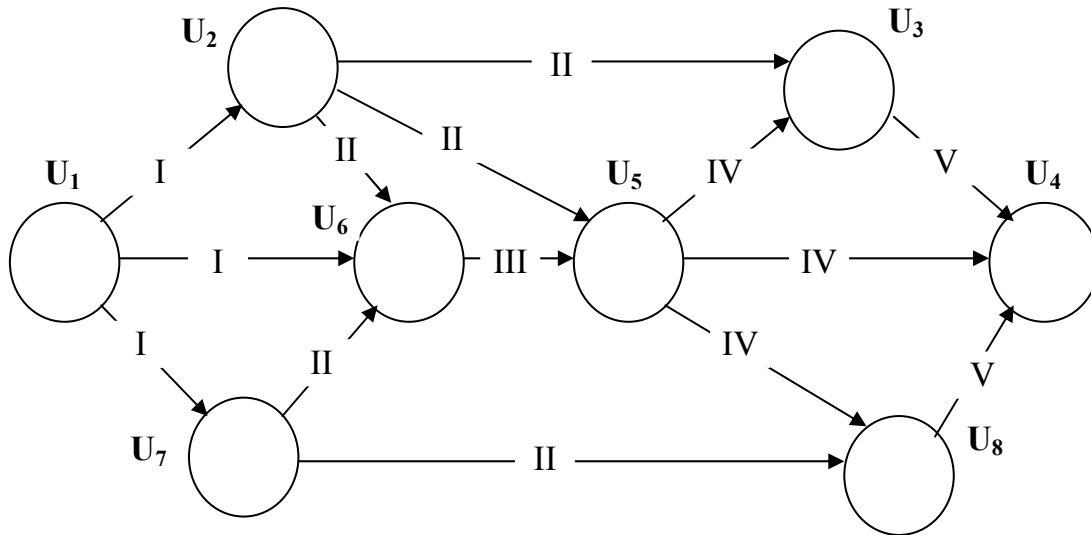
Ak nie je splnená prvá podmienka: možnosť využiť zaradenie nového počiatkového alebo koncového uzla vhodným zvolením fiktívnych činností.

Ak nie je splnená druhá podmienka: nevhodné číslovanie uzlov je možné zmeniť pomocou tzv. **Fordovho algoritmu prečíslovania uzlov**, ktorý spočíva v kategorizácii uzlov (t.j. postupnom zatriedovaní uzlov do zvyšujúcich sa rádov uzlov).

Slovne je možné Fordov algoritmus vyjadriť nasledovne :

1. *Počiatočnému uzlu priradíme rád „0“. ($R=0$)*
2. *Hranám z neho vystupujúcim priradíme rád $R=R+1=1$, (v grafe označíme tak, že hrany raz prečiarkneme).*
3. *Skúmame všetky uzly do ktorých vstupujú iba hrany už definovaného rádu (prečiarknuté) a priradíme im rád rovný najvyššiemu rádu vstupujúcich hrán. (Uzly U_2 a U_7 budú teda 1. rádu).*
4. *Pokračujeme bodom 2. až po koncový uzol.*

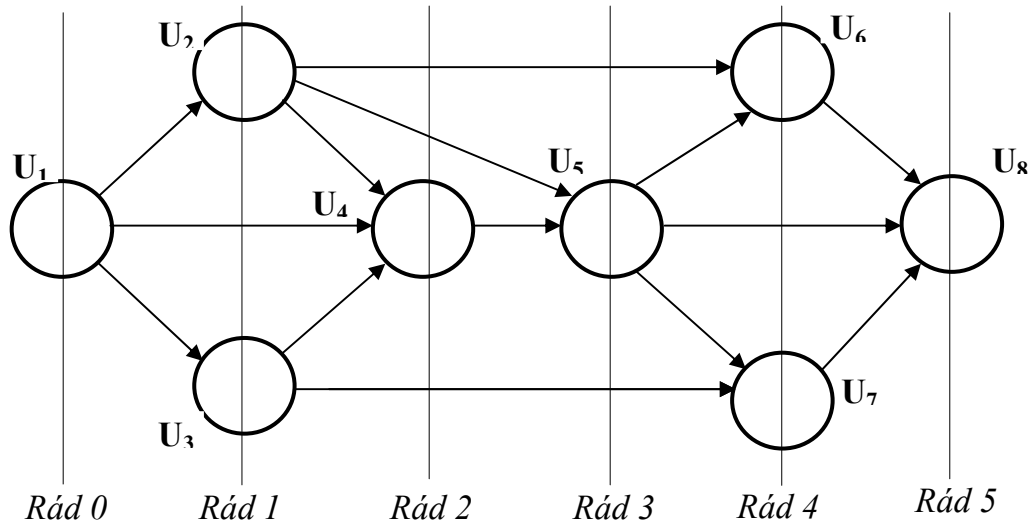
Princíp algoritmu objasníme na príklade z obr.9.5a.



Obr.9.5a. Sieťový graf s nevyhovujúcim číslovaním vrcholov

Pri realizácii uvedeného postupu na sieťový graf podľa Obr.8.1a môžeme dospieť k záveru, že uzol U_6 – bude 2.rádu, uzol U_5 – bude 3.rádu, uzly U_3 , U_8 – sú 4.rádu a uzol U_4 – je rádu 5. Po ukončení prečíslovania vrcholov siete graf prekreslíme s vyznačením určených rádov (Obr.9.5b).

Nové prečíslovanie vrcholov potom vykonáme tak, že vrcholy číslujeme postupne od najnižšieho rádu po najvyšší tzn. zľava doprava.



Obr.9.5b Sieťový graf s prečíslovanými vrcholmi

Poznámka: Väčšina algoritmov sieťovej analýzy vyžaduje, aby číslo (index) východiskového vrcholu každej činnosti bolo nižšie ako číslo jej vrcholu koncového. Takýto spôsob prečíslovania vrcholov je možný vždy, nakoľko v sieťovom grafe nie je prípustný výskyt cyklu (t.j. vieme, že sieťový graf je acyklický).

Ak je splnenie podmienok riešiteľnosti sieťového grafu pre CPM zabezpečené, je možné pristúpiť k samotnému riešeniu sieťového grafu (3.fáza vyššie uvedeného postupu).

Zrejme najpoužívanejšie metódy pre realizáciu časovej analýzy projektov sú **CPM (Critical Path Method)** a **PERT (Program Evaluation and Review Technique)**. Princiálne sú si obidve metódy veľmi blízke. Je možné dokonca tvrdiť, že PERT je iba akýmsi pravdepodobnostným rozšírením, inak rýdzo deterministickej, metódy CPM.

Metóda CPM (slov. *metóda kritickej cesty*) predpokladá, že všetky časové údaje o dobe trvania jednotlivých elementárnych činností sú uvažované ako deterministicke hodnoty.

Critical Path Method (CPM) - metóda kritickej cesty pre časovú analýzu projektov, v ktorej sa predpokladá, že všetky časové údaje o dobe trvania jednotlivých elementárnych činností sú deterministicke (t.j. jednoznačne určené a nepredpokladá sa možnosť ich zmeny).

Naproti tomu metóda PERT uvažuje doby trvania jednotlivých aktivít v projekte za náhodné veličiny s konkrétnym rozdelením pravdepodobnosti, z ktorého vyplývajú pravdepodobnostné charakteristiky aj pre výslednú dobu realizácie projektu.

9.5 Metóda CPM

Základný princíp metódy CPM pri realizácii časovej analýzy sieťového grafu spočíva v určení dvoch základných charakteristík pre každý vrchol sieťového grafu.

Jedná sa o nasledovné časové charakteristiky:

- **Najskôr možný začiatok realizácie činností vychádzajúcich z daného vrcholu TM_i .**

Žiadnu činnosť nie je možné začať, pokiaľ nie sú ukončené všetky činnosti, ktoré tejto činnosti bezprostredne predchádzajú. Všetky činnosti, ktoré vychádzajú z daného vrcholu, majú rovnaký tzv. **najskôr možný začiatok TM** a ten je určený práve okamihom ukončenia poslednej bezprostredne predchádzajúcej (a teda do daného vrcholu vstupujúcej) aktivity.

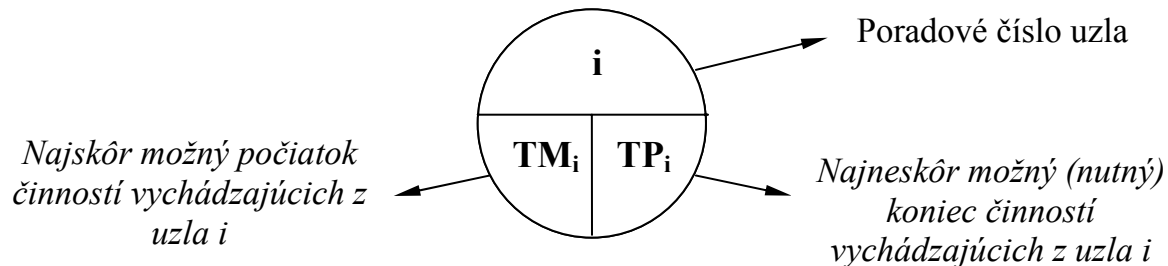
- **Najneskôr možný začiatok realizácie činností do daného vrcholu vstupujúcich TP_i .**

Aby nedošlo k sklzu v dobe trvania projektu, musia všetky aktivity vstupujúce do daného vrcholu skončiť najneskôr v istom časovom okamihu tak, aby bolo možné v požadovaných termínoch realizovať všetky nasledujúce činnosti. Takýto okamžik nazývame **najneskôr možný (nutný) koniec TP** realizácie činností vstupujúcich do daného vrcholu.

Samotný výpočet metódy CPM je možné realizovať napr. buď prostredníctvom **incidenčnej matice sieťového grafu** alebo pomocou **špeciálne zostavenej tabuľky**.

Princíp realizácie výpočtu v rámci metódy CPM je najnázornejší ak výpočet realizujeme priamo v upravenom sieťovom grafe, tzv. **sieťovom diagrame**. Výpočty časovej analýzy pre rozsiahlejšie projekty sú samozrejme realizované pomocou výpočtovej techniky s príslušným softvérovým vybavením.

Sieťový diagram získame zo sieťového grafu tým, že každý jeho vrchol rozdelíme na 3 samostatné polia. Zaužívané označenie uzlov v metóde CPM, v ktorom sú uvedené aj významy jednotlivých použitých symbolov je na *Obr.9.6*.



Obr.9.6 Vrchol sieťového diagramu pri časovej analýze projektu pomocou CPM

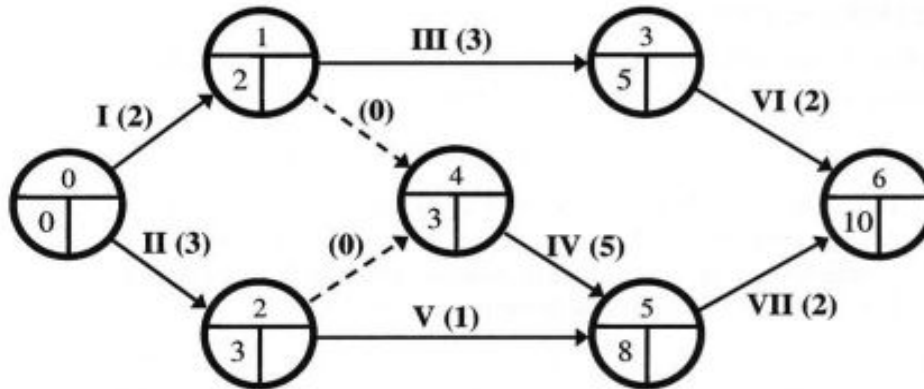
Pre hodnoty TM_i , t.j. najskôr možný začiatok činností vychádzajúcich z vrcholu i a hodnoty TP_i , t.j. najneskôr nutný koniec činností do neho vstupujúcich platí:

1. Najskôr možný začiatok realizácie činností, ktoré vychádzajú (t.j. začínajú) z vrcholu k je určený *maximálnou hodnotou zo všetkých najskôr možných koncov činností*, ktoré do vrcholu k vstupujú. Platí: Najskôr možný koniec činností h_{ik} je možné vyjadriť ako jej najskôr možný začiatok plus doba jej trvania t_{ik} . Preto

$$TM_k = \max (TM_i + t_{ik}) \quad (9.1)$$

Poznámka: Maximálnu hodnotu vyberáme z množiny všetkých vrcholov, z ktorých vystupujú činnosti končiacie vo vrchole k . Hodnota t_{ij} – udáva dobu trvania činnosti (i,j) , t.j. činnosti vychádzajúcej z vrcholu i a vstupujúcej do vrcholu j a obvykle je definovaná v Zozname elementárnych činností projektu.

Príklad 1: Stav sieťového diagramu z Obr.9.4 pre projekt zadaný tabuľkou činností Tab.9.1 po vykonaní výpočtu hodnôt TM_i je uvedený na Obr.9.7a.



Obr.9.7a Sieťový diagram po vykonaní výpočtu hodnôt TM_i

Hodnoty TM_i počítame v sieťovom diagrame postupne, začíname v zdroji, t.j. vrchole s číslom $i=0$, pre ktorý vždy platí, že $TM_0 = 0$. Tento čas predstavuje okamžik začatia realizácie projektu. Pokračujeme ďalej, výpočtom hodnôt TM_i v súlade so vzťahom (9.1) aj pre ďalšie vrcholy $1, 2, \dots, n$ a to v poradí podľa ich číslovania až po hodnotu TM_n , t.j. v poslednom n -tom vrchole sieťového grafu. Hodnota $TM_n = TM_{\min}$ potom udáva najkratšiu možnú dobu realizácie projektu.

2. Najneskôr možný (nutný) koniec realizácie činností, ktoré vchádzajú (t.j. končia) vo vrchole k je určený *minimálnou hodnotou zo všetkých najneskôr možných začiatkov činností*, ktoré z vrcholu k vystupujú. Platí: Najneskôr možný začiatok činnosti h_{ik} je možné vyjadriť ako: najneskôr možný koniec mínus doba trvania t_{ki} . Preto

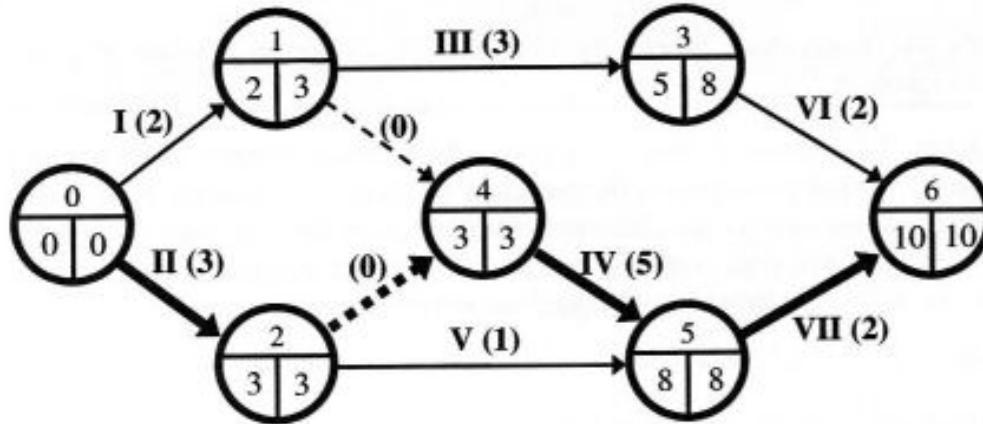
$$\mathbf{TP}_k = \min (\mathbf{TM}_j - t_{kj}) \quad (9.2)$$

Poznámka: minimálnu hodnotu vyberáme z množiny všetkých vrcholov, z ktorých končia činnosti vychádzajúce z vrcholu k .

Hodnoty časov \mathbf{TP}_i v sieťovom grafe počítame v opačnom poradí ako pri výpočte \mathbf{TM}_i . Najneskôr nutný koniec činností, ktoré do posledného vrcholu sieťového grafu (t.j. do ústia, $i = n$) vstupujú, musí nastať v čase \mathbf{TM}_{\min} , pretože tento čas udáva dobu ukončenia projektu. Doplňme teda $\mathbf{TP}_n = \mathbf{TM}_n$.

Vo výpočte pokračujeme výpočtom hodnôt podľa (9.2) pre ďalšie vrcholy $n-1, \dots, 1, 0$ spätne v poradí až po zdroj, t.j. prvý vrchol sieťového grafu. Pre zdroj musí pochopiteľne platiť $\mathbf{TP}_0 = \mathbf{0}$, pretože do neho žiadne činnosti nevstupujú (slúži zároveň aj ako skúška správnosti výpočtu v sieťovom grafe).

Príklad 1: Výsledný sieťový diagram z Obr.9.4 pre projektu podľa zadaného zoznamu činností podľa Tab.9.1 a po vykonaní výpočtov \mathbf{TM}_i a \mathbf{TP}_i je uvedený na Obr.9.7b.



Obr.9.7b Sieťový diagram po vykonaní výpočtu hodnôt TM_i a TP_i

3. Určenie kritickej cesty

Kritickú cestu môžeme veľmi jednoducho určiť z výsledného sieťového diagramu tým, že určíme jej vrcholy a hrany, ktoré ju tvoria. Platí:

- pre vrcholy ležiace na KC platí: $TM_i = TP_i$.
- pre hrany (i,j) ležiace na KC platí: $TP_j - TM_i = t_{ij}$.

Pre hrany (i,j) teda platí, že časový interval medzi okamžikom najskôr možného počiatku tejto činnosti a okamžikom jej najneskôr nutného konca je rovný práve dobe trvania tejto činnosti.

Už vieme, že kritických ciest môže byť v analyzovanom grafe aj viac. Všetky však majú rovnakú celkovú dĺžku, ktorá je rovná minimálnej dobe $T_{\min} = TM_n$ realizácie celého projektu.

Príklad 1: Pre riešený projekt dostaneme:

Na kritickej ceste ležia vrcholy 0-2-4-5-6. V tomto prípade existuje iba jediná KC a je tvorená hranami $(0,2)$ - $(2,4)$ - $(4,5)$ - $(5,6)$, t.j. iba 3 aktivitami II, IV, VII, pretože hrana $(2,4)$ predstavuje iba činnosť fiktívnu.

4. Výpočet a interpretácia rezerv jednotlivých činností

Okrem identifikácie kritických činností je z hľadiska efektívnej realizácie projektu užitočné vedieť, aké časové rezervy majú aj ďalšie – *nekritické* – činnosti v sieťovom grafe. Podľa charakteru časovej rezervy a jej závislosti na čerpaní časových rezerv iných činností rozlišujeme nasledovné kategórie rezerv:

1. Celková časová rezerva činnosti (i,j) – udáva čas, o ktorý je možné maximálne oneskoriť začiatok činnosti (i,j) resp. predĺžiť túto činnosť tak, aby nedošlo k predĺženiu celého projektu.

Pri jej určovaní neberieme ohľad na prípadné ovplyvnenie časových rezerv iných činností. Pre každú činnosť (i,j) platí:

$$RC_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij}. \quad (9.3)$$

Kritické činnosti majú celkovú časovú rezervu nulovú.

2. Voľná časová rezerva činnosti (i,j) – udáva čas, o ktorý je možné maximálne oneskoriť začiatok činnosti (i,j) resp. predĺžiť túto činnosť tak, aby neboli ovplyvnené najskôr možné začiatky činností, ktoré za aktivitou (i,j) bezprostredne nasledujú. Znamená to, že pri čerpaní voľnej rezervy činnosti (i,j) nesmú byť ovplyvnené rezervy nasledujúcich činností. Pre každú činnosť (i,j) platí:

$$RV_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij}. \quad (9.4)$$

3. Závislá časová rezerva činnosti (i,j) – vyjadruje čas, o ktorý je možné maximálne predĺžiť činnosť (i,j) tak, aby neboli ovplyvnené najneskôr nutné začiatky činností, ktoré bezprostredne nasledujú za aktivitou (i,j) v prípade, že predchádzajúce činnosti skončili s oneskorením. Znamená to, že sa pýtame, o koľko môžeme maximálne predĺžiť činnosť, ktorá sama začala v najneskôr možnom čase. Pre každú činnosť (i,j) platí:

$$\mathbf{RZ}_{ij} = \mathbf{TP}_j - \mathbf{TP}_i - \mathbf{t}_{ij}. \quad (9.5)$$

4. Nezávislá časová rezerva činnosti (i,j) – je rezerva, pri ktorej prípadnom čerpaní nesmieme ovplyvniť veľkosť časovej rezervy žiadnej ďalšej činnosti v grafe (nielen nasledujúcich, ale aj predchádzajúcich). Pre každú činnosť (i,j) platí:

$$\mathbf{RN}_{ij} = \mathbf{TM}_j - \mathbf{TP}_i - \mathbf{t}_{ij}. \quad (9.6)$$

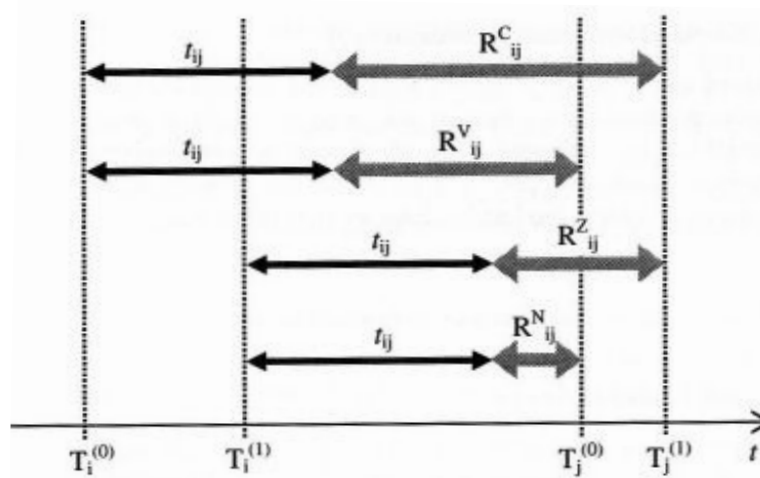
Bolo by možné preukázať, že medzi jednotlivými typmi časových rezerv vždy platia nasledovné závislosti:

$$\mathbf{RV}_{ij} \leq \mathbf{RC}_{ij} \quad ; \quad \mathbf{RZ}_{ij} \leq \mathbf{RC}_{ij} \quad ; \quad \mathbf{RN}_{ij} \leq \mathbf{RV}_{ij} \quad ; \quad \mathbf{RN}_{ij} \leq \mathbf{RZ}_{ij} \quad (9.7)$$

Na základe vzťahov (9.3 až 9.6) je zrejmé, že tiež platí:

$$\mathbf{RC}_{ij} + \mathbf{RN}_{ij} = \mathbf{RV}_{ij} + \mathbf{RZ}_{ij} . \quad (9.8)$$

Všetky vyššie uvedené vzťahy pre výpočet jednotlivých kategórií rezerv je možné tiež znázorniť na časovej osi, kde sú zadané časy \mathbf{TM}_i a \mathbf{TP}_i pre i -ty vrchol a časy \mathbf{TM}_j a \mathbf{TP}_j pre j -ty vrchol, spôsobom uvedeným na *Obr.9.8*.



Obr.9.8 Grafická interpretácia rezerv pre činnosť (i,j)

Význam vyššie uvedených veličín:

Pomocou RC_{ij} (keď $RC_{ij}=0$) hľadáme kritické činnosti, prostredníctvom ktorých určujeme kritické cesty v projekte. Veličiny RV_{ij} , RZ_{ij} , RN_{ij} umožňujú plánovať skutočné termíny (začiatky, konce, príp. doby trvania) nekritických činností v projekte. Ich hlavný význam je najmä pri nákladovej a zdrojovej analýze projektov, pričom ich podrobnou analýzou je možné dosiahnuť zníženie celkových nákladov projektu a ovplyvniť objemy zdrojov pre jeho realizáciu.

Príklad 1: Pre projekt zadaný *Tab.9.1* je možné na základe výpočtov vykonaných pomocou vzťahov (9.3 až 9.7) v sieťovom diagrame podľa *Obr.9.7* určiť rezervy jednotlivých činností:

Tab.9.2 Prehľad časových rezerv činností v analyzovanom projekte

Aktivita	R_{ii}^C	R_{ii}^V	R_{ii}^Z	R_{ii}^N
I	1	0	1	0
II	0	0	0	0
III	3	0	3	0
IV	0	0	0	0
V	4	4	4	4
VI	3	3	0	0
VII	0	0	0	0

Získané výsledky časovej analýzy projektu, t.j. rozloženie jednotlivých činností v čase (najskôr kritických činností a tiež všetkých nekritických činností a ich časových rezerv) je možné prehľadne znázorniť v tzv. **časovom diagrame realizácie činností**.

Z diagramu je zrejmé, ktoré činnosti môžu prebiehať paralelne a tiež je vidieť aj prípadné možnosti „posúvania“ realizácie nekritických činností v čase.



Obr.9.9 Časový diagram realizácie činností analyzovaného projektu

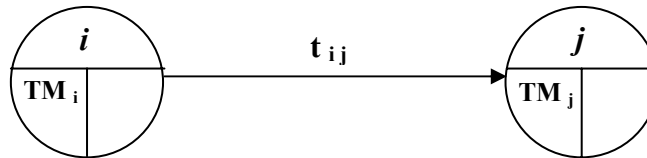
Zmienený časový diagram pre riešený projekt je ukázaný na Obr.9.9. Najskôr sú znázornené činnosti ležiace na kritickej ceste projektu, t.j. činnosti II, IV a VII a následne zostávajúce nekritické činnosti (I, III, V, VI) vrátane ich celkových rezerv (znázornené vyšrafovanou plochou).

Zhrnutie výpočtového postupu v metóde CPM

1. Určenie najskôr možných počiatkov činností

Počiatočnému uzlu u_0 priradíme hodnotu najskôr možného počiatku $TM_0=0$. U ďalších uzlov, pokiaľ do nich vstupuje iba jedna hrana = jedna činnosť (obr.9.10 a) určujeme hodnotu vzťahom

$$TM_j = TM_i + t_{ij} \quad (9.9a)$$

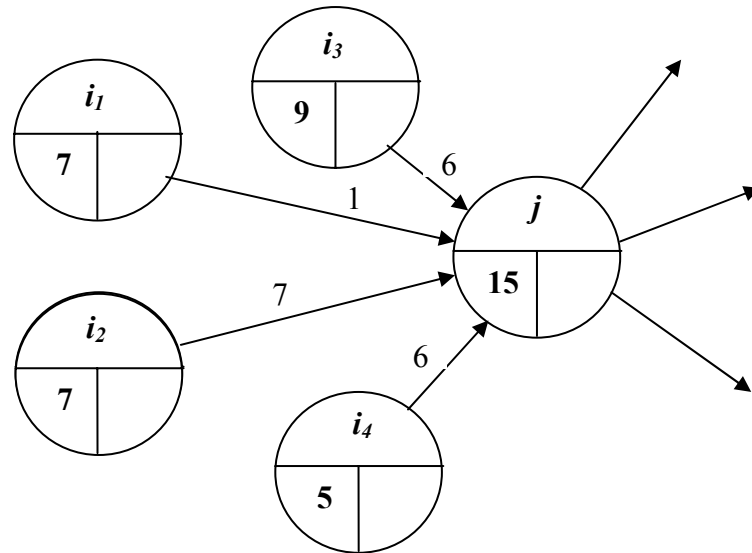


Obr.9.10a Určenie najskôr možných počiatkov (do uzla j vstupuje jedna činnosť)

Ak do uzla j vstupuje viac činností (obr.9.10 b), za hodnotu najneskôr možného počiatku činností v j -tom vrchole určíme maximálnu hodnotu z naznačených súčtov

$$TM_j = \max_i (TM_i + t_{ij}). \quad (9.9b)$$

Vzťah (9.9b) vychádza z jednoduchého pravidla: **Všetky činnosti z uzla vystupujúce môžu začať až po skončení všetkých činností do uzla vstupujúcich.**



Obr.9.10b Určenie najskôr možných počiatkov - do uzla vstupuje viac činností.

Takto pokračujeme cez všetky vrcholy grafu až po vrchol koncový U_n , v ktorom (pretože v ňom už žiadna činnosť nezačína t.j. žiadna hrana z neho nevystupuje) určený najskôr možný počiatok súčasne predstavuje i **minimálny možný čas trvania T_{\min}** celého projektu, pri ktorom je zabezpečené, že budú zrealizované a ukončené všetky určené a v projekte zaradené činnosti.

2. Určenie najneskôr možných (nutných) koncov a identifikácia kritickej cesty.

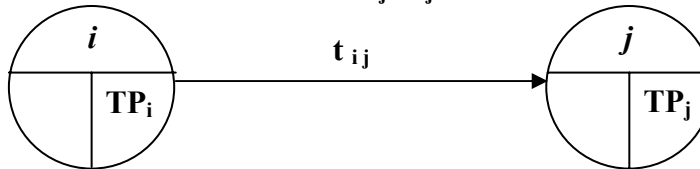
Pri určovaní najneskôr možných koncov činností v jednotlivých uzloch vychádzame z vrcholu koncového, v ktorom **času najneskôr možného počiatku** priradíme **čas trvania akcie**

$$TP_k = T_{\min} .$$

Časy najneskôr možných koncov činností vo všetkých vrcholoch určujeme tzv. *spätným chodom* a to nasledovne :

- ak z vrcholu i vychádza jediná činnosť (obr.9.10 c) pre časy najneskôr nutných koncov platí

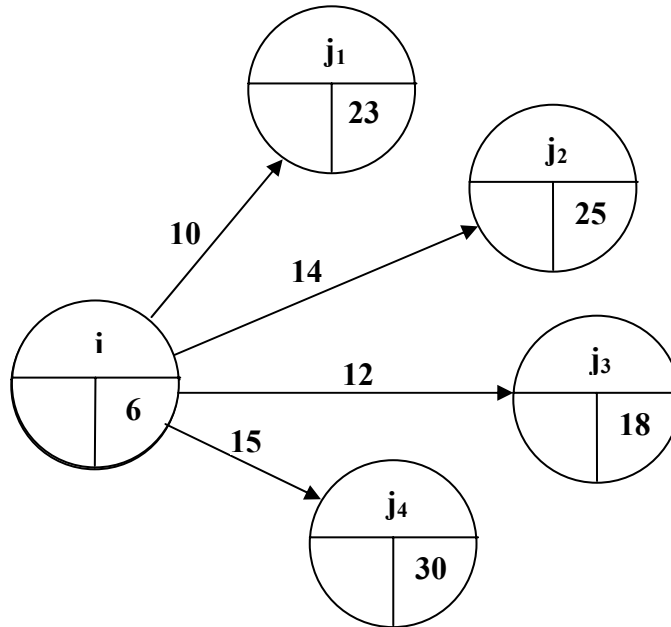
$$TP_i = TP_j - t_{ij} \quad (9.9c)$$



Obr.9.10c Určenie časov najneskôr možných počiatkov – z vrcholu „i“ vychádza jediná činnosť.

- ak z vrcholu „i“ vychádza viac činností (obr.9.10 d) pre časy najneskôr nutných koncov platí

$$TP_i = \min_j (TP_j - t_{ij}) \quad (9.9d)$$



Obr.9.10d Určenie časov najneskôr možných začiatkov – z vrcholu „i“ vychádza viac činností.

Výraz (9.9d) pritom vyjadruje skutočnosť, že najneskôr možné počiatky TP musia byť určené tak, aby neohrozili určený termín ukončenia projektu.

Uvedeným spôsobom spätného chodu postupujeme až k vrcholu počiatočnému U_1 , v ktorom musí platiť (to slúži súčasne ako kontrola správnosti riešenia)

$$TP_1 = TM_1 = 0. \quad (9.9e)$$

Následne na to už môžeme v grafe identifikovať tzv. **kritickú cestu**, ktorá spája vrcholy v ktorých nie je žiadna uzlová (kritická) rezerva a teda kde platí

$$TP_i = TM_i. \quad (9.9f)$$

Akékolvek predĺženie činností ležiacich na kritickej ceste alebo posunutie ich počiatkov znamená súčasne predĺženie doby trvania celého projektu.

3. Časová analýza grafu (rozbor rezerv)

V sieťovom grafe rozlišujeme 2 základné druhy rezerv: **rezervy uzlové** a **rezervy hranové**.

Uzlová rezerva R_i je definovaná ako rozdiel hodnôt najneskôr a najskôr možného začiatku činnosti v príslušnom uzle

$$R_i = TP_i - TM_i \quad (9.10a)$$

Niektorí autori rezervu v uzle používajú termín **kritická rezerva**, z čoho je aj odvodený názov metódy. Je zrejmé, že musí platiť: **Na kritickej ceste sú rezervy všetkých uzlov nulové.**

Hranové rezervy, vzťahujú sa k jednotlivým činnostiam projektu a rozlišujeme rezervu:

- celkovú (RC_{ij}),
- voľnú (RV_{ij}),
- nezávislú (RN_{ij}),
- závislú (RZ_{ij}).

Reálny praktický význam majú najmä prvé dve a to – **rezerva celková** a **rezerva voľná**.

1. Rezerva celková - určuje, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti alebo posunúť jej najskôr možný počiatok bez toho, aby bol ohrozený termín ukončenia projektu. Určuje sa pre každú činnosť a platí

$$RC_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij} \quad . \quad (9.10b)$$

2. Rezerva voľná - udáva, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti alebo posunúť jej počiatok, aby neboli ohrozené najskôr možné počiatky všetkých činností nasledujúcich po uvažovanej činnosti a platí

$$RV_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij} \quad . \quad (9.10c)$$

Je zrejmé, že na kritickej ceste budú obidve uvedené rezervy nulové.

3. **Rezerva nezávislá** sa určuje podľa vzťahu

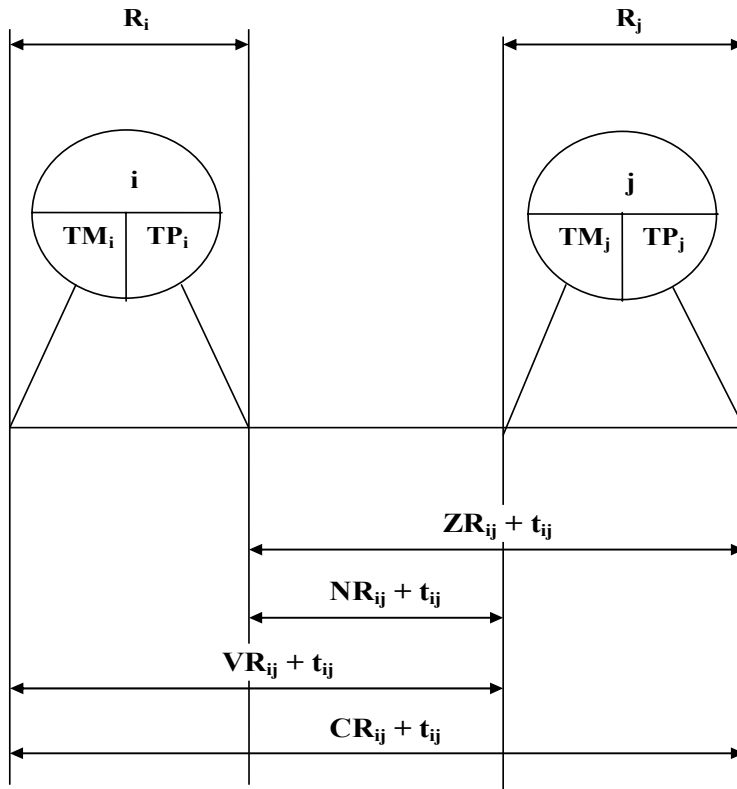
$$RN_{ij} = TM_j - TP_i - t_{ij} \quad (9.10d)$$

4. **Rezerva závislá** sa určuje zo vzťahu

$$RZ_{ij} = TP_j - TP_i - t_{ij} \quad (9.10e)$$

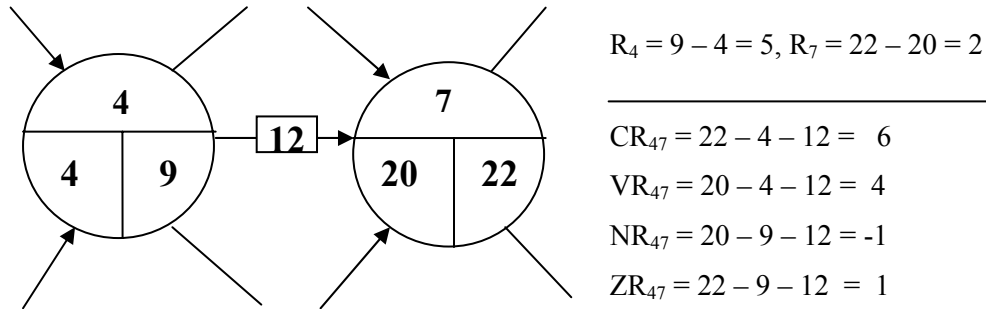
Po určení KC v sieťovom grafe a prepočte všetkých rezerv prichádza opäť empiria, skúsenosť alebo odborný úsudok projektového manažéra, ktorý môže (v závislosti od charakteru projektu) niektoré z činností na kritickej ceste buď:

- **vylúčiť**, t.j. činnosti na KC ktoré nie sú k realizácii projektu nevyhnutné,
- **naplánovať súbežne**, t.j. niektoré z činností KC, ktoré boli pôvodne naplánované za sebou,
- **skrátit**, napr. presunom pracovných síl, techniky, finančných zdrojov apod. z činností, u ktorých sú najväčšie časové rezervy apod.



Schematicky je možné výrazy pre analýzu rezerv znázorniť podľa *obr.9.11* a príklad výpočtu na ich výseku zo sieťového grafu je uvedený na *obr.9.12*.

Obr.9.11 Rezervy v sieťovom grafe

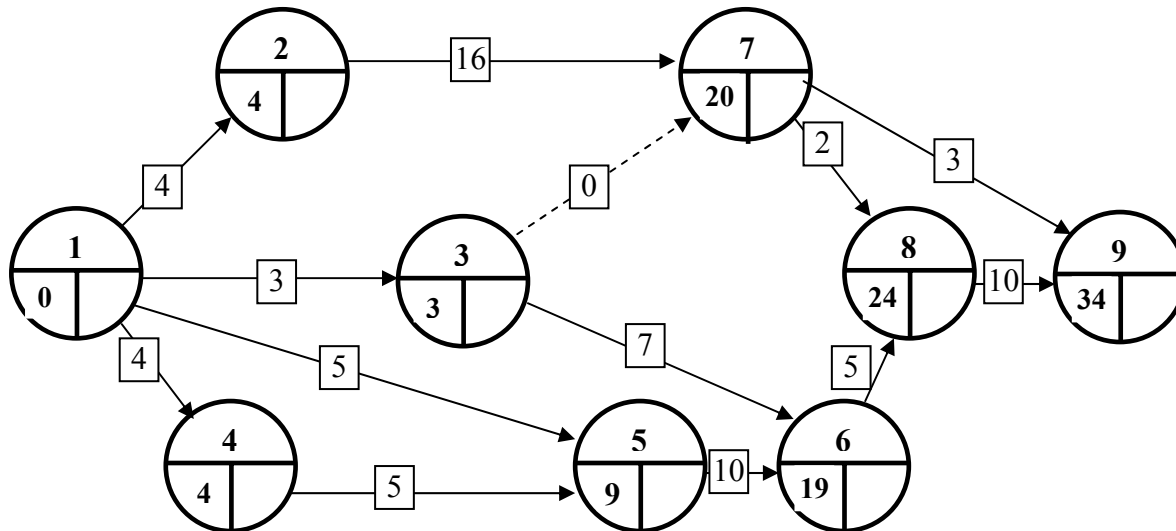


Obr.9.12. Výpočet rezerv v sieťovom grafe

Príklad 2: Majme zadaný sieťový graf (obr.9.13a), v ktorom doby trvania jednotlivých činností t_{ij} sú uvedené priamo na príslušných hranách grafu. Priamym výpočtom v grafe a v incidenčnej matici určte kritickú v sieťovom grafe a najskorší možný čas ukončenia projektu.

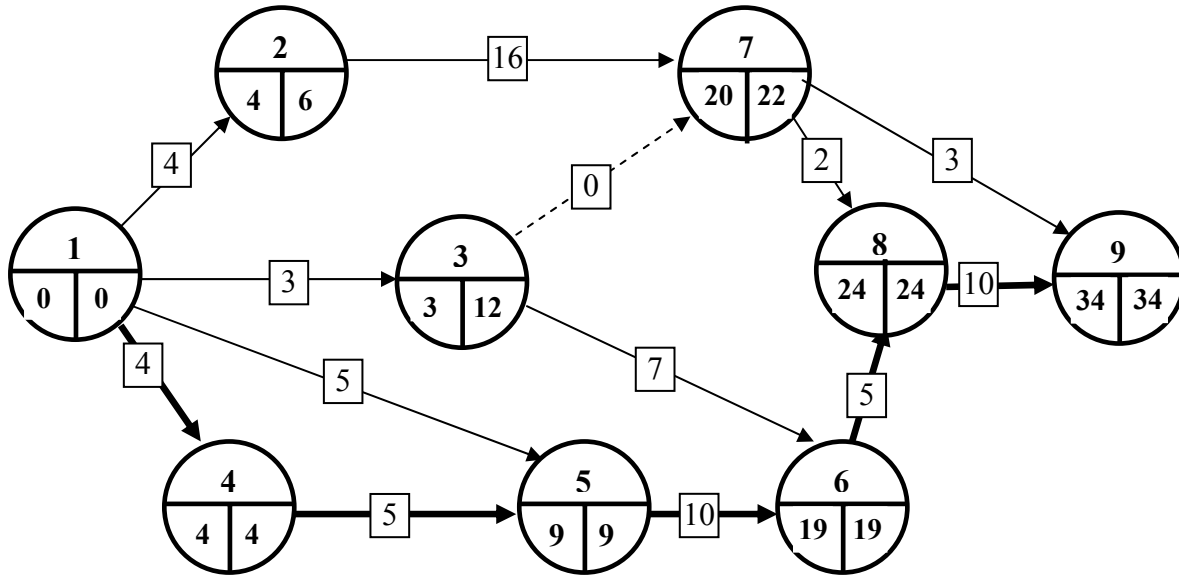
Riešenie:

Po aplikácii vyššie uvedených pravidiel dostaneme časy **najskôr možných počiatkov** vo všetkých vrcholoch až po vrchol koncový. Čas $TM_9 = 34$ predstavuje **najskôr možný** (minimálny) **čas ukončenia celého projektu T_n** .



Obr.9.13a Určenie doby trvania projektu

Zistíme vo všetkých vrcholoch aj hodnoty najneskôr možných koncov činností a uríme kritickú cestu, ktorá začína v počiatočnom vrchole U_1 , prechádza cez vrcholy U_4 , U_5 , U_6 a U_8 do koncového vrcholu U_9 . Kritickú cestu tvoria preto činnosti $(1 - 4)$, $(4 - 5)$, $(5 - 6)$, $(6 - 8)$ a $(8 - 9)$ a je zrejmé že súčet časov ich trvania musí byť rovný **času trvania celého projektu**.



Obr.9.13b Určenie časov najneskôr možných počiatkov a kritickej cesty.

Rozsiahlejšie problémy samozrejme neriešime priamo v grafe, ale s výhodou využívame výpočtovú techniku. Počet uzlov sieťového grafu a hodnoty jednotlivých hrán sú uložené v známej **incidenčnej matici**. Pribeh samotného výpočtu znázornujeme v tzv. **incidenčnej tabuľke** (tab.9.3) s uvedenými hodnotami časov jednotlivých činností.

Tab.9.3 Riešenie sieťového grafu CPM v incidenčnej tabuľke

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TP _i
1	X	4	3	4	5					0
2		X					16			6
3			X			7	0			12
4				X	5					4
5					X	10				9
6						X		5		19
7							X	2	3	22
8								X	10	24
9									X	34
TM _i	0	4	3	4	9	19	20	24	34	X

Výpočtový postup: v incidenčnej tabuľke najskôr určujeme hodnoty TM_j tak, že v prvom stĺpci určíme hodnotu $TM_1 = 0$ a v ďalších stĺpcoch postupne zapisujeme ako hodnotu TM_j určený maximálny súčet podľa (9.9b) v tvare $\max(TM_i + t_{ij})$ vždy pre konkrétny stĺpec.

Hodnoty TP_i určujeme tak, že do riadku koncového vrcholu priradíme hodnotu $TM_k = T_n$ a spätne hodnotám TP_i priradíme minimálne rozdiely podľa (9.9d), t.j. $\min (TP_j - t_{ij})$ určené vždy v príslušnom riadku.

Po ukončení spätného chodu musí byť v počiatočnom vrchole hodnota $TP_1 = 0$. Porovnaním hodnôt TP_i a TM_j pre všetky vrcholy určíme sled vrcholov a činnosti ležiace na kritickej ceste.

Poznámka: Uvedený postup implicitne ukazuje na nutnosť splnenia požiadavky na správne číslovanie vrcholov ($i < j$). Pri jej nedodržaní, by totiž k uloženiu hodnôt hrán nestačila iba horná trojuholníková matica a výpočet by nebolo možné viesť jednoznačne (dopredne pri určovaní TM_j alebo spätne pre TP_i).

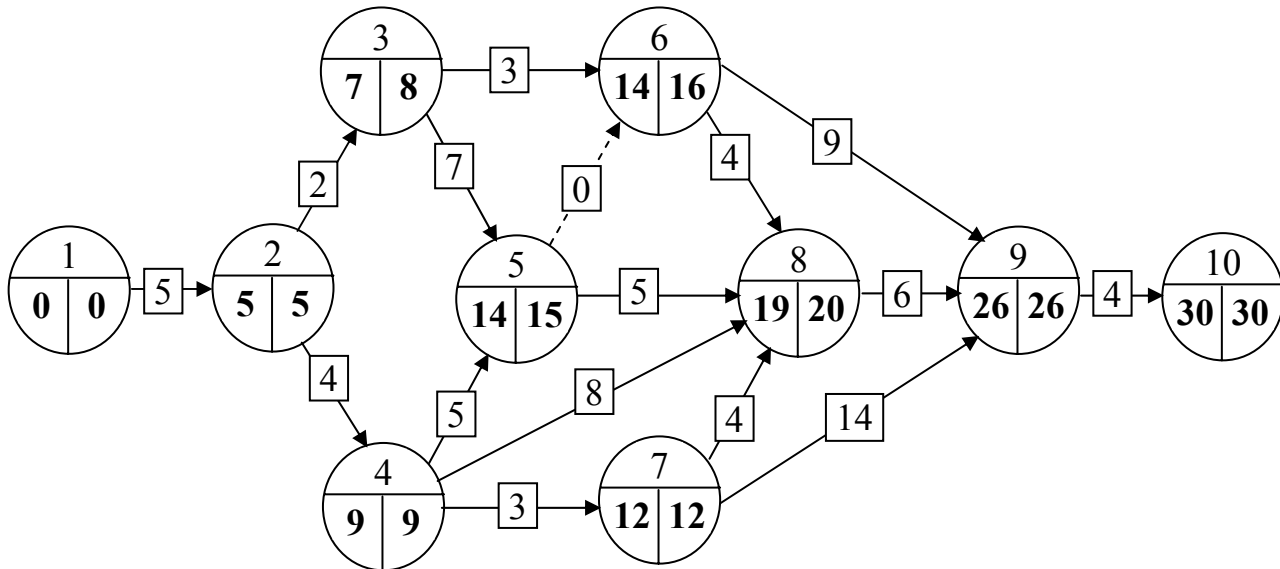
Príklad 9.3: Úlohou je zabezpečiť stavbu výrobnéj haly a montáž zariadenia v nej. Na základe rozboru technologického procesu bol spracovaný hrubý zoznam činností a boli určené doby ich trvania (tab.9.4). Zostavte časovo orientovaný sieťový graf podľa zoznamu činností, metódou CPM určte najskôr možné počiatky TM a najneskôr možné konce TP jednotlivých činností, minimálny možný čas trvania projektu T_{min} a kritickú cestu a vykonajte rozbor časových rezerv.

Tab.9.4 Zoznam činností projektu a doby trvania jednotlivých činností.

Číslo činnosti	Názov činnosti	Doba trvania činnosti
1 – 2	Investičná úloha	5
2 – 3	Projektovanie strojovej časti	2
2 – 4	Projektovanie stavebnej časti	4
3 – 5	Montáž kotevných zariadení	7
3 – 6	Objednávka a dodanie strojového zariadenia	3
4 – 5	Základné bloky strojov	5
4 – 7	Dodanie strešných prefabrikátov	3
4 – 8	Steny priečne	8
5 – 6	Fiktívna činnosť	0
5 – 8	Ostatné stavebné práce	5
6 – 8	Montáž strojového zariadenia	4
6 – 9	Pripojenie energie	9

7 – 8	Dodávka materiálu	4
7 – 9	Steny pozdĺžne	14
8 – 9	Zastrešenie	6
8 - 10	Skúšobná prevádzka	4

Riešenie : Časovo orientovaný sieťový graf pre zadaný projekt je uvedený na obr.9.14



Obr.9.14 Určenie minimálneho možného času trvania projektu a kritickej cesty.

Výsledky výpočtu najskôr možných počiatkov činností TM a najneskôr možných koncov činností TP v incidenčnej matici a určenie kritickej cesty sú uvedené v *tab.9.5*.

Tab.9.5 Výpočet sieťového grafu pomocou incidenčnej matice

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TP _i
1	X	5									0
2		X	2	4							5
3			X		7	3					8
4				X	5		3	8			9
5					X	0		5			15
6						X		4	9		16
7							X	4	14		12
8								X	6		20
9									X	4	26
10										X	30
TM _i	0	5	7	9	14	14	12	19	26	30	

Z hodnoty $TM_{10} = T_{\min}$ zistíme predpokladaný minimálny čas trvania projektu $T_{\min} = 30$ časových jednotiek. Kritická cesta vedie cez uzly, v ktorých sú hodnoty TM a TP rovnaké tzn. **kritická rezerva v týchto uzloch je nulová**. V našom prípade kritická cesta prechádza cez vrcholy

$$KC = V_1 - V_2 - V_4 - V_7 - V_9 - V_{10}.$$

Tab.9.6 Výpočet časových rezerv

Činnosť i - j	t _{ij}	i		j		RC _{ij}	RV _{ij}	RN _{ij}	RZ _{ij}	R _i
		TM _i	TP _i	TM _j	TP _j					
1 - 2	5	0	0	5	5	0	0	0	0	0
2 - 3	2	5	5	7	8	1	0	0	1	0
2 - 4	4	5	5	9	9	0	0	0	0	0
3 - 5	7	7	8	14	15	1	0	-1	0	1
3 - 6	3	7	8	14	16	6	4	3	5	1
4 - 5	5	9	9	14	15	0	0	0	1	0
4 - 7	3	9	9	12	12	0	0	0	0	0
4 - 8	8	9	9	19	20	3	2	2	3	0
5 - 6	0	14	15	14	16	2	0	-1	1	1
5 - 8	5	14	15	19	20	1	0	-1	0	1
6 - 8	4	14	16	19	20	2	1	-1	0	2
6 - 9	9	14	16	26	26	3	3	1	1	2
7 - 8	4	12	12	19	20	4	3	3	4	0
7 - 9	14	12	12	26	26	0	0	0	0	0
8 - 9	6	19	20	26	26	1	1	0	0	1
9 - 10	4	26	26	30	30	0	0	0	0	0

9.6 Metóda CPM – GE

Metódou CPM určenou pre plánovanie projektov zložitých navzájom závislých procesov je možné určiť činnosti, ktoré sú pre uskutočnenie akcie z hľadiska časového kritického – sled hrán tvoriacich kritickú cestu a pre ostatné činnosti dokáže vyčíslit' jednotlivé druhy rezerv. Základná verzia CPM však neumožňuje objektívne a účelne prerozdeliť identifikované rezervy (uzlové či hranové) na tie činnosti, ktoré sú pre dodržanie termínu ukončenia projektu rozhodujúce.

Nevýhoda základnej verzie CPM: všetky elementárne činnosti uvažuje z hľadiska dôležitosti pre úspešnú realizáciu projektu na rovnakej úrovni. Znamená to, že rovnakú dôležitosť prisudzuje činnosti fiktívnej (ktorá reálne vôbec neexistuje), ako činnosti objektívne najdôležitejšej.

Uvedené nevýhody určitým spôsobom redukuje tzv. metóda **CPM–GE** (General Electric). Princíp modifikácie spočíva v tom, že okrem odhadnutého / skalkulovaného času trvania t_{ij} každej elementárnej činnosti (príp. ďalších údajov – náklady, spotreba materiálu, počet pracovných síl, nasadená mechanizácia a pod.) je možné každej činnosti priradiť jej významnosť a to formou tzv. **preferenčného čísla w_{ij}** .

Preferenčné čísla obvykle definujeme z intervalu (0 až 9) podľa nasledovných pravidiel:

- $w_{ij} = 0$ – pre fiktívnu činnosť,
- $w_{ij} = 1$ – pre činnosti najľahšie splniteľné a preto aj obvykle menej dôležité pre realizáciu celého projektu; ďalšie hodnoty až po
- $w_{ij} = 9$ – pre rozhodujúce činnosti, u ktorých je najväčšie riziko nedodržania stanovených časov.

Práve preferenčné čísla w_{ij} umožnia rezervy v grafe prerozdeliť na tie činnosti, ktoré sú pre realizáciu projektu dôležité a tak zabezpečiť, čo najreálnejší priebeh realizácie projektu.

Základný postup riešenia projektu metódou CPM–GE:

1. Sieťový graf vyriešime klasicky metódou CPM, tzn. prečísľujeme vrcholy grafu, určíme všetky najskôr možné počiatky činností TM_j a najneskôr možné konce TP_i , určíme minimálny možný čas trvania projektu T_{\min} , sled hrán tvoriacich KC a kvantifikujeme celkové rezervy CR_{ij} .
2. Každéj činnosti priradíme preferenčné číslo $w_{ij} \in (0, 9)$, podľa jej dôležitosti v projekte.
3. Pomocou preferenčných čísel w_{ij} určíme tzv. **pomocné hodnoty G_j a H_j** pomocou vzťahov:

$$G_k = 1 \quad ; \quad G_i = \max_j (G_j + w_{ij}) \quad ; \quad H_j = \max_i w_{ij} \quad (9.11)$$

4. Využitím hodnôt G_j a H_j určíme časy TS_j – t.j. **skutočné časy počiatkov činností** v jednotlivých uzloch podľa vzťahov

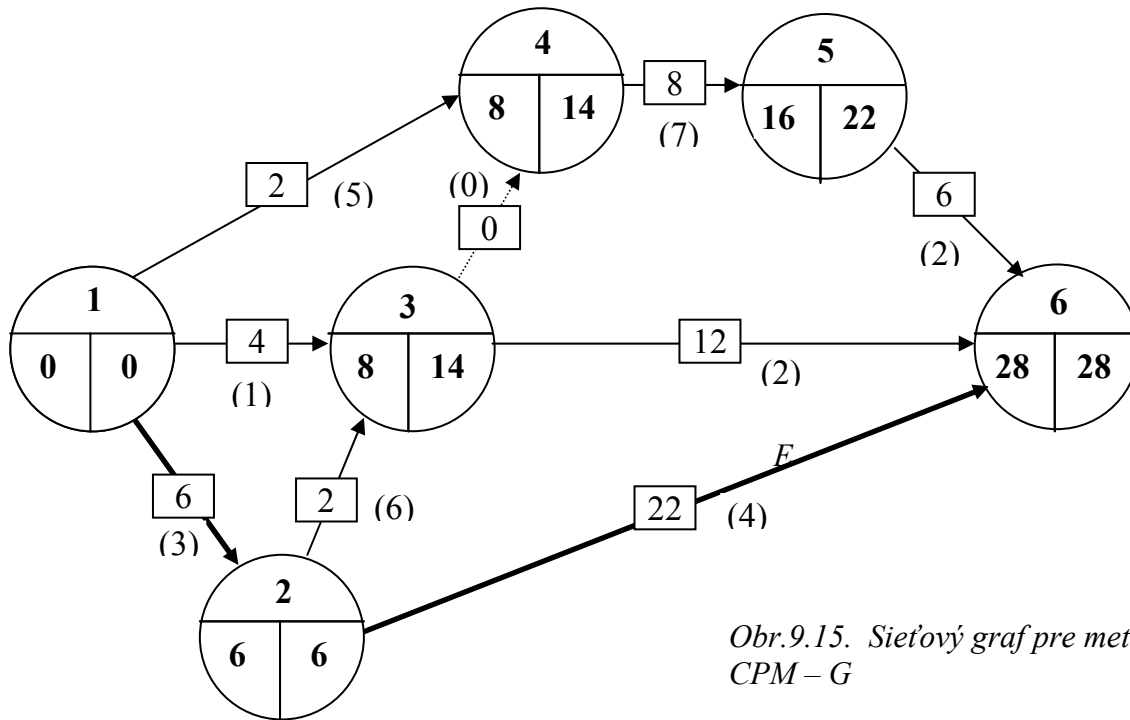
$$TS_1 = 0 \quad ; \quad TS_j = \max_i \left[\frac{(TS_i + t_{ij}) \cdot G_j + TP_j \cdot H_j}{G_j + H_j} \right] \quad (9.12)$$

5. Vypočítame prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti, odpovedajúce ich preferenciám na základe vzťahu

$$SR_{ij} = TS_j - TS_i - t_{ij} \quad . \quad (9.13)$$

Príklad 9.4: Pre sieťový graf podľa obr.9.15 prerozdelite rezervy pomocou metódy CPM-GE. Preferenčné čísla pre jednotlivé činnosti sú uvedené pri hrane v zátvorke.

Riešenie :



Obr.9.15. Sieťový graf pre metódu CPM – G

Poznámka: Čísla v štvorčekoch na jednotlivých hranách znamenajú časy trvania príslušných činností t_{ij} a hodnoty uvedené bez rámečka v zátvorke pri hrane prezentujú určené preferenčné čísla w_{ij} .

1. Príslušné časy TM_j a TP_i , ako aj kritická cesta sú uvedené v sieťovom grafe (Obr.9.15). Vypočítané celkové rezervy CR_{ij} sú spolu s časmi TM a TP uvedené v tabuľke (tab.9.7b).
2. Preferenčné čísla w_{ij} boli určené hodnotami v Obr.9.15, t.j. číslo na hrane v zátvorke, napr. (3).
3. Určenie hodnôt G_j a H_j pre jednotlivé vrcholy je vhodné vykonať v incidenčnej tabuľke (matici) preferenčných hodnôt w_{ij} (tab.9.7a), pričom postup ich výpočtu je nasledovný :
 - hodnoty H_j sa určujú jednoducho tak, že v každom stĺpci nájdeme maximálne preferenčné číslo w_{ij} a napíšeme ho priamo ako príslušnú hodnotu H_j ,
 - hodnoty G_i určujeme spätným chodom tak, že koncovému uzlu (v našom prípade uzol U_6) priradíme hodnotu $G_6 = 1$ a ostatné hodnoty G_i určujeme ako maximálny súčet hodnoty G_j a preferenčného čísla w_{ij} v každom riadku.

Konkrétne v tomto prípade je v 5. riadku takýto súčet jediný ($w_{56} + G_6 = 3 = G_5$) a takisto v 4.riadku ($w_{45} + G_5 = 10 = G_4$). V 3.riadku už existujú tieto súčty dva ($w_{34} + G_4 = 10$ a $w_{36} + G_6 = 3$). Ako hodnotu G_3 zoberieme väčšiu z nich, tzn. $G_3=10$. Analogicky pre 2. riadok $G_2 = \max(16, 5) = 16$ a pre prvý riadok $G_1 = \max(19, 11, 15) = 19$.

Tab.9.7a Incidenčná tabuľka preferenčných čísel.

i	j	1	2	3	4	5	6
1		X	3	1	5		
2			X	6			4
3				X	0		2
4					X	7	
5						X	2
6							X
G_j		19	16	10	10	3	1
H_j		-	3	6	5	7	4

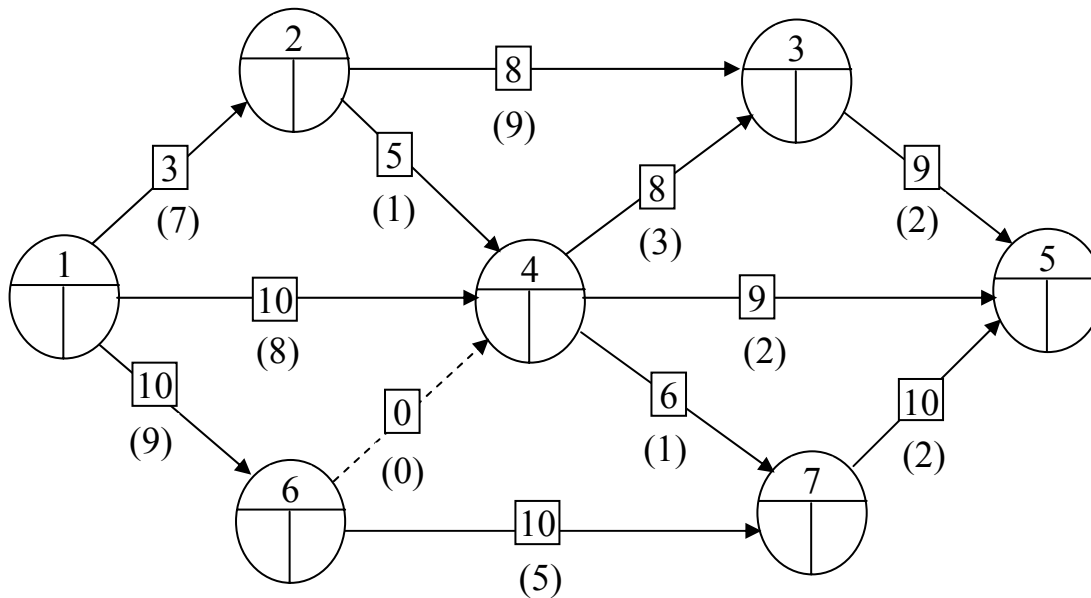
4. Príslušné výpočty skutočných časov TS_j počiatkov činností začínajúcich v jednotlivých uzloch vykonávame podľa podobných pravidiel ako časy najskôr možných počiatkov TM v základnej metóde CPM s tým rozdielom, že sa určujú podľa vzťahu (9.12). Výsledné hodnoty riešeného príkladu sú uvedené v *tab.9.7b*

Tab.9.7b Riešenie siete metódou CPM – GE

Činnosť		t _{ij}	w _{ij}	i		j		CR _{ij}	G _j	H _j	TS _j	SR _{ij}
i	j			TM _i	TP _i	TM _j	TP _j					
1	2	6	3	0	0	6	6	0	16	3	6	0
1	3	4	1	0	0	8	14	10	10	6	10,25	6,25
1	4	2	5	0	0	8	14	12	10	5	11,5	9,25
2	3	2	6	6	6	8	14	6	10	6	10,25	2,25
2	6	22	4	6	6	28	28	0	1	4	28	0
3	4	0	0	8	14	8	14	6	10	5	11,5	1,25
3	6	12	2	8	14	28	28	8	1	4	28	0
4	5	8	7	8	14	16	22	6	3	7	21,25	1,75
5	6	6	2	16	22	28	28	6	1	4	28	0

Príklad 9.5: Projekt obnovy poškodeného mosta je rozdelený do 7 hlavných činností, ktorých logická nadväznosť, časové trvanie a preferencie sú na obr.9.16a. Úlohou je:

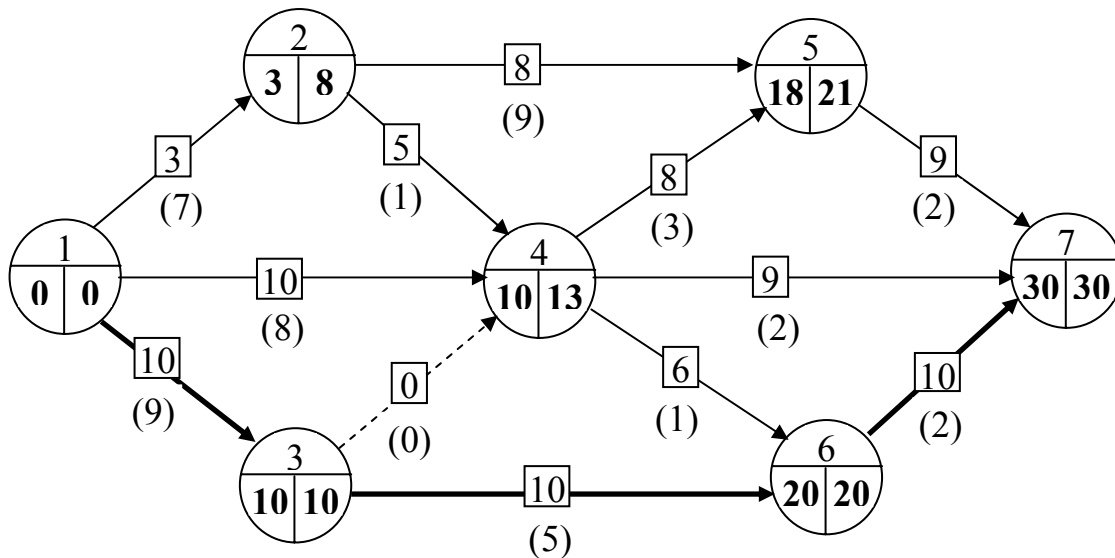
1. prečíslovať vrcholy,
2. metódou CPM určiť najskôr možné počiatky činností TM_j a najneskôr možné konce činností TP_i , minimálny možný čas trvania projektu T_{min} a kritickú cestu KC výpočtom priamo v grafe a tiež výpočtom v incidenčnej matici,
2. metódou CPM–GE určiť pomocné hodnoty G_j a H_j výpočtom v incidenčnej matici,
3. určiť celkovú časovú rezervu CR_{ij} pre každú jednu činnosť, skutočné časy počiatkov TS_j činností v jednotlivých uzloch a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti RS_{ij} .



Obr.9.16a Sieťový graf úlohy

Riešenie :

1. Prečíslovanie vrcholov, hodnoty vypočítaných najskôr možných počiatkov a najneskôr možných počiatkov jednotlivých činností a určenie kritickej cesty sú uvedené v grafe na obr.9.16b.



Obr.9.16b Prečíslovanie vrcholov a určenie časov TM_{ij} a TP_{ij} .

Minimálny možný čas realizácie projektu je $T_{\min} = 30$ a kritická cesta $KC = U_1 - U_3 - U_6 - U_7$.

1. Výpočet sieťového grafu
v incidenčnej matici

i	j	1	2	3	4	5	6	7	TP _i
1		X	3	10	10				0
2			X		5	8			8
3				X		0	10		10
4					X	8	6	9	13
5						X		9	21
6							X	10	20
7								X	30
TM _i		0	3	10	10	18	20	30	

2. Výpočet pomocných hodnôt
G_j a H_j pomocou incidenčnej
tabuľky preferencií

i	j	1	2	3	4	5	6	7
1		X	7	9	8			
2			X		1	9		
3				X	0		5	
4					X	3	1	2
5						X		2
6							X	2
7								X
G_j		19	12	8	6	3	3	1
H_j		-	7	9	8	9	5	2

3. Celkové časové rezervy pre každú činnosť CR_{ij} , skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch TS_j a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti RS_{ij} :

i - j	t_{ij}	w_{ij}	i		j		G_j	H_j	CR_{ij}	TS_j	SR_{ij}
			TM_i	TP_i	TM_j	TP_j					
1-2	3	7	0	0	3	8	12	7	5	4	1
1-3	10	9	0	0	10	10	8	9	0	10	0
1-4	10	8	0	0	10	13	6	8	3	11	1
2-4	5	1	3	8	10	13	6	8	5	11	2
2-5	8	9	3	8	18	21	3	9	10	18	8
3-4	0	0	10	10	10	13	6	8	3	11	1
3-6	10	5	10	10	20	20	3	5	0	20	0
4-5	8	3	10	13	18	21	3	9	3	20	1
4-6	6	1	10	13	20	20	3	5	4	18	3
4-7	9	2	10	13	30	30	1	2	11	26	10
5-7	9	2	18	21	30	30	1	2	3	29	1
6-7	10	2	20	20	30	30	1	2	0	30	0

Pri reálnej aplikácii CPM väčšinou nevystačíme s jedným sieťovým grafom na jednej úrovni. Pri plánovaní zložitých rozsiahlych projektov sa v hlavnom grafe uvádzajú iba významné etapy projektu, ktoré sa ďalej detailne rozpracúvajú v ďalších čiastkových sieťových grafoch.

Základné pojmy zo sieťovej analýzy:

1. **Projekt** – súbor konkrétnych elementárnych činností so vzájomnými časovými a logickými väzbami týkajúcimi sa ich realizácie
2. **Elementárna činnosť (aktivita)** – jednotlivá (z hľadiska zvoleného pohľadu a podrobnosti analyzovania projektu) už ďalej nedeliteľná aktivita, ktorú je nutné vykonať pre úspešnú realizáciu celého projektu
3. **Sieťová analýza** – nástroj pre riadenie projektov, zaoberá sa vyhodnocovaním kvality projektov z rôznych hľadísk – najčastejšie z hľadiska doby trvania projektu, celkových nákladov na projekt a potrebných zdrojov pre realizáciu projektu.
4. **Časová analýza projektu** – zistenie najkratšej možnej doby realizácie celého projektu vrátane rozloženia jednotlivých činností v čase a zistenie ich prípadných časových rezerv.
5. **Nákladová analýza** – zistenie konkrétnych nákladových charakteristík projektu, najmä tzv. nákladovej krivky projektu, t.j. závislosti celkových nákladov na dobe trvania projektu.
6. **Zdrojová analýza projektu** – analýza úrovne a rozloženia čerpania zdrojov potrebných pre vykonanie jednotlivých elementárnych činností počas realizácie projektu, napr. s cieľom čo najrovnomernejšieho využitia zdrojov alebo stanovenie minimálnej doby trvania projektu za predpokladu obmedzenia možností paralelného nasadenia určitých zdrojov.

7. **Fiktívna činnosť** – fiktívna hrana sieťového grafu, ktorá sa v reálnom projekte nevyskytuje, ale jej použitie pri tvorbe SG je nutné pre znázornenie požadovaných väzieb jednotlivých činností.
8. **Kritická činnosť** – elementárna činnosť v projekte, ktorej predĺžením o ľubovoľný počet časových jednotiek dôjde aj k predĺženiu celého projektu o rovnaký počet časových jednotiek, t.j. činnosť s nulovou časovou rezervou.
9. **Kritická cesta** – sled kritických činností medzi zdrojom a ústím sieťového grafu; je to najdlhšia možná cesta medzi zdrojom a ústím sieťového grafu.
10. **Časová rezerva činnosti** – čas, o ktorý je možné maximálne oneskoriť začiatok danej činnosti alebo predĺžiť túto činnosť tak, aby nedošlo k predĺženiu celého projektu (rozlišujeme celkovú, voľnú, závislú a nezávislú časovú rezervu činnosti).
11. **CPM (Critical Path Method)** - metóda kritickej cesty pre časovú analýzu projektov, ktorá predpokladá, že všetky časové údaje o dobe trvania jednotlivých elementárnych činností sú deterministické (t.j. jednoznačne určené a nepredpokladá sa s možnosťou ich zmeny).
12. **PERT (Program Evaluation and Review Technique)** – pravdepodobnostná metóda pre časovú analýzu projektov, v ktorej sa všetky časové údaje o dobe trvania jednotlivých elementárnych činností považujú za náhodné veličiny (t.j. hodnoty určené na základe istého rozdelenia pravdepodobnosti, obvykle uvažované ako určitý interval hodnôt).