

ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta špeciálneho inžinierstva



Doc. Ing. Jozef KOVAČIK, CSc.

Ing. Martin BENIAČ, PhD.

PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ PRE ŠPECIÁLNE INŽINIERSTVO

Druhé doplnené a upravené vydanie

*Určené pre študijné odbory Bezpečnostný manažment, Špeciálny manažment,
Doprava v krízových situáciách a Záchranné služby.*

Vydala Žilinská univerzita
2005

Recenzenti: prof. Ing. Norbert Szuttor, DrSc.
doc. Ing. Josef Reitšpís, PhD.

Schválila edičná rada ŽU v Žiline výmerom číslo

© J.Kovačik, M.Beniač, 2004

ISBN 80-8070-433-3

OBSAH

PREDSLOV

PREHLAD POUŽITÝCH SYMBOLOV A JEDNOTIEK

1. CIEĽ, ÚLOHY A ZÁKLADNÉ POJMY NÁUKY O PRUŽNOSTI A PEVNOSTI.....	11
1.1 Vonkajšie a vnútorné sily.....	12
1.2 Metóda mysleného (fiktívneho) rezu.....	13
1.3 Druhy namáhania telies.....	15
1.3.1 Prostý ťah (tlak).....	17
1.3.2 Prostý šmyk.....	17
1.3.3 Prostý krut.....	18
1.3.4 Prostý ohyb.....	19
1.4 Napätie a druhy napätia.....	19
1.5 Pomerné predĺženie.....	21
1.6 Uhlové pretvorenie.....	22
1.7 Hookov zákon.....	23
1.8 Vplyv zmeny teploty.....	28
1.9 Priečne zúženie. Poissonova konštanta.....	29
1.10 Príklady.....	30
 2. VÝPOČET A KONTROLA PRÚTOV NAMÁHANÝCH NA ŤAH (TLAK)	 33
2.1 Predpoklady výpočtu.....	33
2.2 Výpočet prúta na prostý ťah (tlak).....	34
2.3 Pevnostná kontrola a dimenzovanie prútoV namáhaných na ťah (tlak).....	38
2.3.1 Metóda dovolených napätí.....	38
2.3.2 Metóda dovolených zaťažení.....	39
2.3.3 Metóda medzných stavov.....	40
2.4 Príklady.....	42

3. NAPÄTOSŤ, DEFORMÁCIA A ICH VZÁJOMNÉ SÚVISLOSTI.....	49
3.1 Napätosť a druhy napätosti.....	49
3.1.1 Priamková napätosť.....	52
3.1.2 Rovinná napätosť.....	56
3.1.3 Priestorová napätosť.....	60
3.2 Súvislosť medzi deformáciami a napätosťou v bode telesa.....	62
3.2.1 Rovnice elasticity.....	62
3.2.1.1 Rovnice elasticity pre priamkovú napätosť.....	62
3.2.1.2 Rovnice plasticity pre rovinnú napätosť.....	63
3.2.1.3 Rovnice plasticity pre priestorovú napätosť.....	64
3.2.2 Zmena objemu. Hodnota Poissonovej konštanty.....	66
3.3 Príklady.....	68
4. PROSTÉ NAMÁHANIE NA ŠMYK (STRIH).....	75
4.1 Podmienky pevnosti a dovolené namáhanie v šmyku.....	75
4.2 Navrhovanie a posudzovanie na prostý šmyk.....	76
4.2.1 Výpočet a kontrola nitov a skrutiek.....	77
4.2.2 Výpočet a kontrola zvarov.....	80
4.2.2.1 Tupé zvary.....	80
4.2.2.2 Kútové zvary.....	82
4.3 Príklady.....	83
5. CHARAKTERISTIKY ROVINNÝCH PRIEREZOV POMOCOU KVADRATICKÝCH MOMENTOV.....	87
5.1 Kvadratický moment (zotrvačnosti) plochy vzhľadom na os.....	88
5.2 Polárny moment zotrvačnosti plochy.....	89
5.3 Deviačný moment plochy.....	91
5.4 Kvadratický moment plochy k rovnobežne posunutým osiam.....	92
5.5 Postup pri výpočte kvadratických momentov plôch.....	94
5.6 Príklady.....	95
6. PROSTÉ NAMÁHANIE NA KRUT.....	99
6.1 Výpočet napätia a uhol skrútenia kruhových hriadeľov.....	100
6.2 Výpočet krútenia hriadeľov nekruhového prierezu.....	104
6.3 Príklady.....	105

7. OHYB PRIAMÝCH NOSNÍKOV	109
7.1 Pohyblivé bremeno a sústava pohyblivých bremien – vplyvové čiary priamych staticky určitých nosníkov	110
7.1.1 Vplyvové čiary na prostom nosníku	110
7.1.1.1 Vplyvové čiary reakcií	110
7.1.1.2 Vplyvová čiara priečných síl	112
7.1.1.3 Vplyvová čiara ohybových momentov	113
7.1.2 Vplyvové čiary na votknutom nosníku	114
7.2 Normálové napätia v ohýbanom nosníku	116
7.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku	122
7.4 Nosníky s rovnakou pevnosťou	126
7.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe	127
7.5.1 Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary	127
7.5.2 Mohrova metóda výpočtu deformácie nosníka	129
7.6 Príklady	133
8. KOMBINOVANÉ NAMÁHANIE	141
8.1 Kombinované namáhanie v tlaku a ohybe	142
8.2 Kombinované namáhanie na ohyb a krútenie	147
8.3 Príklady	149
9. STABILITA A NAMÁHANIE NA VZPERNÝ TLAK	153
9.1 Výpočet a kontrola stability polohy telies	154
9.2 Výpočet a kontrola priamych prútov na vzperný tlak v pružnej oblasti	156
9.3 Výpočet kritickej sily v plastickej oblasti	161
9.4 Približné metódy	162
9.5 Príklady	163
10. ÚNAVA MATERIÁLU	167
10.1 Cyklické (kmitavé) napätie a jeho označovanie	167
10.2 Únavový lom	169
10.3 Medza únavy	170
10.4 Faktory ovplyvňujúce medzu únavy	174
10.4.1 Vplyv veľkosti a druhu namáhania	174

10.4.2	Vplyv geometrického tvaru súčiastky.....	176
10.4.3	Vplyv akosti povrchu súčiastky.....	176
10.4.4	Vplyv povrchovej úpravy súčiastky.....	178
10.5	Miera bezpečnosti so zreteľom na cyklické namáhanie.....	178
11.	ZÁKLADY EXPERIMENTÁLNEJ PRUŽNOSTI.....	179
11.1	Predmet, ciele a delenie experimentálnej pružnosti.....	179
11.2	Statické experimentálne merania.....	181
11.3	Dynamické experimentálne merania.....	182
12.	ZÁKLADY TEÓRIE PLASTICITY.....	185
	POUŽITÁ LITERATÚRA.....	191

PREDSLOV

Skriptá Pružnosť a pevnosť sú určené študentom Fakulty špeciálneho inžinierstva ŽU v externej a dennej forme štúdia v odboroch špeciálneho a bezpečnostného manažmentu.

Úlohou predmetu pružnosť a pevnosť, spoločne s ďalšími predmetmi tohto zamerania v špeciálnom inžinierstve je, aby analýza príčin a opatrenia prijímané na riešenie krízových situácií boli efektívne a vždy v súlade s ich fyzikálnou podstatou.

Obsiahnutá látka z pružnosti a pevnosti je rozdelená do 12 kapitol. Okrem nutnej teórie sú vo väčšine kapitol uvedené na ilustráciu vypočítané príklady a zadania príkladov s výsledkami na získanie potrebnej zručnosti.

Štúdium a osvojenie si vedomostí z pružnosti a pevnosti predpokladá znalosti z matematiky a statiky v rozsahu týchto predmetov prednášaných na FŠI ŽU.

Pri spracovaní skrípt sme vychádzali z osnovy predmetov v oboch odboroch štúdia a ustálenej metodiky vyučovania pružnosti a pevnosti na technických vysokých školách. Vodidlom nám boli najmä skriptá SVŠT, resp. STU v Bratislave a VŠDS v Žiline. Snažili sme sa o pragmatický prístup - o čo najjednoduchšie a úsporné objasnenie teórie, jej aplikácie v príkladoch, a o využitie vlastných skúseností z praktickej výučby.

Ďakujeme prof. Ing. Norbertovi Szuttorovi, DrSc. a doc. Ing. Josefovi Reitšpísovi, PhD. za ich starostlivú recenziu a pripomienky.

Autori

PREHLAD POUŽITÝCH SYMBOLOV A JEDNOTIEK

Symbol	Názov	Jednotka
a	dĺžka	[m]
b	šírka	[m]
d	priemer	[m]
e	excentricita	[m]
g	gravitačné zrýchlenie	[m.s ⁻²]
h	výška	[m]
i	polomer momentu zotrvačnosti	[m]
j	jadrová úsečka	[m]
k	stupeň bezpečnosti *	[1]
l	dĺžka	[m]
m	Poissonova konštanta *	[1]
m,n,m',n'	roviny rezu	-
p	všeobecné napätie, pohyblivé spojité zaťaženie	[Pa], [N.m ⁻¹]
q	spojité stále zaťaženie	[N.m ⁻¹]
r	polomer	[m]
t	hrúbka, teplota	[m], [°C]
v	posunutie, rýchlosť, súčiniteľ veľkosti *	[m], [m.s ⁻¹], [1]
x	dĺžka	[m]
x, y, z	súradnice	-
y	dĺžka úseku, priehyb	[m]
A, B	reakcie	[N]
A, B, C, D	body	-
D	priemer	[m]
E	modul pružnosti v ťahu (Youngov)	[Pa]
F	plocha	[m ²]
G	modul pružnosti v šmyku, hmotnosť	[Pa], [kg]
I	moment zotrvačnosti	[m ⁴]
M	moment	[N.m]
N	vnútorná normálová sila	[N]

P	vnútorná všeobecná sila	[N]
Q	sila tiaže	[N]
R	reakcia, súčiniteľ asymetrie cyklu *	[N], [1]
S	vonkajšia sila	[N]
T	tangenciálna sila, tenzor napätia, ťažisko	[N], [Pa], -
W	modul odporu	[m ³]
Z	zemný tlak	[Pa]
a	súčiniteľ teplotnej rozťažnosti, uhol	[°C ⁻¹], [°]
b	súčiniteľ vrubového účinku *, uhol	[1], [°]
e	pomerné predĺženie	[m]
f	uhol	[°]
g	uhol, uhol pretvorenia (skosenia), merná tiaž	[°],[°],[Nm ⁻³]
h	poradnica vplyvovej čiary priečnej sily *, momentu	[1], [m]
g	pomerný uhol skrútenia (skosenia)	[°]
l	štíhlostný pomer *	[1]
l _m	medzná štíhlosť *	[1]
m	miera bezpečnosti *, rez roviny, Poissonovo číslo *	[1], -, [1]
p	Ludolfovo číslo (3,14) *	[1]
r	polomer	[m]
s	normálové napätie	[Pa]
s _k	medza klzu	[Pa]
s _m	medza pevnosti	[Pa]
s _u	medza úmernosti	[Pa]
s _{dov} , t _{dov}	dovolené napätia	[Pa]
t	šmykové napätie	[Pa]
D	zmena (dĺžky.....)	-
F	rovina rezu *, priemer	-, [m]
S	súčet (suma)	-

* - bezrozmerné číslo

1. CIEĽ, ÚLOHY A ZÁKLADNÉ POJMY NÁUKY O PRUŽNOSTI A PEVNOSTI

Pružnosť a pevnosť je všeobecný inžiniersky predmet. Ako súčasť mechaniky (najstaršieho vedného odboru) skúma účinky síl pôsobiacich na telesá. Každé teleso vystavené účinkom vonkajších síl, či zmene teploty sa deformuje – mení svoj tvar a rozmery. Teleso deformáciám odporuje a pritom v ňom vzniká napätie. Aby sa teleso neporušilo, nesmú napätia prekročiť určitú hodnotu. Preto všetky konštrukčné prvky (telesá) musia byť navrhnuté, alebo ak už existujú využívané tak, aby spoľahlivo odolávali pôsobeniu vonkajších síl. Popri tejto rozhodujúcej požiadavke - zabezpečenia normálnej funkcie každého prvku - sa očakáva, že konštrukcia ako celok bude čo najlacnejšia. Požiadavky spoľahlivosti a hospodárnosti si ale navzájom odporujú. Prvá vedie spravidla k zväčšeniu rozmerov, množstva materiálu a výdavkov, druhá k subtilnejším prvkom a znižovaniu výloh za ne. Podklady pre správne riešenie tohto rozporu ponúka náuka o pružnosti a pevnosti.

Cieľom pružnosti a pevnosti je určiť výpočtové vzťahy na vyjadrenie zákonitostí medzi vonkajším zaťažením a optimálnymi rozmermi konštrukčného prvku, ktoré zaručia dostatočnú bezpečnosť a funkciu konštrukcie počas jej zriadenia a prevádzky, pričom:

- *Pružnosťou* nazývame schopnosť pevných telies nadobudnúť po odstránení vonkajšieho zaťaženia pôvodný tvar.
- *Pevnosťou* nazývame schopnosť prvku (konštrukcie) preniesť zaťaženie bez porušenia.

Úlohou pružnosti a pevnosti je skúmať a popísať stav vnútorných síl a pretvorenia telies a ich vzájomné súvislosti v dôsledku pôsobenia vonkajších síl.

Presvedčíme sa, že náuka o pružnosti a pevnosti nazývaná často ako mechanika o vnútorných silách je pomenovanie veľmi výstižné.

Náuka o pružnosti a pevnosti vznikla a rozvíjala sa tak ako ostatné vedné odbory z bezprostredných a praktických potrieb ľudí. Jej vývoj je preto spojený s vývojom ľudskej spoločnosti. Máme len malé vedomosti o tom, aké fyzikálne znalosti mali najstaršie kultúrne národy. Prvý známy vedecký spis je od Galilea Galileiho (1688), profesora matematiky

v Padove, ktorý ako prvý skúmal únosnosť votknutých nosníkov. Lineárnu závislosť medzi napätím a predĺžením zistil Robert Hooke (1660), profesor geometrie na Oxfordskej univerzite. Od objavenia Hookovho zákona, ktorý matematicky vyjadril Thomas Young až v roku 1807 sa datuje začiatok pružnosti a pevnosti ako vedy. Na jej vývoji sa odvtedy podieľali mnohí významní objavitelia, napr. Euler, J. a D. Bernoulli, Coulomb, Navier, Couchy, St. Venant, Žuravskij, Timošenko, Maxwel, Hertz, Mohr, Wöhler, Bažant a iní. Zo slovenských vedcov sa najviac o rozvoj pružnosti a pevnosti zaslúžili: Ľudovít Tetmajer (problémy stability) a Aurel Stodola (kmitanie hriadeľov).

Náuka o pružnosti a pevnosti je v súčasnosti už vnútorne značne štruktúrovaná. Z viacerých kritérií, podľa ktorých sa rozdeľuje, spomeňme delenie:

- podľa rôzneho stupňa presnosti: na matematickú teóriu pružnosti (Pružnosť a pevnosť II.); používa menej zjednodušené predpoklady a technickú (Pružnosť a pevnosť I.), ktorá využíva teoretické výsledky na rýchle riešenie praktických inžinierskych úloh.
- podľa rôznych metód riešenia: na analytickú a experimentálnu pružnosť (vtedy, keď výpočet nie je známy, alebo je príliš zložitý, či časovo alebo finančne náročný).

1.1 Vonkajšie a vnútorné sily

- ♦ Na jednotlivé konštrukčné prvky (telesá) pôsobí celý rad síl, ktoré môžeme rozdeliť do dvoch skupín, na:

- sily vonkajšie,
- sily vnútorné.

Vonkajšie sily možno ďalej deliť podľa rôznych kritérií, napr. na:

- hmotné a povrchové,
- osamelé a spojené zaťaženia,
- statické a dynamické,
- stále a pohyblivé, atď.

Pôsobením síl a ich rovnováhou na dokonale tuhom telese sa zaoberá statika.

Mernou jednotkou osamelej sily pôsobiacej v bode telesa je newton [$1\text{N} = 1\text{ kgms}^{-2}$]. Keď sa sily prenášajú na úzkom páse, vtedy vzťahujeme silu na jednotku dĺžky telesa a meriame ju v [1Nm^{-1}].

V technickej praxi sa vzhľadom na veľkosť týchto merných jednotiek často využívajú ich násobky, napr. $1\text{kN} = 10^3\text{N}$, $1\text{MNm}^{-1} = 10^6\text{Nm}^{-1}$, atď.

- ♦ Prvky konštrukcií menia pôsobením vonkajších síl svoje rozmery a tvar. Tejto zmene sa hovorí **deformácia**, jej veľkosť a druh závisí na štruktúre materiálov.

Všetky *materiály možno rozdeliť do dvoch skupín*, na:

- kryštalické,
- amorfné.

Kryštalické materiály sa skladajú z veľkého počtu malých zŕn. Každé zrno tvorí sústava pravidelne rozložených atómov, ktoré tvoria tzv. kryštalickú mriežku. Naproti tomu *amorfné materiály* nemajú pravidelne usporiadané atómy.

Atómy sa v rovnováhe udržuju navzájom *vnútornými silami*. Vplyvom vonkajších síl sa vzdialenosti medzi atómami menia (teleso sa deformuje), čo je sprevádzané zmenou síl pôsobiacich medzi atómami.

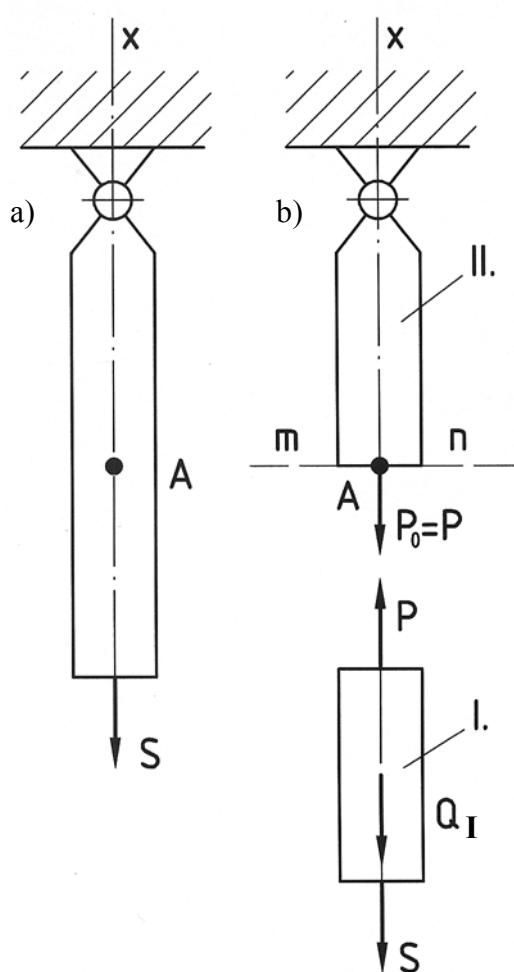
V prvkoch konštrukcie vznikajú teda pôsobením vonkajších síl *doplnkové vnútorné sily*, ktoré pôsobia proti snahe vonkajších síl porušiť konštrukčný prvok alebo meniť jeho tvar. V ďalšom budeme tieto sily nazývať len vnútornými silami.

1.2 Metóda mysleného (fiktívneho) rezu

Aby sa dal číselne charakterizovať druh a účinok vonkajších síl na deformovaný prvok, treba vedieť odmerať ich odozvu vo vnútri prvku - vypočítať veľkosť vnútorných síl. Na to sa v pružnosti a pevnosti používa tzv. metóda myslených (fiktívnych) rezov. Podľa počtu myslených rezov sa metóda delí na:

- metódu jedného rezu, ktorým sa teleso fiktívne rozdelí na dve časti o konečnej veľkosti (vedie k rovnici s jednou neznámou),
- metódu dvoch veľmi blízko seba situovaných rezov (vedie k riešeniu diferenciálnej rovnice prvého rádu),
- metódu troch dvojíc rezov (vedie k riešeniu diferenciálnej rovnice druhého rádu).

Podstatu a použitie metódy mysleného rezu si znázorníme príkladom.



Obr. 1.1

Máme určiť výslednicu vnútorných síl v priečnom reze prúta podľa obr. 1.1. Prút je zaťažný vlastnou tiažou a osovou silou S , pôsobiace na voľnom konci.

Jedným priečnym rezom $\overline{m.n}$, vedeným ľubovoľným bodom A , rozdelíme fiktívne prút na dve časti (obr. 1.1b). Pôsobením síl S a Q_I (vlastná tiaž časti I) by sa časť I prúta začala pohybovať. Vnútorné sily, ktoré pôsobia medzi časticami materiálu v myslenom priereze, bránia vzájomnému pohybu oboch častí a udržiavajú teleso pohromade. Zaťažný prút je v rovnováhe, preto sú v rovnováhe aj časti prúta I a II.

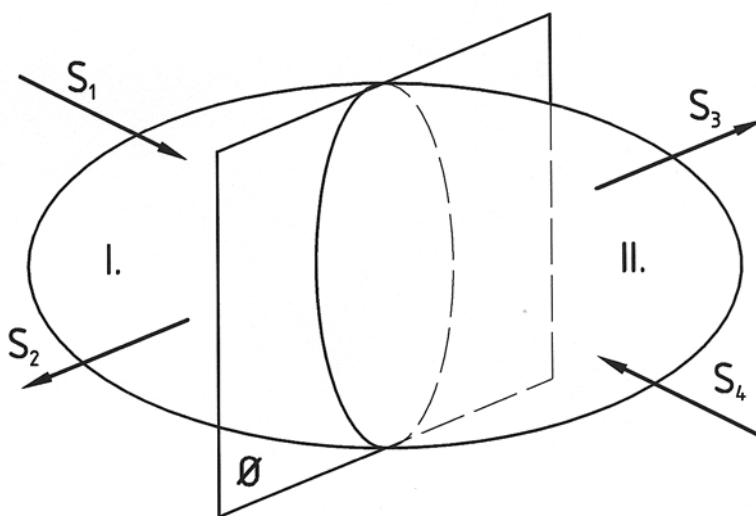
V prípade priameho prizmatického prúta (pravidelného tvaru) ležia sily S , Q_I , P na spoločnej nositeľke. Podľa obr. 1.1b ich rovnováhu vyjadruje rovnica

$$P - Q_I - S = 0$$

Výslednica vnútorných síl P je ekvivalentná v opačnom zmysle pôsobiacim účinkom oddelenej časti II prúta na časť I. Podľa zákona akcie a reakcie pôsobí časť I prúta na časť II silou $P_O = P$.

1.3 Druhy namáhania telies

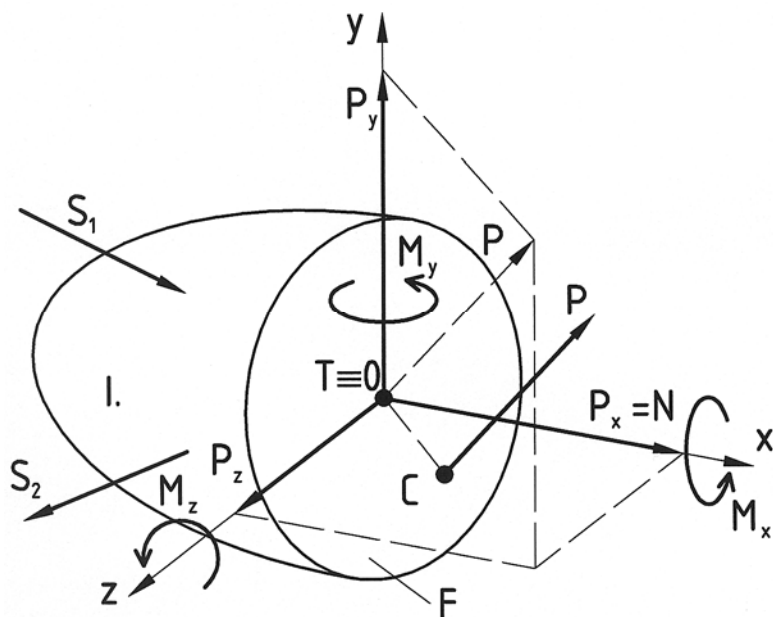
Uvažujme teleso zaťažené všeobecnou priestorovou sústavou síl $S_1, S_2, \dots, S_n$, ktoré sú v rovnováhe (obr. 1.2a). Myslme si toto teleso rozdelené ľubovoľnou rovinou Φ na dve časti s konečnou veľkosťou I a II.



Obr. 1.2a

Výslednica vnútorných síl P a vonkajšie sily tvoria rovnovážnu priestorovú sústavu síl. Vo všeobecnom prípade je smer sily P vzhľadom na rovinu rezu ľubovoľný a jej pôsobisko C nemusí byť totožné s ťažiskom T plochy rezu F .

Preložme vnútornú silu P do ťažiska T mysleneho rezu Φ a rozložme ju do zložiek súradnicových osí x, y, z , z ktorých os x je kolmá na rovinu rezu Φ (obr. 1.2b). Tieto zložky výslednej vnútornej sily sú na obrázku vyznačené P_x, P_y, P_z .



Obr. 1.2b

Ako vieme zo statiky (lit. 9, kap. 2), treba k preloženej sile - aby sa jej účinok na teleso nezmenil, resp. k jej zložkám pripojiť ešte dvojicu síl, ktorej zložky a účinok v súradnicových osiach je M_x, M_y, M_z .

V osobitných prípadoch zaťaženia telies sú z uvedených síl a momentov niektoré nulové. Podľa toho, koľko zložiek je nenulových a ktoré z nich to sú, môžu byť telesá namáhané:

- **Jednoduchým (prostým, čistým) druhom (spôsobom) namáhania na:**

- ťah (tlak),
- šmyk,
- krut,
- ohyb.

Spoločným znakom všetkých druhov jednoduchého namáhania v rovine súmernosti telesa je, že v uvažovanom reze Φ pôsobí len jedna zo zložiek $P_x, (P_y, P_z), M_x, (M_y, M_z)$.

- **Kombinovaným (zloženým) namáhaním.**

O kombinovanom namáhaní hovoríme vtedy, keď v ťažisku prierezu v rovine Φ pôsobí súčasne viac síl a momentov, resp. viac druhov jednoduchého namáhania.

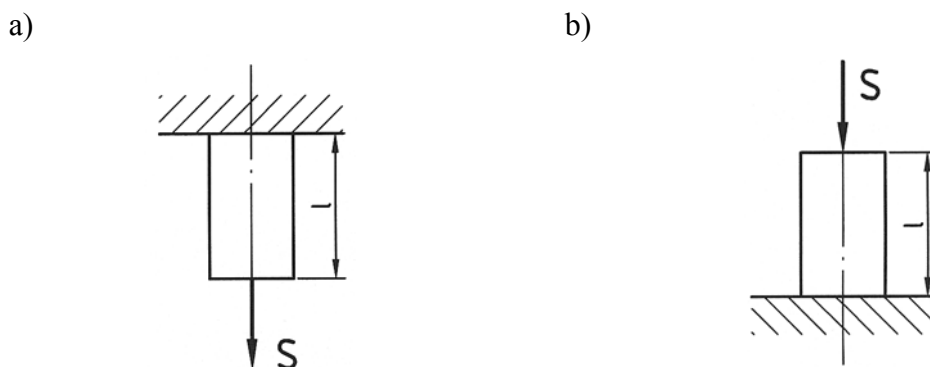
Podrobnejšie sa kombinovaným namáhaním budeme zaoberať až po zoznámení sa s jednoduchými druhmi namáhania (kap. 8).

1.3.1 Prostý ťah (tlak)

O prostom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, keď z uvedených síl a momentov pôsobí (je nenulová) len sila $P_x = N$, kolmá na rovinu rezu Φ .

Najjednoduchším prípadom namáhania na ťah je tenká priama tyč konštantného prierezu, zaťaženej podľa obr. 1.3a osamelou silou S .

Na obr. 1.3b je najjednoduchší prípad namáhania na prostý tlak.



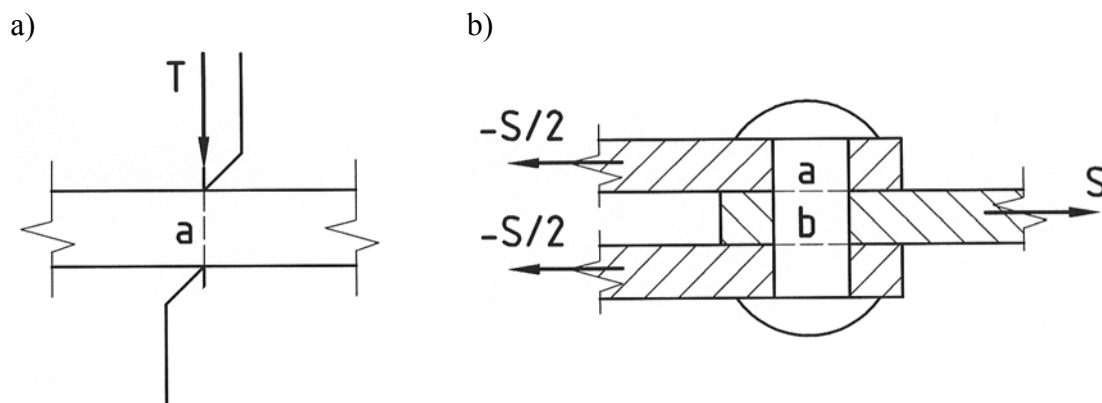
Obr. 1.3

Vieme už, že namáhanie skutočných telies má vždy za následok ich deformáciu (pretvorenie). V prípade ťahu sa teleso predĺži a pri prostom tlaku skráti.

1.3.2 Prostý šmyk

O prostom šmyku hovoríme vtedy, ak zo síl a momentov podľa obr. 1.2b pôsobia len sily P_y a P_z , ktorých nositeľky ležia v reze Φ . Výsledná šmyková sila v reze Φ je daná geometrickým súčtom týchto síl.

Najjednoduchší prípad šmykového namáhania je na z obr. 1.4a (z obr. 1.4a je zrejmé, prečo sa prostý prípad šmyku nazýva tiež namáhaním na strih). Na obrázku 1.4b je uvedený iný praktický prípad namáhania šmykom - v drieku nitu v rezoch a, b.

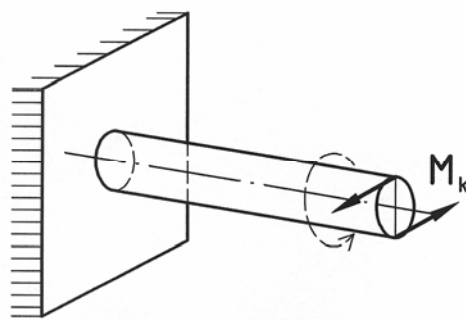


Obr. 1.4

Tomuto prípadu namáhania zodpovedá deformácia posunutia (ustrihnutia) rezu v smere výslednice pôsobiacich síl.

1.3.3 Prostý krut

Prostý krut vznikne vtedy, keď v myslenom reze Φ pôsobí len moment M_x , ktorého rovina pôsobenia je v reze Φ (obr. 1.5). Takto pôsobiaci moment sa nazýva točivým (M_t) alebo krútiacim momentom (M_k).



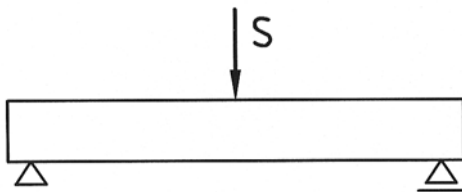
Obr. 1.5

Prostým krutom sú napr. namáhané rôzne hriadele. Deformácia v tomto prípade je charakteristická pootočením (skrútením) dvoch susedných prierezov, rovnobežných s ľubovoľnou rovinou v zmysle pôsobiaceho momentu.

1.3.4 Prostý ohyb

Prostý ohyb vznikne vtedy, keď v myslenom reze Φ pôsobí len moment M_y alebo M_z , prípadne obe zložky momentov súčasne - v takom prípade vznikne šikmý ohyb. Geometrický súčet momentov M_y a M_z sa nazýva **ohybový moment** a označuje sa spravidla M_O .

Jednoduchý príklad namáhania prostým ohybom je znázornený na obr. 1.6.



Obr. 1.6

Ľubovoľný rez Φ je v tomto telese namáhaný ohybovým momentom a priečnou silou, ktorej účinok však často zanedbávame.

Pozn.: Keď tlakom namáhame tyč, malého prierezu, tak tyč niekedy náhle vybočí z osi, prehne sa a nakoniec sa zlomí. Takýto spôsob namáhania tenkých tyčí sa nazýva vzperný tlak (obr. 1.7, bližšie viď. kapitola 9)



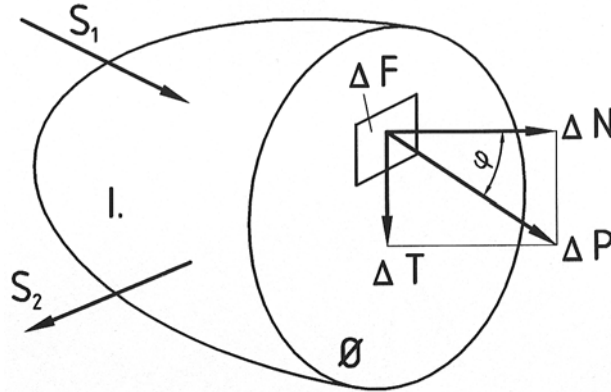
Obr. 1.7

1.4 Napätie a druhy napätia

Vo všeobecnom prípade je spojité rozloženie vnútorných síl v rovine rezu telesa nerovnomerné, čo má za následok aj nerovnomerné namáhanie jeho jednotlivých častí.

Aby sme mohli určiť účinok vnútorných síl zavádzame **pomer vnútorných síl na jednotku prierezovej plochy a nazývame ho napätím**.

Vyberme si veľmi malý element ΔF z plochy Φ na ktorý pôsobí vnútorná sila ΔP (obr. 1.8a) a rozložme túto silu, ktorá môže s normálou roviny zvierat' vo všeobecnosti uhol φ , do normálny a tangenty k ploche Φ .



Obr. 1.8a

Podľa obr. 1.8 platí

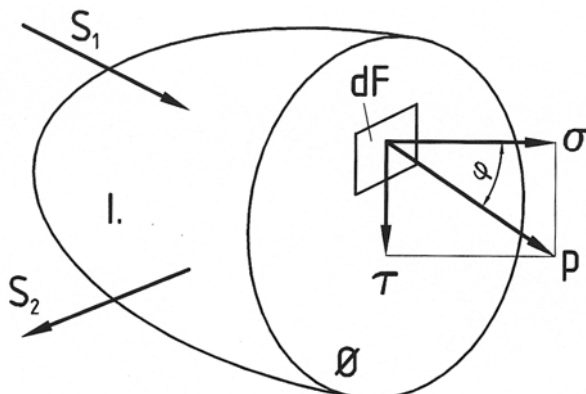
$$\left. \begin{aligned} \Delta N &= \Delta P \cdot \cos \varphi \\ \Delta T &= \Delta P \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Limita pomeru vnútorných síl ΔP , ΔN , ΔT ku ploche ΔF sa nazýva napätím. Smer a zmysel napätia sa zhoduje so smerom a zmyslom sily (rovnice 1.2 a 1.3).

Základnou **mernou jednotkou napätia je 1 Pascal (Pa)**. Veľkosť a rozmer 1 Pa vyplýva z definície napätia:

$[1 \text{ Pa}] = [1 \text{ Nm}^{-2}]$

Napätia v ďalšom texte **budeme označovať písmenami p, σ, τ**. Označenie p budeme používať pre napätie ľubovoľne sklonené k vyšetrovanej ploške, písmenom σ budeme označovať **normálové napätie**, ktoré je kolmé k rovine rezu a písmenom τ **šmykové napätie**, ktoré leží v rovine rezu (obr. 1.8b).



Obr. 1.8b

Jednotlivé napätia sú definované vzťahmi:

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF} \\ \tau &= \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F} = \frac{dT}{dF} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Normálovému napätiu priradujeme na rozlíšenie znamienko *kladné* vtedy, keď zmysel sily ΔN smeruje von z plochy Φ (ako na obr. 1.8a), a nazývame ho ako **napätie ťahové**. Ak je zmysel sily ΔN opačný, priradujeme mu znamienko *mínus*, a takéto napätie **nazývame tlakovým**.

Na zmysle a smere šmykového napätia obvykle nezáleží; záleží iba na jeho veľkosti.

Iné napätie, ako ťahové, tlakové alebo šmykové existovať nemôže - je nemysliteľné! Môžu sa však, ako už vieme, vyskytovať samostatne alebo súčasne.

Ak do rovnice (1.3) dosadíme (z rovníc 1.1) za ΔN a ΔT dostaneme

$$\sigma = p \cdot \cos\varphi \quad (1.4)$$

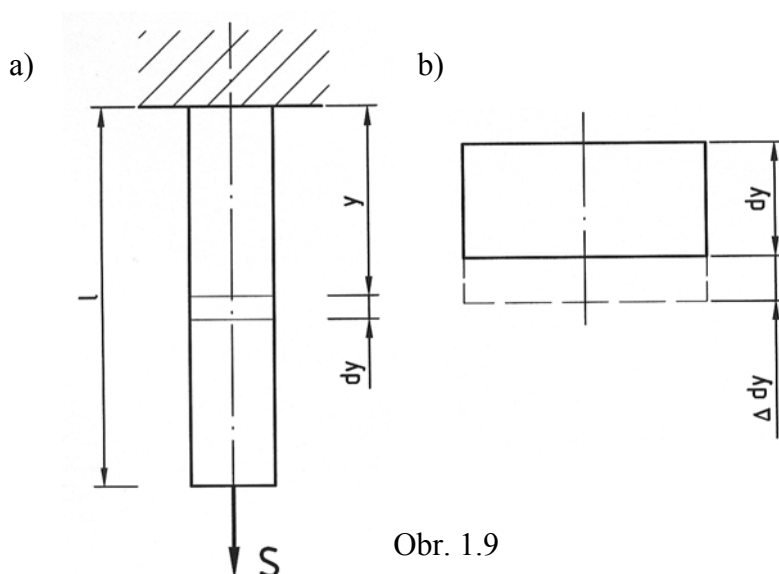
$$\tau = p \cdot \sin\varphi$$

Umocnením a sčítaním oboch rovníc dostaneme

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (1.5)$$

1.5 Pomerné predĺženie

Ak namáhame priamu tyč ťahom (obr. 1.9a), môžeme pozorovať, že sa tyč predlžuje.



Obr. 1.9

Uvažujme nekonečne tenký valček s hrúbkou dy vo vzdialenosti y . Zaťažením silou S sa valček predlží o dĺžku Δdy (obr. 1.9b).

Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy}$$

(1.6)

sa nazýva pomerným predĺžením.

Ak je pomerné predĺženie vo všetkých bodoch prierezu a vo všetkých priečných rezoch rovnaké, môžeme celkové predĺženie tyče vyjadriť vzťahom:

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon dy = \varepsilon \int_0^l dy = \varepsilon l \quad (1.7)$$

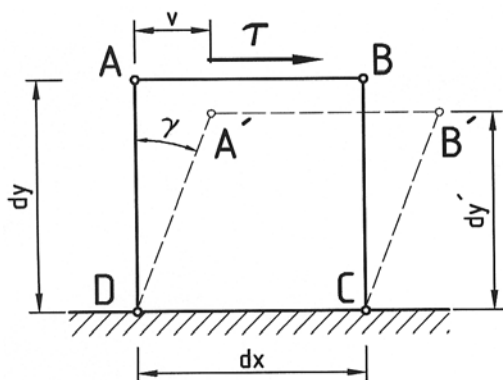
z toho

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.8)$$

Ako vidieť z rovníc 1.6 a 1.8 je pomerné predĺženie *veľičinou bezrozmernou*.

1.6 Uhlové pretvorenie

Uvažujme časticu ABCD s rozmermi dx , dy , dz (obr. 1.10). Častica sa vplyvom šmykových napätí pretvorí. Ak je pretvorenie malé, môžeme zmenu dĺžky dy zanedbať. Posunutie v môžeme potom vyjadriť vzťahom



$$v = \operatorname{tg} \gamma \cdot dy'$$

Ak budeme uvažovať $dy' \doteq dy$ a vezmeme do úvahy, že uhol γ je veľmi malý, možno uvedený vzťah napísať takto:

$$v = \gamma \cdot dy$$

Obr. 1.10

$$\text{Uhol } \gamma = \frac{v}{dy} \quad (1.9)$$

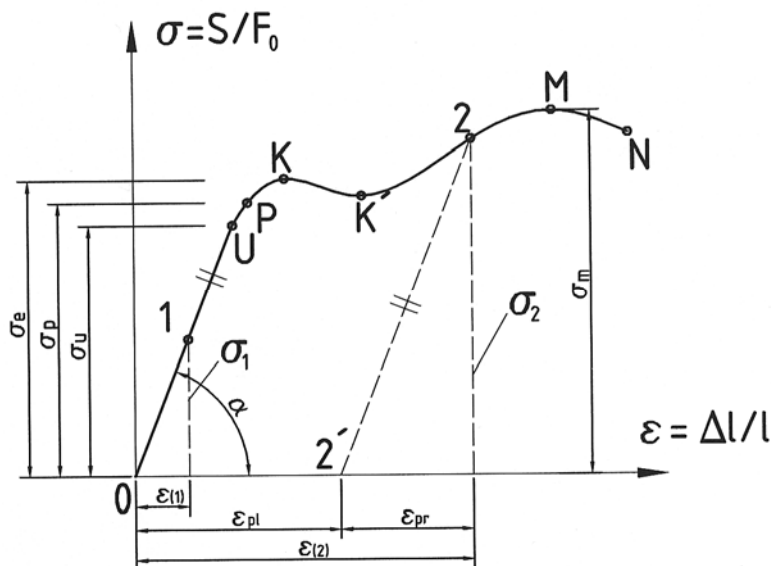
nazývame *uhlovým pretvorením* (skosením). Tak, ako pomerné predĺženie, je aj **uhlové pretvorenie** veličina bezrozmerná.

1.7 Hookov zákon

Pôsobením vonkajších síl sa teleso deformuje. Deformácia má za následok vznik vnútorných síl a im odpovedajúce napätia. *Napätie* je preto *závislé od deformácie*. Na tento vzájomný vzťah majú vplyv mechanické vlastnosti materiálu. Poznatky o mechanických vlastnostiach materiálov sa získavajú pri mechanických skúškach (experimentoch). Jednou z takýchto skúšok je *trhacia skúška ťahom*.

Pri trhacej skúške ťahom sa upnutá tyč normalizovaných rozmerov postupne a plynulo zaťažuje. Počas skúšky sa automaticky zaznamenáva veľkosť zaťaženia a predĺženie skúšobnej tyče. Pri známych rozmeroch tyče (jej ploche F a pôvodnej dĺžke l) možno meraním skutočného predĺženia Δl vypočítať pomerné predĺženie ε od príslušného napätia.

Na obr. 1.11a je diagram napätia a predĺženia mäkkej konštrukčnej ocele.



Obr. 1.11a

Časť diagramu až po bod U má priamkový priebeh, čiže napätie je priamoúmerné predĺženiu.

Napätie prislúchajúce bodu U sa nazýva *napätím na medzi úmernosti* (σ_u).

Napätie na medzi pružnosti σ_p je napätie, po ktoré sú predĺženia v podstate pružné (elastické, vratné).

Napätie σ_K sa nazýva napätím na medzi klzu. Skúšobná tyč s napätosťou väčšou ako σ_K sa začína náhle predlžovať bez zväčšovania napätia. Tento jav sa nazýva klzom (tečením) materiálu. Za tzv. dolnou medzou klzu v bode K' pracovný diagram znova stúpa až po bod M. Najväčšie napätie v bode M sa nazýva napätím na medzi pevnosti a označujeme ho σ_m . Pri pokračujúcej skúške a napätí σ_m sa tyč roztrhne.

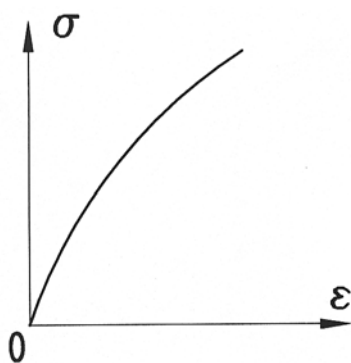
Skúšky dokazujú, že pri postupnom znižovaní napätia sa tyč skracuje, pričom toto skracovanie vystihuje priamka $\overline{22'}$ rovnobežná s priamkovým priebehom diagramu $\overline{01}$ po napätie na medzi úmernosti σ_u ($\overline{0U}$).

Táto priamka pretína os diagramu s hodnotami ε v bode 2'. To dovoľuje definovať celkové pomerné predĺženie tyče pri skúške na ťah, ako

$$\varepsilon = \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{pr}, \quad (1.10)$$

v ktorom ε_{pl} značí *plastickú*, resp. ε_{pr} *pružnú časť pomerného predĺženia*.

Ak sa nedá medza klzu presnejšie zistiť, možno tzv. konvenčnú (dohovorenú) medzu klzu $\sigma_p 0,2$ definovať ako napätie, pri ktorom plastické (trvalé, nevratné) pomerné predĺženie dosahuje max. 0,2%.



Obr. 1.11b

Na obr. 1.11b je diagram ťahovej skúšky liatiny. Liatina patrí medzi látky, ktoré majú veľmi nízku medzu úmernosti a nejasne vyhranenú medzu klzu v ťahu.

Ako vidno na obr. 1.11a **napätie má až po medzu úmernosti σ_u u mnohých látok** (pozor, ale nie všetky látky majú tak zreteľné rozhrania medzi napätia ako konštrukčná mäkká oceľ) **priebeh diagramu pri skúške na ťah (tlak) priamkový.**

Platí teda:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{konšt} \dots (E) \quad (1.11)$$

Touto konštantou je **Youngov modul pružnosti v ťahu ... E**,

čiže $\sigma = \varepsilon \cdot E$ (1.12)

Tento základný zákon pružnosti a pevnosti sa nazýva Hookov zákon. Konštanta E sa nazýva tiež prvou materiálovou konštantou. Pomerné predĺženie závisí (ako vidno z rovnice 1.12) len na druhu materiálu, preto môžeme urobiť dôležitý záver – neexistujú dva rôzne materiály, ktoré by mali rovnaký modul pružnosti!

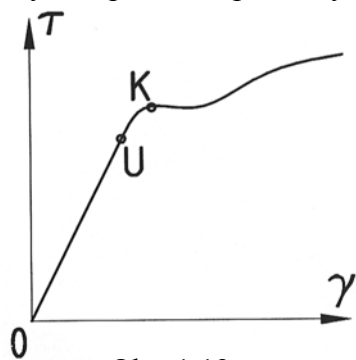
Pretože pomerné predĺženie ε je bezrozmerné číslo, má modul pružnosti v ťahu rovnaký rozmer ako napätie, teda

$$E = [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}] \text{ alebo } [\text{N mm}^{-2}]$$

Z rovnice (1.12) tiež vyplýva veľkosť napätia, resp. význam modulu pružnosti. Youngov modul pružnosti je také (myslené) napätie, ktoré by spôsobilo predĺženie skúšobnej tyče o jej celú pôvodnú dĺžku ($\varepsilon = 1$).

Hodnota modulu pružnosti E pre oceľ je $2,1 \cdot 10^5 \text{ MN m}^{-2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N mm}^{-2}$.

Ak namáhame nejakú látku prostým šmykom môžeme skúškami určiť tiež vzťah medzi šmykovým napätím τ a pomerným skosením γ (obr. 1.12).



Obr. 1.12

Diagram sa podobá diagramu skúšky v ťahu s medzami úmernosti τ_u (bod U), resp. klzu τ_K v šmyku (bod K).

Z diagramu vidieť, že závislosť medzi šmykovým napätím a uhlovým pretvorením (skosením) γ je až do bodu U lineárna.

Po túto medzu teda platí

$$\tau = G \cdot \gamma$$

alebo

(1.13)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Kde G je materiálová konštanta a nazýva sa **modulom pružnosti v šmyku**. Pretože γ je (ods. 1.6) bezrozmerná veličina, má i tento modul (tak ako E) rozmer $[N \cdot m^{-2}]$, resp. $[N \cdot mm^{-2}]$.

Na porovnanie uveďme hodnotu tohto modulu pre oceľ

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN m}^{-2} = 8 \cdot 10^4 \text{ N mm}^{-2}$$

Zisťujeme, že hodnota modulu pružnosti ocele (E_0) je približne 2,6-krát väčšia ako modul pružnosti v šmyku ocele (G_0).

Ak je modul pružnosti určitej látky vo všetkých smeroch rovnaký (oceľ, sklo ...), hovoríme, že *látka je izotropná*. Opakom sú *látky anizotropné* (drevo).

Materiály používané v technickej praxi považujeme (až na výnimky) spravidla za izotropné a *homogénne* (rovnorodé), t. j. také, že majú vo všetkých smeroch rovnaké vlastnosti.

Na ilustráciu hodnôt σ_K a σ_m niektorých ocelí tried 11 až 16 podľa príslušných STN a hodnôt modulu pružnosti niektorých materiálov sú tieto hodnoty uvedené v nasledujúcich tabuľkách.

Hodnoty σ_K , σ_m

Tab. 1.1

Označenie ocele podľa STN *	Najmenšia medza klzu σ_K [MPa]	Medza pevnosti σ_m [MPa]	Označenie ocele podľa STN	Najmenšia medza klzu σ_K [MPa]	Medza pevnosti σ_m [MPa]
11 300	70-80% σ_m	280-400	11 600	300-330	600-720
11 343	180-210	390-420	12 080	1500	1800-2000
11 373	210-240	390-450	13 270	1230	min. 1450
11 423	230-260	420-520	14 220	600	min. 800
11 523	340-360	520-640	16 250	550-600	750-900

* Slovenské technické normy (STN)

Hodnoty modulov pružnosti

Tab. 1.2

Materiál	$10^5 E$ [MPa]	Materiál	$10^5 E$ [MPa]	Materiál	$10^5 E$ [MPa]
Nikel	2,1	Cín	0,43	Pieskovec	0,18
Oceľ	2,1	Olovo	0,21	Betón	0,15-0,25
Meď	1,15	Sklo	0,7	Drevo $\parallel$	0,1-0,12*
Zinok	0,91	Liatina	6,7-1,2	$\perp$	0,005-0,01*
Zlato	0,78	Bronz	1,1	Bakelit	0,02-0,03
Striebro	0,75	Žula	0,49	Polyetylen	$2,3 \cdot 10^{-3}$
Hliník	0,72	Mramor	0,56	Tehlové murivo	$2,7 \cdot 10^{-2}$

* Drevo ako organický anizotropný materiál má rozdielne mechanické vlastnosti so zreteľom na svoju prirodzenú štruktúru ...pozdĺž ($\parallel$) a kolmo ($\perp$) na vlákna.

Pozn.: Ako bolo spomenuté *Hookov zákon neplatí pre všetky technické materiály* (napr.: liatina, guma, prírodné kamene, plst', koža a pod.). V týchto prípadoch sa používa tzv. **mocninový zákon**. Podľa Bacha je

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_0} \quad (1.14)$$

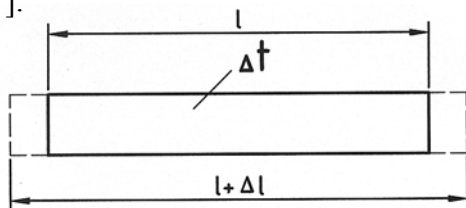
Kde E_0 je materiálová konštanta a exponent n je u plsti, gummy, kože a pod. menší ako 1 ($n < 1$), u liatiny, kameňov a pod. je $n > 1$.

1.8 Vplyv zmeny teploty

Tyč na obr. 1.13 vystavená po celej dĺžke konštantnej zmene teploty o Δt [°C] zmení svoju dĺžku o

$$\Delta l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \quad (1.15)$$

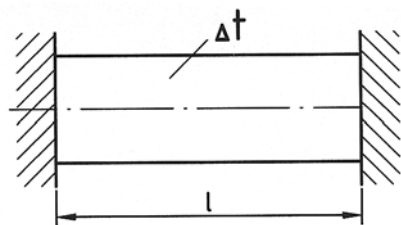
Kde α_t je súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti. Rozmerom súčiniteľa α_t je Celziov stupeň [°C⁻¹].



Ak je zmena teploty Δt kladná, ide o ohrev, pri zápornej zmene ide o ochladenie

Obr. 1.13

Ak je tyč na oboch koncoch pevne votknutá (staticky neurčitý prípad, obr. 1.14), jej dĺžka sa vplyvom teploty nemôže zmeniť a vznikne v nej napätie σ_t .



$$\sigma_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \quad (1.16)$$

Obr. 1.14

V tabuľke 1.3 sú uvedené súčinitele α_t pre niektoré kovy:

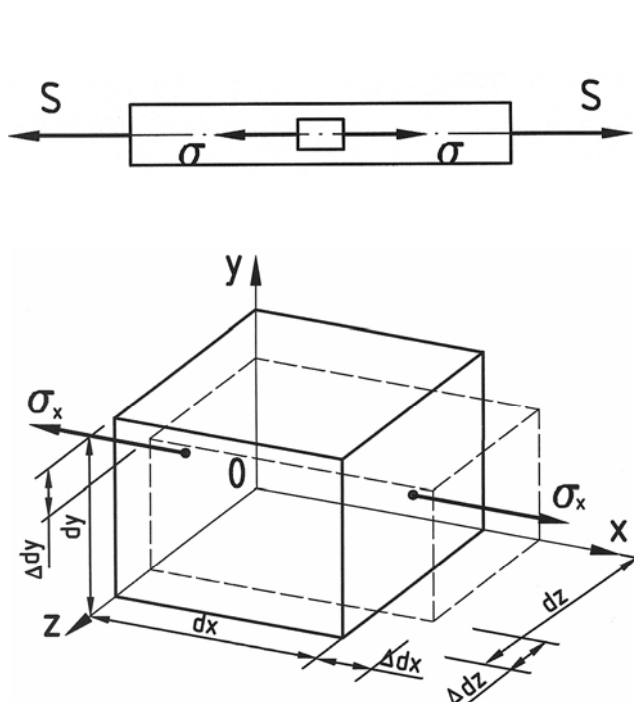
Tab. 1.3

Materiál	α_t [°C ⁻¹] · 10 ⁻⁵	Materiál	α_t [°C ⁻¹] · 10 ⁻⁵
Hliník	2,25	Oceľ	1,2
Bronz	1,75	Zinok	3,54
Meď	1,65	Liatina	1,04

1.9 Priečne zúženie. Poissonova konštanta

Súčasne s predĺžením tyče v smere osi x objavuje sa *skrátene pričných rozmerov*. Toto skrátene je, ako skúšky ukázali -ak platí Hookov zákon a u izotropných materiálov - úmerné napätiu σ a tým i osovému pomernému predĺženiu ε_x .

Keď vyberieme zo skúšobnej tyče myslený elementárny (veľmi malý) hranolček (obr. 1.15) budú jeho priečne zúženia v smere osí y, z



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{mE} = -\frac{\mu\sigma}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{mE} = -\frac{\mu\sigma}{E} \end{aligned} \right\} (1.17)$$

Súčiniteľ m sa nazýva **Poissonova konštanta**.

Často je výhodnejšie používať hodnotu $\mu = \frac{1}{m}$,

ktorú nazývame Poissonovým číslom.

Pre oceľ má Poissonova konštanta hodnotu

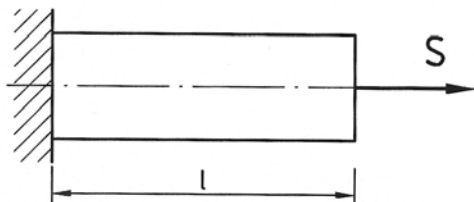
$$m = \frac{10}{3}.$$

Obr. 1.15

Podobne, ako v prípade modulu pružnosti E , ani v prípade Poissonovej konštanty neexistujú dva rôzne materiály, ktoré by mali rovnakú hodnotu m (μ). Preto sa Poissonova konštanta nazýva druhou materiálovou konštantou.

1.10 Príklady

1.10.1 Z akého materiálu je tyč, na ktorú pôsobí osamelá sila S (obr. 1.16), ak je dané: dĺžka tyče $l = 1,0\text{m}$; napätie $\sigma = 42\text{ MPa}$ a predĺženie tyče $\Delta l = 0,2\text{mm}$.



Obr. 1.16

Riešenie:

Pôsobením sily S sa tyč dĺžky $1,0\text{m}$ predĺžila o $0,2\text{mm}$ a vzniklo v nej napätie o veľkosti 42 MPa .

Podľa (1.8) je pomerné predĺženie:

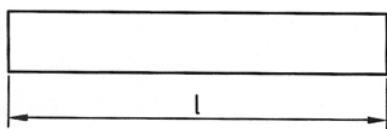
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,2\text{mm}}{1.10^3\text{mm}} = 0,2 \cdot 10^{-3}$$

Po dosadení do (1.12) $\sigma = \varepsilon \cdot E$:

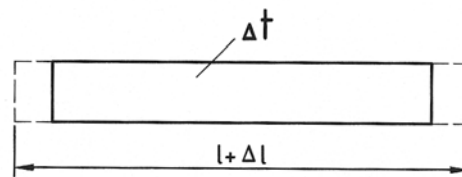
$$42\text{MPa} = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot E \Rightarrow E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$$

Z tabuľky 1.2 zistíme, že uvedená tyč je z **oceľe**.

1.10.2 Vypočítajte, o koľko sa predĺži hliníková tyč dĺžky $l = 2,0\text{m}$ (obr. 1.17) pri zmene teploty $\Delta t = 10^\circ\text{C}$.



a)



b)

Obr. 1.17

Riešenie:

Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti α_t pre hliníkový materiál je:

$$\alpha_t = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \text{ (tab. 1.3)}$$

Podľa (1.15) sa tyč predĺži o Δl (obr. 1.17b):

$$\Delta l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \Rightarrow \Delta l = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot 10^\circ\text{C} \cdot 2 \cdot 10^3\text{mm} = 0,45\text{mm}$$

Tyč sa pri zmene teploty o 10°C predĺži o **0,45mm**.

Pozn.: Vypočítané predĺženie je voči pôvodnej dĺžke tyče veľmi malé. Mohlo by sa zdať, že takáto zmena rozmeru nemá praktický význam. Neskôr si však ukážeme, že i takáto malá zmena dĺžky tyče (vzpery) môže vyvolať veľkú zmenu napätia v ostatných prvkoch konštrukcie, ktorej je súčasťou.

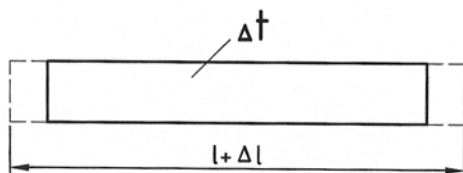
1.10.3 Vypočítajte pomerné priečne zúženie u ocelej tyče zaťaženej dvojicou síl S , ktorá vyvolala v tyči napätie $\sigma = 40 \text{ MPa}$ (obr. 1.18).



Obr. 1.18

Výsledok: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -5,71 \cdot 10^{-5}$

1.10.4 Z akého materiálu je tyč dĺžky $l = 3,0 \text{ m}$ (obr. 1.19), ktorá sa pri zmene teploty $\Delta t = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ predĺži o $\Delta l = 0,36 \text{ mm}$?



Obr. 1.19

Výsledok: tyč je z **ocle**.

2. VÝPOČET A KONTROLA PRÚTOV NAMÁHANÝCH NA ŤAH (TLAK)

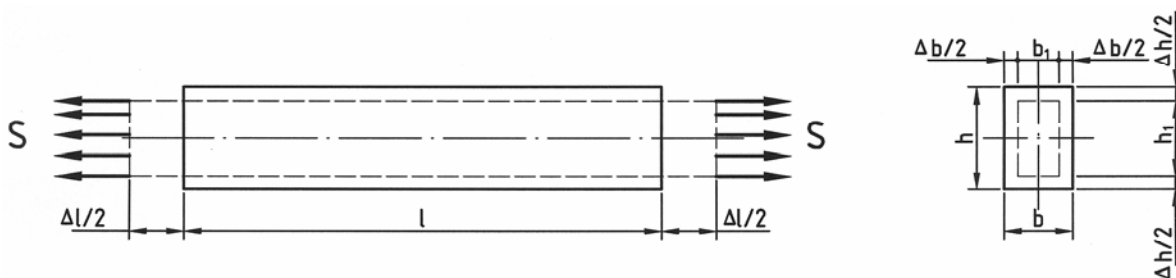
2.1 Predpoklady výpočtu

Ako vyplýva z definície (ods. 1.3.1) namáhania na prostý ťah (tlak), v myslenom pričnom reze pôsobí len normálová sila P v osi prúta. Takýmto spôsobom sú namáhané prúty v prútových sústavách, centricky tlačené stĺpy, podpery, laná na ťah a pod.

Vnútnu osovú silu P možno vo zvolenom priereze určiť metódou mysleného rezu. Zákon rozloženia výslednej vnútornej sily ťahaného prúta po priereze formuloval na základe experimentálneho skúmania deformácie *Navier*. Podľa ním zdôvodnenej hypotézy (obr. 2.1) zostane os prúta po predĺžení priama, a dva susedné, rovnobežné prierezy kolmé na os, ostanú aj po deformácii rovinné a navzájom rovnobežné.

Z hypotézy vyplývajú dva dôležité závery:

- v dôsledku zachovania priamosti prúta nie je možné vzájomné priečne posunutie (skosenie) prierezov, t. j. nevznikajú šmykové napätia,
- pretože sa všetky *vlákna* (spojnice bodov rovnako vzdialených od osi prúta) medzi uvažovanými blízkymi prierezmi deformujú rovnako, budú vnútorné sily po celej ploche prierezu rozložené rovnomerne.



Obr. 2.1

Podľa toho normálové napätie pri prostom ťahu (tlaku) sa vypočíta z rovnice

$$\sigma = \frac{S}{F} \quad (2.1a)$$

Keďže pôsobiaca výslednica vonkajšej ťahovej (tlakovej) sily P vytvára v stave rovnováhy s vnútornou silou N silovú rovnovážnu dvojicu, platí

$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \quad (2.1b)$$

Kde je σ ... normálne napätie v ťahu (+), resp. v tlaku (-), [Pa]

N ... vnútorná normálová sila, [N]

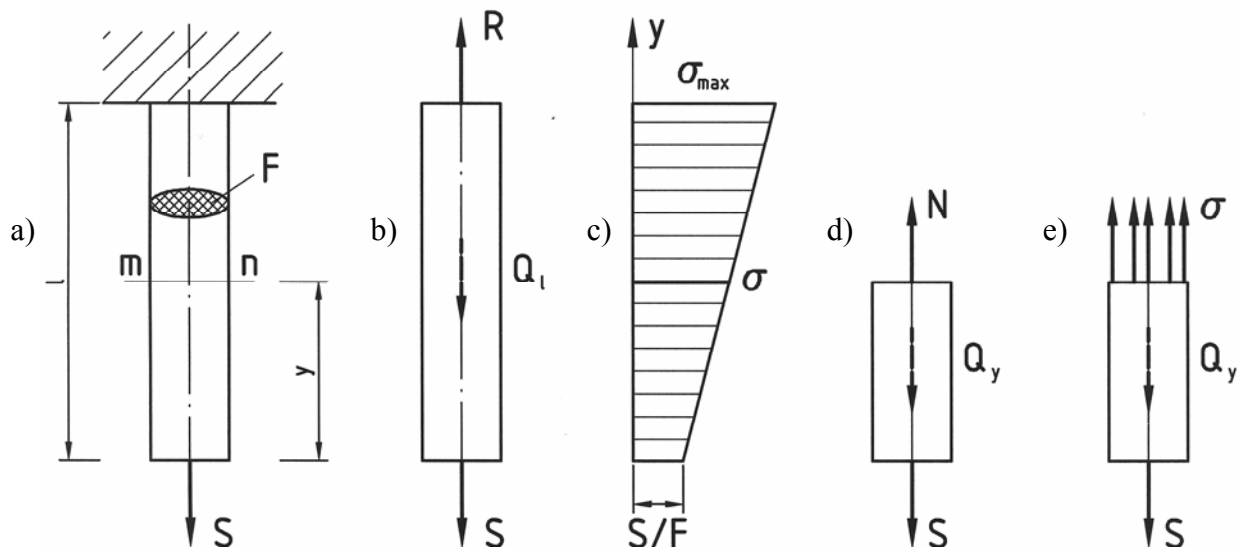
F ... plocha prierezu prúta ($b \cdot h$), [m²].

Pozn.: Z definície rovnovážnej dvojice síl (axióma statiky!) vyplýva, že rovnováha s vonkajšou silou S vznikne iba vtedy, keď zaťažujúca sila a vnútorná osová sila majú opačný zmysel, rovnakú veľkosť a spoločnú nositeľku.

2.2 Výpočet prúta na prostý ťah (tlak)

Uvažujme priamy prút konštantného prierezu (obr. 2.2a) zaťažený osovou silou S . Na obrázku 2.2b je prút uvoľnený. Odstránenie votknutia na hornom konci je nahradené väzbovou reakciou R . Reakciu vypočítame z rovnováhy vonkajších síl, ktoré na prút pôsobia (vo zvislom smere).

- zaťažujúca sila S
- vlastná tiaž prúta $Q = \gamma_0 \cdot F \cdot l$
- reakcia R



Obr. 2.2

V prípade *priameho prizmatického prúta* z podmienky rovnováhy dostaneme rovnicu

$$R - S - \gamma_0 F \cdot l = 0, \quad (2.2a)$$

v ktorej γ_0 – merná špecifická tiaž [Nm^{-3}]
 F – plocha priečného rezu [m^2]
 l – dĺžka prúta [m].

Metódou mysleného rezu (obr. 2.2d) určíme výslednicu vnútorných síl, ktoré pôsobia v priečnom reze $\overline{mn}$ prúta. Na dolnú časť prúta pôsobia vonkajšie sily S , $Q_y = \gamma_0 \cdot F \cdot y$ a výslednica vnútorných síl N . Podľa podmienky rovnováhy je potrebné, aby nositeľkou sily N bola os prúta y . Podľa obr. 2.2d vyjadríme rovnováhu v reze $\overline{mn}$ rovnicou

$$N - S - \gamma_0 \cdot F \cdot y = 0 \quad (2.2b)$$

z ktorej

$$N = S + \gamma_0 \cdot F \cdot y \quad (2.2c)$$

Keďže pri namáhaní ťahom pôsobia vnútorné sily rovnomerne v priečnom priereze prúta (Navierova hypotéza), môžeme napätie (podľa rovnice 2.1b) určiť rovnicou

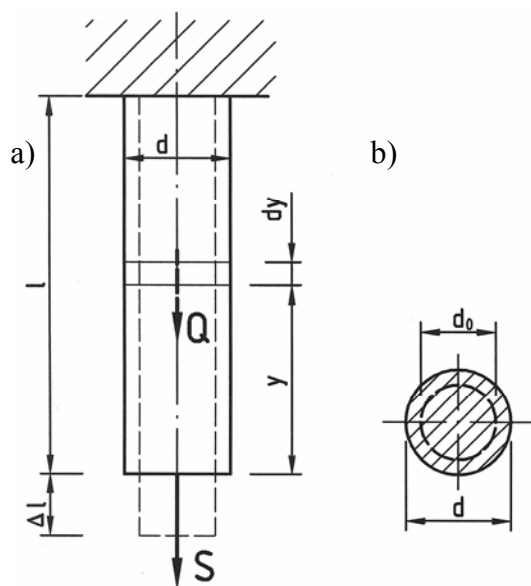
$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{S}{F} + \gamma_0 y \quad (2.2d)$$

Táto lineárna závislosť napätia σ od y je znázornená na obr. 2.2c. Napätie s najväčšou hodnotou pôsobí v priereze, ktorého poloha je určená súradnicou $y = l$.

Jeho hodnotu vypočítame s použitím rovnice 2.2d:

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F} + \gamma_0 \cdot l \quad (2.2e)$$

Celkové predĺženie elementárnej dĺžky prúta (obr. 2.3) podľa rovnice 1.6



Obr. 2.3

$$\Delta dy = \varepsilon dy, \quad (2.3a)$$

resp. podľa rovnice (1.8) celkové predĺženie všetkých elementov po celej dĺžke prúta

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_y \cdot dy \quad (2.3b)$$

Použitím Hookovho zákona (rovnica 1.12) môžeme rovnicu 2.3b napísať

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{S}{E \cdot F} + \frac{\gamma_0 \cdot y}{E} \right) dy \quad (2.3c)$$

z ktorej po integrácii bude pomerne predĺženie

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{E \cdot F} + \frac{\gamma_0 \cdot l^2}{2 \cdot E} \quad (2.3d)$$

Prvý člen rovnice predstavuje vplyv vonkajšej sily na predĺženie tyče (Δl_s) a druhý vplyv jej vlastnej tiaže (Δl_q).

Výsledné predĺženie Δl získame sčítaním jednotlivých vplyvov

$$\Delta l = \Delta l_s + \Delta l_q \quad (2.3e)$$

Postupnému výpočtu jednotlivých vplyvov a nakoniec ich sčítaniu, ako všeobecne zaužívanému postupu, sa pri rešpektovaní určitých predpokladov v pružnosti a pevnosti hovorí – **zákon superpozície (jednotlivých) vplyvov**.

Pozn.: Súčin $E \cdot F$ v rovnici 2.3d sa nazýva **tuhosť prúta v ťahu (tlaku)**. Tuhosť vo význame *ako miera odporu prvku (konštrukcie) deformovať sa* (meniť v dôsledku vonkajšieho namáhania tvar a rozmery) patrí medzi základné pojmy v pružnosti a pevnosti.

Pomerná zmena prierečného rezu, zúženie pri namáhaní tyče na ťah sa vypočíta s použitím rovnice 1.17

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E} \left(\frac{S}{F} + \gamma_0 \cdot y \right) \quad (2.4a)$$

V prípade kruhovej prierezovej plochy obr. 2.3b je

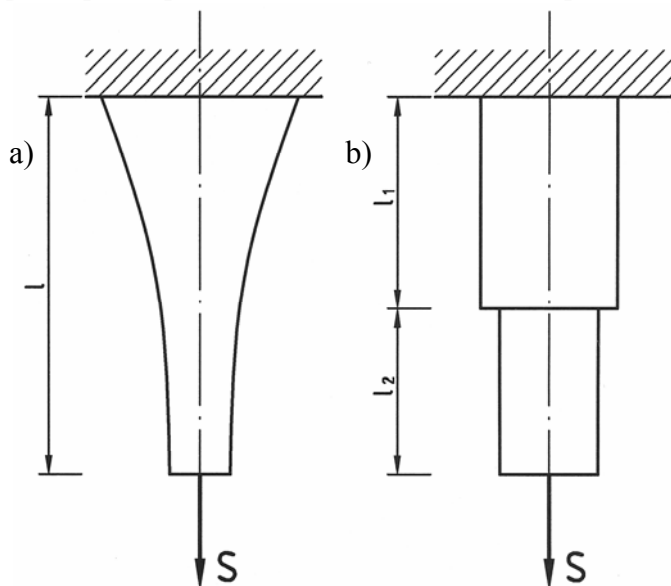
$$\Delta d = d_0 \cdot \varepsilon_y \quad (2.4b)$$

a po dosadení pravej strany rovnice do rovnice 2.4a za ε_y dostaneme

$$\Delta d = -\frac{\mu \cdot d_0}{E} \left(\frac{S}{F} + \gamma_0 \cdot y \right) \quad (2.4c)$$

Pri výpočtoch prútov premenného spojitého prierezu (2.4a), alebo zloženého prierezu (2.4b) sa postupuje podľa rovnakých zásad, ako na prizmatickom prúte.

Vlastný výpočet je v týchto prípadoch však o niečo komplikovanejší. Príčinou býva vplyv spojite premennej alebo náhlej zmeny plochy, čo treba vo výpočte zohľadniť.



Pozn.: V prípade spojite premennej zmeny prierezu patrí medzi časté praktické úlohy o. i. tiež výpočet prúta s rovnakou pevnosťou.

Obr. 2.4

Staticky neurčitými prípadmi prútov namáhaných na prostý ťah (tlak) – viď. zmienka o nich na obr. 1.14 – sa zaoberať nebudeme.

2.3 Pevnostná kontrola a dimenzovanie prútov namáhaných na ťah (tlak)

Otázka ako **určiť rozmery prúta** ($\equiv$ *nadimenzovať* jeho tvar), **alebo**, ak takýto prút existuje (jeho rozmery sú známe) **skontrolovať** (*posúdiť*) či predpokladanej veľkosti sily **vyhoví**, sú dve stránky tej istej úlohy v pružnosti a pevnosti. Významná a aktuálna **úloha ekonomického využitia materiálu musí byť riešená tak, aby konštrukcia**, ktorej posudzovaný prút je súčasťou, **bola spoľahlivá (bezpečná) i počas dlhodobej prevádzky**.

V závislosti na úrovni dosiahnutého poznania sa postupne vyvinuli *tri metódy riešenia* týchto problémov:

- metóda dovoľených napätí
- metóda dovoľených zaťažení
- metóda medzných stavov

2.3.1 Metóda dovoľených napätí

Najstaršia (klasická) metóda dovoľených napätí vychádza zo skutočnosti, že rozmery prvku konštrukcie musia byť navrhnuté tak, aby v nich najväčšie napätia vyvolané vonkajším zaťažením (viď. ods. 2.2), neprevyšovali hodnotu *dovoľeného (prípustného) napätia*.

$$\boxed{\sigma_{dov} = \frac{\sigma_K}{\mu_K}} \quad \text{alebo} \quad \boxed{\sigma_{dov} = \frac{\sigma_m}{\mu_m}} \quad (2.5)$$

kde sú: - σ_K , σ_m medze napätia získané ťahacími skúškami (ods. 1.7, tab. 1.1),

- μ_K , μ_m miery bezpečnosti.

Únosnosť súčiastky pri statickom namáhaní na ťah (tlak) je zabezpečená, keď skutočné maximálne napätie vyhovuje podmienke pevnosti vyjadrenej vzťahom

$$\boxed{\sigma_{\max} \leq \sigma_{dov}} \quad (2.6)$$

Z uvedeného je zrejmé, že **miery bezpečnosti** μ_K , resp. μ_m *musí byť väčšia ako 1!* Z praktického hľadiska trvalé deformácie nevznikajú, keď napätie σ je pod medzou úmernosti σ_U . Preto sa hodnota miery bezpečnosti volí tak, aby bola splnená podmienka $\sigma_{dov} < \sigma_U$.

Hodnoty miery bezpečnosti boli záväzne určené v technických normách so zreteľom na druh zaťaženia, materiál a súčiastky v konkrétnej konštrukcii, jej účelu atď.

Výhodou tejto metódy v inžinierskej praxi bola jej jednoduchosť. Nevýhody však najmä vzhľadom na univerzálnosť miery bezpečnosti a výhrady voči jej objektívnosti, prevážili. Preto sa už v súčasnosti táto metóda nepoužíva.

Orientačné hodnoty dovolených napätí niektorých materiálov sú uvedené v tab. 2.1.

Tab. 2.1

Materiál	σ_{dov} [MPa]		Materiál	σ_{dov} [MPa]	
	t'ah	tlak		t'ah	tlak
Konštrukčná oceľ	140-160	140-160	Borovica	7-10	10-20
Meď	30-120	30-120	⊥	-	1,5-2
Hliník	30-80	30-80	Dub	9-13	13-15
Dural	80-150	80-150	⊥	-	2-3,5
Bakelit	40-50	40-50	Betón	0,1-0,7	1-9

2.3.2 Metóda dovolených zaťažení

Na rozdiel od predchádzajúcej metódy sa únosnosť prvku či konštrukcie vyjadruje medznými hodnotami vnútorných síl. Metóda dovolených zaťažení bola u nás zavedená prvýkrát na výpočet betónových a železobetónových konštrukcií - dva rôzne druhy materiálu v posudzovanom priereze - pod názvom *metóda posúdenia podľa stupňa bezpečnosti*.

Podľa tejto metódy sa považuje za vyhovujúci taký konštrukčný prvok, v ktorom pomer výslednice vnútorných síl v priereze na medzi únosnosti prierezu k výslednici vonkajších síl

je maximálne rovný istému číslu, predpísanému pre jednotlivé typy konštrukčných prvkov a rôzne druhy predpísanej veľkosti namáhania technickými normami.

Zmienené pomery (t. j. súčinitele bezpečnosti) sa nazývajú **stupňami bezpečnosti K** (odtiaľ i názov metódy).

Pevnostná podmienka pre limitujúce zaťaženie $S_{\max}$ [N] má tvar:

$$S_{\max} \leq S_{dov} = \frac{S_N}{K} \quad (2.7)$$

kde: - S_{dov} , S_N je dovoľené, resp. normové zaťaženie [N],

- K stupne bezpečnosti, vždy väčšie ako 1 ($k > 1$).

2.3.3 Metóda medzných stavov

Jedinou hodnotou miery bezpečnosti, alebo niekoľkými stupňami bezpečnosti (v prípade metódy podľa dovoľených zaťažení zvlášť pre betón a nosnú oceľovú výstuž) nie je možné zohľadniť početné faktory, ktoré sa v kombináciách a v rôznych konštrukciách môžu objaviť súčasne.

Metóda medzných stavov, podľa ktorej sa v súčasnosti konštrukcie navrhujú a kontrolujú, zachováva podstatu metódy podľa stupňa bezpečnosti ($S_{\max} \leq S_{dov}$), ale líši sa od nej vo dvoch znakoch:

- **zavádza** posúdenie (kontrolu) konštrukcií vzhľadom na **dva medzné stavy**,
- **uvažuje s tromi súčiniteľmi bezpečnosti**.

Prvý medzný stav – medzný stav únosnosti – je ten, pri ktorom sa konštrukcia stane nepoužiteľnou vyčerpaním únosnosti - napätia, stability (polohy a tvaru), plasticity a krehkého a únavového lomu.

Druhý medzný stav – medza stavu použiteľnosti konštrukcie. Sem patria nadmerné deformácie (pri splnenom prvom medznom stave – zachovania únosnosti i stability!) a príliš veľká dynamická odozva (napr. vibrácie) konštrukcie.

Konštrukcia sa podľa metódy medzných stavov považuje za vyhovujúcu, keď sa výpočtom dokáže, že v priebehu jej celej životnosti (počas jej zriadenia a v prevádzke) nenastane ani jeden z medzných stavov.

Možnosť vzniku niektorého alebo oboch medzných stavov súčasne závisí na niekoľkých činiteľoch, ktoré sa vo výpočte vyjadrujú tromi parciálnymi súčiniteľmi (k , n , m).

- kvalita materiálu – **súčiniteľ rovnorodosti**, $k < 1$,
- zaťaženie a ostatné vonkajšie vplyvy – **súčiniteľ zaťaženia**, $n \geq 1$,
- prostredie a podmienky, v ktorých konštrukcia plní svoj účel a podmienky, v ktorých bola vyrobená – **súčiniteľ podmienok pôsobenia**, $m \leq 1$.

Hodnota súčiniteľov k , n , m je v technických normách (STN) určená na základe štatistického vyhodnotenia výsledkov mnohých skúšok a pozorovaní. Treba ešte poznamenať, že **každý zo súčiniteľov môže závisieť** na viacerých ďalších okolnostiach, t. j. **ďalších súčiniteľoch toho istého druhu**. To umožňuje lepšie, na úrovni dosiahnutého poznania i skúseností a stále objektívnejšie posudzovanie bezpečnosti a stavu konštrukcií.

- ♦ **Bezpečnosť proti dosiahnutiu medzného stavu únosnosti** sa posudzuje podľa tohto všeobecného vzťahu:

$$n \cdot N_n \leq \Phi(m, kR_n, F) \quad (2.8)$$

kde okrem už vysvetlených symbolov (n , m , k), znamená:

- N_n ... vnútorná sila od normového zaťaženia $[N]$,
- R_n ... najmenšie výpočtové normové namáhanie $[N]$,
- F ... geometrická charakteristika posudzovaného prierezu,
- $n \cdot N_n$ skutočné zaťaženie konštrukcie od normového zaťaženia, resp. vypočítaná hodnota vnútornej sily,
- kR_n vypočítané namáhanie.

Konštrukčný prvok sa teda považuje za vyhovujúci na únosnosť vtedy, keď vypočítaná hodnota výslednice uvedených síl v posudzovanom priereze neprekročí hodnotu určenú funkciou Φ na pravej strane rovnice.

- ♦ **Bezpečnosť konštrukcie proti dosiahnutiu medzného stavu použiteľnosti** sa posudzuje podľa vzťahu

$$\Delta \leq f$$

(2.9)

kde Δ je vypočítaná (skutočná) deformácia a f deformácia dovolená.

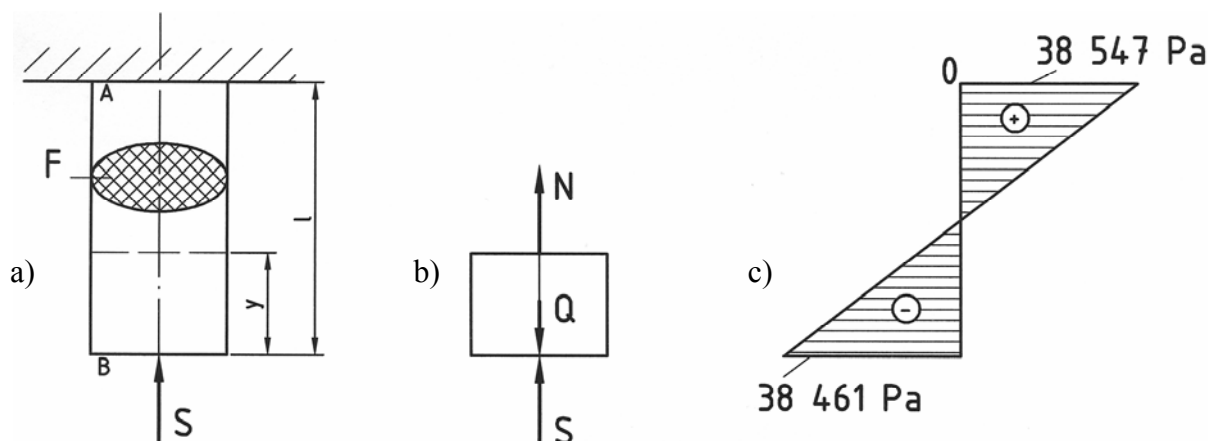
Pri posudzovaní konštrukcií podľa metódy medzných stavov platí:

Výpočet (pri dimenzovaní alebo kontrole) konštrukcií podľa prvého medzného stavu je základný – musí sa vykonať vždy!

Výpočet podľa druhého medzného stavu sa vykonáva len vtedy, keď s ohľadom na možnosť vzniku nadmerných deformácií alebo kmitania to vyžadujú príslušné technické normy (STN).

2.4 Príklady

2.4.1 Vypočítajte plochu F priečného rezu prúta (obr. 2.5a), zaťaženého vlastnou tiažou a silou S tak, aby celkové predĺženie prúta bolo nulové. Ďalej vypočítajte a nakreslite priebeh normálového napätia po celej dĺžke prúta. Dané je: sila $S = 100$ N; modul pružnosti v ťahu $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa; dĺžka prúta $l = 1,0$ m; hustota materiálu $\rho = 7850$ kg.m⁻³; gravitačné zrýchlenie $g = 9,81$ m.s⁻²



Obr. 2.5

Riešenie:

Podľa (2.2b) napíšeme rovnicu rovnováhy pre (obr. 2.5b):

$$N + S - Q = 0; \text{ pričom } Q = g \cdot \rho \cdot F \cdot y \Rightarrow N + S - g \cdot \rho \cdot F \cdot y = 0$$

Pre výpočet normálového napätia platí (2.1b):

$$\sigma = \frac{N}{F} \Rightarrow N = \sigma \cdot F; \text{ po dosadení } \sigma = g \cdot \rho \cdot y - \frac{S}{F}$$

Predĺženie diferenciálneho úseku prúta je (2.3a):

$$\Delta dy = \varepsilon \cdot dy; \text{ a následne po použití (2.3b): } \Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon \cdot dy = \int_0^l \frac{\sigma}{E} \cdot dy = \int_0^l \frac{g \cdot \rho \cdot y \cdot F - S}{E \cdot F} \cdot dy;$$

$$\text{odkiaľ po úprave: } \Delta l = \frac{g \cdot \rho \cdot l^2}{2 \cdot E} - \frac{S \cdot l}{E \cdot F} = 0 \Rightarrow F = \frac{2 \cdot S}{g \cdot \rho \cdot l} = \frac{2 \cdot 100(N)}{9,81(m \cdot s^{-2}) \cdot 7850(kg \cdot m^{-3}) \cdot 1,0(m)}$$

Plocha priečného rezu prúta pri nulovom predĺžení je $F = 0,0026$ m².

Ďalej vypočítame krajné hodnoty napätia v bodoch A, B:

$$A(y=l): \sigma_A = g \cdot \rho \cdot l - \frac{S}{l} = 9,81 \cdot 7850 \cdot 1,0 - \frac{100}{0,0026} = 38547 Pa ,$$

$$B(y=0): \sigma_B = g \cdot \rho \cdot 0 - \frac{S}{F} = -\frac{100}{0,0026} = -38461 Pa .$$

Priebeh napätia po celej dĺžke prúta je zobrazený na obr. 2.5c.

2.4.2 Vypočítajte a nakreslite priebeh vnútorných silových veličín a hodnoty predĺženia v bodoch **A**, **B** a **C** u osovo zaťažného odstupňovaného prúta (obr. 2.6a), ak je dané:

$$\mathbf{S}_1 = 6000 \text{ N}; \mathbf{S}_2 = 9000 \text{ N}; \mathbf{S}_3 = 4000 \text{ N}; \mathbf{F}_1 = 100 \text{ mm}^2; \mathbf{F}_2 = 200 \text{ mm}^2; \mathbf{l} = 0,5 \text{ m}; \\ \mathbf{E} = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

Riešenie:

Podľa (2.2b) napíšeme rovnice rovnováhy pre každú časť prúta:

$$\text{prvá časť (obr. 2.6b): } \sum_{i=1}^n S_i = 0 \Rightarrow -N_1 + S_1 = 0 \Rightarrow N_1 = 6000 N ,$$

$$\text{druhá časť (obr. 2.6c): } \sum_{i=1}^n S_i = 0 \Rightarrow -N_2 - S_2 + S_1 = 0 \Rightarrow N_2 = -3000 N ,$$

$$\text{tretia časť (obr. 2.6d): } \sum_{i=1}^n S_i = 0 \Rightarrow -N_3 + S_3 - S_2 + S_1 = 0 \Rightarrow N_3 = 1000 N .$$

Ďalej vypočítame pomocou (2.1b) jednotlivé normálové napätia:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{6000(N)}{100(mm^2)} = 60 MPa ,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_1} = \frac{-3000}{100} = -30 MPa ,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{1000}{200} = 5 MPa .$$

Následne vyjadríme predĺženia (2.3d) v daných bodoch A, B a C:

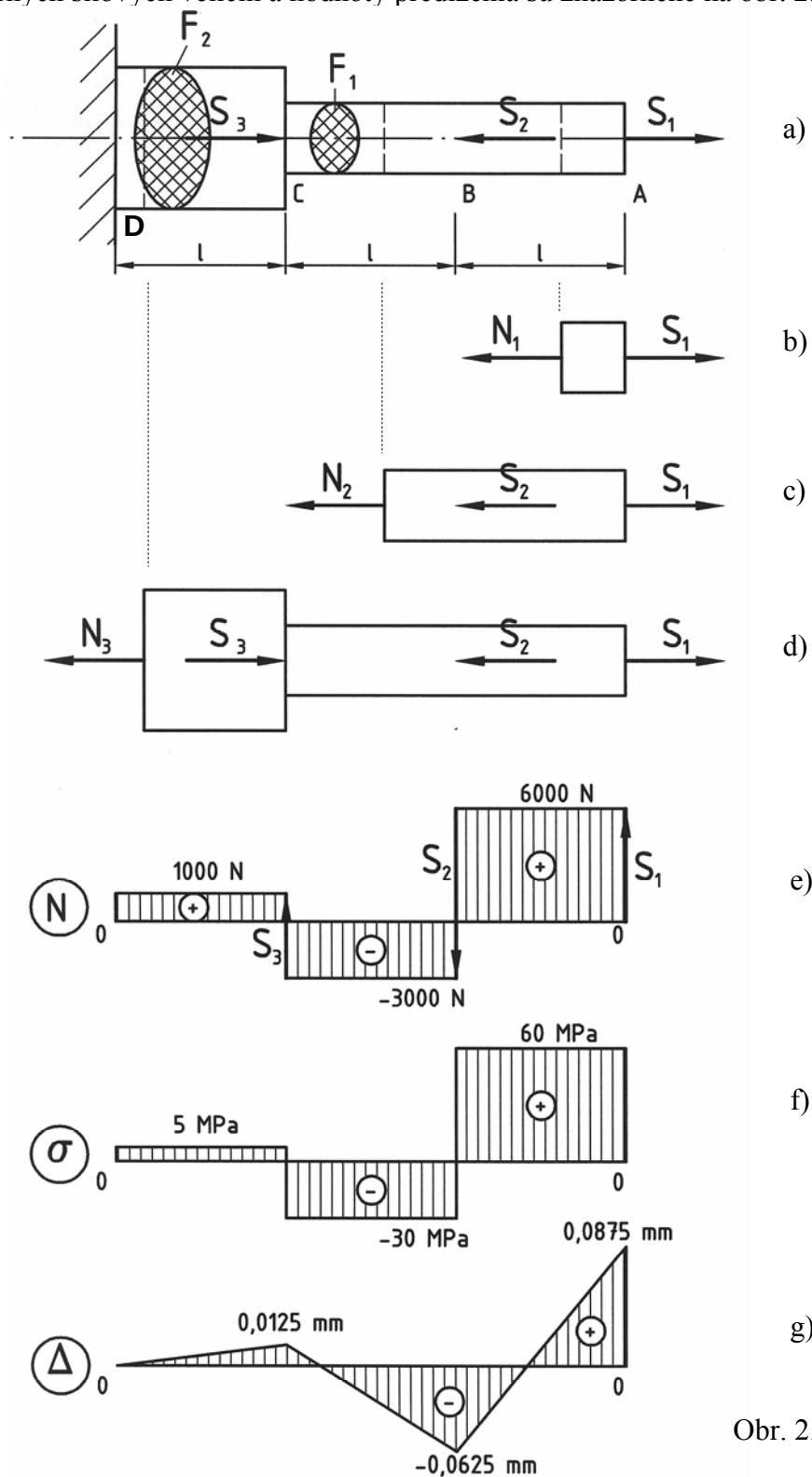
$$\Delta A = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot F_i} = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot F_1} + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot F_1} + \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot F_2} = \frac{6000(N) \cdot 500(mm)}{2 \cdot 10^5 (MPa) \cdot 100(mm^2)} + \frac{-3000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} + \frac{1000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 200}$$

$$\Delta A = 0,0875 mm$$

$$\Delta B = \sum_{i=2}^3 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot F_i} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot F_1} + \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot F_2} = \frac{-3000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} + \frac{1000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = -0,0625 \text{ mm}$$

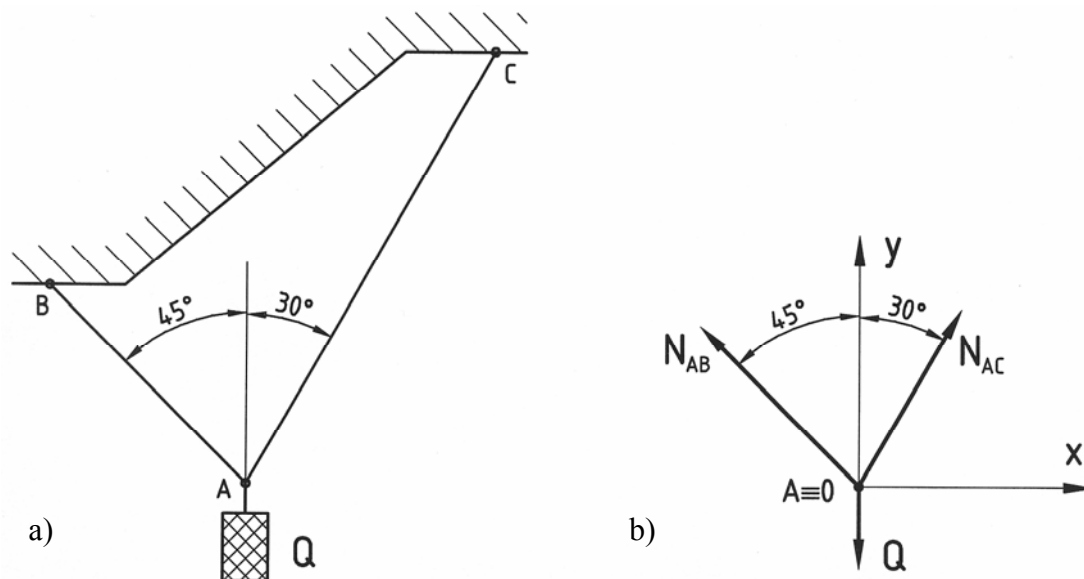
$$\Delta C = \sum_{i=3}^3 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot F_i} = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot F_2} = \frac{1000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,0125 \text{ mm}$$

Priebeh vnútorných silových veličín a hodnoty predĺženia sú znázornené na obr. 2.6e,f,g.



Obr. 2.6

2.4.3 Bremeno o tiaži $Q = 100 \text{ kN}$ je zavesené pomocou dvoch prútov (obr. 2.7a). Materiál prútov je rovnaký s hodnotou dovoleného napätia $\sigma_{dov} = 150 \text{ MPa}$. Určite potrebné plochy priečných prierezov prútov.



Obr. 2.7

Riešenie:

Zo statických podmienok rovnováhy pre myslenými rezmi rozdelené prúty (2.2b) určíme normálové sily (obr. 2.7b):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n S_{ix} = 0 &\Rightarrow N_{AC} \cdot \sin 30^\circ - N_{AB} \cdot \sin 45^\circ = 0, \\ \sum_{i=1}^n S_{iy} = 0 &\Rightarrow -Q + N_{AC} \cdot \cos 30^\circ + N_{AB} \cdot \cos 45^\circ = 0. \end{aligned} \right\} N_{AB} = 0,518 \cdot Q; N_{AC} = 0,732 \cdot Q$$

Napätia v prútoch (2.1b) sú:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{0,518 \cdot Q}{F_{AB}}; \quad \sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{F_{AC}} = \frac{0,732 \cdot Q}{F_{AC}}$$

Potrebné plochy prierezov prútov si vypočítame z pevnostnej podmienky (2.6):

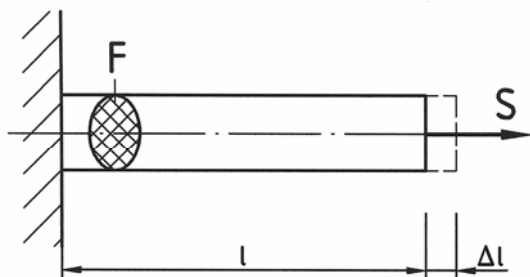
$$\sigma_{AB} \leq \sigma_{dov}; \quad \sigma_{AC} \leq \sigma_{dov}$$

potom:

$$F_{AB} \geq \frac{0,518 \cdot Q}{\sigma_{dov}} = \frac{0,518 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{150 \text{ (MPa)}} = 345 \text{ mm}^2,$$

$$F_{AC} \geq \frac{0,732 \cdot Q}{\sigma_{dov}} = \frac{0,732 \cdot 100 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{150 \text{ (MPa)}} = 488 \text{ mm}^2.$$

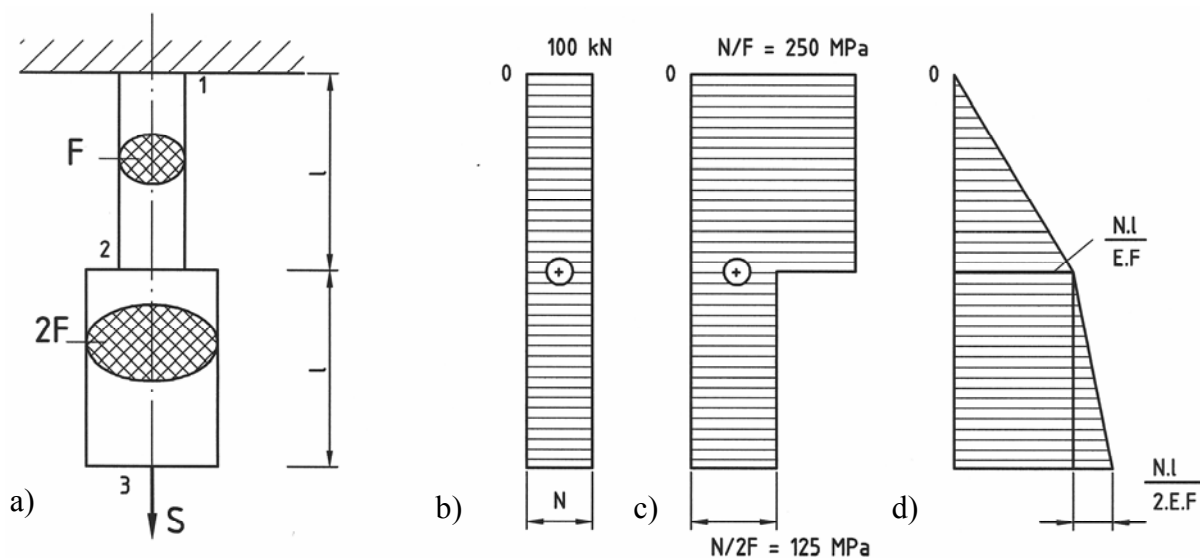
2.4.4 Vypočítajte plochu priečného prierezu prúta F , zaťaženého silou S (obr. 2.8) tak, aby celkové predĺženie prúta $\Delta l = 2\text{mm}$. Dané je: $S = 90\text{kN}$; $l = 0,7\text{m}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Obr. 2.8

Výsledok: $F = 150 \text{ mm}^2$

2.4.5 Určite priebeh osovej sily, normálového napätia a premiestnenia prierezov 1,2,3 tyče premenného prierezu zaťaženej silou S (obr. 2.9a). Vlastnú tiaž zanedbáme. Dané je: $S = 100 \text{ kN}$; $F = 400 \text{ mm}^2$; $l = 1,0\text{m}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Obr. 2.9

Výsledky:

$N = 100 \text{ kN}$, priebeh obr. 2.9b;

$\sigma_{1,2} = 250 \text{ MPa}$, $\sigma_{2,3} = 125 \text{ MPa}$, priebeh obr. 2.9c;

$\Delta l_{2-1} = 1,25\text{mm}$, $\Delta l_{3-2} = 0,625\text{mm}$, priebeh obr. 2.9d.

3. NAPÄTOSŤ, DEFORMÁCIA A ICH VZÁJOMNÉ SÚVISLOSTI

3.1 Napätosť a druhy napätostí

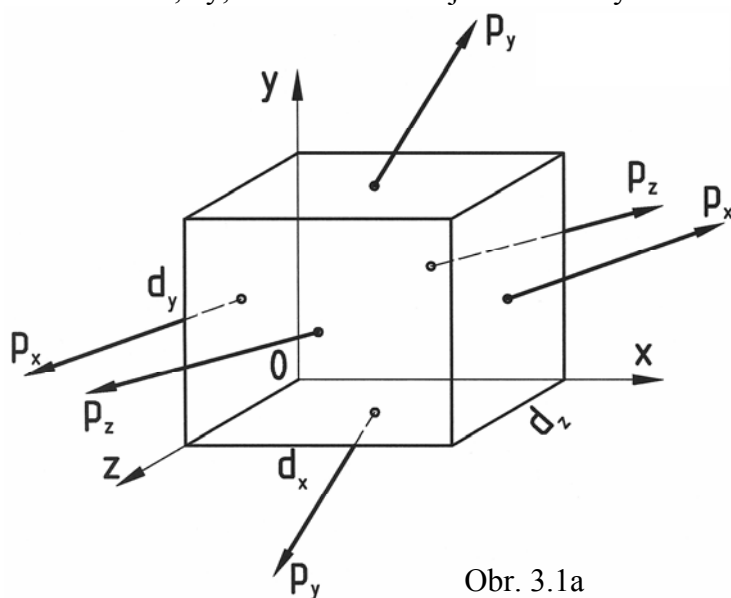
Napätosť je vnútorný mechanický stav telesa spôsobený napätím. *Napätosťou v určitom bode telesa nazývame súhrn všetkých napätí určených prostredníctvom rovín, ktoré daným bodom možno preložiť.*

Z praktickej príčiny, ako si ďalej ukážeme, určujeme napätosť v bode v rovinách elementárneho hranola.

Napätosť vo všeobecnosti môže byť:

- priestorová (trojosá),
- rovinná (dvojosá),
- priamková (jednoosá).

Na určenie druhu napätosti v bode vyberieme z telesa elementárny hranolček s rozmermi dx , dy , dz . Na obr. 3.1a je znázornený všeobecný prípad priestorovej napätosti.

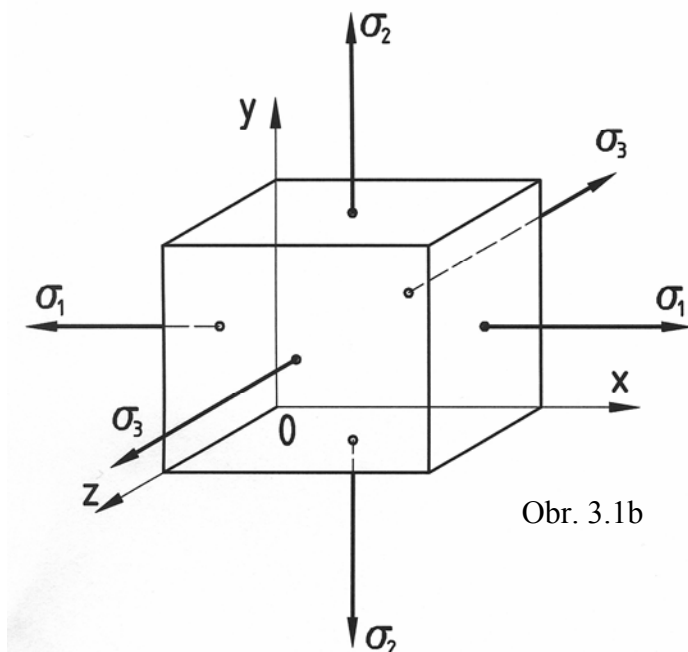


Obr. 3.1a

Účinok odstraňovaných častí telesa nahradíme vnútornými silami. Vnútorné sily pripadajúce na jednotku plochy, teda *napätia* p_x , p_y , p_z prechádzajú ťažiskami troch dvojíc rovnobežných plošiek. Indexom pri označovaní napätia je určená plocha na ktorej napätie pôsobí.

Napr. x je normála na plochu dy , dz , na ktorej pôsobí napätie p_x .

Dá sa dokázať, že v uvažovanom mieste telesa je vždy možné vybrať elementárny hranolček tak, aby napätia pôsobili len kolmo na jeho steny (obr. 3.1b).



Obr. 3.1b

Tieto normálové napätia nazývame *hlavné napätia* a označujeme ich $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

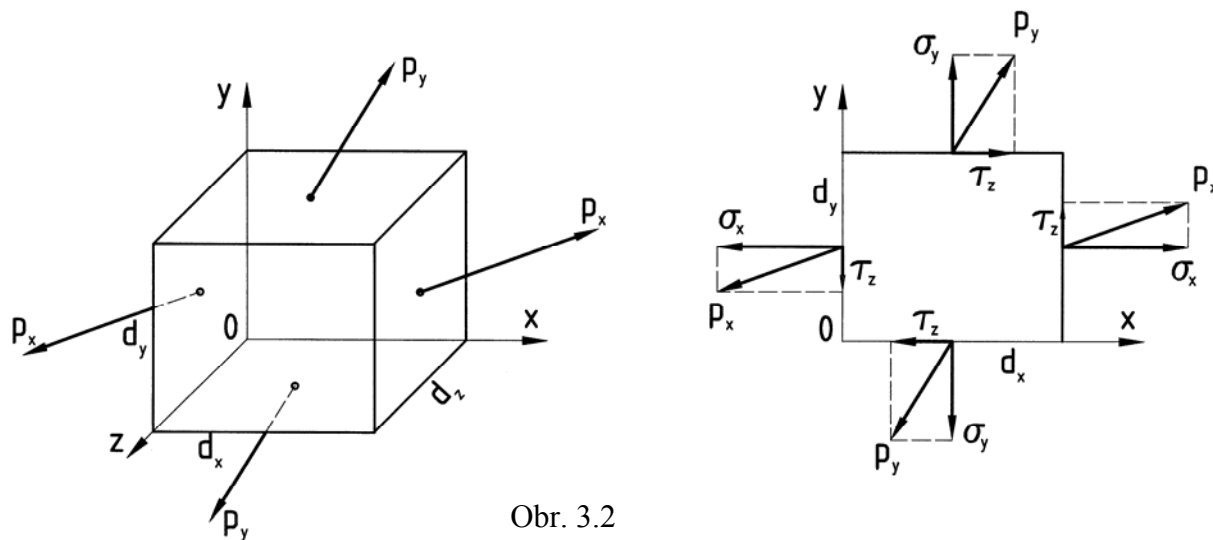
Keď počiatok súradnicovej sústavy (spoločný bod troch rovín) leží v ťažisku telesa, vtedy sa hlavné napätia (a roviny v ktorých ležia) nazývajú *centrálnymi*.

Ako sme už uviedli na obrázku 3.1a,b je znázornený prípad priestorovej (trojosej) napätosti. *Priestorová napätosť* vznikne vtedy, keď všetky vyznačené napätia p_x, p_y, p_z sú nenulové.

Keď určíme polohu elementárneho hranola tak, že vo dvoch protiľahlých stenách budú napätia (napr. p_z) rovné nule (obr. 3.2) a v ostatných sú napätia nenulové, ide o *napätosť rovinnú*.

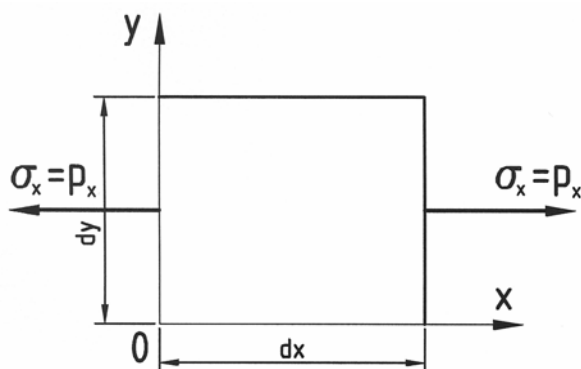
Ak môžeme dať elementárnemu hranolu v telese takú polohu, keď napr. p_y a p_z budú nulové (obr. 3.3), potom ide o *priamkovú napätosť* - $p_x \equiv \sigma_x$ (!) .

Z uvedeného vyplýva, že **rovinná a priamková napätosť sú len zvláštne (špeciálne) prípady priestorovej napätosti**. To platí tiež pre vzťah medzi rovinnou a priamkovou napätosťou.



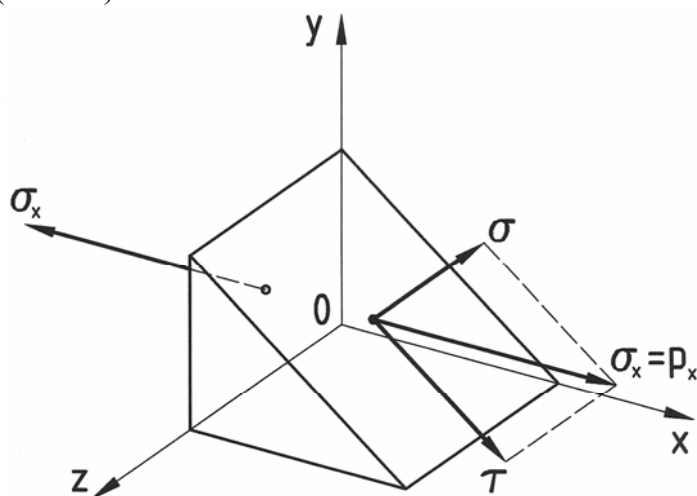
Obr. 3.2

Pozn.: V indexe napätia τ_z je označenie vykonané s ohľadom na skutočnosť, že v danom prípade pôsobia všetky šmykové napätia kolmo na os z.



Obr. 3.3

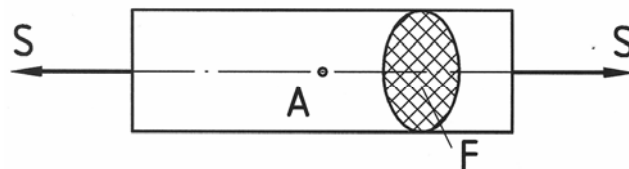
Pre správne ohodnotenie nebezpečia, ohrozujúceho pevnosť (bezpečnosť) súčiastky, treba poznať napätosť nielen v stenách elementárneho hranolčeka, ale aj *napätia v ľubovoľne sklonenom reze* (obr. 3.4).



Obr. 3.4

3.1.1 Priamková napätosť

Máme určiť napätosť v ľubovoľnom bode A prúta, zaťaženého osovou silou S (obr. 3.5).



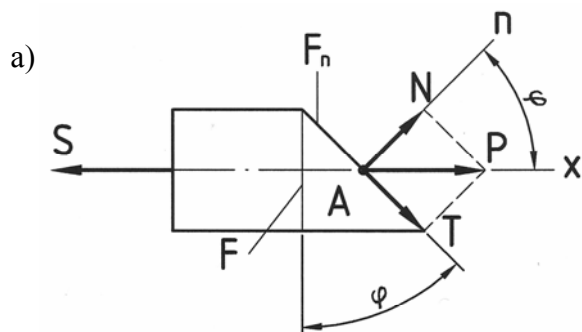
Obr. 3.5

Podľa rovnice (2.1a) je

$$\sigma_1 = \frac{S}{F} \quad (3.1)$$

V ďalšom uvažujme šikmý rez, ktorý prechádza bodom A (obr. 3.6). Normála na plochu rezu zvierá s osou prúta uhol φ . Známym spôsobom fiktívneho rezu nahradíme účinok odstránenej časti prúta výslednicou vnútorných síl P . Pre rovnováhu platí $P = S$. (3.2)

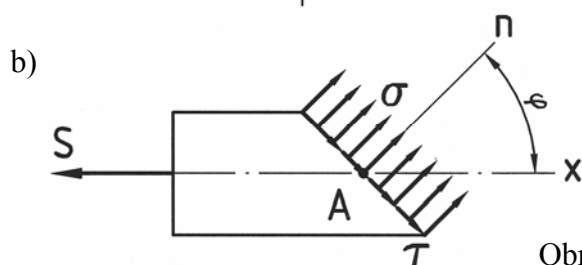
Obe sily majú spoločnú nositeľku – os prúta.



Zložky N , T sily $P = S$ podľa obr. 3.6a sú

$$N = S \cdot \cos \varphi \quad (3.3)$$

$$T = S \cdot \sin \varphi \quad (3.4)$$



Obr. 3.6

Pri namáhaní na ťah sú napätia v priereze rozložené rovnomerne. Ich veľkosť vypočítame z rovníc (1.3)

v tvare

$$\sigma = \frac{N}{F_n} \quad (3.5)$$

$$\tau = \frac{T}{F_n} \quad (3.6)$$

Pôsobenie napätí v bode A (a aj v celom priereze) je znázornené na obr. 3.6b.

Vzájomná závislosť medzi plochami šikmého a priečneho (kolmého) rezu podľa obr. 3.6a je

$$F_n = \frac{F}{\cos \varphi} \quad (3.7)$$

Riešením rovnice (3.3, 3.5, 3.7, a 3.1) dostaneme ($\sigma_x = \sigma_1$)

$$\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi \quad (3.8)$$

a riešením rovníc (3.1, 3.4, 3.6a 3.7)

$$\tau = \sigma_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.9)$$

Keď podľa známych goniometrických vzorcov dvojnásobného uhla

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \quad \text{a} \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$$

a úprave do tvaru

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \quad \text{a} \quad \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

ich dosadíme do rovníc (3.8 a 3.9) budú napätia určené vzťahmi

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_1 \cos 2\varphi \quad (3.10)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\varphi \quad (3.11)$$

Keďže v rovniciach 3.10 a 3.11 sa nevyskytuje plocha F a ani žiadna materiálová konštanta, napätie σ a τ závisí len na napätí σ_1 a uhle φ . Ďalej z rovníc vidieť, že normálová zložka napätia σ je najväčšia v rovine kolmej na os prúta ($\varphi = 0 \rightarrow \cos 0 = 1$) a má veľkosť σ_1 , vtedy ale šmykové napätie ($\sin 0^\circ = 0$) je $\tau = 0$.

Naproti tomu *šmykové napätie je maximálne v rovine určenej uhlom 45° (resp. 135°)* vtedy keď $\sin 2 \cdot 45^\circ = \sin 90^\circ = 1$, a má hodnotu $\tau = \frac{1}{2} \sigma_1$. Pritom však normálne napätie σ (z rovnice 3.10) aj keď druhý člen rovnice je nulový ($\cos 2 \cdot 45^\circ = \cos 90^\circ = 0$), nulové nie je. Najmenšia hodnota normálového napätia je $\sigma = \frac{\sigma_1}{2}$!

Keď upravené rovnice (3.10 a 3.11)

$$\sigma - \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi$$

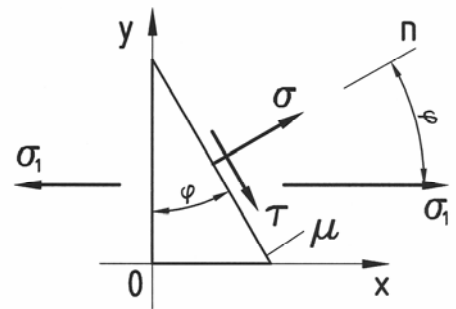
vyriešime (umocnením a sčítaním), dostaneme

$$(\sigma - \frac{\sigma_1}{2})^2 + \tau^2 = (\frac{\sigma_1}{2} \cos 2\varphi)^2 + (\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\varphi)^2$$

a ďalej po úprave pravej časti rovnice a dosadením za $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$ (trigonometrická jednotka) ju zjednodušíme na tvar:

$$(\sigma - \frac{\sigma_1}{2})^2 + \tau^2 = (\frac{\sigma_1}{2})^2 \quad (3.12)$$

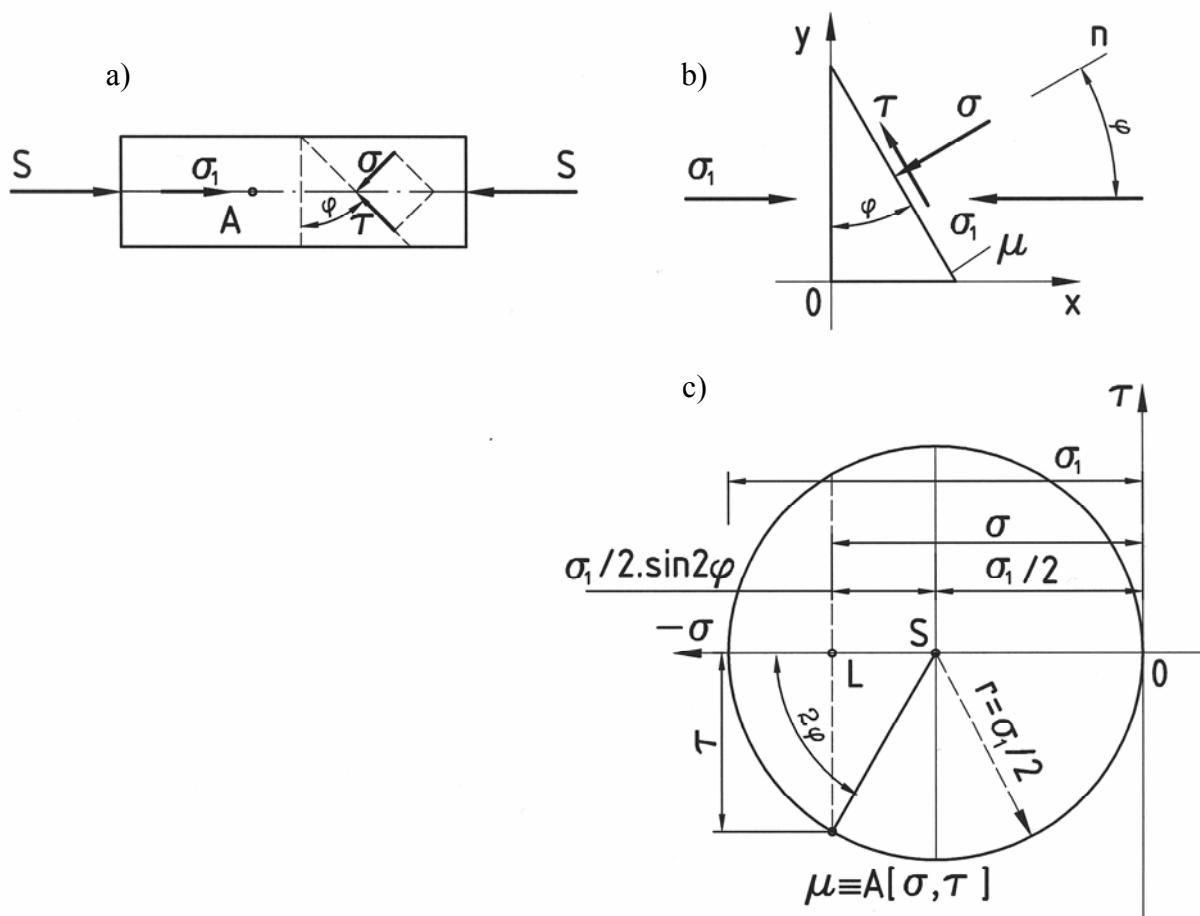
Ak túto rovnicu porovnávame so všeobecným tvarom rovnice kružnice $[(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2]$ v súradnicovom systéme σ, τ (obr. 3.7) dostaneme kružnicu napätia.



Rovnica (3.12) sa nazýva **Mohrovou kružnicou napätia**, a možno ju vyjadriť slovne takto:

Postup zostrojenia Mohrovej kružnice je zrejmý z jej zdôvodnenia. Dôležité pritom je, aby sa rameno smerového uhlu 2φ vynieslo v rovnakom zmysle ako v elementárnom hranolčeku, od osi y k odklonenej rovine rezu μ .

55



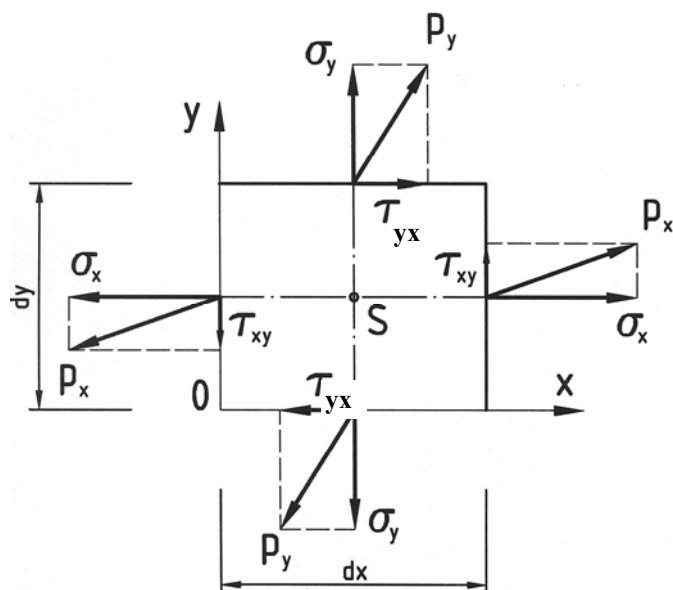
Obr. 3.8

3.1.2 Rovinná napätosť

Ako bolo už uvedené, elementárny hranolček je v stave rovinnej napätosti, keď napätia vo dvoch protíahlých rovnobežných rovinách sú rovné nule.

Uvažujme elementárny hranolček, na ktorý pôsobia napätia p_x a p_y ($p_z = 0$).

Výsledné napätia p_x , p_y pôsobiace všeobecnými smermi rozložme do smerov súradnicových osí (obr. 3.9). **Prvý index** u šmykových napätí, napr. τ_{xy} , **znamená, že ide o šmykové napätie v stene kolmej na os x. Druhý index značí, že napätie je rovnobežné s osou y.**



Obr. 3.9

Keďže elementárny hranolček je myslený ako bod telesa, možno vo všeobecnosti konštatovať, že v rezoch vzájomne kolmých sú šmykové napätia rovnaké a smerujú k priesečnici týchto rovín, alebo od nej. Takéto šmykové napätia sa nazývajú **šmykové napätia združené**.

Tejto vlastnosti si všimol ako prvý Cauchy (1789-1857). Združené šmykové napätia potom v Cauchyho zjednodušenom označení možno vyjadriť podľa toho, ku ktorej osi (priesečnici s ňou rovnobežnej) smerujú.

V našom prípade

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$$

(3.14)

Z dôkazu vlastnosti združených šmykových napätí (obr. 3.9 a rovnica 3.13) je zrejmé, že pre roviny, ktoré nie sú na seba kolmé, vzťah 3.13 neplatí!

Z definície rovinnej napätosti a vlastnosti združených šmykových napätí tiež plynie, že **rovinná napätosť v bode telesa je vo všeobecnom prípade jednoznačne určená dvoma normálovými a jednou šmykovou zložkou**.

Napätie vo všeobecnom reze roviny μ , podobne ako u priamkovej napätosti, možno určiť z rovnováhy vnútorných síl trojbokého hranolčeka.

Z momentovej podmienky rovnováhy síl k bodu S dostaneme:

$$\sum M_S = 0:$$

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

odkiaľ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.13)$$

So zreteľom na určenie týchto skrípt pre študijné odbory špeciálneho inžinierstva sú v ďalšom texte uvedené a stručne komentované len výsledky analýzy tejto rovnováhy. Rovnice napätia pre rovinnú napätosť majú tvar:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Z rovníc 3.15 vidieť, že napätia σ a τ v rovine μ sklonenej od zvislej osi a uhol φ , sú (tak ako pri priamkovej napätosti) nezávislé na veľkosti plochy rezu F a materiálových konštantách.

Z porovnania rovníc (3.15) s rovnicami pre priamkovú napätosť (3.10 a 3.11) možno zistiť podobnosť i očakávanú rozdielnosť medzi priamkovou a rovinnou napätosťou. Tiež podľa očakávania, ako pre priamkovú napätosť, možno zdôvodniť spôsob zostrojenia a využiť vlastnosti Mohrovej kružnice pre rovinnú napätosť.

Ďalej s ohľadom na informatívny charakter tejto časti textu o rovinnej napätosti, uveďme len výsledky, ktoré by sme získali z riešenia extrémov rovníc (3.15) pre $\left[\frac{d\sigma}{d\varphi} \right]_{\varphi=\varphi_0}$,

kde φ_0 je uhol skosenia roviny μ , v ktorom majú normálne napätia extrémnu hodnotu. Možno dokázať, že:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\varphi_0 &= \frac{2\tau_z}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2}} = \frac{2\tau_z}{\sqrt{A}} \\ \cos 2\varphi_0 &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{A}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Pre uhol roviny rezu, v ktorej je normálne napätie ťahové, platia znamienka záporné.

Po dosadení do prvej z rovníc 3.15 by sme z kvadratickej rovnice získali

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{A} \quad (3.17)$$

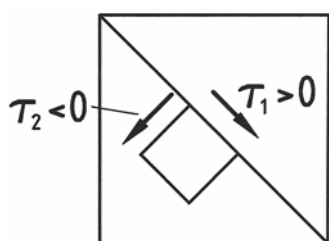
a po dosadení do druhej rovnice 3.15

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{A} \quad (3.18)$$

Zo vzťahov pre rovinnú napätosť vyplýva, že v kolmých rovinách, μ_I, μ_{II} , kde pôsobia extrémne napätia σ , je šmykové napätie τ nulové.

Tieto roviny nazývame **hlavnými rovinami a napätia (σ_1 a σ_2) v nich pôsobiace, hlavnými napätiami**.

- **Invarianta napätia**



Obr. 3.10

Vykonajme súčet hlavných napätí zistených podľa rovnice 3.16

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{A} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{A}$$

teda

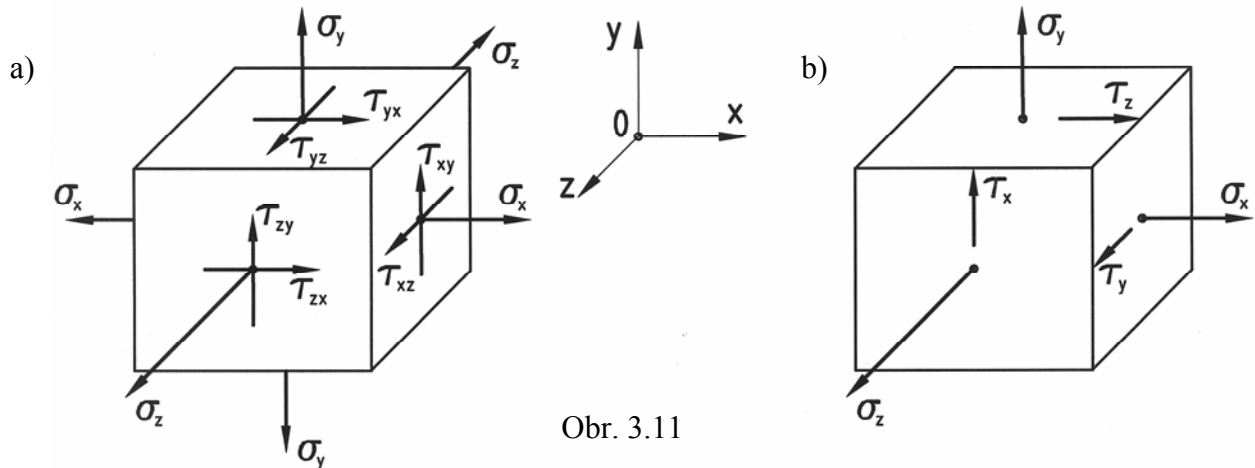
(3.19)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{konšt.}$$

Dokázali sme, že **súčet normálových napätí v hociktorých dvoch na seba kolmých rovinách je invariantný (nemenný) a rovný súčtu hlavných napätí**.

3.1.3 Priestorová napätosť

Keď napätia p na obr. 3.1a nahradíme zložkami normálových a šmykových napätí, bude všeobecný prípad priestorovej (trojosej) napätosti určený tromi normálovými napätiami σ_x , σ_y , σ_z a šiestimi šmykovými napätiami (obr. 3.11a), resp. v Cauchyho úprave tromi združenými šmykovými napätiami (obr. 3.11b).



Obr. 3.11

Všetky uvedené napätia sú kladné.

Ak usporiadame zložky napätia do riadkov a stĺpcov nasledujúcim spôsobom, dostaneme tzv. **tenzor napätia**.

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \text{ resp. } T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Tenzor napätia s tromi normálovými a šiestimi, resp. tromi združenými šmykovými známymi zložkami napätia **jednoznačne charakterizuje stav napätosti v bode telesa**.

Tak, ako pri rovinnej napätosti, aj tu v bode telesa existujú roviny, v ktorých sú len napätia normálové. Tieto roviny a im prislúchajúce napätia sú hlavné.

V tomto prípade, podľa toho, čo už vieme o rovinnej napätosti, musí mať tenzor napätia tvar

$$T_{\sigma_{1,2}} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Aj v prípade priestorovej napätosti možno odvodiť parciálne rovnice pre σ , τ , v rôznych rovinách odklonených vo zvolenom pravouhlom systéme o uhly α , β , γ . Podobne tak možno analýzu priestorovej napätosti riešiť graficky, zostrojením príslušnej Mohrovej kružnice pre priestorovú napätosť.

Transformácia tenzoru napätia vzhľadom na odklonenie roviny rezu o uhly α , β , γ sa vykonáva podľa známych zásad maticového výpočtu (riešenia sústav rovníc).

So zreteľom na určenie týchto skrípt pre odbory špeciálneho inžinierstva, ktorých absolventi by pri riešení problémov priestorovej napätosti iste konzultovali svoj názor so špecialistom („statikom“), uveďme už len stručne spomínanú transformáciu tenzora napätia symbolicky.

Postup riešenia priestorovej napätosti:

- v rovine S normálou $\bar{n} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]^T$ (3.22a)

bude všeobecné napätie $\bar{p}$ dané vektorom, ktorý obdržíme nasledovne

$$\bar{p} = T_{\sigma} \cdot \bar{n} \quad (3.22b)$$

- normálovú zložku σ vektora $\bar{p}$ dostaneme z rovnice

$$\sigma = \bar{n}^T \cdot T_{\sigma} \cdot \bar{n} \quad (3.22c)$$

- a zo vzťahu $|\bar{p}|^2 = \sigma^2 + \tau^2$ (3.22d)

dostaneme šmykovú zložku napätia τ ,

- hlavné napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ získame riešením rovnice

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & (\sigma_y - \sigma) & \tau_x \\ \tau_z & \tau_z & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22f)$$

- Riešením rovnice (3.22f) získame jeden, dva alebo tri reálne nenulové korene, v počte odpovedajúcom jedno, dvoj alebo trojosej napätosti telesa.

- Max. šmykové napätie je dané vzťahom:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (3.22g)$$

kde $\sigma_{\max}$ a $\sigma_{\min}$ sú najväčšie a najmenšie hlavné napätia.

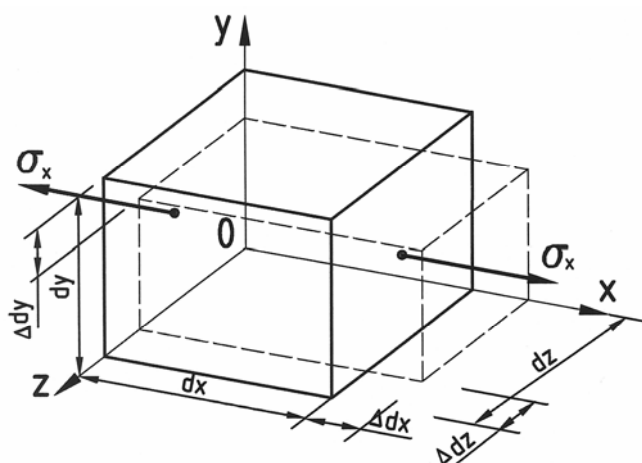
3.2 Súvislosť medzi deformáciami a napätosťou v bode telesa

3.2.1 Rovnice elasticity

Závislosť medzi napätosťou telesa v bode a jeho pretvorením (deformáciou) vyjadrujú tzv. rovnice elasticity pre priamkovú, rovinnú a (všeobecnú) priestorovú napätosť.

3.2.1.1 Rovnice elasticity pre priamkovú napätosť

Tieto rovnice už poznáme (1.17). Vyjadrujú závislosť medzi napätím σ_x a pretvorením ε_x v smere osi x (obr. 3.12) priamo z Hookovho zákona (1.7).



Obr. 3.12

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$$

Priečné zúženia (pretvorenia) sú dané rovnicami (1.17)

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{mE}$$

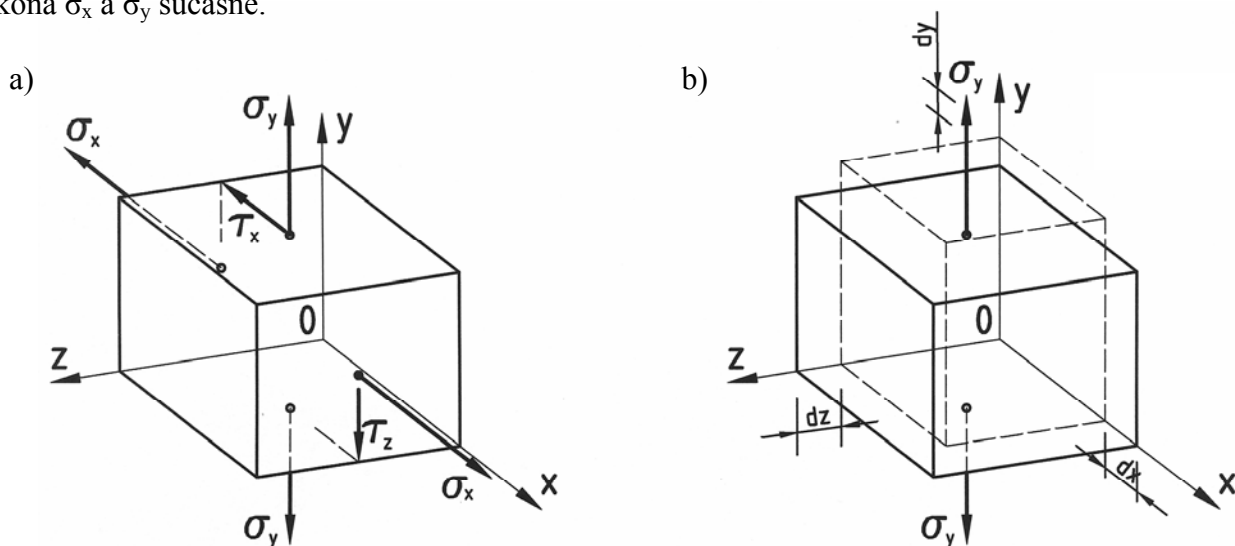
$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{mE}$$

Z toho o.i. vyplýva, že *priamková napätosť* vyvolá *priestorové pretvorenie*.

Pozn.: Ak sú známe hodnoty ε_x , m a E možno rovnicu využiť tiež na výpočet napätia σ_x .

3.2.1.2 Rovnice plasticity pre rovinnú napätosť

Nech na elementárny hranolček na obr. 3.13a pôsobia napätia v medziach Hookovho zákona σ_x a σ_y súčasne.



Obr. 3.13

Uvažujme najskôr iba napätie σ_x (obr. 3.12), ktoré vyvolá v smere osi x predĺženie

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

a v smere osí y a z pomerné skrátania $\varepsilon'_y = -\frac{\sigma_x}{mE}$; $\varepsilon'_z = -\frac{\sigma_x}{mE}$.

Podobne potom σ_y vyvolá v smere osi y pomerné predĺženie (obr. 3.13b) a v smere osi x a z pomerné skrátania

$$\varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon''_x = -\frac{\varepsilon''_y}{m} = -\frac{\sigma_y}{mE}; \quad \varepsilon''_z = -\frac{\varepsilon''_y}{m} = -\frac{\sigma_y}{mE}.$$

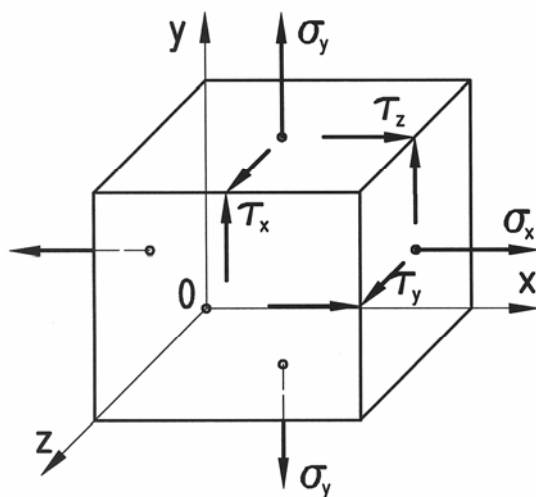
Celkové pomerné predĺženie ε_x , ε_y , ε_z je potom dané superpozíciou (algebraickým súčtom) jednoosých predĺžení ε'_x , ε''_x , ε'_y , ε''_y , ε'_z a ε''_z . Rovnice elasticity pre rovinnú napätosť majú teda tvar:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon'_x + \varepsilon''_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon'_y + \varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon'_z + \varepsilon''_z = \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m.E} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Z rovníc (3.23) je vidieť, že pri rovinnom napätí je pretvorenie priestorové.

3.2.1.3 Rovnice plasticity pre priestorovú napätosť

Tak, ako v predchádzajúcom prípade, aj pri určení priestorovej deformácie budeme postupovať metódou superpozície jednotlivých vplyvov napätia. Na elementárny hranolček (obr. 3.14) pri trojosej napätosti pôsobia napätia ε_x , ε_y , ε_z a τ_x , τ_y , τ_z .



Obr. 3.14

Výsledné pretvorenie v smere súradnicových osí je

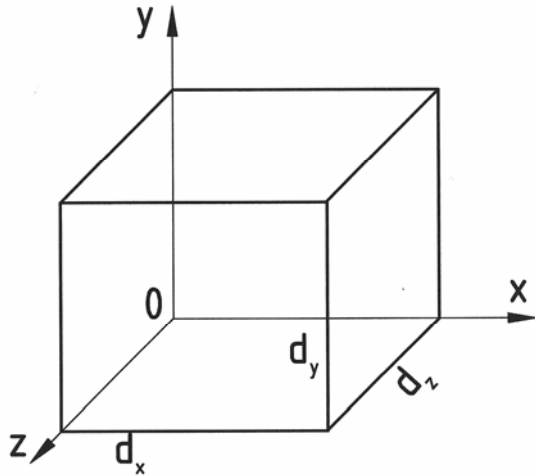
$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_z}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) \\
 \varepsilon_z &= \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{aligned}} \right\} \quad (3.24)$$

Ked' poznáme deformáciu, tak vo všetkých troch prípadoch napätosti **možno rovnice elasticity využiť pre výpočet napätia.**

Pozn.: - k rovniciam pre priamkovú napätosť (1.17), rovinnú (3.23) a priestorovú (3.24) napätosť možno pripísať tiež rovnice pre uhlové pretvorenie $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ (1.13),
 - odvodené rovnice elasticity platia tiež pre hlavné napätia.

3.2.2 Zmena objemu. Hodnota Poissonovej konštanty

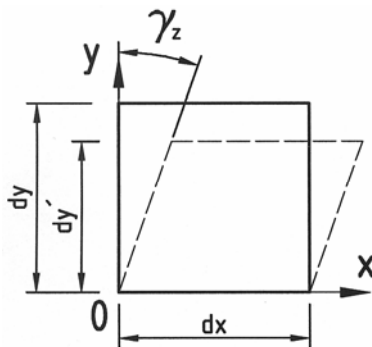
Na určenie zmeny objemu uvažujme opäť elementárny hranolček s hranami dx , dy , dz (obr. 3.15a).



Obr. 3.15a

Pretvorenie elementárneho hranolčeka je vo všeobecnosti dané pomernými predĺženiami (skráceniami) ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z a uhlovými pretvoreniami γ_x , γ_y , γ_z .

Pokiaľ je pretvorenie malé, možno zmenu dĺžky hrán vplyvom kolmosti spôsobenej šmykovým napätím (obr. 3.15b) zanedbať.



Obr. 3.15b

Môžeme teda písať

$$dy \doteq dy'$$

Pôvodný objem elementárneho hranolčeka pred pretvorením je

$$dV = dx \, dy \, dz$$

Objem pretvoreného hranolčeka v stave napätosti bude

$$dV' = (dx + \Delta dx) (dy + \Delta dy) (dz + \Delta dz),$$

kde $\Delta dx = \epsilon_x dx$..., takže po úprave

$$dV' = dx(1 + \epsilon_x) dy (1 + \epsilon_y) dz (1 + \epsilon_z).$$

Po vynásobení a zanedbaní malých veličin vyššieho rádu (všetky súčiny ε_x , ε_y , ε_z) dostaneme

$$dV' = dV + dx dy dz (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Zmena objemu potom je

$$\Delta dV = dV' - dV = dV (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

a pomerná zmena objemu

$$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.25)$$

Po dosadení za ε_x , ε_y , ε_z z rovníc elasticity (3.24) bude

$$e = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} + \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} + \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right)$$

a po úprave

$$e = \frac{m-2}{m.E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.26)$$

V prípade všestranného ťahu, alebo tlaku je

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$$

takže

$$e = \frac{m-2}{m.E} . 3p \quad (3.27)$$

Pre nestlačiteľné (dokonale tuhé) telesá je pomerná zmena objemu $e = 0$. Z toho vyplýva

$$0 = m - 2$$

čiže

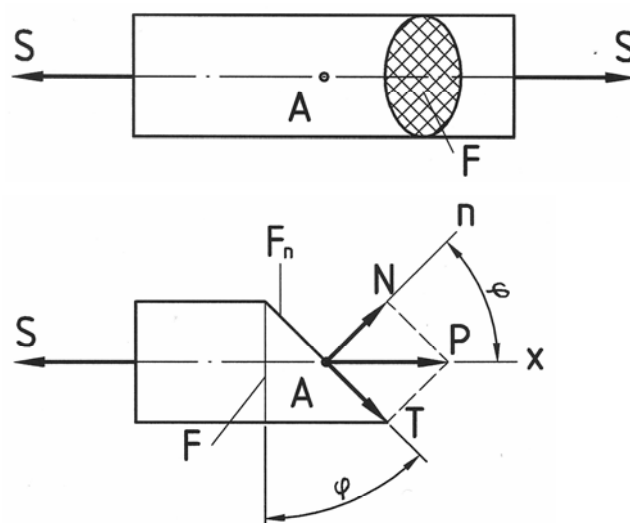
$$m = 2.$$

Dokázali sme teda, že **Poissonova konštantna m musí byť vždy väčšia ako dve**, resp. Poissonovo číslo μ menšie ako 0,5.

V opačnom prípade by totiž, ako to vyplýva z rovnice (3.27) pri všestrannom ťahu pomerná zmena objemu e bola záporná (objem by sa musel znižovať), čo ako vieme, odporuje skutočnosti.

3.3 Príklady

3.3.1 Určite výpočtom a graficky napätosť v bode **A** prúta, zaťažného dvojicou síl **S** (obr. 3.16), ak je dané: $S = 10 \text{ kN}$, $F = 100 \text{ mm}^2$, $\varphi = 30^\circ$.



Obr. 3.16

Výpočtové riešenie:

Z predchádzajúcich kapitol vieme, že napätie $\sigma_1 = \frac{S}{F} = \frac{10 \cdot 10^3 (N)}{100 (mm^2)} = 100 MPa$.

Podľa (3.3 a 3.4) vyjadríme zložky sily P:

$$N = S \cdot \cos \varphi \quad \text{a} \quad T = S \cdot \sin \varphi.$$

Nasledovne pomocou (3.5, 3.6) vyjadríme príslušné napätia v bode A:

$$\sigma_A = \frac{N}{F_n}, \quad \tau_A = \frac{T}{F_n},$$

pričom vieme, že závislosť medzi plochami šikmého a priečneho rezu je (3.7):

$$F_n = \frac{F}{\cos \varphi},$$

po dosadení:

$$\sigma_A = \frac{S \cdot \cos \varphi}{\frac{F}{\cos \varphi}} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \varphi, \quad \tau_A = \frac{S \cdot \sin \varphi}{\frac{F}{\cos \varphi}} = \sigma_1 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi.$$

A ďalej po použití goniometrických vzorcov dvojnásobného uhla a ich úprave dostaneme:

$$\sigma_A = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \cos 2\varphi \Rightarrow \sigma_A = \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ,$$

$$\sigma_A = 75 MPa.$$

$$\tau_A = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \sin 2\varphi \Rightarrow \tau_A = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sin 60^\circ,$$

$$\tau_A = 43,3 MPa.$$

Grafické riešenie (obr. 3.17):

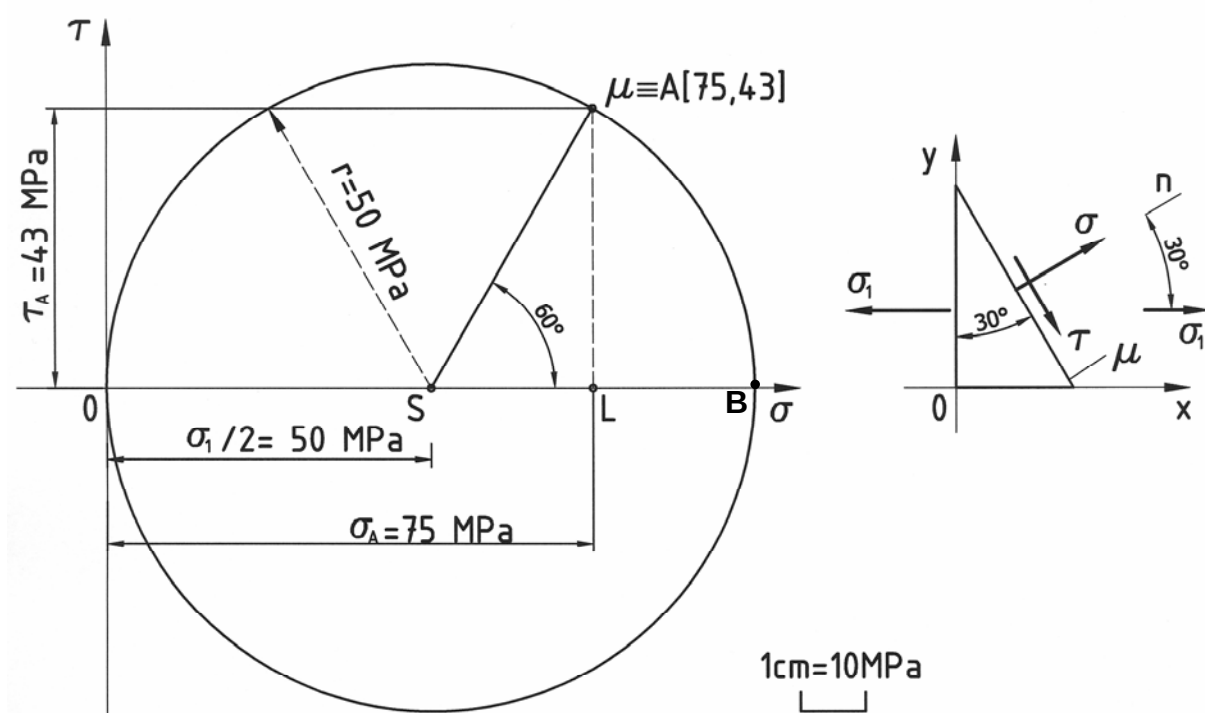
- 1) Zvolíme vhodnú mierku napätí, napr. 1cm=10MPa
- 2) Zostrojíme súradnicovú sústavu (rovinu) napätí σ , τ
- 3) Vypočítame napätie: $\sigma_1 = \frac{S}{F} = \frac{10 \cdot 10^3 (N)}{100 (mm^2)} = 100 MPa$
- 4) Na osi napätia σ vynesíme v mierke $\sigma_1 = 100 MPa$ (bod B)
- 5) Nájdeme stred S úsečky $\overline{0, B}$ ($\frac{\sigma_1}{2} = 50 MPa$)
- 6) Nakreslíme kružnicu napätia o polomere $r = \frac{\sigma_1}{2} = 50 MPa$

- 7) Zo stredu S vynesieme rameno smerového uhlu $2\varphi = 60^\circ$
- 8) V priesečníku ramena a kružnice nám vznikne bod A
- 9) Odmeraním súradníc σ a τ zistíme veľkosť napätí v bode A:

$$\sigma_A = 10(\text{MPa}) \cdot 7,5(\text{cm}) = 75 \text{ MPa}$$

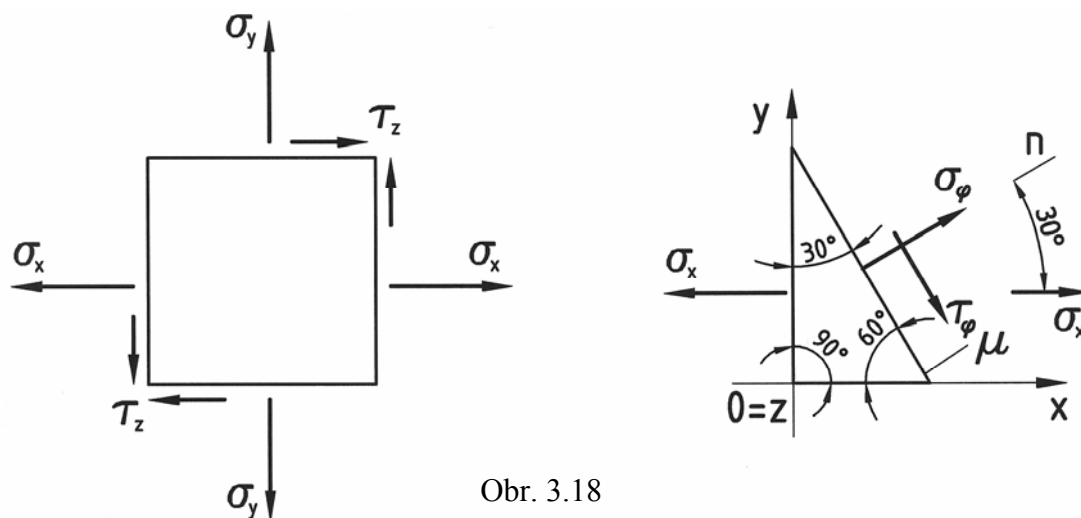
$$\tau_A = 10(\text{MPa}) \cdot 4,3(\text{cm}) = 43 \text{ MPa}$$

Porovnaním s výpočtovým riešením sme zistili, že výsledky v oboch prípadoch sú zhodné.



Obr. 3.17

3.3.2 Pre element telesa určite normálové a šmykové napätie v plôške odklonenej o uhol $\varphi = 30^\circ$, ak $\sigma_x = 100$ MPa (obr. 3.18). Zostrojte Mohrovu kružnicu pre zväzok rovín rovnobežných s osou z .



Obr. 3.18

Riešenie:

Podľa (3.20) napíšeme tenzor napätia:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

po dosadení do (3.22b) vyjadríme vektor napätia:

$$\bar{p} = T_\sigma \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomocou (3.22c) dostaneme normálovú zložku napätia σ_φ :

$$\sigma_\varphi = \bar{n}^T \cdot \bar{p} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ \\ \cos 60^\circ \\ \cos 90^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 86,6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 75 \text{ MPa},$$

a ďalej, podľa (3.22d), vypočítame šmykovú zložku napätia:

$$|\bar{p}|^2 = \sigma_\varphi^2 + \tau_\varphi^2 \Rightarrow \tau_\varphi = \sqrt{(86,6^2 + 0^2 + 0^2) - 75^2} = 43,3 \text{ MPa}.$$

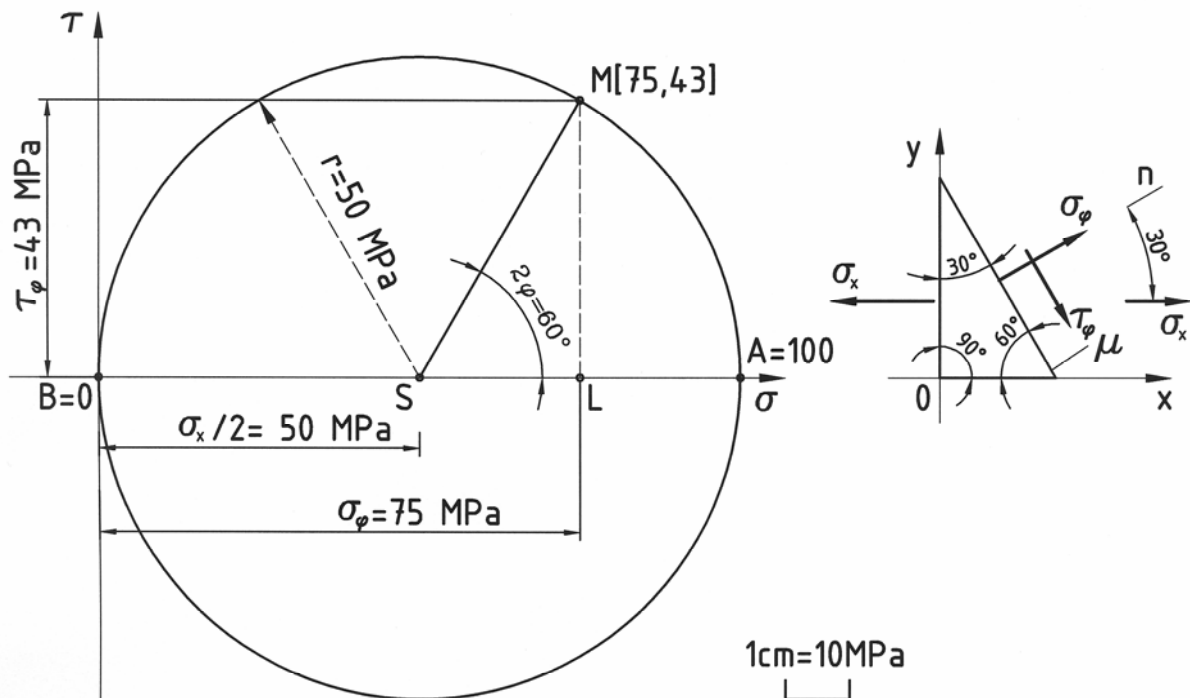
Grafické riešenie (obr. 3.19):

- 1) Zvolíme vhodnú mierku napätí, napr. $1\text{cm}=10\text{MPa}$
- 2) Zostrojíme súradnicovú sústavu (rovinu) napätí σ, τ
- 3) Určíme súradnice bodov A,B: $A[\sigma_x, \tau_z] ; B[\sigma_y, \tau_z] \Rightarrow A[100,0] ; B[0,0]$
- 4) Na osiach napätia σ, τ vynesieme v mierke body A a B
- 5) Nájdeme stred S úsečky $\overline{AB}$ ($\frac{\sigma_x}{2} = 50\text{MPa}$)
- 6) Nakreslíme kružnicu o polomere $r = \frac{\sigma_x}{2} = 50\text{MPa}$
- 7) Zo stredu S vynesíme rameno smerového uhlu $2\varphi = 60^\circ$
- 8) V priesečníku ramena a kružnice vznikne bod M
- 9) Odmeraním súradníc σ a τ zistíme veľkosť napätí v bode M:

$$\sigma_\varphi = 10(\text{MPa}) \cdot 7,5(\text{cm}) = 75\text{MPa}$$

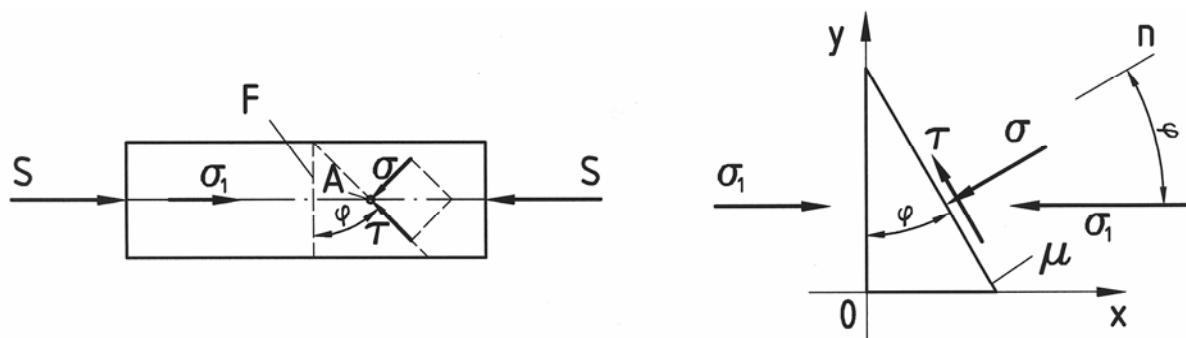
$$\tau_\varphi = 10(\text{MPa}) \cdot 4,3(\text{cm}) = 43\text{MPa}$$

Porovnaním s výpočtovým riešením sme podľa očakávania zistili, že výsledky v oboch prípadoch sú zhodné.



Obr. 3.19

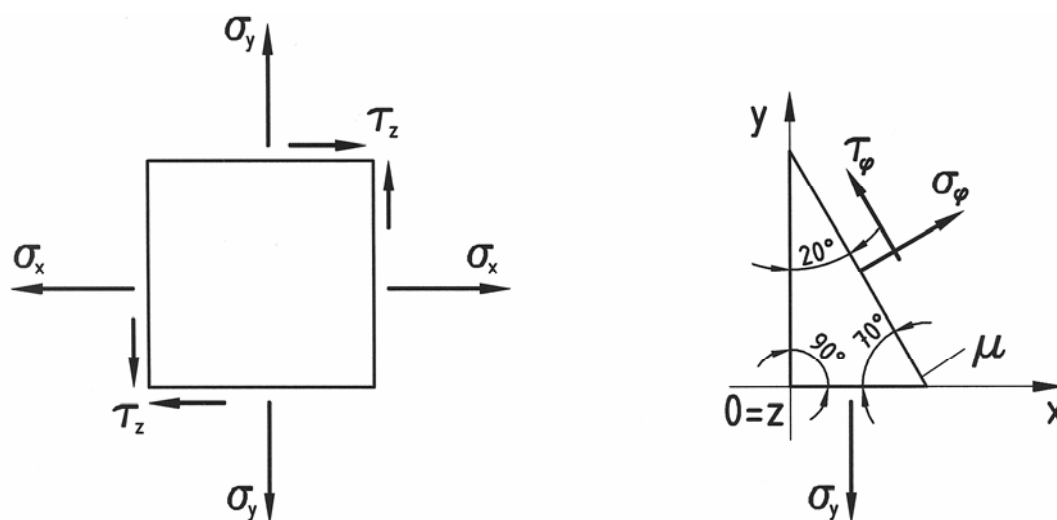
3.3.3 Vypočítajte a graficky určite napätosť v bode A prúta, zaťaženého dvojicou síl S (obr. 3.20), ak je dané: $S = 2 \text{ kN}$, $F = 80 \text{ mm}^2$, $\varphi = 20^\circ$.



Obr. 3.20

Výsledok: $\sigma_A = 22,1 \text{ MPa}$
 $\tau_A = 8 \text{ MPa}$

3.3.4 Určite výpočtom a graficky normálové a šmykové napätie pre element na (obr. 3.21), v plôške odklonenej o uhol $\varphi = 20^\circ$, ak $\sigma_y = 40 \text{ MPa}$.

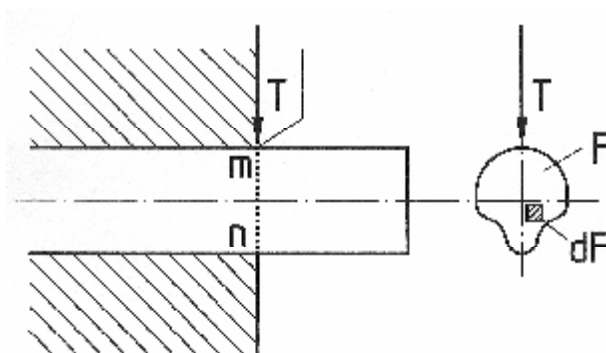


Obr. 3.21

Výsledok: $\sigma_\varphi = 4,68 \text{ MPa}$
 $\tau_\varphi = 12,86 \text{ MPa}$

4. PROSTÉ NAMÁHANIE NA ŠMYK (STRIH)

Prípad простého namáhania na šmyk (strih) sa vyskytne vtedy, keď zo všetkých šiestich zložiek vnútorných síl a momentov v rovine rezu je rôzna od nuly len priečna (posúvajúca, tangenciálna) sila T prechádzajúca jeho ťažiskom (obr. 4.1).



Obr. 4.1

Vieme už (ods. 1.4, rovnice 1.3), že napätie sa pri prostom šmyku vypočíta z rovnice

$$dt = \frac{dT}{dF}$$

Podľa staršej (zjednodušujúcej) hypotézy sú šmykové napätia rovnobežné so silou T vo všetkých bodoch (plôškach dF) prierezu rovnaké, teda:

$$t = \frac{T}{F} \quad [\text{Pa}]$$

4.1 Podmienky pevnosti a dovolené namáhanie v šmyku

Podmienku bezpečnosti pri prostom šmyku možno vyjadriť rovnicou

$$t_{\max} \leq t_{\text{dov}} \quad (4.1)$$

Ak uvažujeme pri namáhaní v ťahu (tlaku) rovnakú mieru bezpečnosti (čo je ďalším zjednodušením skutočnosti), potom dovolené namáhanie v šmyku t_{dov} možno určiť ako časť dovoleného namáhania v ťahu.

Podľa rôznych hypotéz (experimentálnej a teoretickej povahy, rôznych druhov a kombinácií pôsobenia zaťaženia a napätia) vychádzajú odporúčané medze dovolených šmykových napätí rôzne (viď. napr. lit. 6,7,8).

Pretože teória pevnosti patrí skôr do teoretickej pružnosti a pevnosti, a aj s ohľadom na poslanie skrípt pre študijné odbory špeciálneho inžinierstva, nebudeme sa touto problematikou podrobnejšie zaoberať.

Postačí, keď budeme v ďalšom vychádzať z toho, že v praktických výpočtoch príslušnú pevnostnú hypotézu a hodnoty dovoleného napätia určujú záväzne technické normy (STN).

Hodnoty šmykového napätia, odvodené podľa rôznych hypotéz sa pohybujú v intervale

$$t_{dov} = \langle 0,5; 1,0 \rangle s_{dov} \quad (4.2)$$

V praktických výpočtoch sa berú do úvahy skôr nižšie hodnoty τ_{dov} .

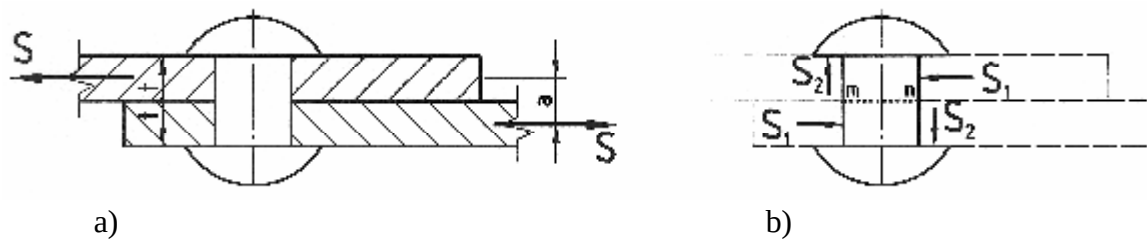
4.2 Navrhovanie a posudzovanie na prostý šmyk

Prostý prípad namáhania v šmyku sa najčastejšie vyskytuje pri navrhovaní, alebo kontrole spojovacích prostriedkov: kolíkové a platničkové spoje v tzv. roštových nosníkoch, v rôznych tesárskych spojoch strešných konštrukcií, nity, skrutky, zvary a lepené spoje.

4.2.1 Výpočet a kontrola nitov a skrutiek

Na spojenie jednotlivých plechov slúžia nity a skrutky. Nity a skrutky sa rozdeľujú na *silové* (keď prenášajú sily) a na *spínacie*, keď ich účelom je spojiť plechy iba vo väčšie celky.

Pôsobením síl S vo dvoch „preplátovaných“ plechoch (obr. 4.2a) by sa plechy jeden po druhom posunuli. Posúvaniu však bránia nity, ktoré, **ak zanedbáme** odpor trením v styčných plochách, prenášajú celý účinok síl S .



Obr. 4.2

Keď predpokladáme, že každý nit prenáša rovnakú časť sily, bude sila pripadajúca na jeden nit

$$S_1 = \frac{S}{n} \quad (4.3)$$

kde n ... je počet nitov v spoji [ks].

Sila S_1 pôsobí na bočnú polovalcovú plochu drieku (obr. 4.2b) a snaží sa ušmyknúť driek nitu v rovine $\overline{m,n}$. Silové **nity namáhané** na ustrihnutie **v jednej rovine sa nazývajú jednostriznými**.

Akčné sily S neležia však na rovnakej nositeľke, ale tvoria momentovú dvojicu ($M = S_1 \cdot a$), ktorá je v rovnováhe s druhou dvojicou síl S_2 , pôsobiacich na hlavu nitu.

Šmykové napätie pri rovnováhe vnútorných síl pôsobiacich v myslenom reze drieku $\overline{m, n}$ bude

$$t = \frac{S_1}{F} = \frac{S}{nF} = \frac{S}{n \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (4.4)$$

kde d je priemer a F plocha drieku nitu.

Pevnostná podmienka jednostrizných nitov potom bude

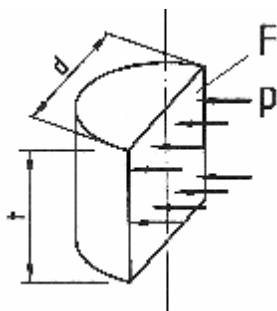
$$t = \frac{4S}{n\pi d^2} \leq t_{dov} \quad (4.5)$$

Z rovnice možno vypočítať tiež priemer nitu, ak je daný ich počet a naopak.

Sily S_2 vyvolávajú v reze ťahové napätie. Proti nim však pôsobia normálové napätia vznikajúce pri ochladzovaní nitu, a preto sa do výpočtu nezahrňujú.

Keďže sily pôsobiace na driek nitu sa prenášajú prostredníctvom stien nitového otvoru, treba driek nitu a steny otvoru plechu prekontrolovať **na otláčenie**.

Výpočet v prospech bezpečnosti predpokladá, že napätie je rozložené rovnomerne a že pôsobí len v diametrálnej rovine (obr. 4.3).



Obr. 4.3

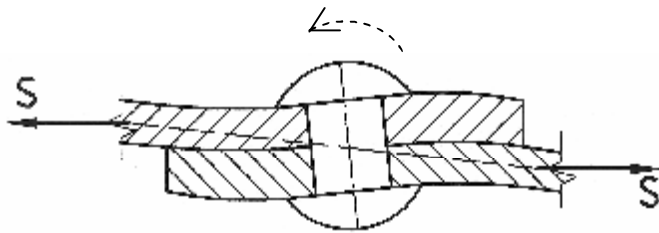
Podľa toho je

$$p = \frac{S_1}{F} = \frac{S_1}{td} \leq p_{dov}, \quad (4.6)$$

kde t - je hrúbka plechu a p - všeobecné napätie na otláčenie. Vo výpočtoch sa

uvažuje s dovoleným napätím na otláčenie p_{dov} obyčajne ako s 2 až 2,5 násobkom dovoleného namáhania v tlaku σ_{dov} .

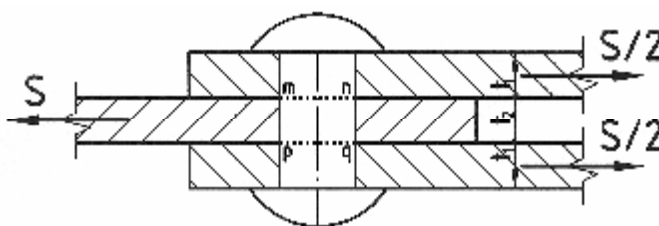
Ako vidieť na obr. 4.2a, preplátovaný spoj je namáhaný ohybovým momentom $M = S \cdot a$.



Obr. 4.4

Takéto spojenie nie je vhodné na prenášanie veľkých vonkajších síl, pretože spoj má tendenciu sa skriviť (obr. 4.4).

Vtedy, a ak je to možné, sa používa radšej súmerné **spojenie nitmi dvojstrižnými** (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Pri tomto spojení nity odporujú ušmyknutiu vo dvoch prierezoch drieku $\overline{m, n}$; $\overline{p, q}$.

Výraz pre výpočet napätia v šmyku, alebo počtu dvojstrižných nitov v spoji má potom tvar:

$$t = \frac{S}{n \cdot 2 \frac{p d^2}{4}} = \frac{2S}{n p d^2} \leq t_{dov} \quad (4.7)$$

Z úvahy o rozložení a veľkosti síl v spoji (obr. 4.5) pri rôznej hrúbke plechov ($t_1 \neq t_2$) vyplýva ich vzájomný pomer $0,5 t_2 \leq t_1$.

Pozn.: Navrhovanie a posudzovanie spojov pomocou nitov (skrutiiek) je problematika rozsiahlejšia, ako zmienka o nej v tomto stručnom úvode. Patria sem také otázky, ako napr. excentricky namáhané spoje, trecie spoje, zariadenie, údržba a kontrola spojov atď.

4.2.2 Výpočet a kontrola zvarov

Zvarové spojenia majú oproti nitovaným spojom celý rad výhod. Metódy výpočtu zvarovaných spojov úzko súvisia s technológiou zvarovania, preto pre mnoho druhov spojov má výpočet stále ešte charakter dohovoru.

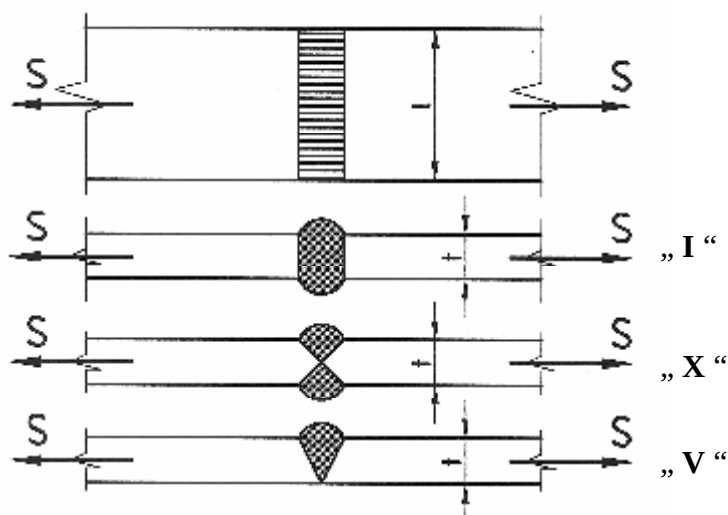
Zvary sa rozdeľujú podľa viacerých kritérií. Ako si ukážeme pomenovanie zvaru len podľa jedného kritéria (vlastnosti) väčšinou nestačí.

Rozdelenie zvarov:

- podľa *tvaru* zvaru: - tupé,
 - kútové,
 - dierové,
 - žliabkové,
- podľa *polohy* zvaru: - čelné (kolmé a šikmé),
 - bočné,
- podľa *spojitosti* zvaru: - priebežné,
 - stehové.

4.2.2.1 Tupé zvary

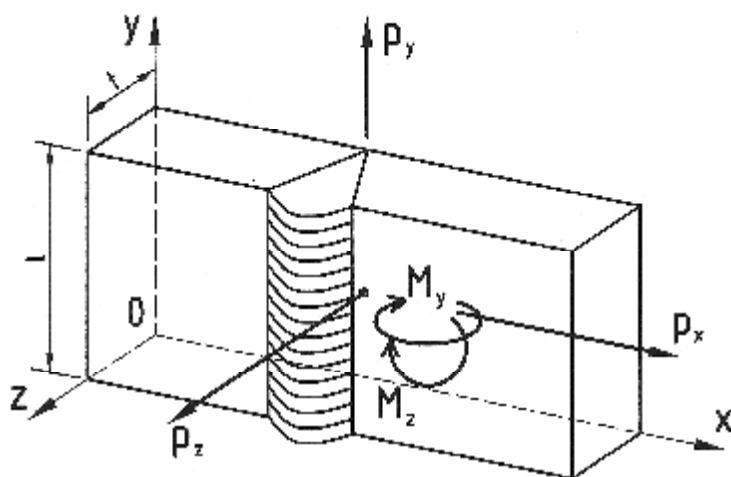
Najjednoduchší, ale spoľahlivý druh spojenia je spojenie na tupo vytvorené zaplnením medzery medzi čelami spojovaných prvkov roztaveným kovom. Podľa úpravy čiel spojovaných plechov sa tupé zvary označujú písmenami (obr. 4.6).



Obr. 4.6

Pri výpočte sa prevýšenie a podloženie zvaru neberie do úvahy. Ako výška zvaru sa uvažuje menšia z hrúbok spojovaných plechov.

Uvažujme tupý spoj zaťažený sústavou síl a momentov podľa obr. 4.7.



Obr. 4.7

Zvar namáhaný vnútornou silovou sústavou je namáhaný vo všetkých troch rovinách.

V prípade, keď zo všetkých uvažovaných zložiek síl a momentov je len jediná nenulová $P_x \neq 0$ a ostatné (P_y , P_z a M_y , M_z) sú nulové,

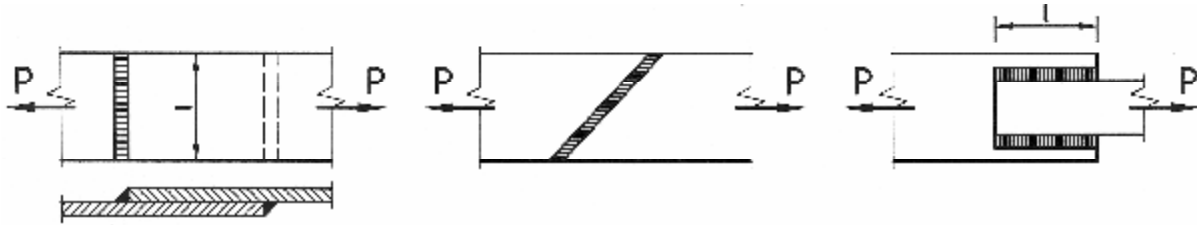
bude zvar namáhaný na ťah (tlak). Veľkosť normálového napätia vo zvare sa určí zo vzťahu

$$s_x = \frac{P_x}{F} = \frac{P_x}{t \cdot l} \quad (4.8)$$

Nenulové sily P_y , P_z a momenty M_y , M_z by zvar namáhali šmykovými napätiami v krútení v smere kolmých osí τ_y a τ_z .

4.2.2.2 Kútové zvary

Názvy kútových zvarov podľa polohy zvaru vzhľadom na smer vnútornej sily, alebo ohybového momentu sú uvedené na obr. 4.8.



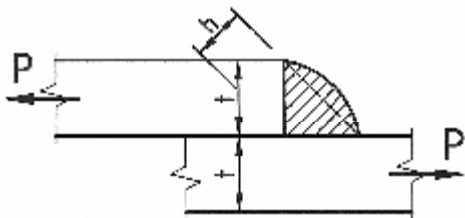
a) Kútový zvar čelný (sila pôsobí kolmo na zvar)

b) Kútový zvar šikmý

c) Kútový zvar pozdĺžny (sila pôsobí rovnobežne so zvarom)

Obr. 4.8

Vo výpočtoch sa predpokladá, že prierez kútového zvaru má tvar rovnoramenného trojuholníka (vyznačeného na obr. 4.9 čiarkovane) o výpočtovej výške h.



Obr. 4.9

Šmykové napätie kútového čelného kolmého zvaru sa vypočíta zo vzťahu

$$t = \frac{P}{F_{zv}} = \frac{P}{h \cdot l} = \frac{P}{0,7 \cdot t \cdot l} \quad (4.9)$$

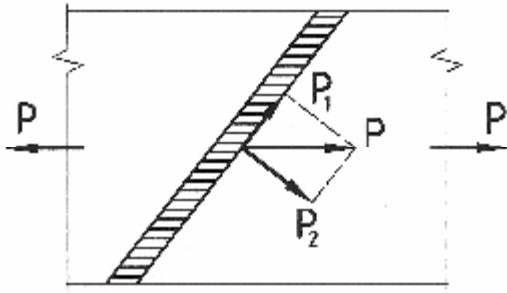
Podmienka pevnosti má tvar

$$t \leq t_{dov_{zv}} \quad (4.10)$$

Šmykové napätie **kútového bočného zvaru** namáhaného silou P sa vypočíta zo vzťahu

$$t = \frac{P}{2 \cdot 0,7 \cdot t \cdot l} \quad (4.11)$$

Napätie šikmého kútového zvaru (obr. 4.10) sa vypočíta nasledovne:



Obr. 4.10

Po rozložení sily P do smeru zvaru P_1 a do smeru kolmého na zvar P_2

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

budú jednotlivé zložky napätia

$$t_1 = \frac{P_1}{0,7 \cdot t \cdot l} \quad , \text{ resp. } t_2 = \frac{P_2}{0,7 \cdot t \cdot l} \quad (4.12)$$

Obe napätia sú na seba kolmé a pôsobia v jednej rovine. Preto ich výsledné napätie sa vypočíta ako geometrický súčet zo vzťahu

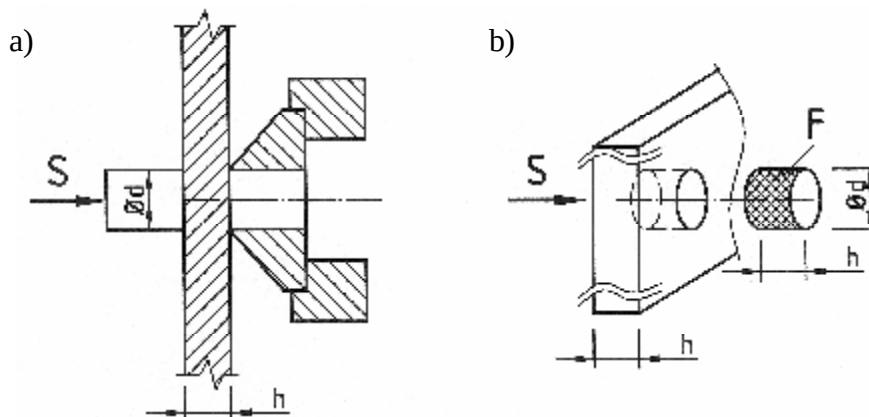
$$t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \quad (4.13)$$

Podmienka pevnosti je

$$t < t_{dov_{zv}} \quad (4.14)$$

4.3 Príklady

4.3.1 Do stojiny koľajnice v mieste o hrúbke $h = 8$ mm je potrebné vyraziť otvor pre skrutku o priemere $d = 15$ mm (obr. 4.11a). Určite, aká sila musí pôsobiť na razník, ak je medza pevnosti materiálu koľajnice v šmyku $t_{dov} = 320$ MPa.



Obr. 4.11

Riešenie:

Vieme, že podľa (4.1) je výpočtové šmykové napätie:

$$t = \frac{S}{F} \leq t_{dov},$$

Z obr. 4.11b je zrejmé, že šmyková plocha je:

$$F = p \cdot d \cdot h,$$

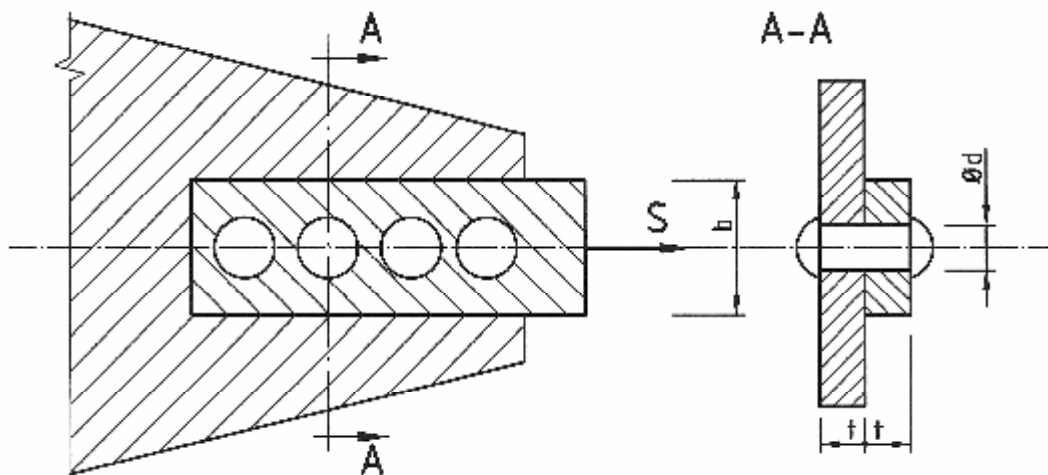
a ďalej po dosadení:

$$S \geq t_{dov} \cdot F \Rightarrow S = 320 \text{ (MPa)} \cdot 377 \text{ (mm}^2\text{)} = 120\,640 \text{ N} = 120,64 \text{ kN}$$

4.3.2 Určite priemer a potrebný počet nitov, ktorými je upevnený pás k doske (obr. 4.12).

Skontrolujte pevnosť pásu v mieste zoslabenia otvormi, ak je dané:

$S = 20 \text{ kN}$; $b = 40 \text{ mm}$; $t = 5 \text{ mm}$; $s_{dov \text{ pásu}} = 120 \text{ MPa}$; $t_{dov \text{ nitu}} = 90 \text{ MPa}$.



Obr. 4.12

Riešenie:

Volíme priemer nitu:

$$d = 2 \cdot t = 10 \text{ mm},$$

a po dosadení do (4.5):

$$t = \frac{S}{F \cdot n} \leq t_{dov \text{ nitu}} \Rightarrow t_{dov \text{ nitu}} \geq \frac{S}{\frac{p \cdot d^2}{4} \cdot n} \Rightarrow n \geq \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{p \cdot 10^2 \cdot 90 \text{ (mm}^2 \cdot \text{MPa)}} = 2,83 - \text{ volíme } \mathbf{3 \text{ nity!}}$$

Ďalším krokom je kontrola pevnosti pásu (4.8):

$$s = \frac{S}{F} \leq s_{\text{dov pásu}} \Rightarrow s = \frac{20 \cdot 10^3}{40.5} = 100 \text{ MPa} \leq 120 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

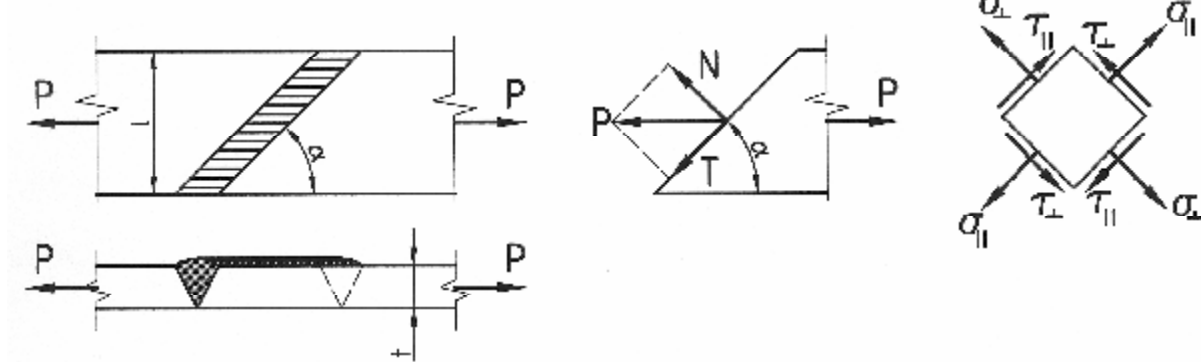
Podľa (4.6) je potrebné ešte vykonať kontrolu na otláčenie:

$$p_{\text{otl}} = (2 \div 2,5) \cdot s_{\text{dov pásu}} = 240 \text{ MPa},$$

$$p = \frac{S}{n \cdot d \cdot t} \leq p_{\text{otl}} \Rightarrow p = \frac{20 \cdot 10^3}{3 \cdot 10.5} = 133 \text{ MPa} \leq 240 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

4.3.3 Dva oceľové pásy sú spojené šikmým tupým zvarom. Určite potrebnú šírku pásov, hodnotu normálového napätia v smere kolmom na zvar a hodnotu šmykového napätia v smere zvaru (obr. 4.13). Dané je:

$$P = 80 \text{ kN}; a = 45^\circ; t = 8 \text{ mm}; s_{\text{dov}} = 120 \text{ MPa}.$$



Obr. 4.13

Riešenie:

Vypočítame šírku pásu pomocou (4.8):

$$s = \frac{P}{l \cdot t} \leq s_{\text{dov}} \Rightarrow l \geq \frac{P}{t \cdot s_{\text{dov}}} = \frac{80 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{8 \cdot 120 \text{ (mm.MPa)}} \Rightarrow l \cong 84 \text{ mm}.$$

Ďalej vyjadríme dĺžku zvaru:

$$l_z = \frac{l}{\sin a} = \frac{84}{\sin 45} = 119 \text{ mm},$$

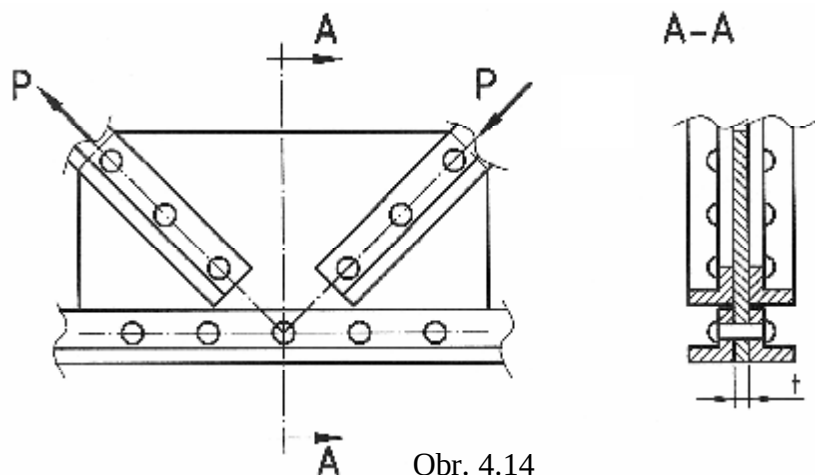
vypočítame normálové napätie v smere kolmom na zvar (4.8):

$$s_{\perp} = \frac{N}{F} = \frac{S \cdot \sin a}{l_z \cdot t} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot \sin 45}{119.8} = 59,4 \text{ MPa},$$

a potom aj šmykové napätie v smere zvaru (4.8):

$$t = \frac{T}{F_z} = \frac{S \cdot \cos a}{l_z \cdot t} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot \cos 45}{119.8} = 59,4 \text{ MPa}.$$

- 4.3.4** Diagonály prútovej sústavy, pozostávajúce z uholníkov **L** 70x40x6mm, sú zo styčnickovým plechom o hrúbke $t = 8\text{mm}$ spojené pomocou 3ks nitov s priemerom $d = 18\text{mm}$ (obr. 4.14). Vypočítajte napätie v šmyku a v otláčení spojenia diagonál so styčnickovým plechom, ak osová sila $P = 48\text{ kN}$.

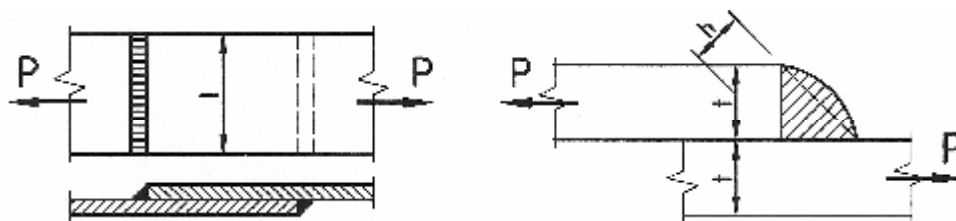


Obr. 4.14

Výsledok:

$$\tau = 31,44\text{ MPa} ; p_{otl} = 111,11\text{ MPa}$$

- 4.3.5** Dva oceľové pásy sú spojené kútovým čelným zvarom (obr. 4.15). Určite maximálnu silu P , ktorou je možné tento spoj zaťažiť, ak je dané: $l = 200\text{mm}$; $t = 8\text{mm}$; $\tau_{dov} = 90\text{ MPa}$.



Obr. 4.15

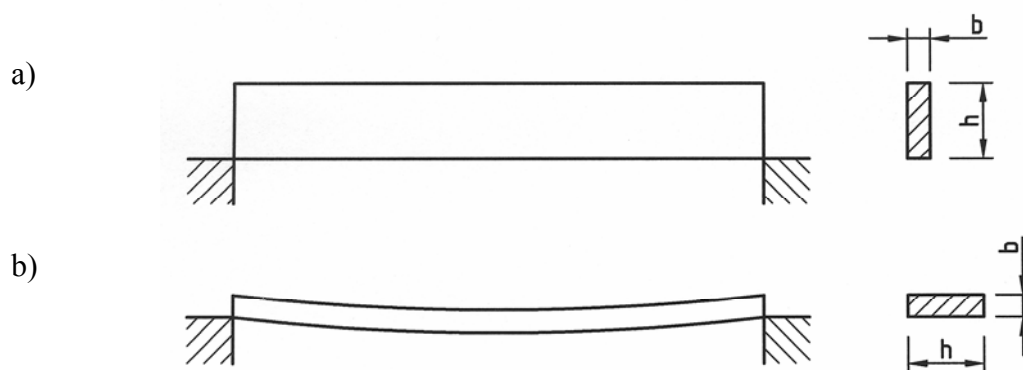
Výsledok:

$$P \leq 100,8\text{ kN}$$

5. CHARAKTERISTIKY ROVINNÝCH PRIEREZOV POMOCOU KVADRATICKÝCH MOMENTOV

Pevnosť a tuhosť konštrukčných prvkov pri niektorých druhoch namáhania závisí nielen na veľkosti plochy F , ale aj od jej tvaru v priečnom priereze a od orientácie prierezu vzhľadom na smer zaťaženia.

Na obr. 5.1a je znázornený nosník obdĺžnikového prierezu $F = b \cdot h$ ($h > b$). Prostým pozorovaním zistíme, že deformácia toho istého nosníka zaťaženého len vlastnou tiažou a uloženého iným spôsobom, je rozdielna. Zistíme, že aj keď sa jedná o ten istý nosník, je prieťah nosníka v druhom prípade (obr. 5.1b) väčší. Rozdielna deformácia je evidentne zapríčinená iba rôznou orientáciou prierezu nosníka vzhľadom na smer (rovinu) zaťaženia.

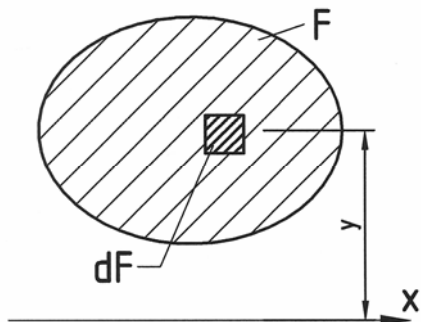


Obr. 5.1

Analyzovať a riešiť uvedené závislosti vyžaduje zoznámiť sa s nasledujúcimi kvadratickými momentmi plôch 2. stupňa - tzv. kvadratickými momentmi zotrvačnosti: momentom zotrvačnosti plochy vzhľadom na os, polárnym momentom plochy (vzhľadom na bod) a deviačnými momentmi (vzhľadom na plochy).

5.1 Kvadratický moment (zotrvačnosti) plochy vzhľadom na os

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os (obr. 5.2), ktorá leží v rovine prierezu je definovaný vzťahom:



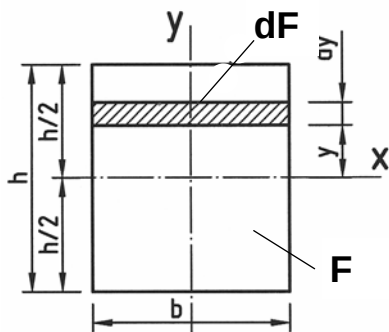
Obr. 5.2

$$I_x = \int_{(F)} y^2 dF, \quad (5.1)$$

v ktorom y je vzdialenosť elementárnej plochy dF od uvažovanej osi x . Pretože veličiny y^2 , F sú kladné, je vždy

aj kvadratický moment plochy k osi kladný. Z definície vyplýva, že jeho rozmer je $[m^4]$, $[cm^4]$, $[mm^4]$...

Praktické použitie rovnice (5.1) si ukážeme na riešení nasledujúceho príkladu. Máme určiť kvadratický moment obdĺžnikovej plochy (obr. 5.3) vzhľadom na os x .



Obr. 5.3

Elementárna plocha podľa obr. 5.3 je

$$dF = b \cdot dy$$

Keď ju dosadíme do rovnice 5.1 dostaneme

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} b h^3 \quad (5.2)$$

Poznamenajme, že:

- Moment zotrvačnosti vzhľadom na os y pre ten istý prierez by sme zrejme

$$\text{získali z rovnice } I_y = \frac{1}{12} h b^3 \quad (5.3)$$

Vzhľadom na to, že $b < h$ je $I_x = \frac{h^2}{b^2} \cdot I_y = k \cdot I_y$, t. j. I_x je k -krát väčší ako I_y . Preto aj

priehyb v prípade nosníka na obr. 5.1b je v pomere práve k -krát väčší, ako pri orientácii plochy prierezu podľa obr. 5.1a.

Moment zotrvačnosti plochy štvorca ($a = h$) je

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4 \quad (5.4)$$

Vo výpočtoch sa moment zotrvačnosti vzhľadom na os častejšie používa v tvare:

$$I_x = i_x^2 \cdot F, \quad (5.5)$$

v ktorom: F je plocha prierezu $[m^2]$
 i_x je tzv. *polomer zotrvačnosti* kvadratického momentu plochy $[m]$.

Pre známe hodnoty I_x , F obdĺžnikového prierezu je podľa rovnice 5.5 veľkosť polomeru zotrvačnosti

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (5.6)$$

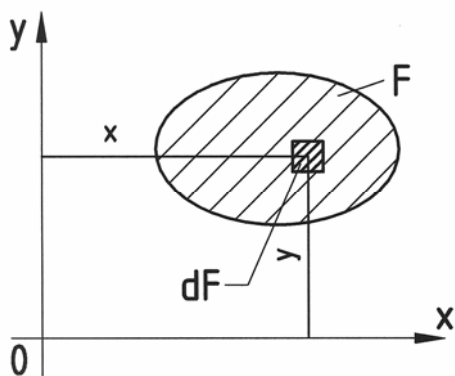
5.2 Polárny moment zotrvačnosti plochy

Kvadratický moment prierezovej plochy vzhľadom na bod v rovine plochy je definovaný integrálom

$$I_p = \int_{(F)} \rho^2 dF \quad (5.7)$$

a nazýva sa polárny moment plochy. V rovnici (5.7) je ρ vzdialenosť elementárnej plochy dF od bodu 0. V pravouhlom súradnicovom systéme podľa obr. 5.4 je

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (5.8)$$



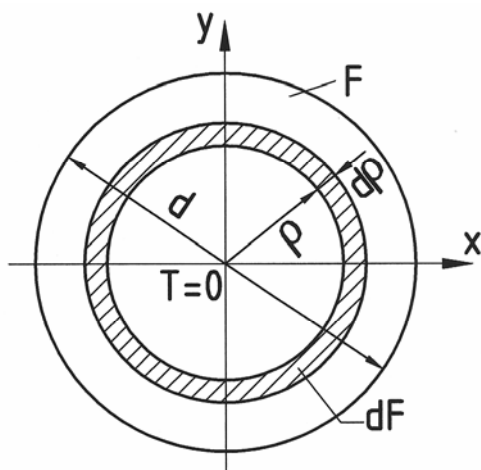
Obr. 5.4

a použitím (5.1)

$$I_p = I_x + I_y \quad (5.9)$$

Zisťujeme, že *polárny kvadratický moment plochy sa rovná súčtu kvadratických momentov vzhľadom na dve navzájom kolmé osi, idúce bodom 0.*

Konštrukčné prvky majú často kruhový prierez.. Podľa obrázku 5.5 elementárna plocha kruhu je



Obr. 5.5

a výsledok, podľa ktorého je polárny kvadratický moment kruhu

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (5.11)$$

Kvadratické momenty vzhľadom na os x a na os y kruhu sú rovnaké

$$I_x = I_y \quad (5.12)$$

Ak do rovnice 5.7 dosadíme za ρ^2 pravú stranu rovnice 5.8. dostaneme

$$I_p = \int_{(F)} (x^2 + y^2) dF = \int_{(F)} x^2 dF + \int_{(F)} y^2 dF$$

$$dF = 2\pi\rho \cdot d\rho \quad (5.10)$$

Do rovnice 5.7 dosadíme za dF pravú stranu rovnice 5.10. Dostaneme integrál

$$I_p = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho$$

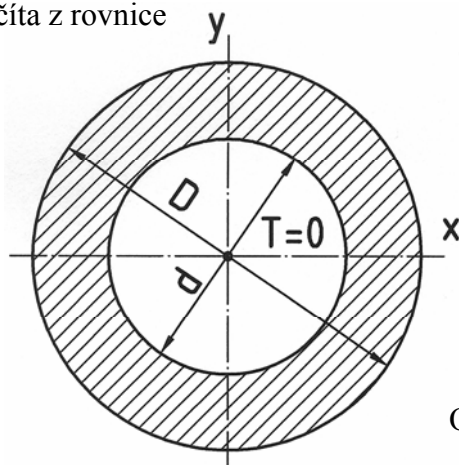
preto

$$I_p = 2I_x = 2I_y \quad \text{a odiaľ} \quad I_x = I_y = \frac{I_p}{2}$$

a po dosadení rovnice (5.11)

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} \quad (5.13)$$

Z uvedeného je tiež zrejmé, že polárny moment plochy medzikruhového prierezu (obr. 5.6) sa vypočíta z rovnice



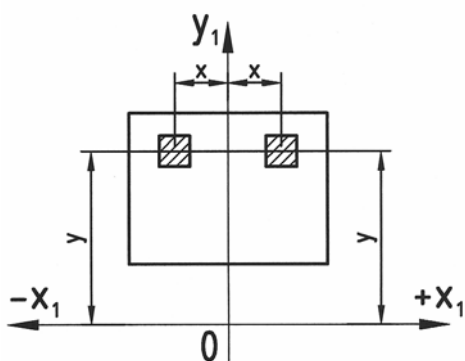
$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad (5.14)$$

Obr. 5.6

So zreteľom na to, že v prípade kruhu (5.12) i štvorca (5.4) sú kvadratické momenty plôch k obom osiam rovnaké, bol by nosník na obr. 5.1 z takýchto profilov prehnutý rovnako, t. j. bez ohľadu na to, či by namáhanie od vlastnej tiaže pôsobilo v smere osi x alebo y.

5.3 Deviačný moment plochy

Deviačný moment plochy (deviácia - v zmysle odchýlky od roviny, t. j. od dvoch súradnicových osí x_1, y_1) je definovaný integrálom (obr. 5.7)



Obr. 5.7

$$D_{xy} = \int_F x \cdot y dF \quad (5.15)$$

Z rovnice vyplýva, že deviačný moment môže byť $D_{xy} \leq 0$.

Osi zotrvačnosti x_1, y_1 (obr. 5.7), ku ktorým sú deviačne momenty rovné nule

sa nazývajú *hlavné osi kvadratických momentov* pre bod, v ktorom sa pretínajú. Keď tým priesečníkom je ťažisko plochy, potom v tomto zvláštnom prípade sa osi x_1 , y_1 nazývajú *centrálnymi osami kvadratických momentov*. Kvadratické momenty k týmto osiam sa nazývajú *hlavné, resp. centrálné kvadratické momenty*.

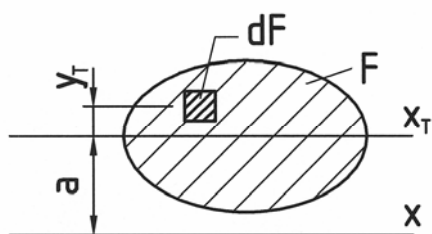
Pozn.: Podobne, ako v prípade napätosti (rovnice 3.20 a 3.21) aj v prípade momentov zotrvačnosti plôch, možno napísať v maticovom tvare rovnicu *tenzor zotrvačnosti* – matica je štvorcová, symetrická okolo hlavnej diagonály s tromi momentmi zotrvačnosti vzhľadom na os a šiestimi deviačnými momentmi vo vedľajších členoch matice.

Tenzor zotrvačnosti má veľký význam najmä pri riešení úloh v dynamike – pri riešení telies v pohybe.

Keď aspoň jedna z osí x , y je osou súmernosti, hodnota integrálu 5.15 je rovná nule, čo vyplýva z jeho súčtového významu, pretože podľa obr. 5.7, vzhľadom na os symetrie, bude v takom prípade vždy počet elementárnych veličín $x.y.dF$ so znamienkom kladným aj záporným rovnaký.

5.4 Kvadratický moment plochy k rovnobežne posunutým osiam

Os x_T na obr. 5.8 prechádza ťažiskom plochy F . Os x je rovnobežne posunutá od osi x_T ($x_T \parallel x$) vo vzdialenosti a . Kvadratický moment vzhľadom na posunutú os x (podľa rovnice 5.1) je



Obr. 5.8

$$I_x = \int_{(F)} (a + y_T)^2 dF \quad (5.16)$$

a úprave

$$I_x = \int_{(F)} y_T^2 dF + 2a \int_{(F)} y_T dF + a^2 \int_{(F)} dF \quad (5.17)$$

V tejto rovnici je

$$\int_{(F)} y_T^2 dF = I_{x_T} \quad \dots \text{kvadratický moment plochy vzhľadom na os } x_T \quad (5.17a)$$

$$\int_{(F)} y_T dF = 0 \quad \dots \text{je tzv. statický moment plochy vzhľadom na os } x_T \quad (5.17b)$$

$$\int_{(F)} dF = F \quad \dots \text{uvažovaná plocha} \quad (5.17c)$$

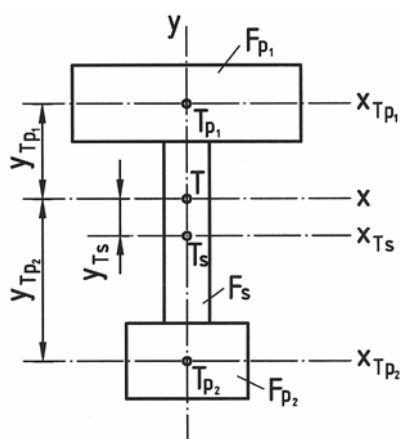
Pozn.: Statický (lineárny!) **moment plochy** $\int_{(F)} y_T dF$ *má rozmer [m³]*. Jeho výpočet je rovnaký ako statického momentu sily (lit. 9, ods. 2.2.1), keď namiesto sily uvažujeme s plochou prierezu [m²].

Rovnicu (5.17) možno na základe charakteristík jej jednotlivých členov napísať v tvare tzv. **Steinerovej vety**

$$I_x = I_{x_T} + a^2 \cdot F \quad (5.18)$$

Pre kvadratické momenty plochy vzhľadom na rovnaké osi z rovnice vyplýva, že najmenšiu hodnotu má kvadratický moment vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom ($a = 0$). Rovnako poznanie, že moment zotrvačnosti tej istej plochy možno zväčšiť iba jej odsunutím od uvažovanej osi (dokonca so štvorcem tejto vzdialenosti !) je z praktického hľadiska poznatok veľmi dôležitý.

Použitie Steinerovej vety si ukážeme symbolicky na príklade výpočtu osových momentov zotrvačnosti plochy (obr. 5.9) zloženého prierezu, asymetrického voči ťažiskovej osi nosníka x , y ($F_{p1} > F_{p2}$).



Obr. 5.9

$$\left. \begin{aligned} I_{\square} &= I_{\square} + I_{\square} + I \\ I_{\square x} &= I_{xp1} + I_{xp2} + I_{xp3} \end{aligned} \right\} (5.19)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} I_{xp1} &= I_{xTp1} + y_{Tp1}^2 \cdot F_{p1} \\ I_{xp2} &= I_{xTp2} + y_{Tp2}^2 \cdot F_{p2} \\ I_{xs} &= I_{xTs} + y_{Ts}^2 \cdot F_s \end{aligned} \right\} (5.19a)$$

$$I_{\square y} = I_{yp1} + I_{yp2} + I_{yp3} \quad (5.19b)$$

5.5 Postup pri výpočte kvadratických momentov plôch

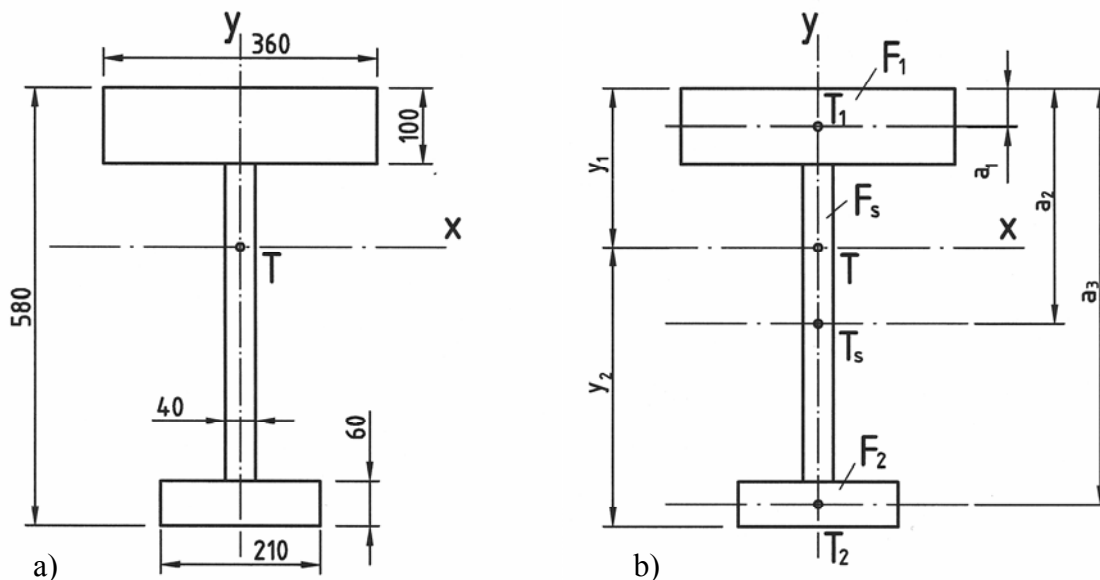
Postup výpočtu hlavných centrálnych kvadratických momentov prierezu pre zložitejšie plochy, ktoré nemožno vypočítať (ako tomu je napr. pri výpočte plochy na obr. 5.7, 5.9) priamo z výpočtových vzťahov (5.1 až 5.14), je nasledujúci:

- zvolíme ľubovoľný pravouhlý súradnicový systém,
- rozdelíme prierezovú plochu na jednoduché časti, ktorých ťažiská vieme určiť priamo podľa viet o symetrii,
- určíme ťažisko celej prierezovej plochy použitím statických momentov plôch jednotlivých častí (lit. 9, kap. 3),
- určíme osové kvadratické momenty prierezov jednotlivých častí k vlastným centrálnym osiam, ktoré sú rovnobežné s osami x, z celého prierezu – rovnica 5.1,
- určíme centrálné kvadratické momenty celého prierezu k jeho osiam x, y podľa rovnice 5.15.

Pozn.: Charakteristiky rovinných prierezov rôznych normalizovaných, valcovaných a iných profilov možno pri riešení praktických úloh získať priamo z technických príručiek, noriem, matematických a fyzikálnych tabuliek.

5.6 Príklady

5.6.1 Určite moment zotrvačnosti k osi x u asymetrického oceľového nosníka (obr. 5.10a).



Obr. 5.10

Riešenie:

Vypočítame polohu ťažiska **T** nosníka (obr. 5.10b):

$$y_1 = \frac{F_1 \cdot a_1 + F_s \cdot a_2 + F_2 \cdot a_3}{F_1 + F_s + F_2} = \frac{360 \cdot 100 \cdot 50 + 420 \cdot 40 \cdot 310 + 210 \cdot 60 \cdot 550}{360 \cdot 100 + 420 \cdot 40 + 210 \cdot 60} = 213 \text{ mm},$$

a podľa (5.19a,b) vypočítame moment zotrvačnosti k osi x:

$$I_x = I_{x1} + I_{xs} + I_{x2},$$

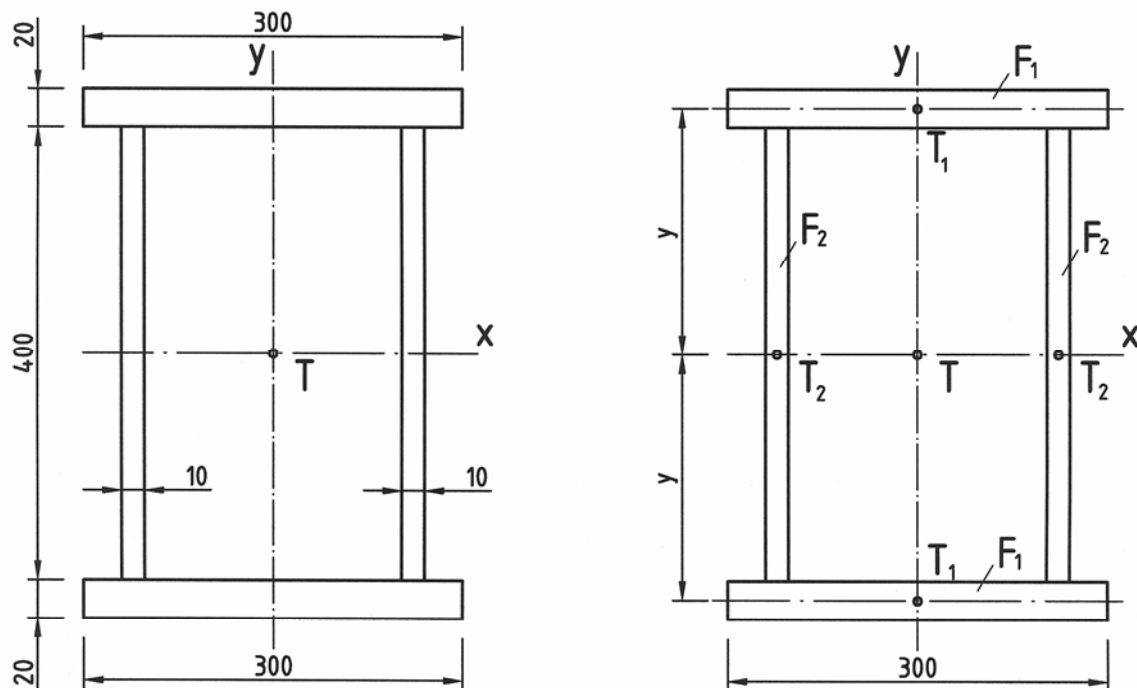
$$I_{x1} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + F_1 \cdot (y_1 - a_1)^2 = \frac{1}{12} \cdot 360 \cdot 100^3 + 360 \cdot 100 \cdot (213 - 50)^2 = 9,86484 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$I_{xs} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + F_s \cdot (a_2 - y_1)^2 = \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 420^3 + 40 \cdot 420 \cdot (310 - 213)^2 = 4,050312 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$I_{x2} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + F_2 \cdot (a_3 - y_1)^2 = \frac{1}{12} \cdot 210 \cdot 60^3 + 210 \cdot 60 \cdot (550 - 213)^2 = 14,347494 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

$$I_x = 28,262646 \cdot 10^8 \text{ mm}^4.$$

5.6.2 Určite moment zotrvačnosti k osi **x** u symetrického komorového zváraného nosníka (obr. 5.11).



Obr. 5.11

Riešenie:

Podľa (5.19a,b) vypočítame moment zotrvačnosti pásnic:

$$I_{x1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 + F_1 \cdot y^2 \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 20^3 + 300 \cdot 20 \cdot 210^2 \right) = 5,296 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

ďalej vypočítame moment zotrvačnosti stojín:

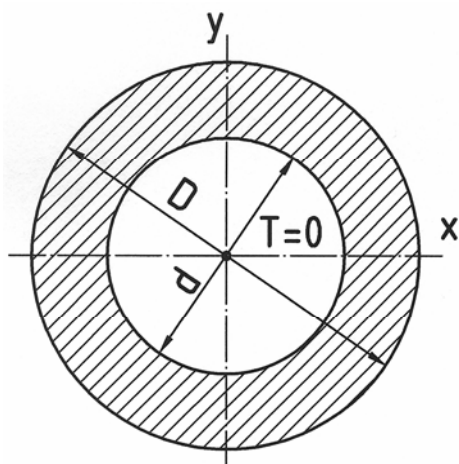
$$I_{x2} = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 400^3 = 1,066 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

a nakoniec určíme moment zotrvačnosti celého nosníka:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2},$$

$$I_x = 6,362 \cdot 10^8 \text{ mm}^4.$$

- 5.6.3** Určite moment zotrvačnosti k osiam **x**, **y** u dutého hriadeľa (obr. 5.12), ak poznáte:
D = 160mm, d = 120mm.

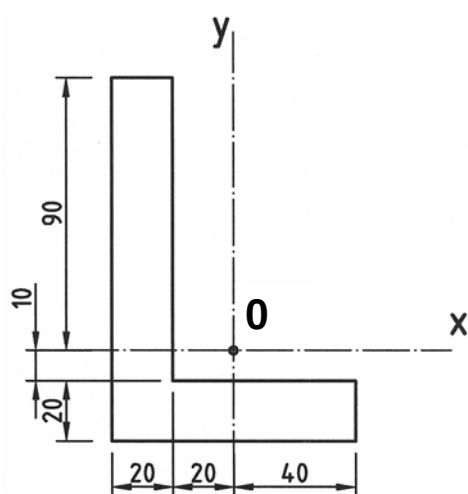


Výsledok:

$$I_x = I_y = 2,199 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Obr. 5.12

- 5.6.4** Určite moment zotrvačnosti k osiam **x**, **y** u vzpery prihradovej konštrukcie (obr. 5.13)



Výsledok:

$$I_x = 5,56 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$I_y = 2,72 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

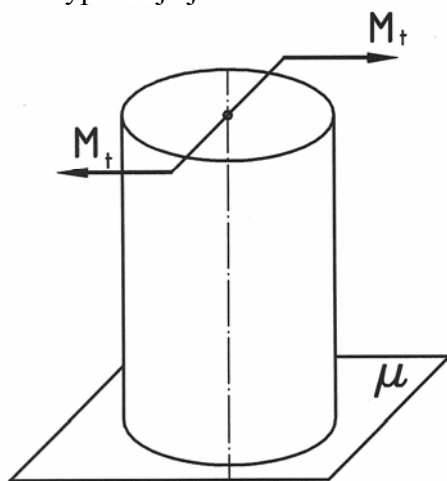
Obr. 5.13

6. PROSTÉ NAMÁHANIE NA KRUT

Krútenie je druh namáhania, pri ktorom výslednica vonkajšieho zaťaženia tvorí dvojicu síl ležiacu v rovine kolmej na os tyče (obr. 6.1).

S krútením sa stretávame najčastejšie pri transmisných hriadeľoch, nápravách vozidiel a pod.

Výpočet je jednoducho riešiteľný iba pre tyče kruhového prierezu.



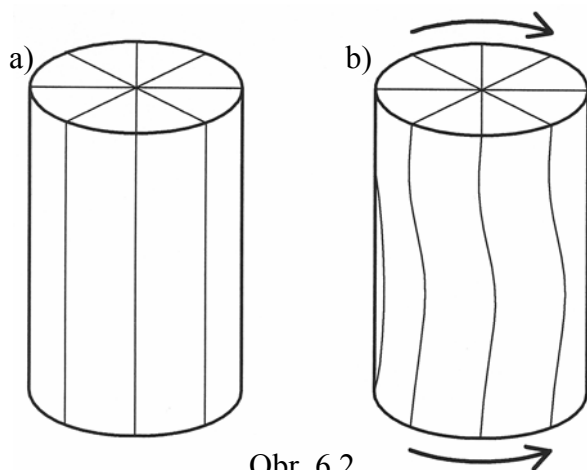
Obr. 6.1

Keď narysujeme na plášti valca pred skrútením sieť sústavy rovnako vzdialených kružníc, povrchových priamok a polomery na čelnom priereze (obr. 6.2a), možno *po malom skrútení pozorovať* (obr. 6.2b), že:

- všetky povrchové priamky sa natočia o rovnaký uhol γ ,
- čelné prierezy zostanú rovinné a ich obrysy sa nezošúveria (kružnice zostanú kružnicami s polomermi ako pred skrútením),
- polomery vyznačené na čelnom priereze zostanú rovnaké,
- vzdialenosť medzi susednými prierezmi sa skrútením nezmení.

Tieto pozorovania a na nich založená teória výpočtu kruhových hriadeľov umožňuje

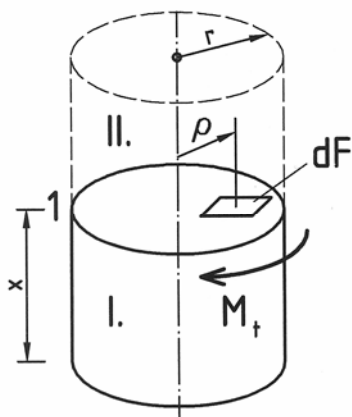
konštatovať, že *pri prostom krútení kruhových prierezov sa v rezoch kolmých na os hriadeľa nevyskytujú normálové, ale iba šmykové napätia.*



Obr. 6.2

6.1 Výpočet napätia a uhol skrútenia kruhových hriadeľov

Rozdeľme myslenným rezom (v mieste 1) vo vzdialenosti x od počiatku hriadeľa na dve časti (obr. 6.3a)



Obr. 6.3a

a odstránime časť hriadeľa II. Na časť I pôsobí z odstránenej časti len krútiaci moment $M_t (=M_k)$, a ak má byť hriadeľ v rovnováhe, musí byť v rovnováhe s momentom vnútorných síl.

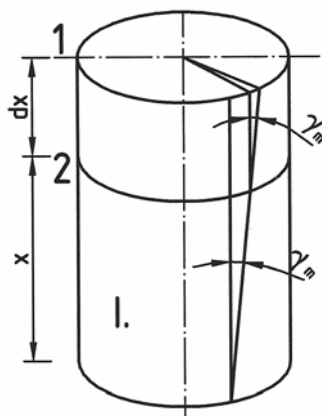
Momentová podmienka časti I vzhľadom na os hriadeľa je:

$$\sum M = 0: M_t = \int_{(F)} \tau dF \rho = 0$$

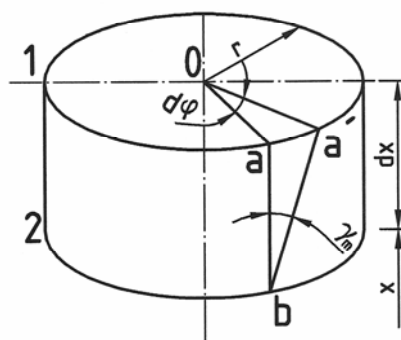
(6.1)

Aby sme mohli vypočítať šmykové napätie τ z rovnice 6.1 (*nie je rovnomerne rozdelené po priereze, závisí na vzdialenosti ρ !*) musíme najskôr určiť deformáciu prúta.

Oddelíme za tým účelom druhým myslenným rezom (2) z časti hriadeľa I (obr. 6.3b) kotúč s hrúbkou dx (obr. 6.3c).



Obr. 6.3b



Obr. 6.3c

Dva susedné prierezy sa po skrútení hriadeľa oproti sebe natočia o uhol $d\varphi$.

Pri výpočte hriadeľov sa zavádza tzv. **pomerný uhol skrútenia** na jednotku dĺžky

$$\boxed{\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}} \quad (6.2)$$

Otočením prierezu (1) o uhol $d\varphi$ sa pozdĺžne vlákna $\overline{ab}$ (obr. 6.3c) na povrchu hriadeľa skosia o uhol γ_m , ktorý vyjadríme vzt'ahom:

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma_m \doteq \gamma_m = \frac{\widehat{aa}}{dx}} \quad (6.3)$$

Z obr. 6.3c môžeme tiež napísať

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi \doteq \frac{\widehat{aa}}{r}} \quad (6.4)$$

Po vylúčení úseku $\widehat{aa}$ dostaneme z oboch rovníc

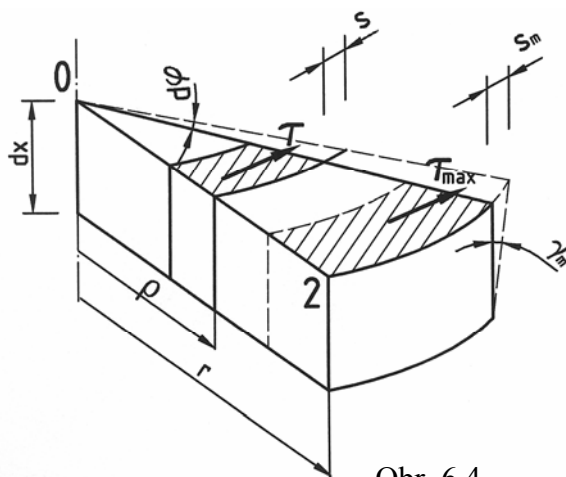
$$\begin{aligned} \gamma_m \cdot dx &= r d\varphi & \text{a odtiaľ} \\ \gamma_m &= r \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \vartheta \end{aligned} \quad (6.5)$$

Čo slovné možno vyjadriť takto: *uhlové pretvorenie γ_m je priamoúmerné polomeru skrúcovanej tyče.*

Vieme, že podľa Hookovho zákona pre šmyk platí (ods. 1.7, rovnica 1.13)

$$\tau_{\max} = \gamma_m G = r \cdot \vartheta \cdot G \quad (6.6)$$

Na určenie napätia v bode, ktorý leží v rôznej vzdialenosti ρ od osi hriadeľa treba najskôr nájsť veľkosť uhlového pretvorenia γ v tomto bode (obr. 6.4).



Obr. 6.4

Z vety o podobnosti trojuholníkov platí

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau} = \frac{\rho}{r}, \text{ odtiaľ}$$

šmykové napätie

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\tau_{\max}}{r} \rho \\ \text{resp. } \tau &= \gamma G = \rho \vartheta \cdot G \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Veľkosť maximálneho šmykového napätia môžeme teraz už vypočítať z rovnice 6.1, keď za τ dosadíme rovnicu 6.7

$$M_t = \int_{(F)} \tau dF \rho = \int_{(F)} \frac{\tau_{\max}}{r} \rho^2 dF = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_{(F)} \rho^2 dF$$

Integrál $\int_{(F)} \rho^2 dF$ je, ako už vieme (ods. 5.2) polárny moment zotrvačnosti I_p .

Takže **maximálne šmykové napätie** krúteného **kruhového** prierezu je

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad (6.8)$$

Napätie v ľubovoľnom mieste prierezu (v bode $\rho < r$) bude po dosadení rovnice 6.8 do

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{r} \rho = \frac{M_t}{r \cdot I_p} r \cdot \rho = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho \quad (6.9)$$

Pomerný uhol skrútenia ϑ dostaneme porovnaním rovníc (6.7) a (6.9)

$$\rho \vartheta \cdot G = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho$$

Odtiaľ *pomerný uhol skrútenia (skosenia) kruhového prierezu*

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (6.10)$$

Celkový uhol skrútenia (skosenia) bude potom

$$\varphi = \int_{(l)} \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (6.11)$$

Ak je výraz $\frac{M_t}{GI_p} = \text{konšt.}$, dostaneme

$$\varphi = \frac{M_t}{GI_p} l$$

Súčín GI_p sa nazýva tuhosťou v krútení!

Na záver výpočtu krúteného hriadeľa kruhového prierezu uveďme ešte niektoré praktické dôsledky:

- polárny moment kruhu ako vieme (5.11) je $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

Po dosadení do rovnice 6.8 dostaneme

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r = \frac{M_t}{\frac{I_p}{\frac{d}{2}}} = \frac{M_t}{W_t} \doteq \frac{M_t}{0,2d^3} \quad (6.12)$$

kde

$$W_t = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \doteq 0,2d^3 \quad (6.13)$$

Pomer W_t má v praktických výpočtoch veľký význam a nazýva sa **prierezovým modulom v krútení**. Jeho rozmer vyplýva priamo z rovnice 6.13 ...[m³].

S rozloženia napätia pri krútení kruhového hriadeľa (obr. 6.4) vidieť, že materiál je dokonale využitý len na vonkajšom povrchu hriadeľa. Tento poznatok **má veľký význam pre navrhovanie hriadeľov** na vysoké otáčky (napr. leteckých vrtulí, turbín a pod.), u ktorých sa odporúča **užitie dutých hriadeľov**.

V medzikruhovom priereze dutého hriadeľa sú napätia rozdelené rovnako ako v priereze plnom. Do odvodených rovníc sa v tomto prípade dosadzuje polárny moment plochy medzikružia (5.14)

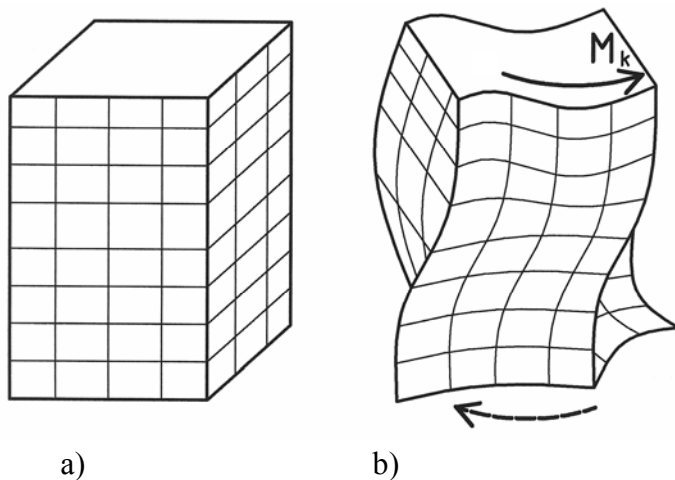
hodnotou

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) .$$

6.2 Výpočet krútenia hriadeľov nekruhového prierezu

Na začiatku tejto kapitoly bolo už uvedené, že výpočet hriadeľov nekruhových prierezov je podstatne zložitejší. Na príklade hriadeľa obdĺžnikového (štvorcového) prierezu (obr. 6.5) je napr. vidieť, že po skrútení sa pôvodne rovinné prierezy zošúveria a vytvoria

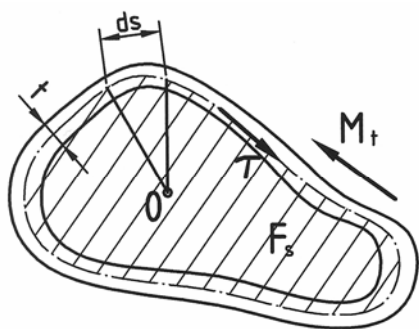
zakrivené plochy.



Výsledky získané podľa rôznych metód výpočtu sú v týchto prípadoch približné a treba ich overiť väčšinou praktickými skúškami.

Obr. 6.5

Na ilustráciu a na záver tejto problematiky uveďme (bez dôkazu) rovnice na približné riešenie krútených tenkostenných uzavretých prierezov (obr. 6.6) – tzv. **Bredtove vzorce**.



Obr. 6.6

- Prvý Bredtov vzorec na výpočet šmykového napätia

$$\tau_s = \frac{M_t}{2 \cdot F_s \cdot t} \quad (6.14)$$

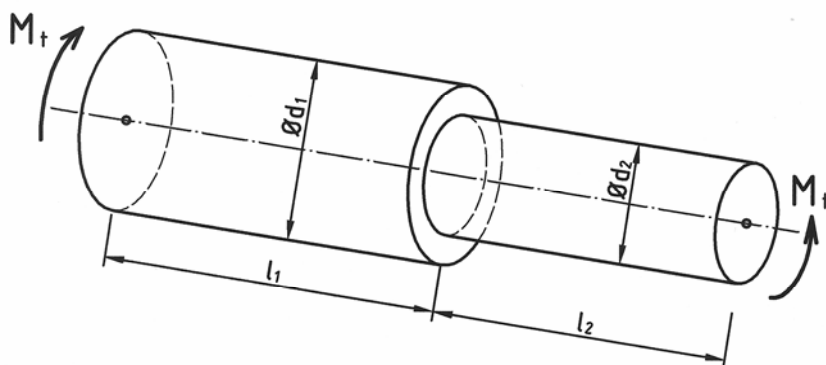
- Druhý Bredtov vzorec na výpočet uhlu skrútenia (deformácie)

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 F_s^2 G} \int \frac{ds}{t} \quad (6.15)$$

V rovniciach (6.14 a 6.15) okrem už známych symbolov je význam ďalších symbolov znázornený na obr. 6.6.

6.3 Príklady

6.3.1 Skontrolujte napätia v krútení a určite celkový uhol skrútenia u hriadeľa s premenným kruhovým prierezom (obr. 6.7), ak poznáte: $M_t = 10^5$ N.mm; $d_1 = 40$ mm; $d_2 = 20$ mm; $l_1 = 400$ mm; $l_2 = 300$ mm; $G = 8 \cdot 10^4$ MPa; $\tau_{dov} = 70$ MPa.



Obr. 6.7

Riešenie:

Podľa (6.12) vypočítame hodnoty napätí v jednotlivých prierezoch:

$$\tau_{\max 1} = \frac{M_t}{W_{t1}} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d_1^3}{16}} = \frac{16 \cdot 10^5 \text{ (N.mm)}}{\pi \cdot 40^3 \text{ (mm}^3\text{)}} = 7,96 \text{ MPa} \leq 70 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

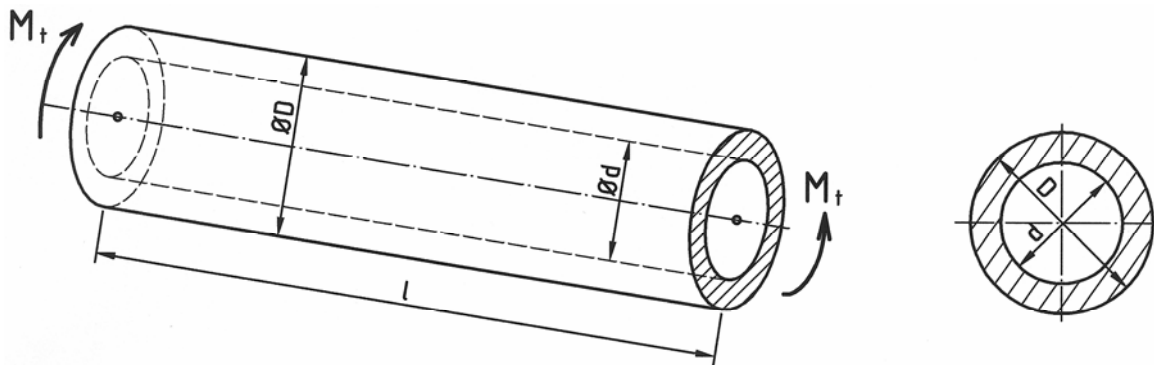
$$\tau_{\max 2} = \frac{M_t}{W_{t2}} = \frac{16 \cdot 10^5}{\pi \cdot 20^3} = 63,7 \text{ MPa} \leq 70 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

Ďalej vypočítame celkový uhol skrútenia (6.11):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \int_{(l)} \frac{M_t}{G \cdot I_{p1}} dx + \int_{(l)} \frac{M_t}{G \cdot I_{p2}} dx = \frac{M_t \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_t \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} = \frac{M_t}{G} \cdot \left(\frac{32 \cdot l_1}{\pi \cdot d_1^4} + \frac{32 \cdot l_2}{\pi \cdot d_2^4} \right),$$

$$\varphi = \frac{10^5 \text{ (N.mm)}}{8 \cdot 10^4 \text{ (MPa)}} \cdot \left(\frac{32 \cdot 400 \text{ (mm)}}{\pi \cdot 40^4 \text{ (mm}^4\text{)}} + \frac{32 \cdot 300 \text{ (mm)}}{\pi \cdot 20^4 \text{ (mm}^4\text{)}} \right) = 0,0259 \text{ rad} = 1,48$$

6.3.2 Určite veľkosť napätia a celkový uhol skrútenia u dutého hriadeľa namáhaného krútiacim momentom (obr. 6.8). Dané je: $M_t = 10^6 \text{ N.mm}$; $D = 40 \text{ mm}$; $d = 30 \text{ mm}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$; $l = 300 \text{ mm}$.



Obr. 6.8

Riešenie:

Vypočítame hodnotu napätia (6.12):

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{D}{2} \text{ a po úprave dostaneme } \tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t \cdot D}{\pi \cdot (D^4 - d^4)} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 40}{\pi \cdot (40^4 - 30^4)} = 116 \text{ MPa},$$

a potom určíme veľkosť celkového uhla skrútenia (6.11):

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{32 \cdot 10^6 \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot (40^4 - 30^4)} = 0,022 \text{ rad} = 1,26$$

Pozn.: V súvislosti s riešením krútenia hriadeľov sa tiež uvádza príklad na vzťah medzi výkonom **P**, krútiacim momentom **M_t** a počtom otáčok **n** za minútu.

6.3.3 Vypočítajte veľkosť krútiaceho momentu **M_t** na hriadeľi kruhového prierezu, ktorý prenáša výkon **P** = 120 kW pri počte otáčok **n** = 50 . s⁻¹.

Riešenie:

Vyjadríme silu v základných merných jednotkách:

$$\text{сила } S[N] = [kg.m.s^{-2}],$$

potom prácu:

$$\text{práca } A[S.d] = [kg.m.s^{-2}.m] = [kg.m^2.s^{-2}](\text{Joule}),$$

ďalej výkon:

$$\text{výkon } P = \frac{A}{t} \left[\frac{kg.m^2.s^{-2}}{s} \right] = [kg.m^2.s^{-3}] (\text{Watt}),$$

a v našom prípade:

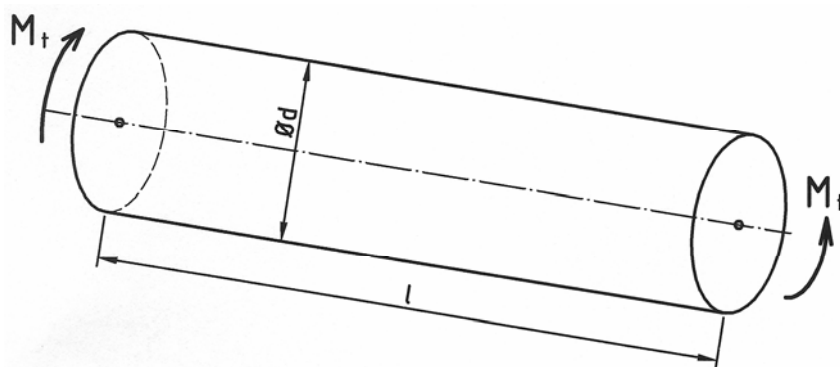
$$P = \frac{A}{t} = \frac{S.d}{t} = S.v = S \cdot \frac{2.\pi.r}{60(s)}.n \cong \frac{M_t.n}{10} \cong 0,1.M_t.n, \text{ kde } \frac{d}{t}v \text{ je obvodová rýchlosť,}$$

a po dosadení krútiaci moment:

$$M_t = \frac{10.120.10^3 (W)}{50(s^{-1})} = 24000 Nm = 24 kNm.$$

6.3.4 Určite najväčší krútiaci moment **M_t** , ktorým je možné zaťažiť hriadeľ (obr. 6.9).

Poznáte: **τ_{dov}** = 150 MPa; **d** = 10 mm.



Obr. 6.9

Výsledok:

$$M_t = 2,94 \cdot 10^4 \text{ N.mm}$$

- 6.3.5** Hriadeľ kruhového prierezu sa pri zaťažení krútiacim momentom $\mathbf{M_t}$ na dĺžke $\mathbf{l}$ skrúti o uhol φ (obr. 6.9). Určite hodnotu modulu pružnosti materiálu hriadeľa v šmyku, ak je dané: $\mathbf{M_t} = 2 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm}$; $\mathbf{d} = 25 \text{ mm}$; $\mathbf{l} = 150 \text{ mm}$; $\varphi = 0,55^\circ$.

Výsledok:

$$\mathbf{G} = 8,16 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

- 6.3.6** Pri akom počte otáčok $\mathbf{n} [\text{s}^{-1}]$, bude hriadeľ kruhového prierezu, namáhaný krútiacim momentom $\mathbf{M_t} = 30 \text{ kNm}$, prenášať výkon $\mathbf{P} = 120 \text{ kW}$?

Výsledok:

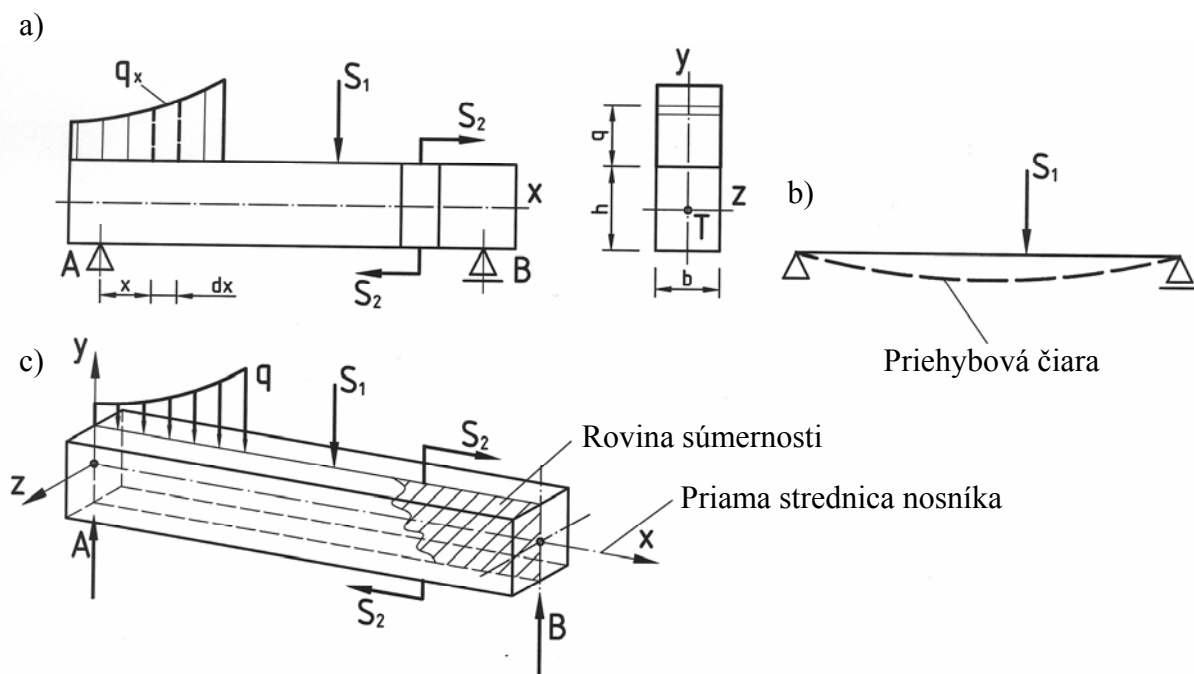
$$\mathbf{n} = 40 \cdot \text{s}^{-1}$$

7. OHYB PRIAMYCH NOSNÍKOV

Prút zaťažený a uložený tak, že sa pritom prehýba sa nazýva nosník (obr. 7.1). Rovnováhou akčných síl a momentov a reakcií v podperách (väzbách) na staticky určitých nosníkoch sa zaoberá statika (lit. 9, ods. 4).

Keď je nosník zaťažený sústavou síl a momentov v rovine súmernosti (obr. 7.1b), leží **priehybová čiara** (zdeformovaná strednica nosníka; obr. 7.1c) tiež v rovine pôsobiacich síl.

Je to tzv. prípad **rovinného ohybu**, ktorému je venovaná prevažná časť tejto kapitoly.



Obr. 7.1

Pretože priechyby, s ktorými v skutočných nosníkoch uvažujeme, sú veľmi malé, nemusíme pri zisťovaní reakcií (A, B) dbať na zmenu polôh vonkajších síl (\$q, S_1, S_2, A, B\$) pred a po deformácii nosníka.

Väzbové reakcie určíme z podmienok rovnováhy na uvoľnenom telese, keď účinok väzieb nahradíme silami.

Pre rovinné útvary možno tri statické podmienky rovnováhy napísať v tvare

$$\boxed{\sum S_x = 0 \quad \sum S_y = 0 \quad \sum M = 0} \quad (7.1)$$

7.1 Pohyblivé bremeno a sústava pohyblivých bremien – vplyvové čiary priamych staticky určených nosníkov

V technickej praxi, napr. na mostoch, u žeriavových dráhach a podobných konštrukciách, sa často vyskytujú pohyblivé osamelé sily a spojité pohyblivé zaťaženia. V takýchto prípadoch **treba určiť nebezpečnú polohu zaťaženia, pri ktorej sa vyskytnú najväčšia reakcia, najväčšia priečna sila a najväčší ohybový moment**. Ak má byť takto zaťažený nosník bezpečný, musí práve týmto najväčším statickým účinkom vyhovieť.

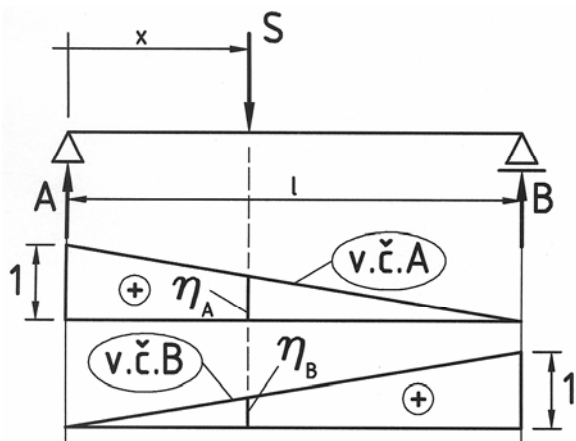
*Poradnice určitej statickej veličiny pohybujúceho sa bremena v určitej polohe na nosníku sa nazývajú **vplyvovými čiarami**.*

Zostrojenie vplyvových čiar a výpočet reakcií, priečných síl a ohybových momentov od jedného bremena a sústavy pohyblivých bremien pomocou vplyvových čiar preberieme na príkladoch prostého a votknutého nosníka (konzole).

Pohyblivou sústavou bremien sa rozumie sústava minimálne dvoch osamelých síl alebo spojitých zaťažení, ktorých veľkosť a vzdialenosti medzi sebou sú známe a pri pohybe po nosníku sa nemenia, napr. normový zaťažovací vlak UIC – 71, normové vozidlo zaťaženia ciest atď.

7.1.1 Vplyvové čiary na prostom nosníku

7.1.1.1 Vplyvové čiary reakcií (obr. 7.2)



Obr. 7.2

Pre polohu bremena S v mieste x z momentovej podmienky k bodu B vypočítame reakciu A .

$$\sum M_B = 0: A \cdot l - S(l - x) = 0$$

odtiaľ
$$A = \frac{S \cdot (l - x)}{l}$$

Z podmienky k bodu A reakciu B

$$\sum M_A = 0: B = \frac{S \cdot x}{l}$$

V závislosti na vzdialenosti od počiatku x sú tieto rovnice rovnicami priamky.
Obyčajne sa kreslia vplyvové čiary pre jednotkové bremeno ($S=1$).

Reakcie vyvolané jednotkovou silou potom sú:

$$\eta_A = \frac{A}{S} = \frac{l-x}{l} \qquad \eta_B = \frac{B}{S} = \frac{x}{l} \qquad (7.2a)$$

Keďže rovnice sú lineárne, stačí ak budeme poznať na ich zobrazenie dva body:

- pre $x = 0$ je $\eta_A = 1$, $\eta_B = 0$
- pre $x = l$ je $\eta_A = 0$, $\eta_B = 1$.

Obidve vplyvové čiary sú nakreslené na obr. 7.2

Pre danú polohu bremena potom reakcie sú:

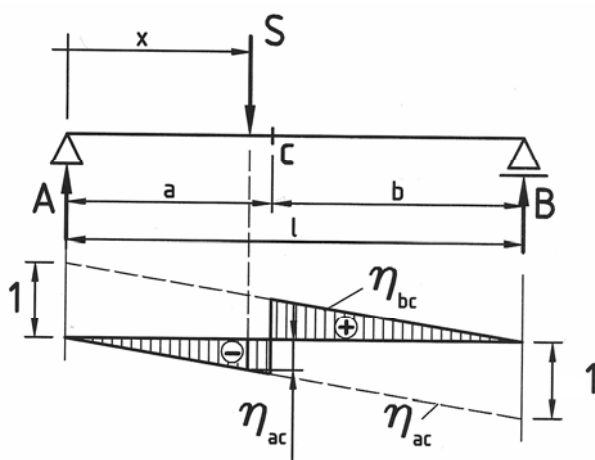
$$A = S \cdot \eta_A \qquad B = S \cdot \eta_B$$

kde *poradnice vplyvových čiar η_A, η_B* možno odmerať v obrázku.

Pozn.: - z podmienky rovnováhy vo zvislom smere ($\sum S_y = 0$) vyplýva, že
v ktoromkoľvek mieste nosníka platí $\eta_A + \eta_B = 1$,
- najväčšie reakcie pohyblivé bremeno vyvodí vtedy, keď $\eta_A = \eta_B = 1$, t. j.
v polohe nad podperami.

7.1.1.2 Vplyvová čiara priečných síl

Určíme napríklad vplyvovú čiaru priečnej sily v **mieste C** (obr. 7.3)



Obr. 7.3

Priečna sila v mieste C pri polohe bremena:

- V intervale $0 \leq x \leq a$ (vľavo od miesta C)

$$T_{aC} = -B = -\frac{S \cdot x}{l}$$

- V intervale $a \leq x \leq l$

$$T_{bC} = A = \frac{S \cdot (l-x)}{l}$$

Pre jednotkové bremeno ($S = 1$) budú súradnice

$$\left. \begin{aligned} \eta_{aC} &= -\frac{x}{l} & 0 \leq x \leq a \\ \eta_{bC} &= \frac{l-x}{l} & a \leq x \leq l \end{aligned} \right\} (7.3a)$$

V závislosti na vzdialenosti x sú rovnice 7.3a opäť rovnicami priamok. Vplyvovú čiaru priečných síl nakreslíme podľa hodnôt

$$\begin{aligned} - \text{pre } x = 0 & \quad \text{je} \quad \eta_{aC} = 0 & \quad \eta_{bC} = 1 \\ - \text{pre } x = l & \quad \text{je} \quad \eta_{aC} = -1 & \quad \eta_{bC} = 0 \end{aligned}$$

Vplyvová čiara síl pre miesto C je nakreslená na obr. 7.3.

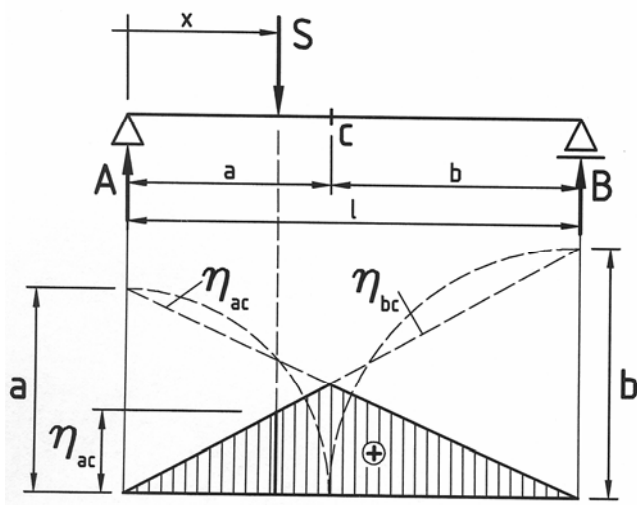
Podľa toho, keď je bremeno v úseku a, alebo b budú priečne **sily v mieste C**

$$\left. \begin{aligned} T_{aC} &= S \cdot \eta_{aC} \\ T_{bC} &= S \cdot \eta_{bC} \end{aligned} \right\} (7.3b)$$

Ako vidieť na obr. 7.3, v bode C je najväčšia priečna sila vtedy, keď bremeno je práve nad týmto prierezom, pričom rozhoduje väčšia z oboch poradníc $T_C = \max(T_{aC}, T_{bC})$.

Z rovníc pre výpočet reakcií (7.2a, b) a priečných síl (7.3 a,b) podľa vplyvových čiar vyplýva, že poradnice η_{aC} , η_{bC} sú v obidvoch prípadoch čísla bezrozmerné.

7.1.1.3 Vplyvová čiara ohybových momentov



Obr. 7.4

- Pri polohe bremena v intervale $0 \leq x \leq a$

(obr. 7.4) je ohybový moment **v mieste C**

$$M_{aC} = B \cdot b$$

kde reakcia B z podmienok rovnováhy je

$$B = \frac{S \cdot x}{l}$$

a

$$M_{aC} = \frac{S \cdot x}{l} b$$

- Pri polohe bremena v intervale $a \leq x \leq l$ je

ohybový moment **v mieste C**.

$$M_{bC} = A \cdot a$$

Po dosadení za $A = \frac{S \cdot (l - x)}{l}$ je

$$M_{bC} = \frac{S(l - x)}{l} a$$

Pre jednotkové bremeno ($S = 1$) budú ohybové momenty - t. j. poradnice vplyvovej čiary **v mieste C**

$$\left. \begin{aligned} \eta_{aC} &= \frac{x}{l} b & 0 \leq x \leq a \\ \eta_{bC} &= \frac{l - x}{l} a & a \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (7.4a)$$

V závislosti na vzdialenosti x sú tieto rovnice tiež rovnicami priamok. Vplyvové čiary momentov nakreslíme z hodnôt

pre	$x=0$	je	$\eta_{aC} = 0$	$\eta_{bC} = a$
	$x=l$	je	$\eta_{aC} = b$	$\eta_{bC} = 0$

Poradnice vplyvovej čiary momentov majú rozmer v [m]. Podľa týchto poradníc je vplyvová čiara momentov nakreslená na obr. 7.4.

Ak je napríklad pohyblivé bremeno v polohe x , bude ohybový moment v mieste **C**

$$M_{aC} = S \cdot \eta_{aC} \quad (7.4b)$$

Ako vidieť na obr. 7.4 je najviac namáhaný prierez v mieste C ohybovým momentom vtedy, keď je bremeno nad týmto prierezom.

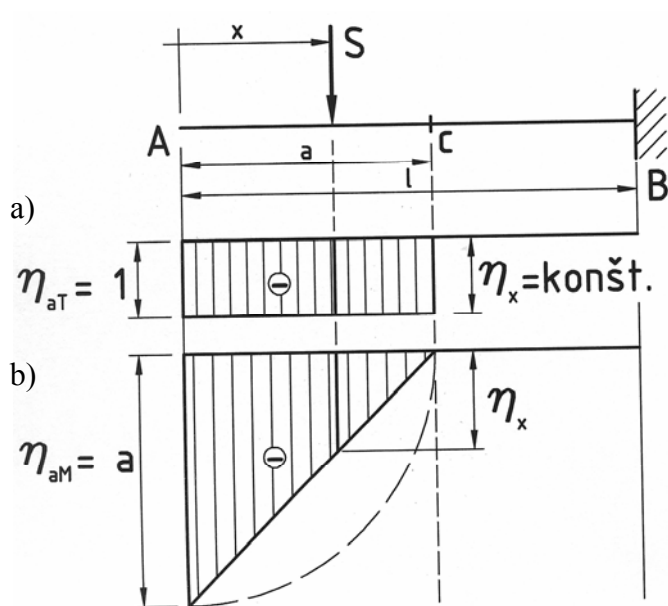
Vtedy platí

$$\eta_{aC \max} = \eta_{bC \max} = \frac{a \cdot b}{l} = a \cdot \frac{l - a}{l} \quad (7.4c)$$

Tieto rovnice sú rovnice paraboly, ktorej poradnice udávajú maximálne hodnoty momentov v miestach na koncoch vymedzených úsekmi **a**. Najväčší zo všetkých momentov ($M_{\max \max}$) vznikne vtedy, keď bude hodnota poradníc (7.4c) najväčšia. Bude to vtedy, keď bod C bude v strede nosníka ($a = \frac{l}{2}$) a pohyblivé bremeno S nad týmto bodom.

$$M_{\max, \max} = S \cdot \eta_{\max \max} = \frac{1}{4} S \cdot l \quad (7.4d)$$

7.1.2 Vplyvové čiary na votknutom nosníku



Obr. 7.5

- **Priečna sila** v mieste C pri polohe bremena S v intervale $x < a < l$ (obr. 7.5) je

$$T_{aC} = S$$

Pre jednotkové bremeno bude poradnica vplyvovej čiary mať hodnotu $\eta_x = 1$ (7.5a) a polohu rovnobežky odsunutej od základnice (podľa znamienkového dohovoru) o zvolenú jednotkovú vzdialenosť.

- **Moment** pri polohe bremena S v intervale $x < a < l$ v mieste **C**

$$M_C = -S(a - x)$$

Pre jednotkové bremeno ($S = 1$) budú poradnice vplyvovej čiary momentov v **mieste C**

$$\eta_{aT} = -a + x \quad (7.5b)$$

Táto rovnica je opäť rovnicou priamky. Na jej nakreslenie stačí poznať dva body, ktoré nakreslíme z hodnôt:

$$\begin{array}{lll} \text{pre} & x = 0 & \text{je} \quad \eta_{aT} = -a \\ & x = a & \text{je} \quad \eta_{aT} = 0 \end{array}$$

Ohybový moment na konzole v mieste C od bremena S vo vzdialenosti x (obr. 7.5b) sa vypočíta:

$$M_C = S \cdot \eta_x \quad (7.5c)$$

Z uvedeného je zrejmé, že **najväčší ohybový moment v mieste C** vznikne, keď $x = 0$, vtedy bude $\eta_x = -a$ a hodnota $M_{\max C} = -S \cdot a$. A tiež, že najväčší zo všetkých momentov od sily S vznikne na konzole v bode B, keď sila bude v mieste $x = 0$. Vtedy bude mať poradnica hodnotu $\eta_x = -l$ a moment $M_{\max \max} = -S \cdot l$.

Pozn.: Z logiky vplyvových čiar vyplýva, že **najväčšia hodnota statickej veličiny od pohyblivej sústavy bremien** vznikne vtedy, keď jej najúčinnnejšie (najväčšie a najbližšie) bremená „umiestníme“ do takej polohy na nosníku, aby súčet ich poradníc bol najväčší.

V prípade pohyblivej sústavy s bremenami s rovnakou veľkosťou bude potom príslušný statický účinok (reakcia, priečna sila a moment) v určitom mieste na nosníku mať hodnotu

$$\sum_{i=1}^n S_i \cdot \eta_i = S \sum_{i=1}^n \eta_i \quad (7.6)$$

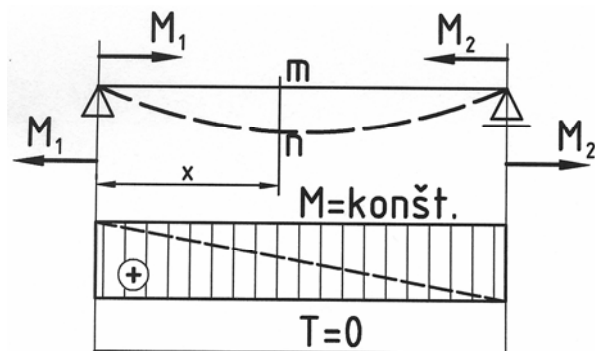
kde

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_n = S$$

η_i ... poradnice vplyvových čiar síl; $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

7.2 Normálové napätia v ohýbanom nosníku

Uvažujme prostý prípad ohybu. Ako príklad si zvolíme priamy nosník zaťažený v rovine súmernosti dvoma rovnako veľkými momentmi $M_1 = M_2$ (obr. 7.6).



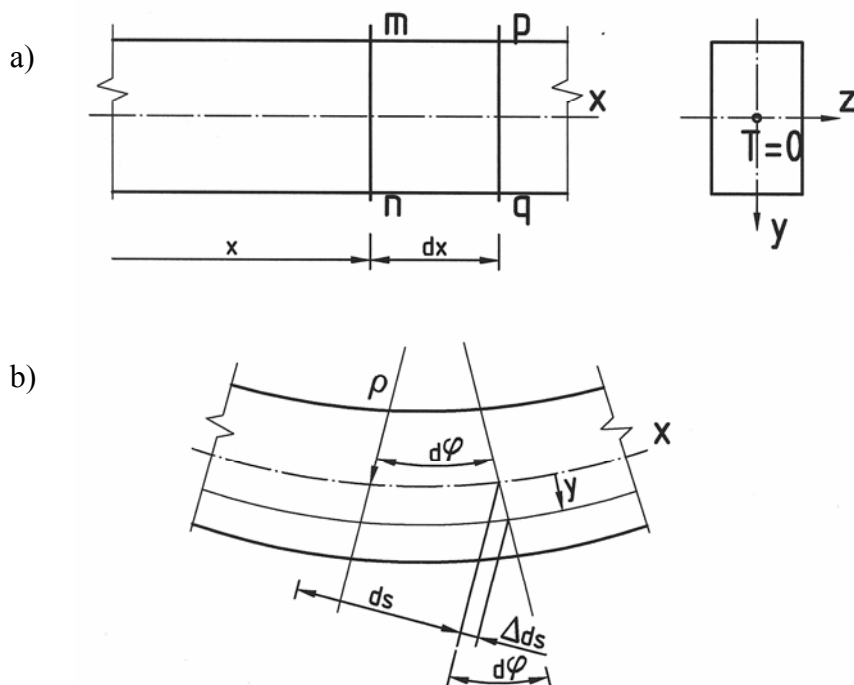
Obr. 7.6

Pretože priečna sila je nulová, nemôžu v priečnom reze $\overline{m,n}$ vzniknúť šmykové napätia. Normálové napätia musia na ploche priečneho prierezu vytvoriť sústavu vnútorných síl, ktoré budú v rovnováhe s ohybovým momentom. Určenie napätia σ na prierezovej ploche je vo všeobecnosti úloha staticky neurčitá. Na jeho určenie nestačia statické podmienky rovnováhy, preto

musíme vychádzať z rozboru deformácie. Experimentálne vyšetřovania ohybu nosníkov, ktoré majú dĺžku (l) oproti výške (h) dostatočne veľkú ($l > 5h$), vychádzajú z týchto predpokladov:

- priečne rezy, ktoré boli pred deformáciou rovinné, zostanú aj po deformácii rovinnými,
- pozdĺžne vlákna na seba netlačia, a preto sa účinkom normálových napätí rozdielne (podľa polohy v priečnom reze), len lineárne predĺžia alebo skrátia,
- normálové napätia sú po šírke prierezu v tom istom vlákne rovnaké,
- modul pružnosti materiálu nosníka podľa Hookovho zákona je v ťahu aj tlaku rovnaký.

Pri ohybe nosníka (obr. 7.7) sa horné vlákna budú skracovať, spodné predlžovať a niektoré vlákna pritom svoju dĺžku nezmenia. Vlákna o nezmenenej dĺžke vyplňajú *neutrálnu plochu*. Priesečnica roviny súmernosti s neutrálnou plochou sa nazýva *neutrálna os*.



Obr. 7.7

V súradnicovom systéme podľa obr. 7.7 sa dolné vlákna vo vzdialenosti y od neutrálnej osi predĺžia o hodnotu Δds .

Z obrázku 7.7b
$$\operatorname{tg} d\varphi = \frac{ds}{\rho} \quad , \quad \operatorname{tg} d\varphi = \frac{\Delta ds}{y}$$

delením rovníc dostaneme pomerné predĺženie

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \operatorname{tg} d\varphi}{\rho \cdot \operatorname{tg} d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Pretože vlákna sú pri prostom ohybe namáhané ťahom alebo tlakom (jednoosá napätosť) môžeme ich pomerné predĺženie zistiť z Hookovho zákona (2.7)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Porovnaním deformácií (pomerného predĺženia) dostaneme rovnicu, ktorá vyjadruje **nerovnomerné rozloženie napätia** po priereze

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y \quad (7.7)$$

Pretože E je konštanta a polomer krivosti pre daný rez a namáhanie je tiež konštantný, z rovnice (7.7) vyplýva, že **nerovnomerné rozloženie napätia po ploche priečneho rezu má priebeh lineárny**. (obr. 7.8a).

Normálové napätie pri prostom ohybe závisí teda len od vzdialenosti vlákna y od neutrálnej osi. **Najväčšiu hodnotu dosahuje normálové napätie v najvzdialenejších vláknach, vo vzdialenosti $y_{\max}$** .

Čiže

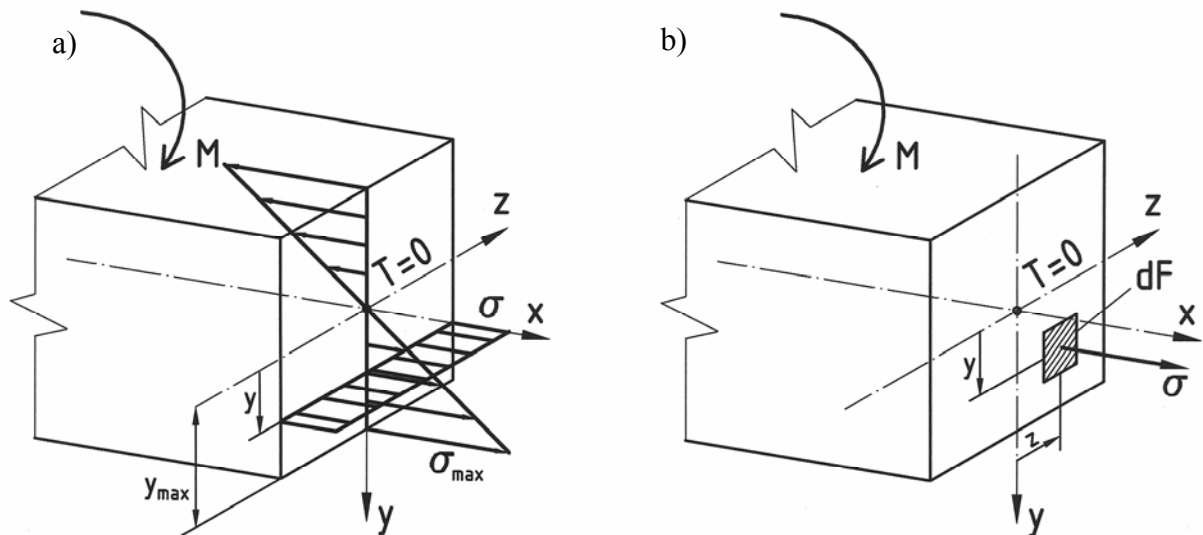
$$\sigma_{\max} = \frac{E}{\rho} y_{\max} \quad (7.8)$$

Podelením rovníc 7.7 a 7.8 dostaneme

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} = \frac{y}{y_{\max}}$$

Odtiaľ napätie v ľubovoľnom vlákne rezu

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{y_{\max}} y \quad (7.9)$$



Obr. 7.8

Veľkosť napätia určíme z podmienok rovnováhy jednej, napr. ľavej strany nosníka (obr. 7.8b).

- $\sum P_x = 0$: $\int_{(F)} \sigma dF = 0$
- $\sum M_z = 0$: $\int_{(F)} \sigma dF \cdot y - M = 0$
- $\sum M_y = 0$: $\int_{(F)} \sigma dF \cdot z = 0$

kde M_z a M_y sú momenty vzhľadom na os x , resp. y .

Ostatné podmienky rovnováhy, t.j. $\sum P_y$, $\sum P_z$ a $\sum M_x$ sú pri prostom ohybe vopred splnené.

Keď do rovníc rovnováhy dosadíme z rovnice 7.9 za napätie σ , dostaneme

$$\left. \begin{aligned} \bullet \quad & \frac{\sigma_{\max}}{y_{\max}} \int y dF = 0 \\ \bullet \quad & M_0 = M_z = \frac{\sigma_{\max}}{y_{\max}} \int y^2 dF \\ \bullet \quad & \frac{\sigma_{\max}}{y_{\max}} \int y \cdot z \cdot dF = 0 \end{aligned} \right\} 7.10$$

Z prvého vzťahu (statický moment plochy – ods. 5.4) vyplýva, že neutrálna plocha prechádza vždy ťažiskom prierezu. Z tretieho (deviačný moment plochy – ods.5.3), že **osi y, z musia byť hlavnými osami zotrvačnosti.**

Druhý výraz $\int y^2 dF$ z rovníc 7.10 je vlastne moment zotrvačnosti vzhľadom na os z.

Rovnicu môžeme upraviť na tvar

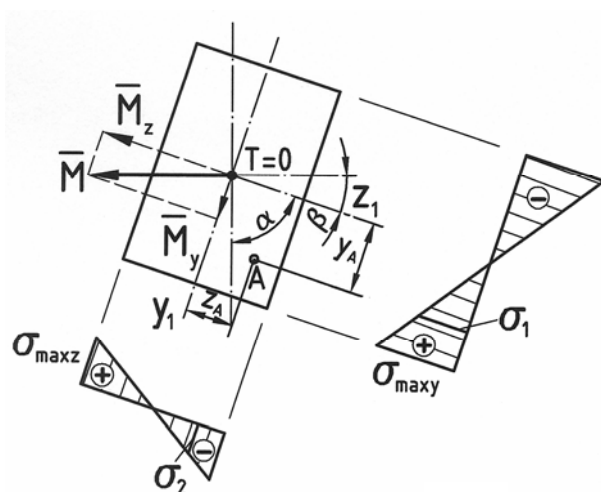
$$\begin{aligned} M_0 &= \sigma_{\max} \frac{I_z}{y_{\max}} = \sigma_{\max} \cdot W_0 \\ \text{odtiaľ} \quad & \boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_0}{W_0}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M_0 &= \sigma_{\max} \frac{I_z}{y_{\max}} = \sigma_{\max} \cdot W_0 \\ \text{odtiaľ} \quad & \boxed{\sigma_{\max} = \frac{M_0}{W_0}} \end{aligned}} \right\} 7.11$$

kde výraz W_0 je **modul odporu plochy prierezu nosníka v ohybe [m³]**.

Pevnostná podmienka namáhania nosníka na prostý ohyb má potom tvar

$$\sigma = \frac{M_0}{W_0} \leq \sigma_{\text{dov}} \quad (7.12)$$

Pozn.: Normálne napätie *pri šikmom ohybe* (obr. 7.9) vznikne vtedy, keď rovina pôsobenia ohybového momentu nie je kolmá na hlavné centrálné osi zotrvačnosti y_1, z_1 , t. j. *priebeh nosníka nenastáva v rovine ohybového momentu*.



Obr. 7.9

Úloha sa rieši tak, že vektor ohybového momentu $\bar{M}$ sa rozloží najskôr do hlavných centrálnych osí zotrvačnosti y_1, z_1 a momenty voči nim sa potom riešia každý osobitne (ako pri rovinnom ohybe). Takto vypočítané výsledky sa potom sčítajú:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

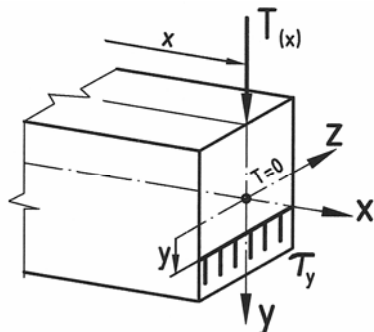
$$\text{kde} \quad M_z = M \cos \beta$$

$$M_y = M \sin \alpha$$

Bližšie sa šikmým (priestorovým) ohybom vzhľadom na určenie týchto skrípt zaoberať nebudeme.

7.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Šmykové napätia sú vyvolané priečnou silou v rovine plochy rezu nosníka (obr. 7.10).



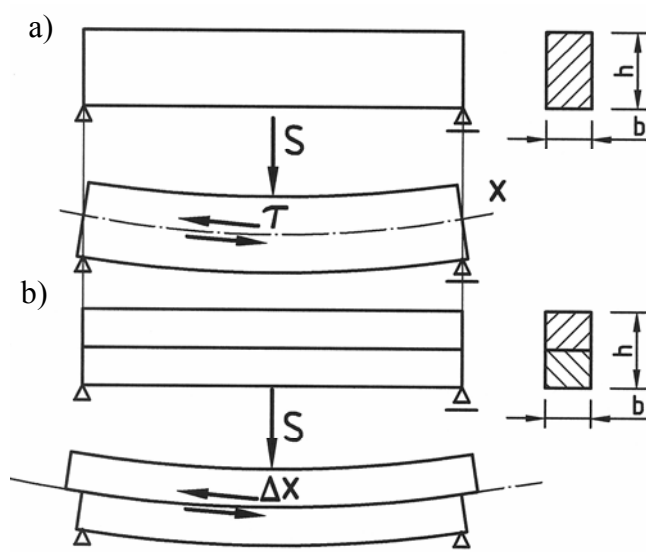
Obr. 7.10

Úloha určenia šmykového napätia je taktiež staticky neurčitá – preto ku trom podmienkam rovnováhy treba pridať výsledky deformačnej analýzy.

Vo výpočte sa predpokladá:

- že smer všetkých šmykových napätí je rovnobežný s priečnou silou,
- šmykové napätia, ktoré pôsobia na plôškach vo vzdialenosti y od neutrálnej osi sú konštantné.

O existencii šmykových napätí v ploche rovnobežnej s rovinou x, z sa môžeme presvedčiť porovnaním deformácií nosníka celistvého prierezu, s nosníkom z voľne združených trávov (obr. 7.11).

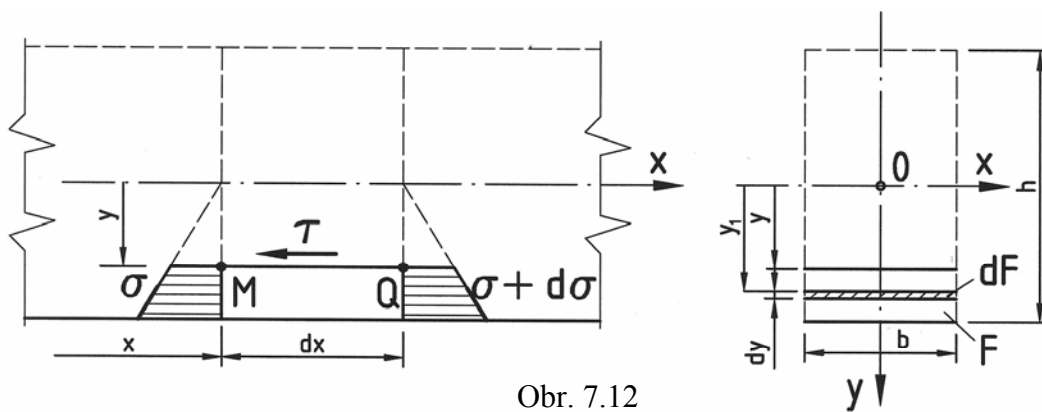


Obr. 7.11

U združeného nosníka (7.11b) sa obidva trávy navzájom na prehnutom nosníku vzájomne posunú (Δx).

V celistvom nosníku (7.11a) sa vlákna navzájom nemôžu posunúť, čo má za následok vznik šmykových napätí τ (medzi jednotlivými vláknami, pozdĺž hlavnej osi nosníka).

Šmykové napätia v ploche vo vzdialenosti y od neutrálnej osi, určíme z rovnováhy elementu (obr. 7.12).



Obr. 7.12

Z podmienky rovnováhy vo vodorovnom smere

$$\sum P_x = 0: \quad \int_{(F_1)} (\sigma + d\sigma) dF - \int_{(F_1)} \sigma \cdot dF - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

po úprave

$$\int_{(F_1)} d\sigma \cdot dF - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

Normálové napätie v bode N podľa rovnice 7.11 je

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y_1$$

Prírastok napätia v mieste Q bude

$$d\sigma = \frac{dM}{I_z} y_1$$

Po dosadení oboch hodnôt do rovnice rovnováhy vo vodorovnom smere dostávame

$$\int_{(F_1)} \frac{dM}{I_z} y_1 \cdot dF = \tau \cdot b \cdot dx$$

a odtiaľ, po úprave šmykové napätie τ vo vzdialenosti y je

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{b \cdot I_z} \int_{(F_1)} y_1 dF$$

V ktorom podľa Schwedlerovej vety (lit. 9, ods. 4.3.2) je $T = \frac{dM}{dx}$ veľkosť priečnej sily, výraz $S_z = \int_{(F_1)} y_1 dF$ je statický moment plochy F_1 k osi z , a I_z moment zotrvačnosti celého prierezu k osi z .

Šmykové napätie pri ohybe nosníka od priečnej sily možno preto vyjadriť takto:

$$\boxed{\tau = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z}} \quad (7.13)$$

Jednotlivé členy rovnice pre obdĺžnikový prierez majú tvar

$$S_z = \int_y^{\frac{h}{2}} y_1 \cdot b \cdot dy_1 = b \left[\frac{y_1^2}{2} \right]_y^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

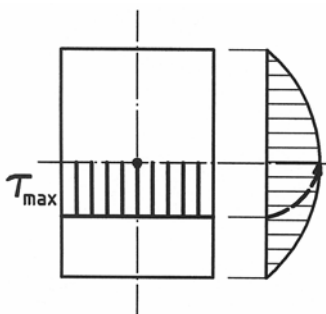
$$I_z = \frac{1}{12} b h^3$$

Po dosadení do rovnice (7.13) a úprave dostaneme

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[1 - \left(\frac{y}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

Rovnica v uvažovanom reze je rovnicou paraboly.

Priebeh šmykového napätia je znázornený na obr. 7.13.



Obr. 7.13

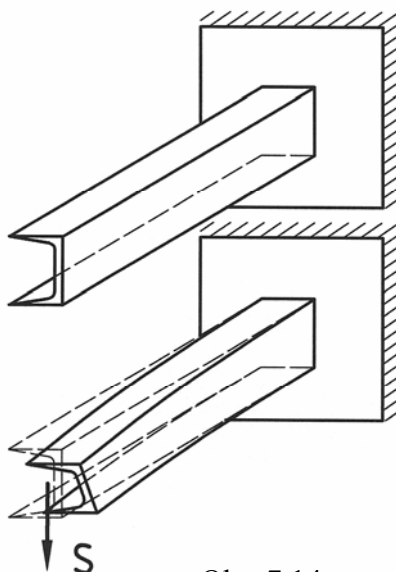
Najväčšie šmykové napätie je v neutrálnej osi, t. j. pre $y = 0$ (!), (pretože v predchádzajúcej rovnici je 2. člen v okrúhlej zátvorke rovný nule a celý výraz v hranatej zátvorke má vtedy najväčšiu hodnotu ... 1).

Hodnota maximálneho šmykového napätia na ohýbanom nosníku obdĺžnikového prierezu sa vypočíta z rovnice

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3T}{2F} \quad (7.14)$$

Pozn.: Doteraz sme vyšetrovali ohýbaný nosník symetrického prierezu. U nesymetrických prierezov (obr. 7.14) výslednica vnútorných síl často neprechádza ťažiskom prierezu. Momentovou dvojicou, ktorá v dôsledku toho vznikne, je nosník navyše namáhaný na krútenie. Bod, okolo ktorého sa prierez vplyvom tohto momentu otáča sa nazýva **stredisko šmyku**.

Nesprávne navrhnutý, alebo zaťažný nosník, ktorý neberie do úvahy vlastnosti a dôsledky strediska šmyku vedie často v praxi ku neželanej a náhlejšej deformácii nosníka, napr.:



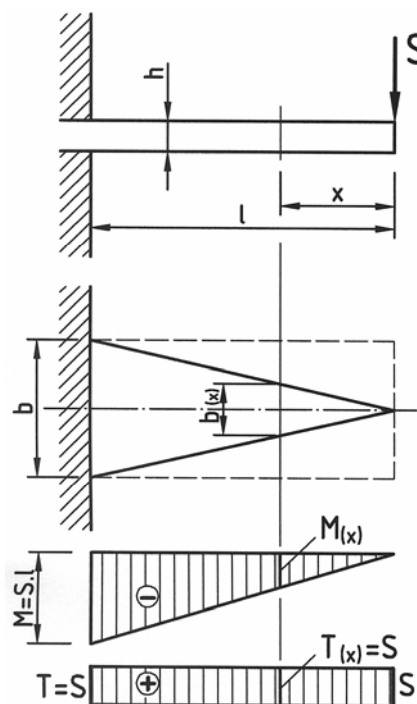
Obr. 7.14

7.4 Nosníky s rovnakou pevnosťou

Priehybová čiara od ohybového momentu nemá pozdĺž osi nosníka konštantnú hodnotu. Z toho vyplýva, že pri stálom priereze nosníka je pevnosť krajných vlákien na normálové napätie (σ) využitá len v mieste maximálneho ohybového momentu ($M_{\max}$).

Preto sa niekedy konštruujú nosníky s premenlivým prierezom, aby využitie materiálu na σ_{dov} bolo vo všetkých prierezoch rovnaké. Takto navrhované nosníky sa nazývajú *nosníky s rovnakou pevnosťou*.

Princíp nosníka s rovnakou pevnosťou si objasníme na jednoduchom príklade (obr. 7.15).



Obr. 7.15

Majme nosník obdĺžnikového prierezu, na jednom konci votknutý (konzola) a na druhom zaťažný bremenom S .

Máme určiť, ako sa má meniť šírka nosníka b , pri jeho konštantnej hrúbke h tak, aby napätie v prierezoch po celej dĺžke nosníka bolo konštantné.

Ohybový moment v ľubovoľnom priereze je $M_{(x)} = -S \cdot x$

Prierezový modul odporu nosníka je

$$W_{0(x)} = \frac{M_{(x)}}{\sigma_{\text{dov}}} = \frac{b_{(x)} \cdot h^2}{6}$$

(vid'. 7.11) a z toho

$$b_{(x)} = \frac{6|M_{(x)}|}{h^2 \cdot \sigma_{\text{dov}}} = \frac{6 \cdot S \cdot x}{h^2 \cdot \sigma_{\text{dov}}} \quad (7.15)$$

Pretože S , σ_{dov} , h sú konštanty, je to rovnica priamky, čiže šírka nosníka s rovnakou pevnosťou by sa v danom prípade mala meniť podľa priamky. Úspora materiálu by pritom bola, ak ho porovnáme s prizmatickým nosníkom až 50% (!).

Praktické využitie nosníkov s rovnakou pevnosťou je rôzne, napr. v hlavných nosníkoch na mostoch, pri listovom perovaní, a pod.

7.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

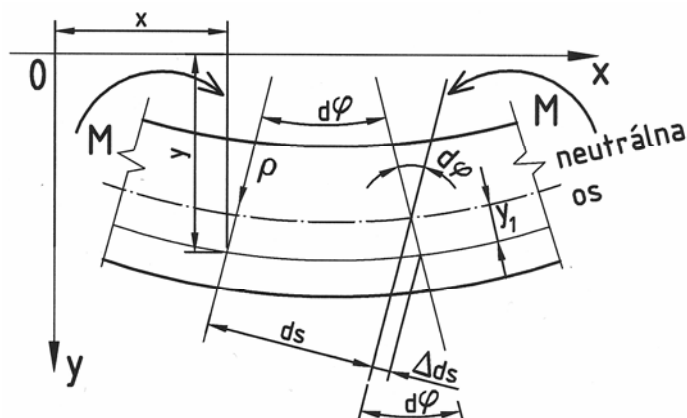
Pôsobením ohybových momentov sa pôvodná priama strednica nosníka deformuje. Poznať poradnice deformovanej osi – *ohybovej (priehybovej) čiary* je veľmi dôležité, lebo na mostoch, žeriavových dráhach a pod., treba okrem kontroly na únosnosť (1. medzný stav, $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$), presvedčiť sa, či priehyb na nosníku nebude väčší ako vopred jeho záväzne (STN) určená hodnota (2. medzný stav – ods. 2.3.3 !).

7.5.1 Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary

Vypočítať deformáciu nosníka znamená vlastne vypočítať poradnice priehybovej čiary. Vychádzame pritom z predpokladu platnosti Hookovho zákona a malých deformácií, pri ktorých ohybová čiara sa len málo líši od priamky, takže uhol sklonu dotyčnice v ľubovoľnom bode čiary je veľmi malý $\text{tg}\varphi \doteq \varphi$.

Pri výpočte sa väčšinou zanedbáva účinok priečnej sily na deformáciu nosníka. Tento predpoklad je opodstatnený najmä u štíhlych nosníkov.

Vyšetríme teda deformáciu nosníka namáhaného čistým ohybom (obr. 7.16).



Obr. 7.16

Pomerné predĺženie vlákna vo vzdialenosti y_1 od neutrálnej osi je

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$$

Podľa obrázku je

$$\Delta ds = y_1 \cdot d\varphi$$

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

Riešením uvedených rovníc dostaneme

$$\varepsilon = \frac{y_1 d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}$$

Platí tiež (1.12) $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ a (7.11) $\sigma = \frac{M_{(x)}}{I_z} y_1$.

Po dosadení bude

$$\frac{y_1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{I_z} y_1 \quad \text{a po úprave} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI_z} \quad (7.16)$$

Pre polomer krivosti platí z matematickej analýzy známy vzťah

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad , \text{ kde } y \text{ znamená v našom}$$

prípade poradnicu krivky priehybovej čiary.

Po dosadení do rovníc 7.16 a úprave bude

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_{(x)}}{EI} \quad (7.17)$$

Vzhľadom na to, že priechyby sú veľmi malé, môžeme veľkosť štvorca y'^2 zanedbať. Tým sa rovnica 7.17 zjednoduší na tvar

$$\boxed{y'' = -\frac{M_{(x)}}{EI_z}} \quad (7.18)$$

Rovnica v tomto tvare je **približná diferenciálna rovnica priehybovej (ohybovej) čiary**. Znamienko plus v rovnici je preto, aby vzhľadom na znamienkový dohovor v prípade ohybových momentov, viedol výpočet vždy ku kladným hodnotám poradníc ohybovej čiary (ktorými aj v skutočnosti sú).

Dvojnásobným integrovaním rovnice 7.18 sa určí rovnica priechybov $y = f(x)$. V prípade konštantnej tuhosti nosníka v ohybe ($I_z E = \text{konšt.}$) dostaneme

$$y = \frac{1}{EI_z} \int (M_{(x)} dx) + C_1 x + C_2 \quad (7.19)$$

Integračné konštanty C_1 , C_2 určíme z okrajových podmienok. Keď nie je možné vyjadriť ohybový moment jedinou rovnicou po celej dĺžke nosníka, ale len po jednotlivých úsekoch jeho dĺžky, musíme pre každý úsek nosníka určiť tvar diferenciálnej rovnice osobitne. To, a najmä niekedy komplikované (zdlhavé a prácne) vyjadrenie funkcií priebehu pôsobenia momentov, predlžuje vlastný výpočet. Existuje viacero prípadov, pri riešení ktorých netreba poznať rovnicu poradnice priehybu celej ohybovej čiary, ale len jej sklon a poradnicu v určitom (pre kontrolu smerodajnom) mieste. V týchto prípadoch je výhodné **riešenie rovnice priehybu podľa Mohrových viet**.

7.5.2 Mohrova metóda výpočtu deformácie nosníka

Mohrova metóda je založená na analógii medzi rovnicami pre výpočet priečných síl a ohybových momentov (Schwedlerova – Žuravského veta, lit. 9, ods. 4.3.2) s rovnicami pre výpočet uhlov sklonu ohybovej čiary a priechybov nosníka.

Vieme, že podľa spomínaných viet je

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = T_{(x)} \qquad \frac{dT}{dx} = -q_{(x)} \qquad (7.20)$$

Riešením oboch rovníc (vylúčením $T_{(x)}$) je

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = -q_{(x)} \qquad \text{alebo} \qquad M''_{(x)} = -q_{(x)} \qquad (7.21)$$

Keďže rovnica priehybov má byť vyjadrená vzťahom $y = f_{(x)}$, podľa (obr. 7.16) platí

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi, \qquad \text{a podľa (7.18) je} \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_{(x)}}{E.I_z} \qquad (7.22)$$

Keď vykonáme porovnanie rovníc, dostaneme

$$\frac{d^2 M_{(x)}}{dx^2} = -q_{(x)} \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_{(x)}}{E.I_z} \qquad (7.22a)$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = T_{(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi \qquad (7.22b)$$

Z porovnania rovníc 7.20, 7.21 a 7.22 zisťujeme, že *dva rôzne fyzikálne javy – tvar ohybovej čiary skutočného nosníka (7.18; 7.19) a vnútorné statické účinky iného (fiktívneho) nosníka – popísané tou istou matematickou rovnicou(!) - sú analogické.*

Takže určiť tvar priehybovej čiary daného nosníka predpokladá zameniť jeho priehyb s ohybovým momentom vo fiktívnom nosníku a veličinu $\frac{M_{(x)}}{E.I_z}$ považovať za spojité zaťaženie fiktívneho nosníka.

Z uvedených rovníc vyplývajú tieto pravidlá:

- Fiktívny nosník je zaťažený spojitými silami $q_f = \frac{M_{(x)}}{E.I_z}$
- Ohybový moment M_f vo fiktívnom nosníku je rovný priehybu skutočného nosníka v rovnakom mieste – **1. veta Mohrova** :
$$y = \frac{M_f}{E.I_z} \quad (7.23)$$
- Priečna sila T_f vo fiktívnom nosníku určuje sklon dotyčnice ohybovej čiary skutočného nosníka v rovnakom mieste – **2. veta Mohrova** :

$$\varphi = \frac{T_f}{E.I_z} \quad (7.24)$$

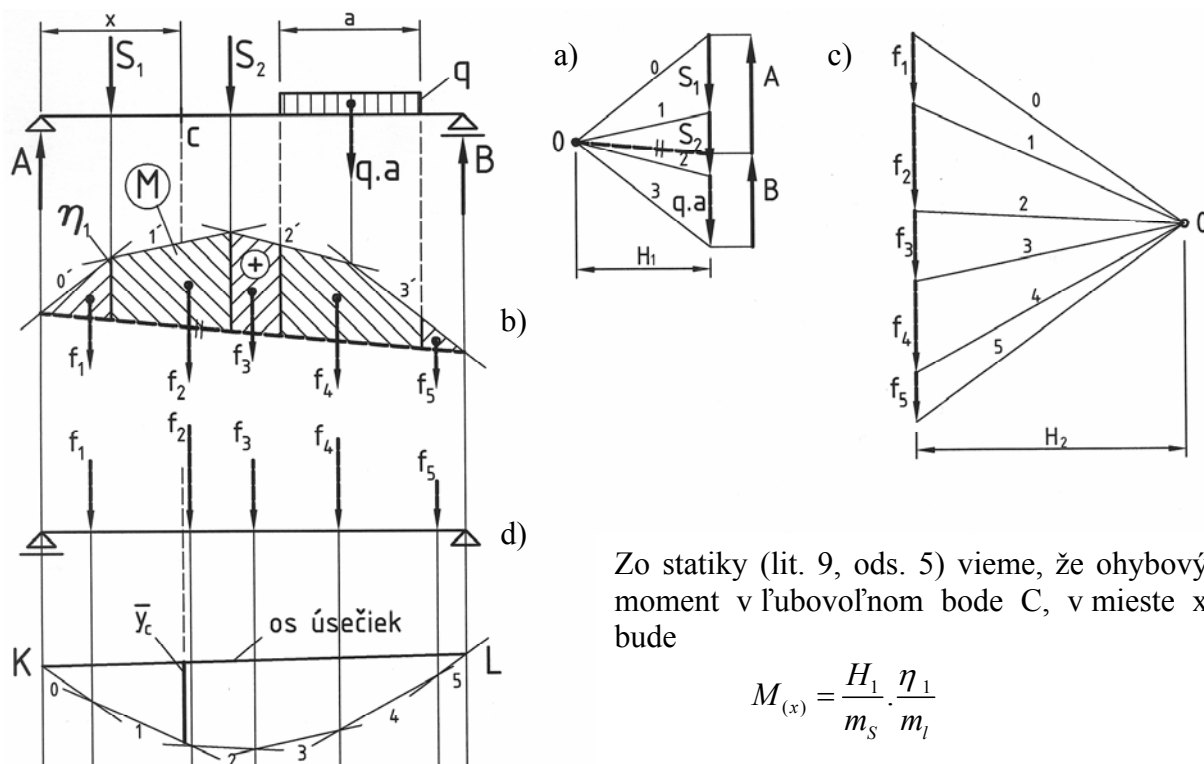
Skutočný nosník a nosník fiktívny sú rovnako dlhé. Medzi uložením skutočného a fiktívneho nosníka je súvislosť, ktorá vyplýva z vyššie uvedených viet (tab. 7.1).

Tab. 7.1

Skutočný nosník					
Fiktívny nosník					

Postup výpočtu podľa Mohrových viet si ukážeme na grafickom riešení výpočtu ohybovej čiary na prostom nosníku s konštantným prierezom a so zaťažením podľa obr. 7.17.

1. Zvoľme mierku síl m_s a mierku dĺžok m_l
2. Nakreslíme nosník v príslušnej mierke
3. Zostrojíme silový zložkový obrazec (obr. 7.17a) a výslednicovú čiaru (obr. 7.17b), resp. momentovú plochu (M) .



Zo statiky (lit. 9, ods. 5) vieme, že ohybový moment v ľubovoľnom bode C, v mieste x bude

$$M_{(x)} = \frac{H_1}{m_s} \cdot \frac{\eta_1}{m_l}$$

Obr. 7.17

4. Momentovú plochu (M) na obr. 7.17b rozdelíme na niekoľko častí, v ťažiskách ktorých necháme pôsobiť fiktívne sily, úmerne plochám - $f_1, f_2, \dots, f_5$, ktoré pri kladných hodnotách ohybového momentu smerujú nadol, pri záporných nahor.

5. Zvolíme mierku momentových plôch $m_f = \frac{\overline{f_i}}{f_{iskut}}$, kde $\overline{f_i}$ je veličina výkresová.

6. Zostrojíme zložkový obrazec fiktívnych síl (obr. 7.17c) a výslednicovú čiaru – os úsečiek (obr. 7.17c). Os úsečiek uložených na dvoch podperách musí prechádzať miestami uloženia K a L, kde je prihyb nosníka nulový.

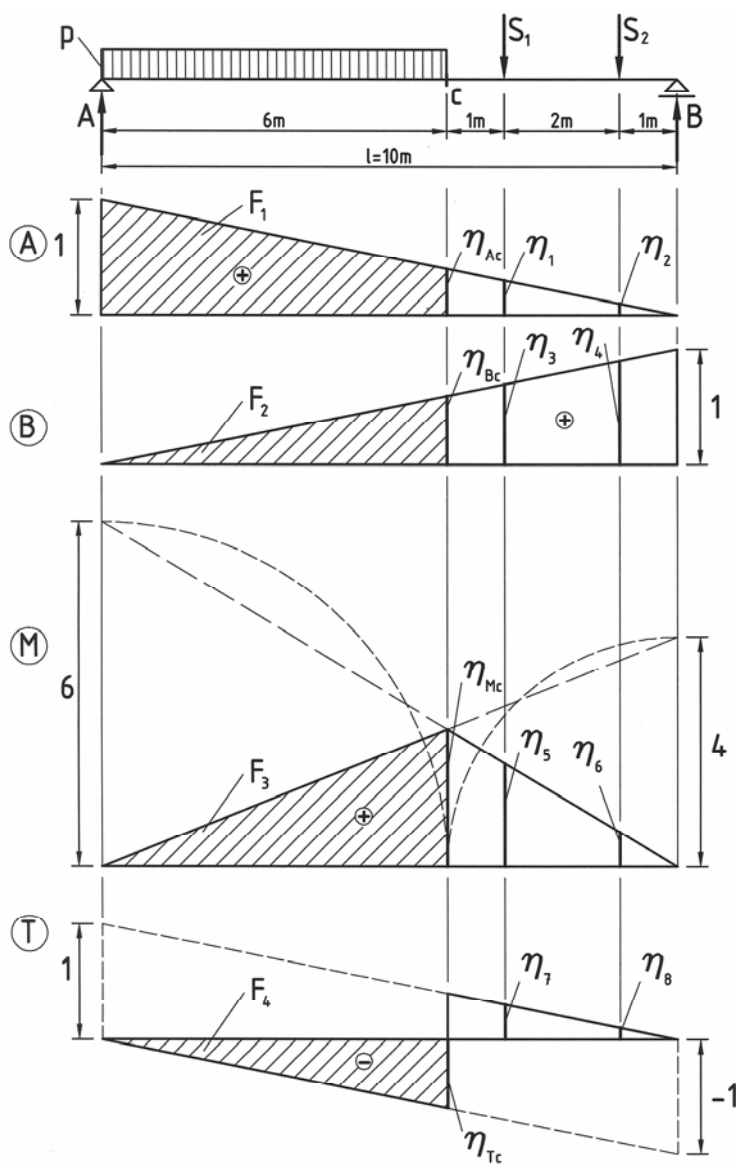
7. Prihyb nosníka v bode C, v mieste x je podľa 1. Mohrovej vety daný rovnicou

$$y = \frac{1}{EI} \frac{H_2}{m_f} \cdot \frac{\overline{y_C}}{m_l}$$

7.6 Príklady

7.6.1 Pohyblivá sústava bremien sa na nosníku nachádza v polohe uvedenej na (obr. 7.18).

Určite pomocou vplyvových čiar veľkosť reakcií v podperách a hodnotu ohybového momentu a priečnej sily v bode C. Dané je: $S_1 = 3\text{N}$; $S_2 = 2\text{N}$; $p = 2\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.



Obr. 7.18

Priečna sila v bode C:

$$\mu_{Tc} = -0,6; \mu_7 = 0,3; \mu_8 = 0,1$$

$$F_4 = \frac{-0,6 \cdot 6}{2} = -1,8\text{m}$$

$$T_c = 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot (-1,8) = -2,5\text{N}$$

Riešenie:

Pre všetky hľadané veličiny nakreslíme priebeh vplyvových čiar a potom určíme ich veľkosti:

$$\sum_{i=1}^n S_i \cdot \eta_i + F_i \cdot p_i \quad (7.2a, 7.3b, 7.4b)$$

(pre μ_i vypočítané alebo odmerané z obrázku).

Reakcia A:

$$\mu_{Ac} = 0,4; \mu_1 = 0,3; \mu_2 = 0,1$$

$$F_1 = \frac{1 + 0,4}{2} \cdot 6 = 4,2\text{m}$$

$$A = 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 4,2 \cdot 2 = 9,5\text{N}$$

Reakcia B:

$$\mu_{Bc} = 0,6; \mu_3 = 0,7; \mu_4 = 0,9$$

$$F_2 = \frac{0,6 \cdot 6}{2} = 1,8\text{m}$$

$$B = 3 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,9 + 2 \cdot 1,8 = 7,5\text{N}$$

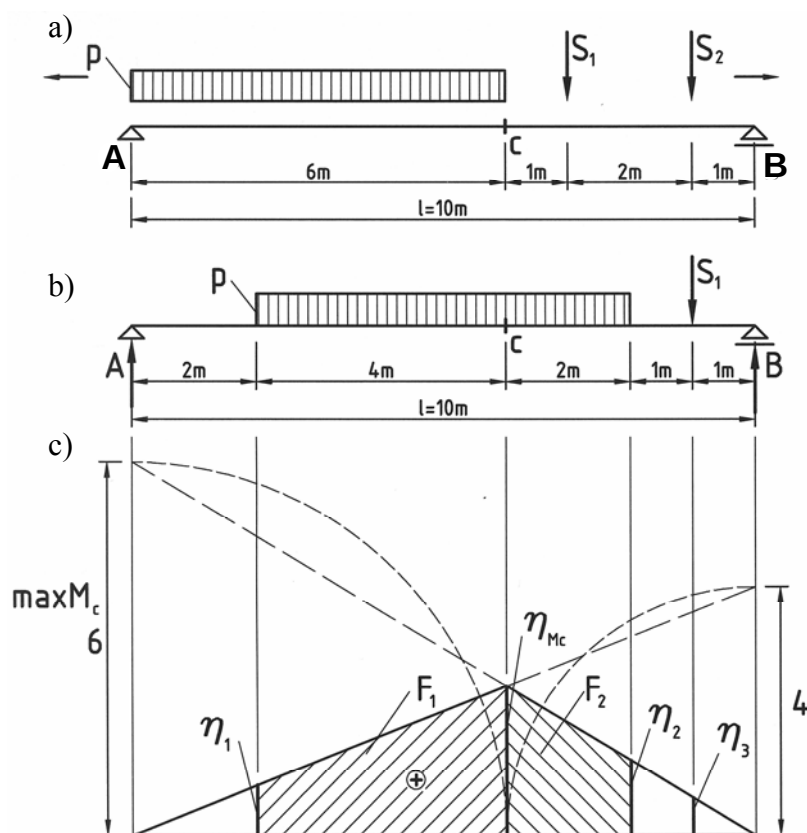
Moment v bode C:

$$\mu_{Mc} = 2,4\text{m}; \mu_5 = 1,8\text{m}; \mu_6 = 0,6\text{m}$$

$$F_3 = \frac{2,4 \cdot 6}{2} = 7,2\text{m}^2$$

$$M_c = 3 \cdot 1,8 + 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 7,2 = 21\text{Nm}$$

7.6.2 Umiestnite pohyblivú sústavu bremien na nosník tak, aby v bode **C** vznikol max. moment **max M_c** a vypočítajte jeho hodnotu (obr. 7.19a). Poznáte: **S₁ = 3N**; **S₂ = 2N**; **p = 2N.m⁻¹**.



Obr. 7.19

$$\max M_c = S_1 \cdot \mu_3 + F_1 \cdot p + F_2 \cdot p = 21,8 \text{ Nm}.$$

Riešenie:

Podľa (7.4c) a obr. 7.18 pre **(M)** najúčinnnejšiu časť sústavy pohyblivých bremien umiestnime na bod **C**

S₂ (obr. 7.19 b), nakreslíme vplyvovú čiaru pre **maxM_c** (obr. 7.19 c) a vypočítame hodnotu **maxM_c** (pre μ_i vypočítané alebo odmerané z obrázku).

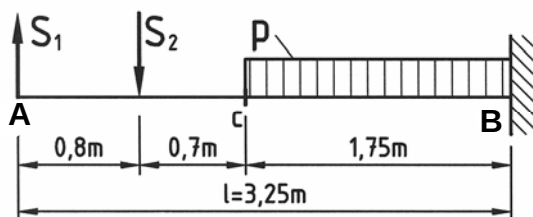
$$\mu_1 = 0,8 \text{ m}; \mu_{Mc} = 2,4 \text{ m},$$

$$\mu_2 = 1,2 \text{ m}; \mu_3 = 0,6 \text{ m}.$$

$$F_1 = \frac{0,8 + 2,4}{2} \cdot 4 = 6,4 \text{ m}^2,$$

$$F_2 = \frac{2,4 + 1,2}{2} \cdot 2 = 3,6 \text{ m}^2.$$

7.6.3 Určite pomocou vplyvových čiar reakciu v bode **B**, moment a priečnu silu v bode **C** nosníka (obr. 7.20), ak poznáte: **S₁ = 0,6 kN**; **S₂ = 1,2 kN**, **p = 0,5 kN.m⁻¹**.



Obr. 7.20

Výsledok:

$$\mathbf{B} = 1,775 \text{ kN},$$

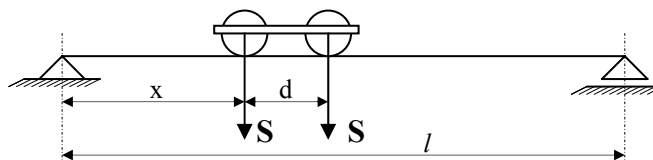
$$\mathbf{M_c} = -0,15 \text{ kNm},$$

$$\mathbf{T_c} = -0,9 \text{ kN}.$$

7.6.4 Dokážte, že vozík žeriavu, ktorý sa pohybuje na nosníku podľa (obr. 7.21), vyvodí

najväčší moment $M_{\max} = \frac{2 \cdot S \cdot (l - x - \frac{1}{2} \cdot d) \cdot x}{l}$ vtedy, keď sa bude nachádzať v polohe

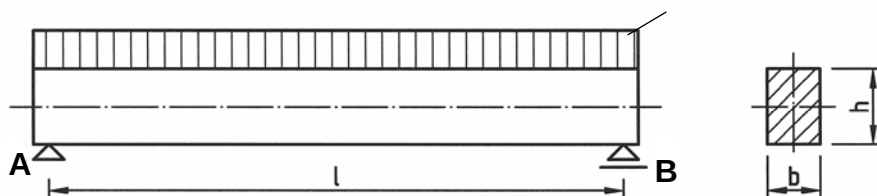
$$x = \frac{l}{2} - \frac{d}{4}.$$



Obr. 7.21

7.6.5 Navrhnite veľkosť strán **h, b** priečného prierezu nosníka, zaťažného podľa (obr. 7.22), ak poznáte: $q = 30 \text{ kNm}^{-1}$; $l = 2,0 \text{ m}$; $\sigma_{\text{dov}} = 120 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{dov}} = 7 \text{ MPa}$.

q



Obr. 7.22

Riešenie:

Podľa (7.12) je:

$$\sigma = \frac{M_o}{W_o} \leq \sigma_{\text{dov}} \Rightarrow W_o \geq \frac{M_o}{\sigma_{\text{dov}}} = \frac{\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2}{120} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ (N} \cdot \text{mm)}}{8 \cdot 120 \text{ (MPa)}} \Rightarrow W_o \geq 1,25 \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

U nosníkov obdĺžnikového prierezu sa zvyčajne volí pomer strán $\frac{b}{h} = \left(\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} \right)$; po dosadení:

$$W_o = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \Rightarrow 1,25 \cdot 10^5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot h \cdot h^2 \Rightarrow h^3 = \frac{1,25 \cdot 10^5 \cdot 24}{3} \Rightarrow h = \sqrt[3]{10^6} = 100 \text{ mm},$$

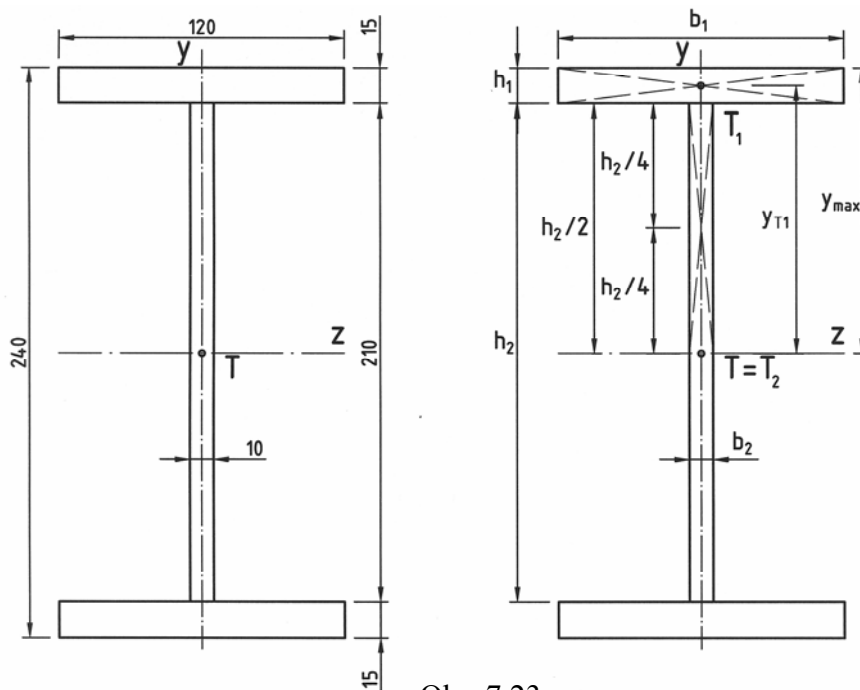
$$b = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75 \text{ mm}.$$

Nakoniec posúdime zvolený prierez nosníka na max. šmykové napätie (7.13; 7.14):

$$\tau = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \leq \tau_{\text{dov}} \Rightarrow \tau = \frac{T \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4}}{\frac{1}{12} \cdot b^2 \cdot h^3} = \frac{3 \cdot T}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3 \text{ (N)}}{2 \cdot 75 \cdot 100 \text{ (mm}^2\text{)}},$$

$$\tau = 6 \text{ MPa} \leq \tau_{\text{dov}} = 7 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

7.6.6 Vykonajte kontrolu (posúdenie) napätia symetrického oceľového nosníka (obr. 7.23), pre normálové napätie σ v pásniciach prierezu, šmykové napätie τ v stojine prierezu. Dané je: $M_{\max} = 45 \text{ kNm}$; $T_{\max} = 80 \text{ kN}$; $\sigma_{\text{dov}} = 220 \text{ MPa}$; $\tau_{\text{dov}} = 135 \text{ MPa}$.



Obr. 7.23

Riešenie:

Podľa (7.12) vypočítame normálové napätie v pásniciach prierezu a posúdime ich:

$$\sigma = \frac{M_O}{W_O} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma_{\text{dov}} \Rightarrow W_z = \frac{I_z^p}{y_{\max}} \Rightarrow I_z^p = 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot b_1 \cdot h_1^3 + b_1 \cdot h_1 \cdot y_{T1}^2 \right],$$

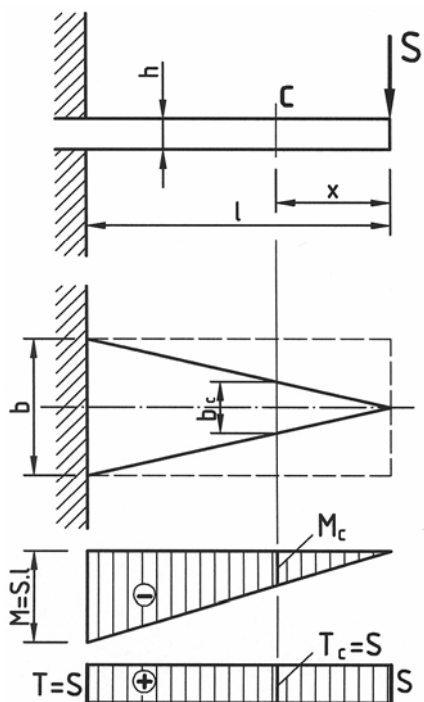
$$I_z^p = 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot 120 \cdot 15^3 + 120 \cdot 15 \cdot 112,5^2 \right] = 4,563 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \Rightarrow W_z = \frac{4,563 \cdot 10^7}{120} = 3,8025 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

$$\sigma = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{3,8025 \cdot 10^5} = 118 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{dov}} = 220 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

Určíme šmykové napätie v stojine prierezu (7.13) a vykonáme posúdenie:

$$\tau = \frac{T_{\max} \cdot S_{\max}^s}{b_2 \cdot I_z^s} \leq \tau_{\text{dov}} \Rightarrow \tau = \frac{3 \cdot T_{\max}}{2 \cdot b_2 \cdot h_2} = \frac{3 \cdot 80 \cdot 10^3}{2 \cdot 10 \cdot 210} = 57 \text{ MPa} \leq \tau_{\text{dov}} = 135 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

7.6.7 Votknutý nosník obdĺžnikového prierezu je na voľnom konci zaťažený silou S (obr. 7.24). Určite zmenu šírky b v bode C nosníka, pri konštantnej výške h , ak napätie σ v prierezoch po celej dĺžke l nosníka je konštantné. Dané je: $l = 3\text{m}$; $x = 1\text{m}$; $h = 0,1\text{m}$; $S = 3\text{ kN}$; $\sigma_{\text{dov}} = 12\text{ MPa}$.



Obr. 7.24

Riešenie:

Podľa (7.11) je prierezový modul v bode c:

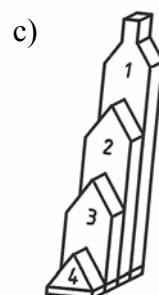
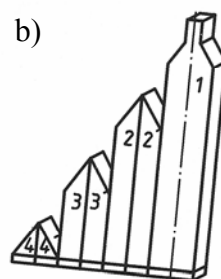
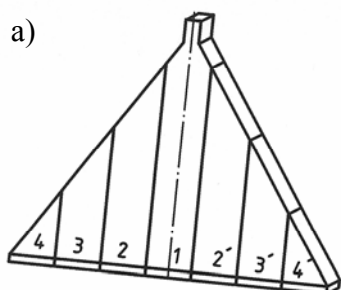
$$W_c \geq \frac{M_c}{\sigma_{\text{dov}}} = \frac{b_c \cdot h^2}{6},$$

po úprave (7.15):

$$b_c \geq \frac{6 \cdot |M_c|}{h^2 \cdot \sigma_{\text{dov}}} = \frac{6 \cdot S \cdot x}{h^2 \cdot \sigma_{\text{dov}}} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{0,1^2 \cdot 12 \cdot 10^6}$$

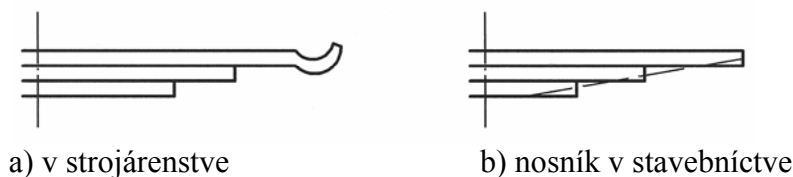
$$b_c = 150\text{ mm}$$

Pozn.: Nosníky rovnakej pevnosti (pružiny) používame napr. vtedy, keď je potrebné zmenšiť účinky rázového zaťaženia. Pretože veľká šírka plochej pružiny, ktorú dostaneme v mieste votknutia, vyžaduje veľa miesta, konštruujú sa pružiny tak, že plochú pružinu (obr. 7.25a) rozrežeme na jednotlivé pozdĺžne pásy o rovnakej šírke (obr. 7.25b) a pásy poukladáme na seba (obr. 7.25c).



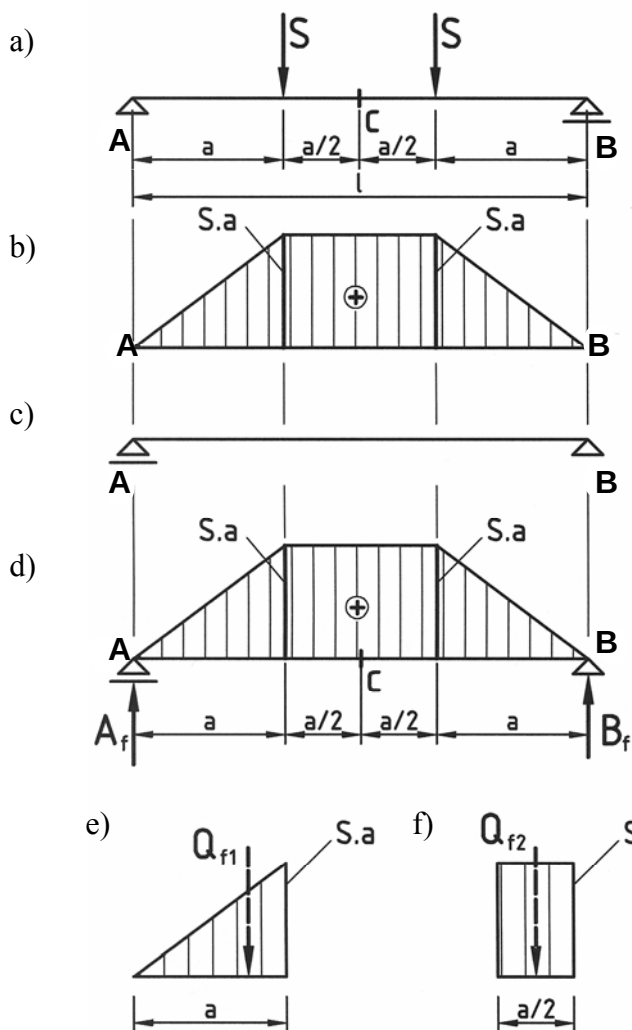
Obr. 7.25

Možné využitie pružín:



Obr. 7.26

7.6.8 Vypočítajte veľkosť priehybu v bode **C** symetricky zaťaženého nosníka (obr. 7.27a). Určite veľkosť pootočenia v bode **A** nosníka. Je dané: $a = 2,0\text{m}$; $S = 15\text{ kN}$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$; $I_z = 6 \cdot 10^7\text{ mm}^4$.



Riešenie:

Nakreslíme priebeh ohybového momentu od daného zaťaženia (obr. 7.27b), určíme fiktívny nosník (obr. 7.27c) a necháme na neho pôsobiť momentový obrazec ako spojité zaťaženie (obr. 7.27d).

Z (obr. 7.27d) je zrejmé, že:

$$A_f = B_f = Q_{f1} + Q_{f2} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot S \cdot a^2 = S \cdot a^2$$

Q_{fi} - (obr. 7.27e,f).

Vypočítame priehyb v bode **C** (7.23):

$$y_c = \frac{M_{fc}}{E \cdot I_z} = \frac{A_f \cdot \frac{3}{2} a - Q_{f1} \cdot \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{2} \right) - Q_{f2} \cdot \frac{a}{4}}{E \cdot I_z},$$

po úprave:

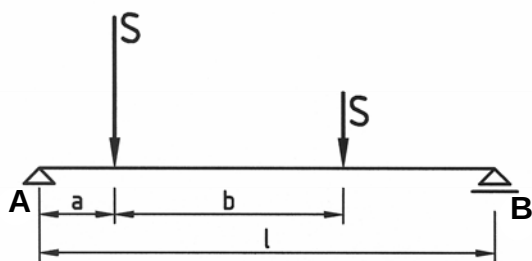
$$y_c = \frac{23 \cdot S \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I_z} = \frac{23 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 2^3 \cdot 10^9}{24 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^7} \quad 9,127\text{ mm}$$

Obr. 7.27

Pomocou (7.24) určíme pootočenie v bode **A** nosníka:

$$\varphi_a = \frac{T_{fa}}{E \cdot I_z} = \frac{A_f}{E \cdot I_z} = \frac{S \cdot a^2}{E \cdot I_z} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 2^2 \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^7} \quad 4,762 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad 0,273^\circ$$

7.6.9 Vypočítajte maximálne normálové napätie, ktoré vznikne v nosníku (obr. 7.28), ak poznáte: $S_1 = 4 \text{ kN}$; $S_2 = 2 \text{ kN}$; $a = 1 \text{ m}$; $b = 3 \text{ m}$; $l = 6 \text{ m}$; $d = 50 \text{ mm}$.



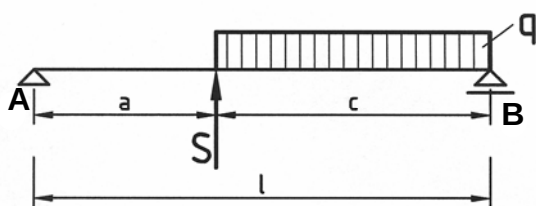
Obr. 7.28



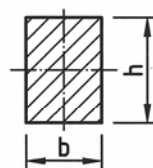
Výsledok:

$$\sigma_{\max} = 325 \text{ MPa}$$

7.6.10 Nosník obdĺžnikového prierezu je zaťažený podľa (obr. 7.29). Určite rozmery prierezu b, h a maximálne šmykové napätie v nosníku, ak je dané: $S = 10 \text{ kN}$; $q = 15 \text{ kNm}^{-1}$; $\sigma_{\text{dov}} = 125 \text{ MPa}$; $a = 1,5 \text{ m}$; $c = 2,5 \text{ m}$; $l = 4 \text{ m}$; $h : b = 2,5$.



Obr. 7.29



Výsledok:

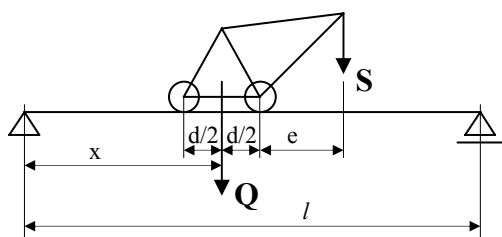
$$b = 50 \text{ mm},$$

$$h = 125 \text{ mm},$$

$$\tau_{\max} = 5,28 \text{ MPa}.$$

7.6.11 Koľajnice žeriavu (obr. 7.30) sú uložené na dvoch nosníkoch prierezu I č.30. Treba rozhodnúť, či žeriav o tiaži Q , so zaveseným bremenom S v osi mosta a s vyložením bremena $(\frac{d}{2} + e)$ sa môže pohybovať po moste o rozpätí l .

Dané: $l = 9,0 \text{ m}$; $d = 1,8 \text{ m}$; $e = 2,7 \text{ m}$; $Q = 50 \text{ kN}$; $S = 10 \text{ kN}$; $W_x = 2.653 \text{ cm}^3$; $\sigma_{\text{dov}} = 120 \text{ MPa}$.



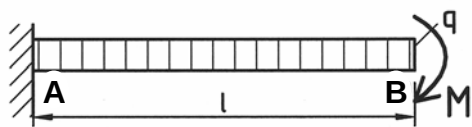
Obr. 7.30

Výsledok:

Áno, pretože (ak zanedbáme vlastnú tiaž mosta) bude

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{2W_x} = \frac{12,6 \text{ MNcm}}{2 \cdot 2.653 \text{ cm}^3} = 96,5 \text{ MPa} \leq 120 \text{ MPa}$$

7.6.12 Určite priehyb a pootočenú voľného konca votknutého nosníka (obr. 7.31).



Obr. 7.31

Výsledok:

$$y_b = \frac{4.M.l^2 + q.l^4}{8.E.I}, \quad \varphi_b = \frac{6.M.l + q.l^3}{6.E.I}$$

8. KOMBINOVANÉ NAMÁHANIE

Omnoho častejšie, ako jednoduché prípady namáhania súčiasťok, sa v technickej praxi vyskytuje zložené (kombinované) namáhanie. Je to také namáhanie, keď súčiasťka (teleso) je namáhaná dvomi alebo viacerými jednoduchými druhmi namáhania súčasne.

Vo väčšine prípadov sa výsledne kombinované namáhanie súčiasťky získa superpozíciou (sčítaním) účinkov od jednotlivých základných druhov namáhania. Zmienovaný postup je však podmienený platnosťou Hookovho zákona a veľmi malými deformáciami, pri ktorých účinky jedného druhu prostého namáhania neovplyvňujú podstatne účinky ostatných namáhaní.

Sčítat' účinky napätia jednotlivých základných druhov namáhania pri kombinovanom zaťažení možno:

- *algebraicky* – keď napätia sú rovnakého druhu, majú rovnaký smer a pôsobia v jednej rovine,
- *geometricky* – keď napätia pôsobia v jednej rovine a majú rôzny smer.

Pri kontrole kombinovaného namáhania súčiasťky, ktoré spôsobujú napätia rôzneho druhu (σ , τ) nemožno princíp superpozície uplatniť. V týchto prípadoch sa pri pevnostnej kontrole využíva tzv. *porovnávacie (redukované) napätie*. Jeho hodnota sa určuje pomocou hypotéz pevnosti, resp. získa sa priamo z príslušných technických noriem (STN).

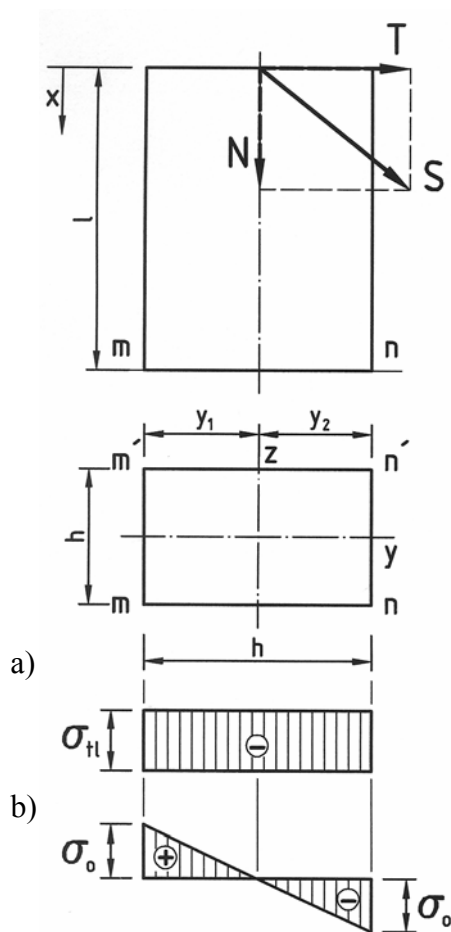
Medzi častejšie kombinácie kombinovaného namáhania v technickej praxi patria:

- tlak (ťah) a ohyb
- ohyb a krútenie
- šmyk a ohyb
- šmyk a krútenie.

Postup výpočtu alebo kontroly súčiasťok na zložené namáhanie v technickej praxi uvedieme na prvých dvoch prípadoch.

8.1 Kombinované namáhanie v tlaku a ohybe

Postup riešenia ilustrujme na prizmatickom prúte (obr. 8.1) zaťaženom šikmou silou S , ktorá pôsobí v rovine symetrie (x, y).



Obr. 8.1

Silu S možno rozložiť do dvoch zložiek N a T . Sila N namáha prút na tlak, sila T na ohyb a šmyk.

Keď zanedbáme účinok šmyku, bude

- *napätie v tlaku* (obr. 8.1a)

$$\sigma_{tl} = -\frac{N}{F}$$

kde F je plocha prierezu prúta ($b \cdot h$),

- *najväčšie napätie od ohybu* (v mieste maximálneho momentu obr. 8.1b)

$$\sigma_0 = \pm \frac{M_0}{I_z} y = \frac{T \cdot l}{I_z} y$$

Obidve normálové napätia pôsobia v tej istej rovine, takže ich možno algebraicky sčítať.

- Na hrane prierezu $\overline{mm}$ bude napätie

$$\sigma_{\overline{mm}} = -\sigma_{tl} + \sigma_0 = -\frac{N}{F} + \frac{T \cdot l}{I_z} y_1 \quad (8.1a)$$

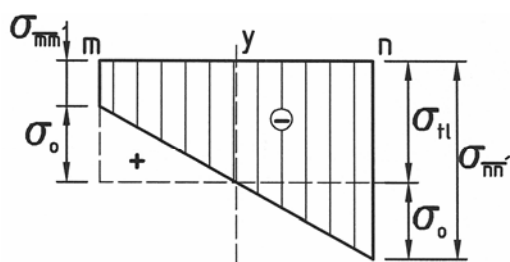
- Na hrane prierezu $\overline{nn'}$ bude napätie

$$\sigma_{\overline{nn'}} = -\frac{N}{F} - \frac{T \cdot l}{I_z} y_2 \quad (8.1b)$$

Pozn.: V našom prípade platí $y_1 = y_2 = y = \frac{h}{2}$

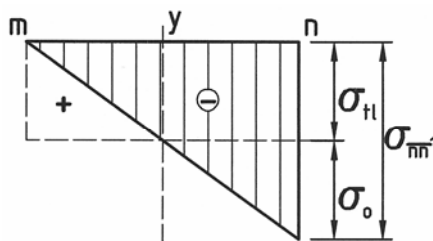
Je zrejmé, že v závislosti na veľkosti napätí σ_{tl} , resp σ_0 môžu nastať tri prípady:

$|\sigma_{tl}| > \sigma_0$ - v tomto prípade (obr. 8.1c) má výsledné napätie súčtu tvar pravidelného lichobežníka, t. j. obe hranové napätia sú záporné $\sigma_{mm'} < 0$, $\sigma_{nn'} < 0$.



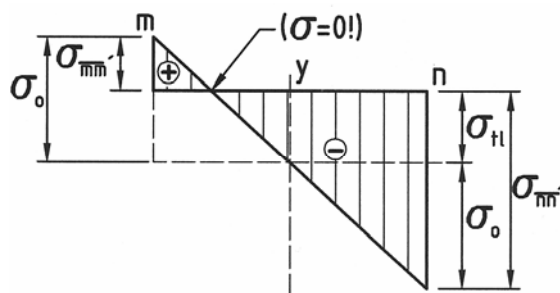
Obr. 8.1c

$|\sigma_{tl}| = \sigma_0$ - v tomto prípade (obr. 8.1d) má výsledné napätie súčtu tvar trojuholníka, t. j. $\sigma_{mm'} = 0$, $\sigma_{nn'} < 0$. Hranové napätie $\sigma_{nn'}$ dosahuje svoje maximum.



Obr. 8.1d

$|\sigma_{tl}| < \sigma_0$ - výsledok sčítania (obr. 8.1e) v tomto prípade má za následok, že v posudzovanom priereze sa vyskytne súčasne tlak ($\sigma_{nn'}$) i ťah ($\sigma_{mm'}$).

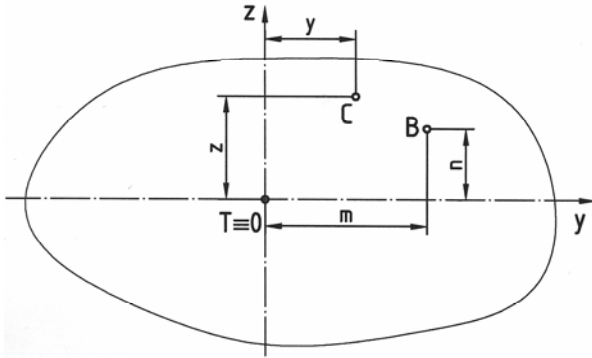


Obr. 8.1e

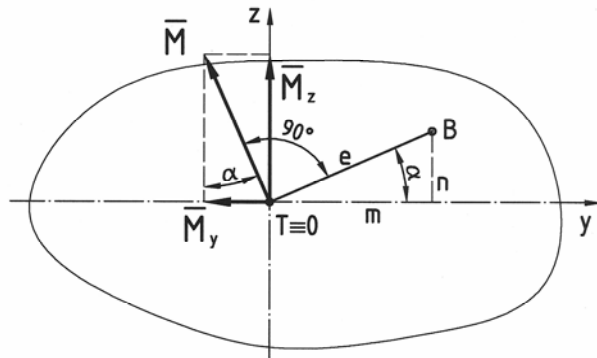
Pozn.: - V technickej a najmä stavebnej praxi sú prípady (napr. piliere mostov, oporné múry atď.), keď pri kombinovanom namáhaní sa prípad $\sigma_{tl} < \sigma_0$ nesmie vyskytnúť – je tzv. vylúčený.

- Spojnica bodov, rovnobežná s hranami prierezu, kde napätie je nulové ($\sigma = 0$) sa nazýva **nulová čiara napätia**. Možno si všimnúť, že nulová čiara pri $\sigma_{tl} > \sigma_0$ (obr. 8.1c) neleží v ploche prierezu, resp. pri $\sigma_{tl} = \sigma_0$ (obr. 8.1d) prechádza hranou prierezu.

Predpokladajme teraz všeobecnejší prípad, keď osamelá sila S namáhajúca prierez na tlak neprechádza centrálnymi rovinami zotrvačnosti v priereze prúta, ale bodom B (obr. 8.2a), ktorého súradnice sú m, n .



Obr. 8.2a



Obr. 8.2b

Aby sme určili výsledné **napätie v ľubovoľnom bode C** so súradnicami y, z , rozložíme ohybový moment $M = S \cdot e$ do centrálnych osí zotrvačnosti (obr. 8.2b)

$$M_y = M \sin \alpha \qquad \sin \alpha = \frac{n}{e}$$

$$M_z = M \cos \alpha \qquad \cos \alpha = \frac{m}{e}$$

Po dosadení budú zložky ohybového momentu

$$M_y = M \frac{n}{e} = S \cdot e \frac{n}{e} = S \cdot n$$

$$M_z = S \cdot m$$

Symbolom e sa v rovniciach vyjadruje tzv. *excentricita* sily, so zreteľom na ťažisko prierezu, $e [m; n]$.

Výsledné napätie v bode C získame algebraickým súčtom napätí od oboch ohybových momentov M_y, M_z a od tlakovej sily S .

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{S}{F} = -\frac{S \cdot n}{I_y} z - \frac{S \cdot m}{I_z} y - \frac{S}{F} \quad (8.2a)$$

A ďalej, keď dosadíme za $I_y = F \cdot i_y^2$ a $I_z = F \cdot i_z^2$ dostaneme po úprave

$$\sigma = -\frac{S}{F} \left(\frac{z}{i_y^2} n + \frac{y}{i_z^2} m + 1 \right) \quad (8.2b)$$

Súradnice bodov s nulovým napätím dostaneme, keď položíme σ rovné nule

$$0 = -\frac{S}{F} \left(\frac{z}{i_y^2} n + \frac{y}{i_z^2} m + 1 \right)$$

Keďže pomer $\frac{S}{F} \neq 0$, musí byť druhý člen súčiny rovný nule, takže

$$-\frac{m \cdot y}{i_z^2} - \frac{n \cdot z}{i_y^2} = 1$$

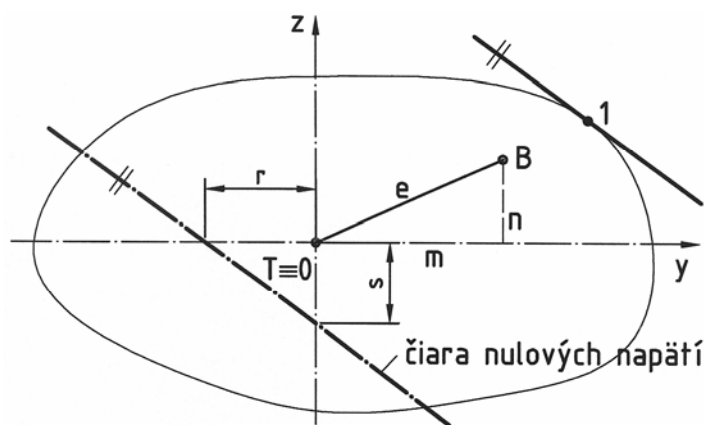
čiže

$$\frac{\frac{y}{i_z^2}}{\frac{m}{-1}} - \frac{\frac{z}{i_y^2}}{\frac{n}{-1}} = 1 \quad (8.2c)$$

Rovnica 8.2c je rovnicou priamky v tzv. úsekovom tvare. Úseky na osiach y a z budú (obr. 8.2c)

$$r = -\frac{i_z^2}{m} \quad ; \quad s = -\frac{i_y^2}{n} \quad (8.2d)$$

Záporné znamienka udávajú, že **čiara nulového napätia leží na opačnej strane ťažiska, ako pôsobisko sily S.**



Obr. 8.2c

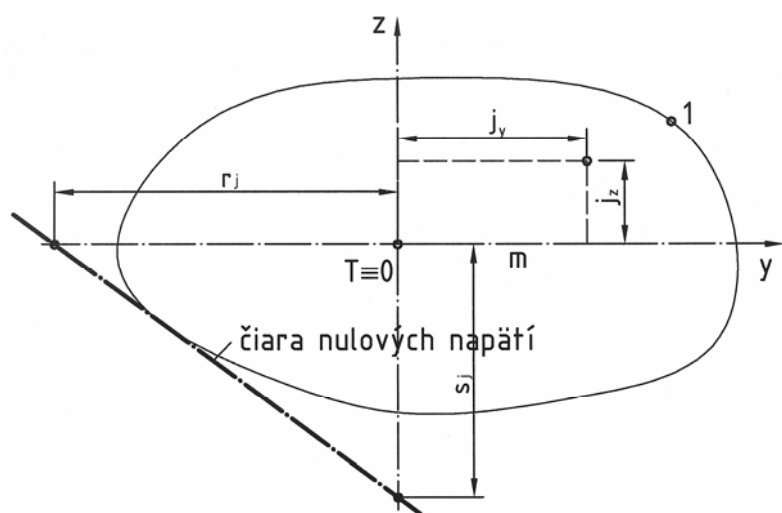
Z rovnice 8.2b vidieť, že napätie je v tomto prípade zloženého namáhania rovinné.

Najväčšie napätie je v bodoch najviac vzdialených od neutrálnej osi – v bode, označenom 1.

Význam polohy čiary nulového napätia v technickej praxi sme už zdôvodnili v predchádzajúcom príklade (obr. 8.1c, d, e). V praxi je dôležitý najmä prípad, keď čiara nulových napätí sa práve dotýka prierezu (obr. 8.1d) – vtedy je v priereze len tlakové, alebo (v prípade sily namáhajúcej prierez prúta na ťah) len napätie ťahové.

Jadro prierezu

Keď výslednica vonkajších síl (S) pôsobí v jadre prierezu, je celý prierez namáhaný napätím rovnakého zmyslu..



Obr. 8.2d

Súradnice okrajov jadra tzv. *jadrové úsečky* j_y , j_z určíme tak, že nájdeme súradnice pôsobísk sily, ktorým odpovedá čiara nulového napätia dotýkajúca sa (nikde nepretínajúca ! obvod prierezu; obr. 8.2d).

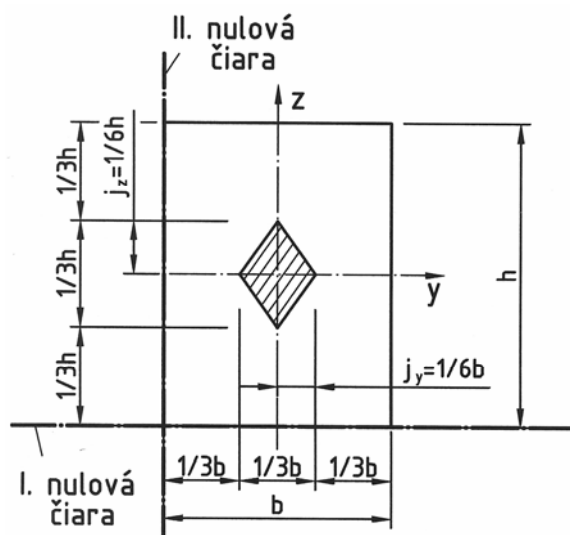
To isté možno formulovať aj inak:

Čiaram nulových napätí, ktorými ako dotýčnicami obaľujeme obvod prierezu, odpovedajú body ohraničujúce jadro prierezu.

Súradnice hraničných bodov jadra prierezu sa vypočítajú z rovníc

$$j_z = -\frac{I_z^2}{r} \quad j_y = -\frac{I_y^2}{s} \quad (8.2e)$$

Veľkosť a tvar jadra obdĺžnikového tvaru (základu, piliera, oporného múra v úrovni základovej škáry a pod.) je na obr. 8.3.



Obr. 8.3

$$j_z = -\frac{\left(\sqrt{\frac{I_z}{F}}\right)^2}{\frac{h}{2}} = -\frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = -\frac{1}{6}h$$

$$j_y = -\frac{\left(\sqrt{\frac{I_y}{F}}\right)^2}{\frac{h}{2}} = -\frac{1}{6}b$$

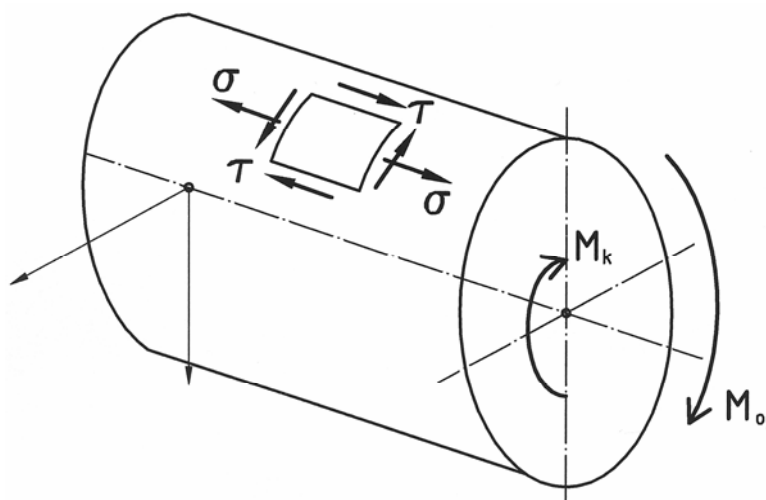
Jadrom kruhového prierezu je kruh o polomere $r_j = \frac{1}{8}d$.

Veľkosti jadrových úsečiek a tvary jadier pre jednoduché i zložené prierezy, ktoré sa častejšie vyskytujú v praxi, sú na urýchlenie kontroly takto namáhaných prútov, uvedené v bežne dostupných technických príručkách.

8.2 Kombinované namáhanie na ohyb a krútenie

Tento prípad zloženej pevnosti sa v technickej praxi vyskytuje najčastejšie pri kontrole súčastí strojných systémov, ako napr.: hriadeľoch remeníč, turbín, čerpadiel, v zalomených hriadeľoch, náprav vozidiel a pod.

Uvažujme priamy prút namáhaný krútiacim momentom M_K a súčasne ohybovým momentom M_O (obr. 8.4).



Obr. 8.4

Na element vyňatý z povrchu pôsobí napätie σ a τ . Tieto napätia nemožno algebraicky sčítať, ale na posúdenie ich spoločného účinku treba použiť porovnávacie (redukované) napätie.

Podľa hypotézy napr. HMH by podmienka kontroly na základný medzný stav únosnosti znela:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{dov}$$

Postup výpočtu alebo kontroly na zložené namáhanie si ukážme na najčastejšom tvare prierezu hriadeľov – na kruhovom priereze.

Najväčšie normálové napätie σ je v najvzdialenejšom vlákne a maximálne šmykové napätie τ je na povrchu.

Maximálne normálové napätie len od ohybového momentu (σ_0) a šmykové napätie len od krútiaceho momentu sú dané vzťahmi

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0} \doteq \frac{M_0}{0,1d^3} ; \quad \tau = \frac{M_K}{W_t} \doteq \frac{M_K}{0,2d^3}$$

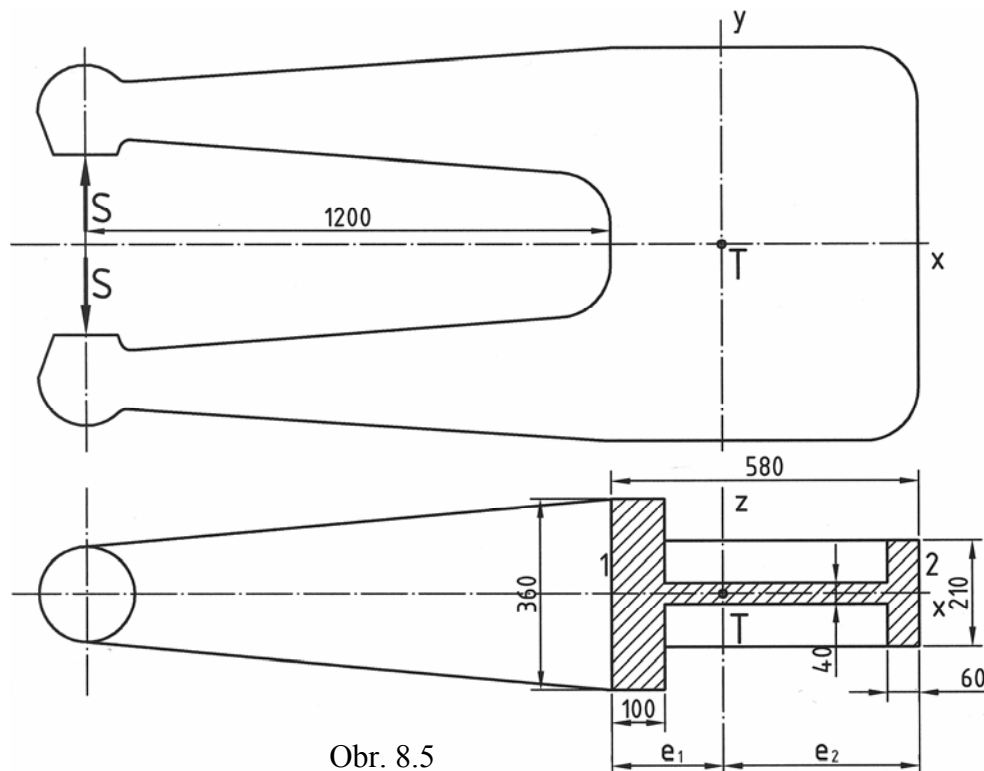
Porovnávacie (redukované) napätie sa vypočíta z rovnice

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\frac{M_0^2}{(0,1d^3)^2} + 3 \frac{M_K^2}{(0,2d^3)^2}} = \frac{1}{0,1d^3} \sqrt{M_0^2 + \frac{3}{4} M_K^2} = \frac{1}{0,1d^3} M_p \quad (8.3)$$

kde M_p ... je tzv. porovnávací (redukovaný) moment.

8.3 Príklady

8.3.1 Vypočítajte výsledné napätie v priereze hydraulickej nitovačky (obr. 8.5), ak poznáte:
 $S = 65 \text{ kN}$.



Obr. 8.5

Riešenie:

Určíme polohu ťažiska prierezu a moment zotrvačnosti na os z (viď príklad 5.6.1):

$$e_1 = 213 \text{ mm}; e_2 = 367 \text{ mm}; I_z = 28,2625 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

Vypočítame napätie od ohybového momentu v prierezoch 1 a 2:

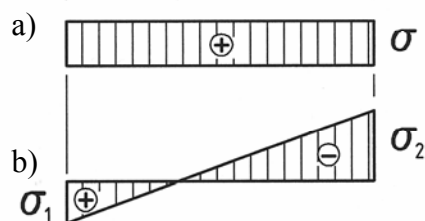
$$\sigma_1' = \frac{M_O}{I_z} \cdot e_1 = \frac{65 \cdot 10^3 (1200 + 213)}{28,2625 \cdot 10^8} \cdot 213 = 6,92 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2' = \frac{M_O}{I_z} \cdot e_2 = -\frac{65 \cdot 10^3 (1200 + 213)}{28,2625 \cdot 10^8} \cdot 367 = -11,926 \text{ MPa},$$

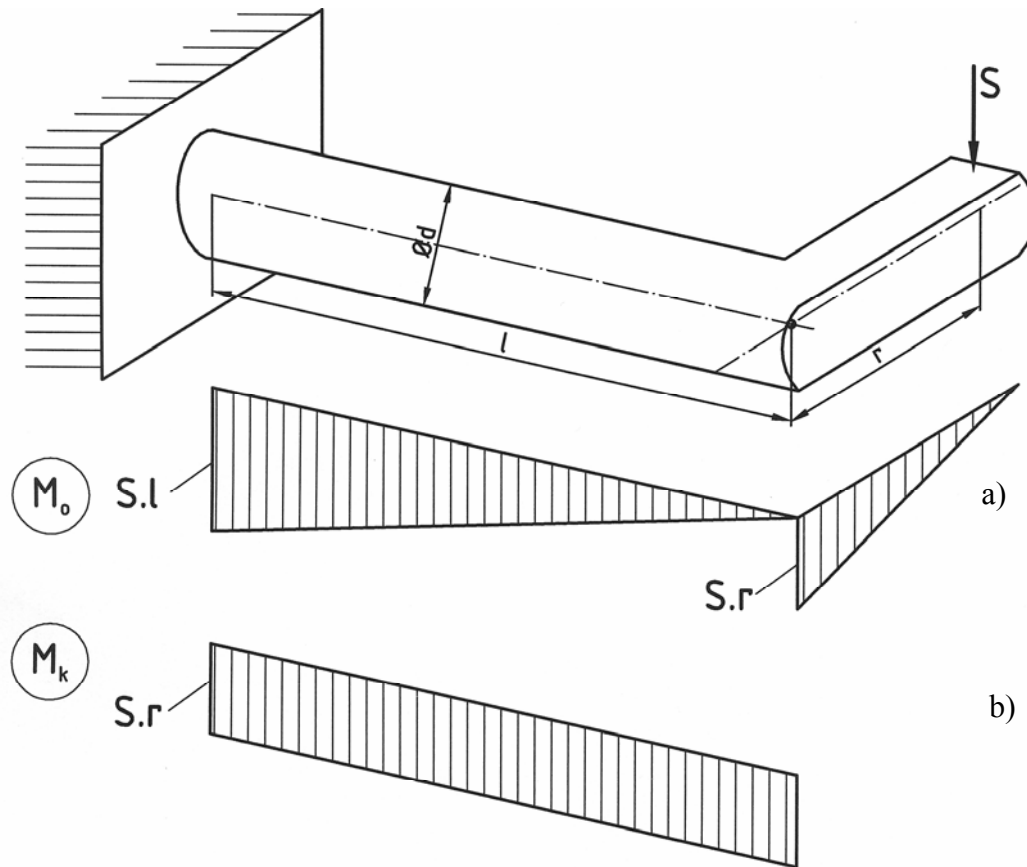
$$\text{určíme napätie od ťahovej sily } S: \sigma = \frac{S}{F} = \frac{65 \cdot 10^3}{6,54 \cdot 10^4} = 1 \text{ MPa (obr. 8.5a),}$$

a nakoniec vypočítame výsledné napätia v prierezoch 1 a 2 (8.1a,b):

$$\sigma_1 = \sigma + \sigma_1' = 7,92 \text{ MPa}; \sigma_2 = \sigma + \sigma_2' = -10,926 \text{ MPa (obr. 8.5b).}$$



8.3.2 Kľuka je zaťažená silou S . Vykonajte kontrolu pevnosti v okrúhlej časti kľuky (obr. 8.6). Dané je: $S = 3 \text{ kN}$; $d = 50 \text{ mm}$; $r = 140 \text{ mm}$; $l = 250 \text{ mm}$; $\sigma_{\text{dov}} = 100 \text{ MPa}$.



Obr. 8.6

Riešenie:

Určíme maximálny ohybový a krútiaci moment pre časť dĺžky l (obr. 8.6a,b):

$$M_o = S.l = 3.0,25 = 0,75 \text{ kNm}; \quad M_k = S.r = 3.0,14 = 0,42 \text{ kNm}$$

Maximálne normálové napätie od ohybového momentu je:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{32.M_o}{\pi.d^3} \quad \frac{M_o}{0,1.d^3} = \frac{0,75.10^3.10^3}{0,1.50^3} = 60 \text{ MPa}$$

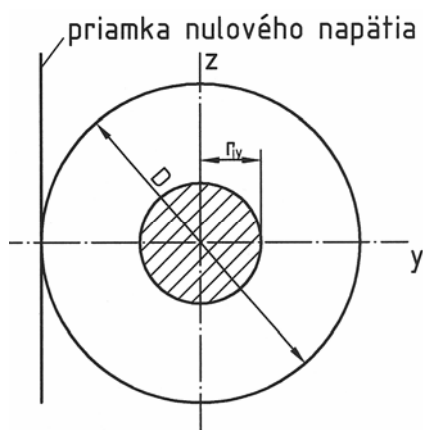
Maximálne šmykové napätie od krútiaceho momentu je:

$$\tau = \frac{M_k}{W_t} = \frac{64.M_k}{\pi.d^3} \quad \frac{M_k}{0,2.d^3} = \frac{0,42.10^6}{0,2.50^3} = 16,8 \text{ MPa}$$

Podľa (8.3) vypočítame redukované napätie a skontrolujeme pevnosť:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_o^2 + 3.\tau^2} = \sqrt{60^2 + 3.16,8^2} \quad 66,7 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{dov}} = 100 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

8.3.3 Určite polomer r_y jadra kruhového prierezu (obr. 8.7).

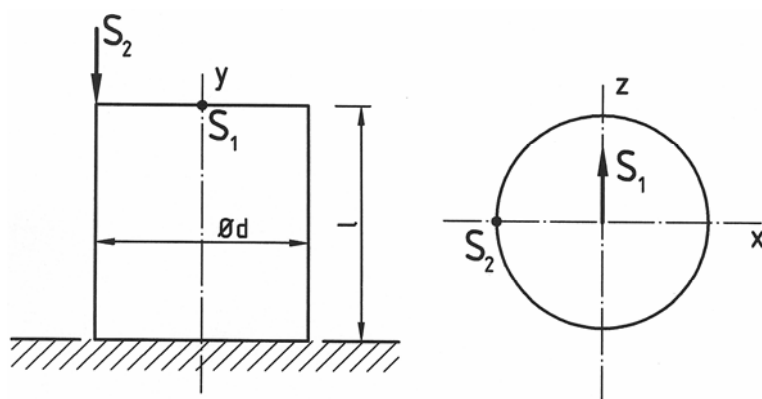


Obr. 8.7

Výsledok:

$$r_y = \frac{D}{8}$$

8.3.4 Stĺpik kruhového prierezu je zaťažený silami S_1 a S_2 (obr. 8.8). Určite maximálnu veľkosť síl S_1 a S_2 , ak $S_2 = 3 \cdot S_1$. Dané je: $l = 250\text{mm}$; $d = 40\text{mm}$; $\sigma_{\text{dov}} = 150\text{ MPa}$.



Obr. 8.8

Výsledok:

$$S_1 = 3,464\text{ kN} ,$$

$$S_2 = 10,392\text{ kN}$$

9. STABILITA A NAMÁHANIE NA VZPERNÝ TLAK

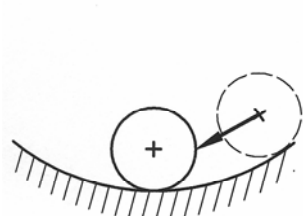
Doteraz sme sa zaoberali prípadmi namáhania telies v stabilnom stave. Všetky výsledky, ku ktorým sme dosiaľ dospeli, platia teda len vtedy, keď vplyv malých deformácií je možno zanedbať.

Keď deformácie nemožno zanedbať, alebo nie sú už priamoúmerné veľkosti zaťaženia hovoríme o *strate stability telesa*.

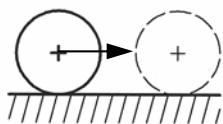
Vo všeobecnosti možno stabilitu telies a spôsoby jej riešenia rozdeliť na:

- stratu stability polohy telies
- stratu stability tvaru telies.

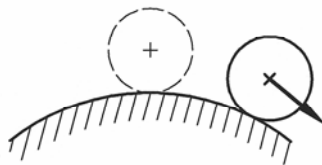
Problém straty stability je vo svojej podstate vzťahom medzi vonkajšími a vnútornými silami. Tento vzťah - v jeho *troch základných stavoch rovnováhy* - sa zvykne výstižne ilustrovať na polohe tuhého telesa (- guľičky, obr. 9.1) a dokonale votknutého priameho prúta, zaťaženého osovou silou S (obr. 9.2).



a)

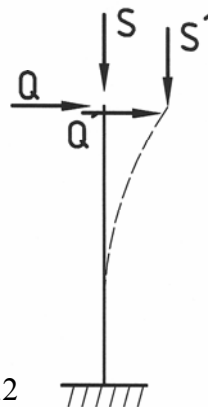


b)



c)

Obr. 9.1



obr. 9.2

- Pri postupnom zvyšovaní sily S zostáva prút priamy až do určitej veľkosti tejto sily. Ak vychýlime prút z tejto polohy, napr. priečnou silou Q (obr. 9.2) vráti sa po jej odstránení v dôsledku pôsobenia vnútorných síl (!) späť do pôvodnej priamej polohy, analogicky ako guľička na konkávnej podložke (na obr. 9.1a) – hovoríme, že *stav rovnováhy je stabilný*.

- Pri dosiahnutí určitej veľkosti osovej sily S' sa prút nútene vychýlený z priamej polohy už nevracia po odstránení priečnej sily Q' späť. Zostáva prehnutý a má zrejme, okrem priamej polohy ešte ďalšie rovnovážne polohy s prehnutou osou. Správa sa tak, ako guľička na

dokonale rovnej vodorovnej a hladkej podložke (obr. 9.1b) – tento *stav rovnováhy* sa nazýva *indiferentný*. Osová sila S' , ktorá zodpovedá tomuto indiferentnému (rovnovážnemu) stavu rovnováhy sa nazýva **kritickou silou** - S_{KRIT} .

I pri veľmi malom prekročení tejto kritickej sily, rastie prieťah prúta, až sa pri dosiahnutí hodnoty medznej sily zlomí. Z praktických skúšok je známe, že táto medzná sila sa líši od kritickej len veľmi málo, a preto kritickú silu považujeme zvyčajne aj ako medznú silu prúta; prút sa v tomto prípade chová podobne, ako guľička na konvexnej podložke (obr. 9.1c) – *je v stave labilnej rovnováhy*.

So stratou stability polohy sa stretávame pri navrhovaní a kontrole vysokých stavieb, pilierov, oporných múrov, komínov, stožiarov, svahov, stien stavebných jám, výkopov, vozidiel s excentricky uloženými nákladmi, žeriavov pri manipulácii so zavesenými bremenami a pod.

Strata stability tvaru sa zvyčajne vyskytuje u elementov s tenkostenných konštrukcií, napr. prútov priehradových konštrukcií, stĺpov, tenkostenných stien a pod.

Stabilita patrí do prvého, základného medzného stavu únosnosti, a preto **musí byť súčasťou každého technického výpočtu, alebo kontroly konštrukcie !**

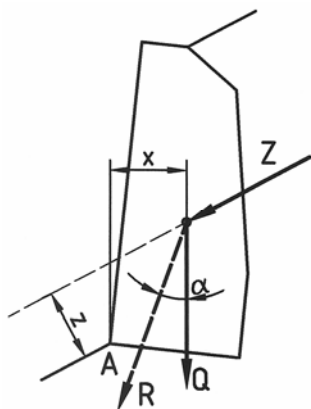
9.1 Výpočet a kontrola stability polohy telies

Výpočet alebo kontrola stability telies (súčiastok, či konštrukcií ako celku) predstavuje, so zreteľom na rozmanitosť inžinierskej praxe, široký komplex úloh, metód a spôsobov riešenia. Spoločným rysom týchto často veľmi špecifických úloh, je analýza a porovnávanie silových účinkov, ktoré sa snažia polohu telesa zachovať a účinkov, ktoré sa snažia stav rovnováhy telesa zmeniť (porušiť).

Teleso je z hľadiska polohy stabilné, keď sa výpočtom alebo kontrolou preukáže, že stabilizujúce silové účinky sú väčšie, ako účinky síl destabilizujúcich.

Pomer týchto síl – **mieru, či stupeň stability** – určujú príslušné technické normy (STN).

Výpočet miery bezpečnosti si ukážeme na príklade monolitickéj opornej steny (múra) (obr. 9.3).



Obr. 9.3

$$\mu = \frac{Q \cdot x}{Z \cdot z} \geq \mu_{dov.} \quad (9.3)$$

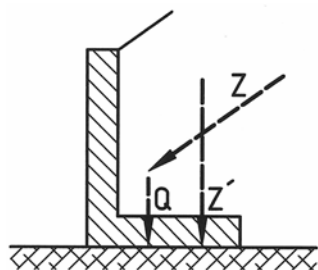
kde Z ... zemný tlak,

Q ... tiaž steny,

$\mu, (\mu_{dov})$...miera bezpečnosti (STN
predpísaná min. hodnota
bezpečnosti) proti
preklopeniu

Z rovnice vidieť tiež, ako možno priaznivo ovplyvniť stabilitu steny, napr. naklonením steny – keď $\alpha_1 > \alpha$ ($\rightarrow x_1 > x$) atď.

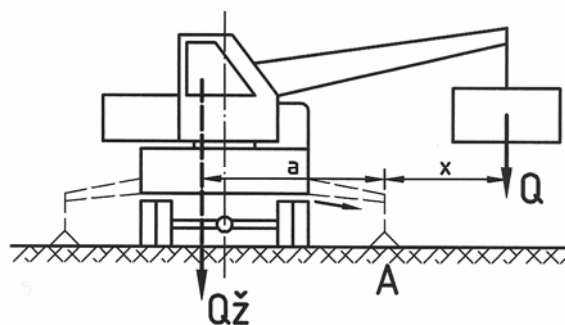
Príklad, ako možno iným spôsobom priaznivo ovplyvniť stabilitu (zárubnej) prenosnej (prefabrikovanej) steny, je na obr. 9.4a.



Obr. 9.4a

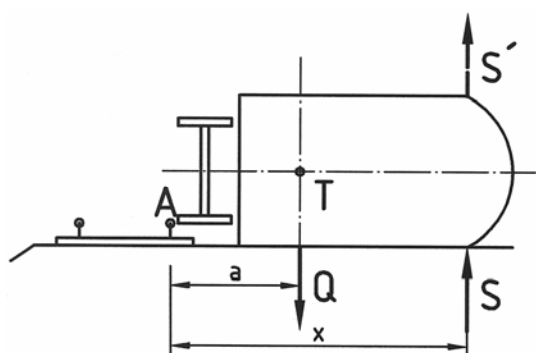
kde z' ... je tzv. pasívny zemný tlak
zvyšujúci stabilitu steny

Spôsob, ako napr. „dočasne“ zabezpečiť potrebnú stabilitu mobilného žeriavu po dobu manipulácie so zaveseným bremenom, vysunutím teleskopických ramien - je na obr. 9.4b



Obr. 9.4b

„Opačnou“ úlohou môže byť napr. nakol'ajenie železničného vozňa po dopravnej nehode (obr. 9.4c),



Obr. 9.4c

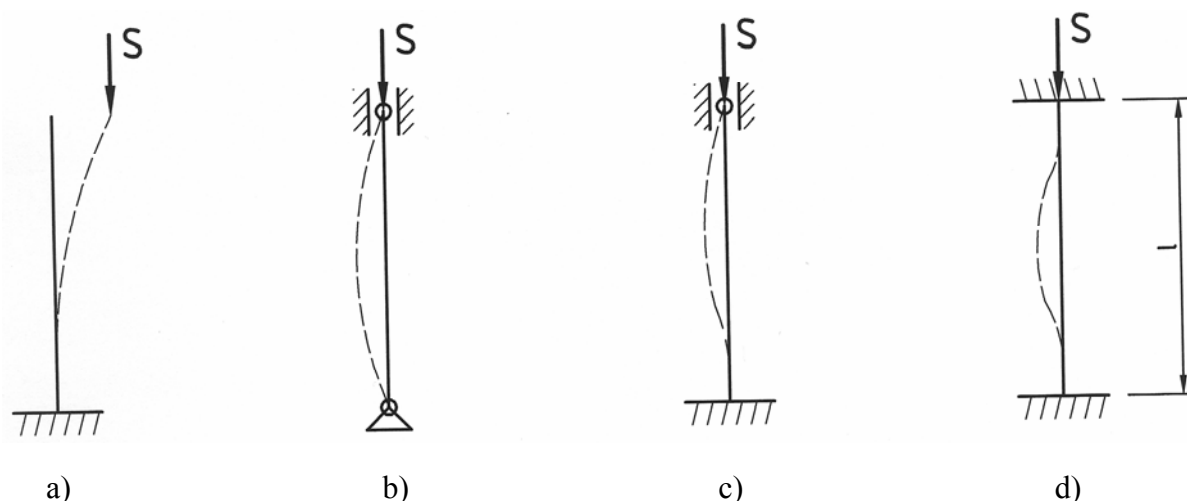
kde Q je tiaž vozňa (podľa možností po vyložení prepravovaného tovaru), S potrebná tlaková sila na zdvihnutie vozňa zdvihákmí, alebo ťah (S'), ktorý treba vyvolať pri zdvíhaní (napr. železničným nehodovým) žeriavom).

9.2 Výpočet a kontrola priamych prútov na vzperný tlak v pružnej oblasti

Namáhanie priamych prútov na vzperný tlak je jednou so základných úloh stability. Dostatočne štíhle tyče zaťažené osovou tlakovou silou nazývame vzpery. Zo skúseností vieme, že vzpera sa pri určitej kritickej sile S_{KRIT} prehne, vybočí – hovoríme, že stratí stabilitu tvaru.

Veľkosť kritickej sily závisí na rozmeroch a tvare vzpery, na uložení (väzbách) jej koncov a na materiále vzpery.

Podľa spôsobu uloženia koncov vzpery rozlišujeme štyri základné prípady.



Obr. 9.5

Prvý prípad vzperu - vzpera na jednom konci votknutá, na druhom voľná

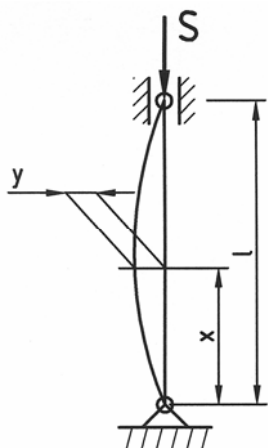
Druhý prípad vzperu - vzpera na oboch koncoch uložená v kĺboch

Tretí prípad vzperu - vzpera na jednom konci votknutá, na druhom uložená v kĺbe, s možnosťou posunu v osi.

Štvrtý prípad vzperu - vzpera votknutá na oboch koncoch, s možnosťou posunu oboch koncov.

Analytické riešenie vzperu predpokladá štíhly **ideálny prút** s týmito vlastnosťami: dokonale priama os, pôsobisko sily v osi prúta, kĺby bez trecích odporov, homogénny a izotropný materiál a platnosť Hookovho zákona.

Na príklade prúta namáhaného silou podľa druhého prípadu vzperu (obr. 9.6) určíme hodnotu kritickej sily S_{KRIT} , ktorá sa podľa autora metódy nazýva tiež **Eulerovou silou** S_E .



Obr. 9.6

Ohybový moment v ľubovoľnom priereze prehnutého prúta je určený vzťahom

$$M_0 = S \cdot y$$

Priehybová čiara je určená diferenciálnou rovnicou (7.18) v tvare

$$y'' = \frac{-S \cdot y}{E \cdot I} ,$$

v ktorej za I je treba dosadiť kvadratický moment plochy priečneho rezu prúta vzhľadom na tú os, ku ktorej má menšiu hodnotu $I = \min(I_y; I_z)$.

Keď v rovnici označíme pomer

$$\frac{S}{E \cdot I} = \alpha^2$$

Potom rovnicu môžeme upraviť na tvar

$$y'' + \alpha^2 \cdot y = 0$$

Táto rovnica má riešenie

$$y = A \cdot \sin \alpha \cdot x + B \cdot \cos \alpha \cdot x$$

Kde A , B sú integračné konštanty. Určíme ich z okrajových podmienok deformácie vzpery, ktoré podľa obr. 9.6 sú:

$$\text{pre } x = 0 \quad \text{je } y = 0$$

$$\text{pre } x = l \quad \text{je } y = 0.$$

Z prvej podmienky $y = A \cdot \sin \alpha \cdot 0 + B \cdot \cos \alpha \cdot 0$ je $B = 0$ a z druhej dostaneme $A \cdot \sin \alpha \cdot l = 0$.

V tejto rovnici musí byť buď $A = 0$ alebo $\sin \alpha \cdot l = 0$. Konštanta A môže nadobudnúť hodnotu $A = 0$ len pri podkritickom zaťažení, preto na určenie kritickej Eulerovej sily musí byť výraz $\sin \alpha \cdot l = 0$.

Koreň tejto goniometrickej funkcie je

$$\alpha \cdot l = k \cdot \pi \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Z matematického hľadiska je teda stabilita problém iba *vlastných čísel*. Prvý koreň $k = 0$ zodpovedá nezaťaženému prútu a nemá preto praktický význam. Keď je $k = 1$ získame po

dosadení do diferenciálnej rovnice priehybovej čiary 7.18 výraz pre Eulerovu silu - v 2. prípade vzperu (S_E^{II}).

$$(\alpha \cdot l)^2 = \pi^2 \rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$\frac{S_E}{E \cdot I} = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \rightarrow S_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad (9.4)$$

Dá sa dokázať, že rovnicu 9.4 možno na výpočet kritickej sily použiť vo všetkých štyroch prípadoch vzperu v tvare:

$$S_{KRIT} = S_E = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \quad (9.5)$$

kde n ... má postupne pre jednotlivé prípady hodnoty $\frac{1}{4}$; 1; 2; 4 .

Rovnica 9.5 sa v technickej praxi skôr používa v tvare:

$$S_{KRIT} = S_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l_{vzp}^2} \quad (9.6)$$

kde l_{vzp} je tkz. **vzperná (redukovaná) dĺžka prúta**, ktorá má postupne pre jednotlivé prípady vzperu (obr. 9.5) hodnotu

$$l_{vzp} = 2l; l; 0,7l; 0,5 l \quad (9.7)$$

Pozn.: Pomer (9.7) medzi vzpernou (l_{vzp}) a skutočnou dĺžkou (l) prúta sa získa

z porovnania rovníc 9.5 a 9.6; napr. pre 3. prípad vzperu je $\frac{n}{l^2} = \frac{1}{l_{vzp}^2}$, po

dosadení za n je $\frac{2}{l^2} = \frac{1}{l_{vzp}^2}$, odtiaľ $l_{vzp}^2 = 0,5 l^2$, a teda $l_{vzp} \doteq 0,7 l$.

Kritická vzperná sila vyvolá v prúte (podľa rovnice 2.1a) **kritické napätie**

$$\sigma_{KRIT} = \sigma_E = \frac{S_{KRIT}}{F} \quad (9.8a)$$

kde F ... je plocha prierezu prúta

a použitím 9.6

$$\sigma_{KRIT} = \sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{F \cdot l_{vzp}^2} \quad (9.8b)$$

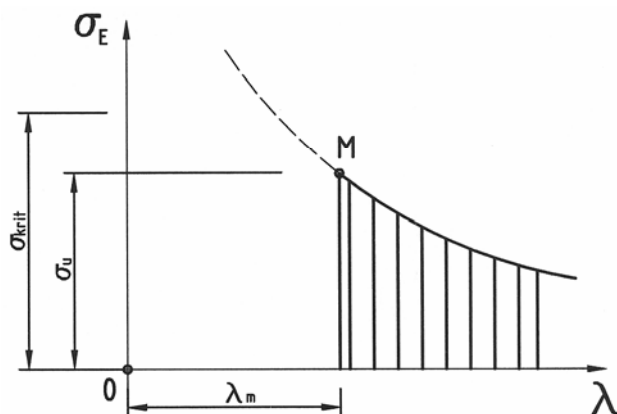
Po dosadení (z rovnice 5.6) za moment zotrvačnosti ($I_{\min} = F \cdot i_{\min}^2$) do rovnice 9.8 a jej úprave dostaneme

$$\sigma_{KRIT} = \sigma_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot F \cdot i_{\min}^2}{F \cdot l_{vzp}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot}{\left(\frac{l_{vzp}}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (9.9)$$

kde výraz $\lambda = \frac{l_{vzp}}{i_{\min}}$ je tzv. **štíhlostný pomer** (možno si všimnúť, že jeho hodnota nezávisí

na druhu materiálu, ale iba na rozmeroch – na tvare prúta).

Štíhlostný pomer možno vyjadriť graficky (obr. 9.7) polytrópou, ktorej asymptoty sú osi σ_E a λ .



Obr. 9.7

Bod M predstavuje medznú hodnotu napätia. Štíhlostný pomer odpovedajúci tomuto bodu sa nazýva **medzný štíhlostný pomer** (medzná štíhlost') λ_m a jeho hodnotu možno určiť zo vzťahu 9.9

$$\sigma_{E,m} = \sigma_u = \frac{n \cdot \pi^2 E}{\lambda_m^2}$$

odkiaľ

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{n \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \pi \sqrt{\frac{n \cdot E}{\sigma_u}} \quad (9.10)$$

Na rozdiel od štíhlostného pomeru medzný štíhlostný pomer závisí na druhu materiálu a podmienkach uloženia prúta, t. j. na konkrétnom prípade vzperu.

Podmienku obmedzujúcu platnosť Eulerovho vzorca, resp. veľkosť kritickej sily S_E možno vyjadriť vzťahom

$$\lambda \geq \lambda_m \quad (9.11)$$

Z hľadiska stability prúta je nutné, aby sila prenášaná vzperou bola menšia v porovnaní s kritickou silou. Dovoľená vzperná sila je

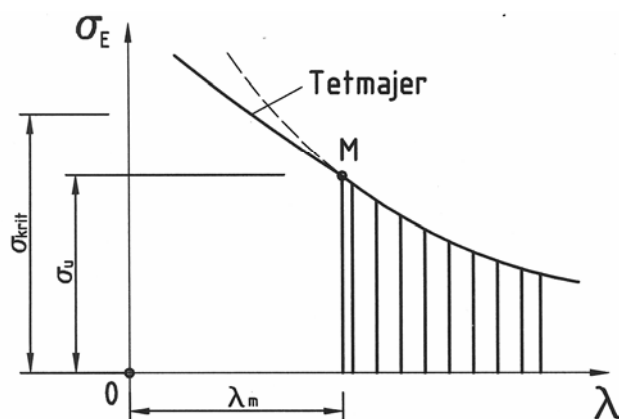
$$S_{dov} = \frac{S_{KRIT}}{k} \quad (9.12)$$

kde k je vhodne zvolený, alebo v technických normách záväzne určený súčiniteľ stability, vždy väčší ako 1.

9.3 Výpočet kritickej sily v plastickej oblasti

V oblastiach, kde kritické napätie σ_{KRIT} je väčšie, ako medza úmernosti materiálu σ_u neexistuje doteraz všeobecne platné teoretické riešenie.

Dimenzovanie prútov sa v týchto prípadoch uskutočňuje podľa rôznych empirických vzťahov. U nás najčastejšie používanou metódou je lineárna redukcia modulu pružnosti podľa Tetmajera.



$$\sigma_T = a - \lambda \cdot b \quad (9.13a)$$

kde a , b sú konštanty určené pre rôzne konštrukčné materiály skúškami

Keď nie sú tieto konštanty známe,

Obr. 9.8

možno kritické napätie v tzv. Tetmajerovej (pružno-plastickej) oblasti vyjadriť rovnicou

$$\sigma_T = \sigma_M - \frac{\sigma_M - \sigma_u}{\lambda_m} \cdot \lambda \quad (9.13b)$$

kde za σ_M sa pre tvárne materiály dosadzuje $\sigma_M = \sigma_K$, pre krehké materiály $\sigma_M = \sigma_p$.

So zreteľom na trvalé deformácie, ktoré vzniknú pri tomto napätí, môžu byť prúty v technickej praxi takto namáhané len vo výnimočných prípadoch.

9.4 Približné metódy

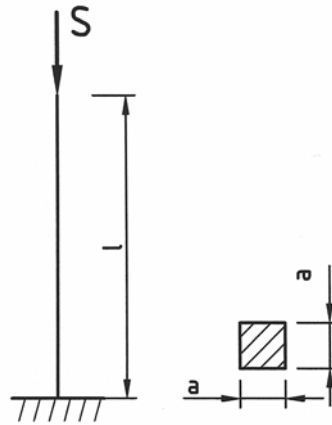
Vyšetrovaním kritickej sily pomocou diferenciálnej rovnice priehybovej čiary možno úspešne riešiť iba pomerne jednoduché prípady stability. Vzpery so zakrivenou osou, premenným prierezom, či iným spôsobom zaťaženia alebo upevnenia (napr. v pružných väzbách) vyžadujú oveľa komplikovanejší výpočet.

Takéto úlohy sa riešia pomocou približných metód. Spoločným rysom týchto metód (založených na využití energetického princípu alebo princípu postupných aproximácií) je *odhad tvaru priehybovej čiary*.

So zreteľom na špecifiku týchto úloh a metód riešenia nebudeme sa nimi podrobnejšie zaoberať.

9.5 Príklady

9.5.1 Oceľový prút štvorcového prierezu je zaťažený osovou silou S (obr. 9.9). Určite veľkosť strany prierezu a , aj je dané: $l = 3,0\text{m}$; $S = 30\text{ kN}$; $\sigma_u = 200\text{ MPa}$; $k = 4$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$.



Obr. 9.9

Riešenie:

Jedná sa o prvý prípad vzperu (obr. 9.5) a (9.7), čo znamená, že:

$$l_{vzp} = 2l$$

Podľa (9.6) určíme kritickú silu:

$$S_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_{vzp}^2} = S \cdot k, \text{ pričom vieme, že } I_{min} = \frac{a^4}{12} \text{ a z toho vyjadríme stranu prierezu } a:$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12 \cdot l_{vzp}^2 \cdot k \cdot S}{\pi^2 \cdot E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot 4 \cdot 3000^2 \cdot 4 \cdot 30 \cdot 10^3}{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \quad 70,72\text{ mm} - \text{volíme } a = 75\text{ mm}$$

Vypočítame min. moment zotrvačnosti a plochu prierezu prúta:

$$I_{min} = \frac{a^4}{12} = 2,6367 \cdot 10^6\text{ mm}^4; F = a^2 = 5625\text{ mm}^2$$

Vieme, že podľa (5.6) je:

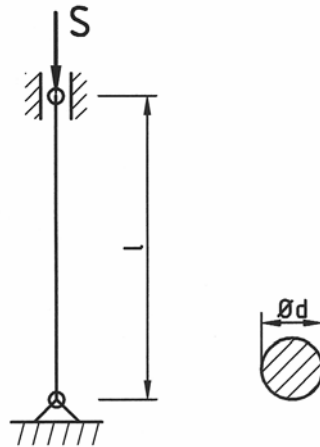
$$I_{min} = F \cdot i_{min}^2 \Rightarrow i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{2,6367 \cdot 10^6}{5625}} = 21,65\text{ mm}$$

a pomocou (9.9) vyjadríme štíhlostný pomer:

$$\lambda = \frac{l_{vzp}}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 3000}{21,65} = 277,14 \text{ a z rovnice (9.10; 9.11) vieme, že medzná štíhlosť je:}$$

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{200}} \cong 102 \leq \lambda = 277,14 - \text{vyhovuje!}$$

9.5.2 Obojstranne kľbovo uložený prút kruhového prierezu je zaťažený tlakovou osovou silou S (obr. 9.10). Navrhnite potrebný priemer prúta d , ak poznáte: $l = 1,0\text{m}$; $S = 150\text{ kN}$; $k = 4$; $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$; $\sigma_u = 200\text{ MPa}$; $\sigma_M = 240\text{ MPa}$.



Obr. 9.10

Riešenie:

Jedná sa o druhý prípad vzperu (obr. 9.5) a (9.7), čo znamená, že:

$$l_{vzp} = l$$

Podľa (9.6) určíme kritickú silu:

$$S_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_{vzp}^2} = S \cdot k, \text{ pričom vieme, že } I_{min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \text{ a z toho vyjadríme priemer prierezu } d:$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{64 \cdot I_{vzp}^2 \cdot S \cdot k}{\pi^3 \cdot E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 1000^2 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 10^3}{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \quad 49,3\text{ mm} - \text{volíme } d = 50\text{ mm}$$

Vieme, že podľa (5.6) je:

$$I_{min} = F \cdot i_{min}^2 \Rightarrow i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} = 12,5\text{ mm}$$

a pomocou (9.9) vyjadríme štíhlostný pomer:

$$\lambda = \frac{l_{vzp}}{i_{min}} = \frac{1000}{12,5} = 80 \text{ a z rovnice (9.10; 9.11) vieme, že medzná štíhlosť je:}$$

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{n \cdot \pi^2 \cdot E}{\sigma_u}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{200}} \quad 102 \geq \lambda = 80 - \text{nevyhovuje!}$$

Pokračujeme vo výpočte potrebného priemeru **d** podľa Tetmajera (kap. 9.3).

Volíme d = 55mm, potom:

$$\lambda = \frac{l_{vzp}}{i_{\min}} = \frac{1000}{13,75} = 72,7,$$

potom podľa (9.13) vyjadríme kritické napätie:

$$\sigma_T = \sigma_M - \frac{\sigma_M - \sigma_U}{\lambda_m} \cdot \lambda = 240 - \frac{240 - 200}{102} \cdot 72,7 = 211,5 \text{ MPa},$$

a nakoniec vypočítame napätie v prúte:

$$\sigma = \frac{S \cdot k}{F} = \frac{4 \cdot S \cdot k}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 10^3}{\pi \cdot 55^2} = 252,5 \text{ MPa} \geq \sigma_T = 211,5 \text{ MPa} - \text{nevyhovuje!}$$

Volíme d = 60mm, potom:

$$\lambda = \frac{l_{vzp}}{i_{\min}} = \frac{1000}{15} = 66,7,$$

potom podľa (9.13) vyjadríme kritické napätie:

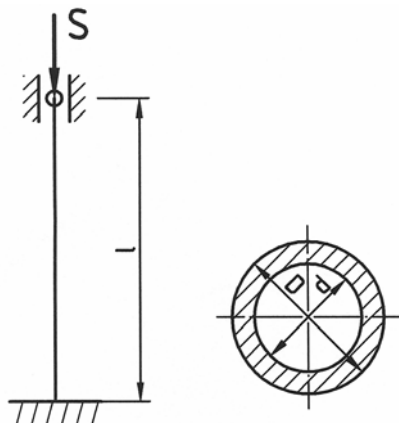
$$\sigma_T = \sigma_M - \frac{\sigma_M - \sigma_U}{\lambda_m} \cdot \lambda = 240 - \frac{240 - 200}{102} \cdot 66,7 = 213,8 \text{ MPa},$$

a nakoniec vypočítame napätie v prúte:

$$\sigma = \frac{S \cdot k}{F} = \frac{4 \cdot S \cdot k}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 150 \cdot 10^3}{\pi \cdot 60^2} = 212,2 \text{ MPa} \leq \sigma_T = 213,8 \text{ MPa} - \text{vyhovuje!}$$

Potrebný priemer prúta je **d = 60mm**.

- 9.5.3** Duralový prút s prierezom v tvare medzikruhu je zaťažený osovo silou S (obr. 9.11). Určite hodnotu kritickej sily a kritického napätia, ak poznáte: $l = 1,2\text{m}$; $E = 7,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$; $\sigma_u = 180 \text{ MPa}$, $D = 40\text{mm}$; $d = 30\text{mm}$.



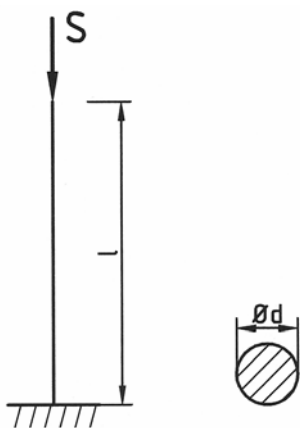
Výsledok:

$$S_{krit} = 85,3 \text{ kN}$$

$$\sigma_{krit} = 155,2 \text{ MPa}$$

Obr. 9.11

- 9.5.4** Prút kruhového prierezu je zaťažený osovou silou S (obr. 9.12). Určite najmenšiu hodnotu priemeru d , pri ktorej ešte možno pre výpočet kritickej sily použiť Eulerov vzťah, ak poznáte: $l = 4\text{m}$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\sigma_u = 180 \text{ MPa}$.



Výsledok:

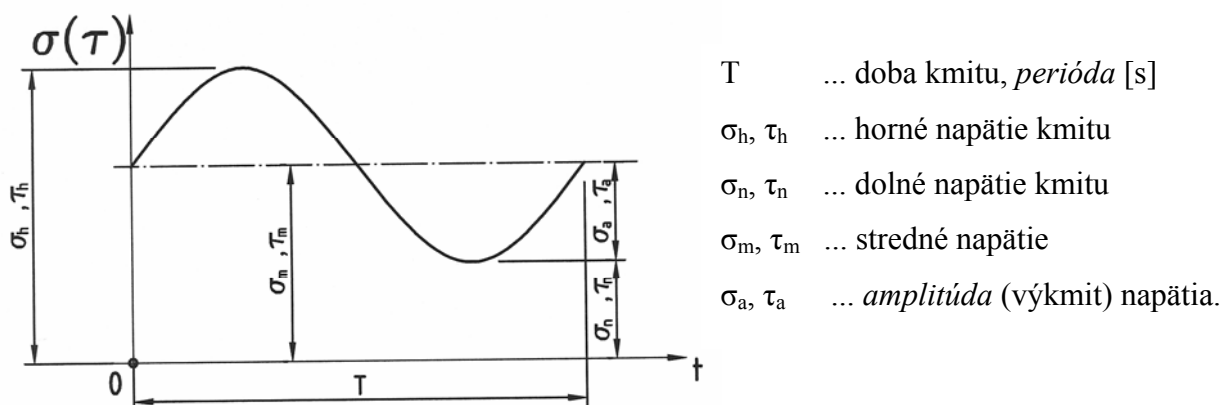
$$d = 298,2 \text{ mm}$$

Obr. 9.12

10. ÚNAVA MATERIÁLU

10.1 Cyklické (kmitavé) napätie a jeho označovanie

Súčiastky konštrukcií sú zvyčajne namáhané silovými účinkami, ktoré sa v závislosti na čase menia. Okrem celkom náhodného (stochastického) priebehu zmeny namáhania sa vyskytujú aj prípady zmeny namáhania pravidelné, ktoré možno popísať periodickou funkciou času t . (obr. 10.1).



Obr. 10.1

Napäťový priebeh v čase T nie je vždy jednoduchou funkciou. Väčšinou ho však nahradzujeme sínusovým priebehom, pretože podľa praktických meraní sú rozhodujúce hodnoty stredného (statického) napätia a amplitúdy (striedavého) napätia, zatiaľ čo skutočný priebeh napätia počas doby kmitu má iba druhoradý význam.

Pre normálne symetrické napätie a amplitúdu napätia vyplývajú priamo z obr. 10.1 vzťahy

$$\sigma_h = \sigma_m + \sigma_a \qquad \tau_h = \tau_m + \tau_a \qquad (10.1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2}$$

Vo všeobecnosti môže byť priebeh napätia cyklu $\sigma_{c(t)}$ vyjadrený tiež ako

$$\sigma_{c(t)} = \sigma_m + \sigma_a f_{(t)}$$

kde $f_{(t)}$ je spojitá funkcia charakterizujúca kmit napätia v intervale $-1 \leq f_{(t)} \leq 1$.

Nesúmernosť (asymetriu) kmitu určujeme *súčiniteľom asymetrie cyklu* R

$$R = \frac{\sigma_n}{\sigma_h} \quad , \quad R = \frac{\tau_n}{\tau_h} \quad (10.2a)$$

Potom cyklus napätia možno vyjadriť tiež ako

$$\sigma_c = \pm \sigma_{aR} \quad , \quad (10.2b)$$

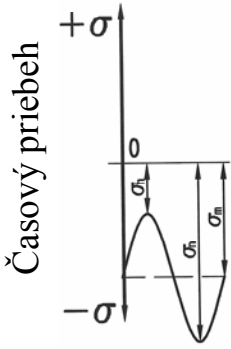
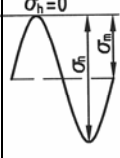
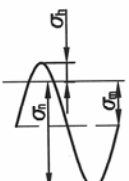
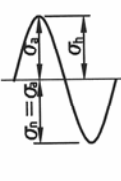
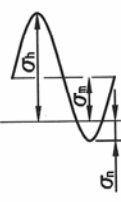
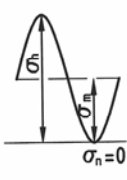
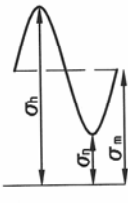
teda cyklické napätie s amplitúdou $\pm \sigma_a$, v ktorom sa napätie periodicky mení od σ_n do σ_h , pričom

$$\sigma_n = 2\sigma_a \frac{R}{1-R} \quad \sigma_h = 2\sigma_a \frac{1}{1-R} \quad (10.3)$$

$$\sigma_m = 2\sigma_a \frac{1+R}{1-R}$$

Podľa toho možno priebeh a označovanie jednotlivých druhov cyklického napätia zoradiť do tabuľky (tab. 10.1).

Tab. 10.1

CYKLICKÉ NAPÄTIE							
Názov	pulzujúce v tlaku	miznúce v tlaku	nesúmerné	súmerné	nesúmerné	miznúce v ťah	pulzujúce v ťahu
Časový priebeh							
Súčiniteľ nesúmernosti cyklu	$1 < R < \infty$	$R = \pm \infty$	$-\infty < R < -1$	$R = -1$	$-1 < R < 0$	$R = 0$	$0 < R < 1$

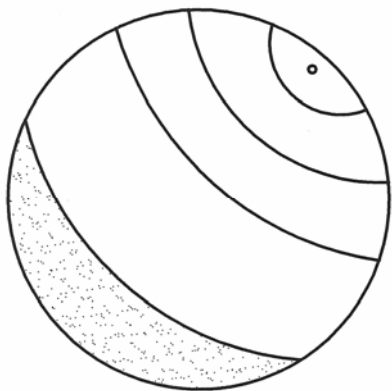
10.2 Únavový lom

Pri dlhodobom cyklickom namáhaní môže dôjsť v takto namáhaných súčiastkach k tzv. **únavovému lomu**. Vlastné zlomenie súčiastky môže pritom nastať aj v situácii, keď kmitavé namáhanie nepôsobí a stále zaťaženie je menšie ako zaťaženie, s ktorým sa pôvodne v návrhu súčiastky uvažovalo.

Únavový lom je výsledkom zložitého procesu postupného hromadenia poškodení materiálu vplyvom cyklického spôsobu zaťaženia.

Proces únavy materiálu možno rozdeliť na dve obdobia:

- Obdobie kumulácie submikroskopického poškodzovania materiálu, ktoré končí vytvorením únavovej trhliny. Tomuto obdobiu zodpovedá relatívne vysoký počet zaťažovacích cyklov (N).
- Obdobie šírenia únavovej trhliny a s ňou súvisiace, neustále zmenšovanie nosného prierezu súčiastky. Pri nezmenenom zaťažení sa v zmenšujúcom priereze zväčšuje napätie, až do okamihu, keď sa zvyšná časť celistvého prierezu **náhle** zlomí.



Obr. 10.2

Pri pozorovaní únavových lomov oceľových súčiastok možno odlíšiť dve oblasti (obr. 10.2).

Prvá oblasť sa utvára dlho, je hladšia, svetlejšia, čo súvisí s rôznou mierou okysličenia materiálu v utvárajúcich sa trhlinách.

Druhá oblasť sa utvorí náhle - statickým dolomením. V porovnaní s prvou je druhá oblasť matnejšia a hrubozrnejšia.

Podľa polohy a veľkosti obidvoch oblastí a vrstevníc, ktoré sú na povrchu badateľné, možno s veľkou pravdepodobnosťou určiť druh a hodnotu namáhania, t. j. príčiny lomu. Všeobecne pritom platí, že pri veľkej oblasti statického lomu bola súčiastka preťažená.

10.3 Medza únavy

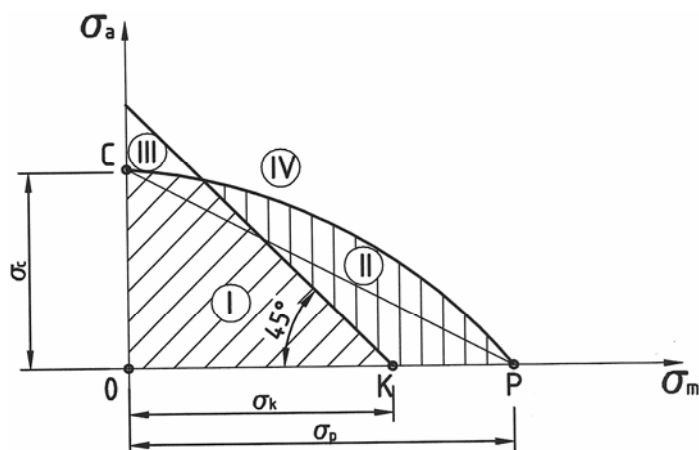
Medzou únavy sa rozumie najväčšia amplitúda napätia pri určitom strednom napätí, ktorú materiál znesie bez porušenia súdržnosti pri nekonečnom počte napätových cyklov.

Možno ju definovať tiež ako najväčšiu (medznú) amplitúdu napätia pri určitom zvolenom súčiniteľovi nesúmernosti cyklu R .

Základná medza únavy materiálu sa určuje tzv. únavovými skúškami na štandardných vzorkách, pri dohodnutom počte napätových cyklov.

Pre technické výpočty sú na základe výsledkov únavových skúšok k dispozícii rôzne diagramy hodnôt medzných cyklov a im odpovedajúcich medzí únavy.

Medza únavy, určená amplitúdou napätia v závislosti na strednom napätí je na obr. 10.3 znázornená krivkou CP.



Obr. 10.3

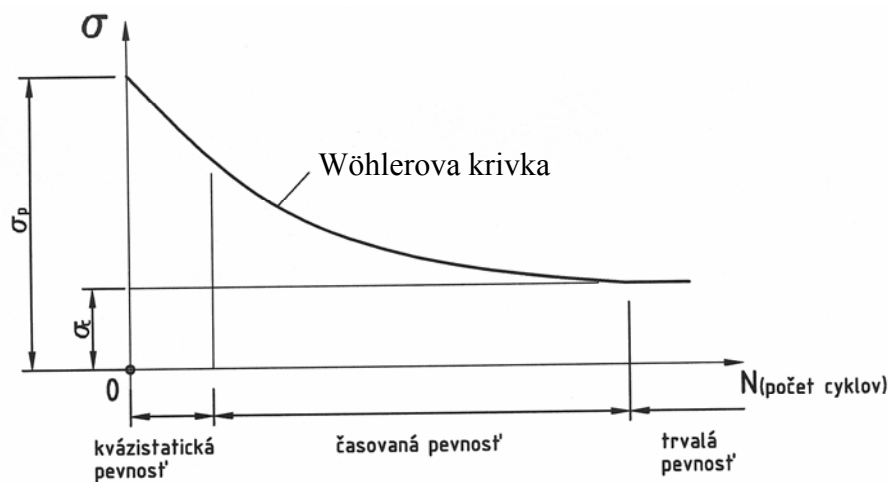
Je to tzv. *Haighov diagram* napätí medzných cyklov, v ktorom bod P určuje statickú pevnosť materiálu a bod C medzu únavy pri symetrických napäťových cykloch. Nahradením kriviek priamkami sa diagram zjednoduší.

Význam štyroch plôch v Haighovom diagrame je nasledujúci:

- v ploche I sú bezpečné cykly napätí, ktoré nespôsobujú ani plastické deformácie a ani lom únavou,
- v ploche II sú bezpečné cykly napätí, ktoré však spôsobujú plastické deformácie,
- v ploche III sú cykly, pri ktorých nastáva rozrušenie únavou bez predchádzajúcej plastickej deformácie,
- v ploche IV sú cykly, pri ktorých nastáva rozrušenie únavou po predchádzajúcej plastickej deformácii.

Z hľadiska únavového lomu je celkom bezpečná teda iba oblasť I.

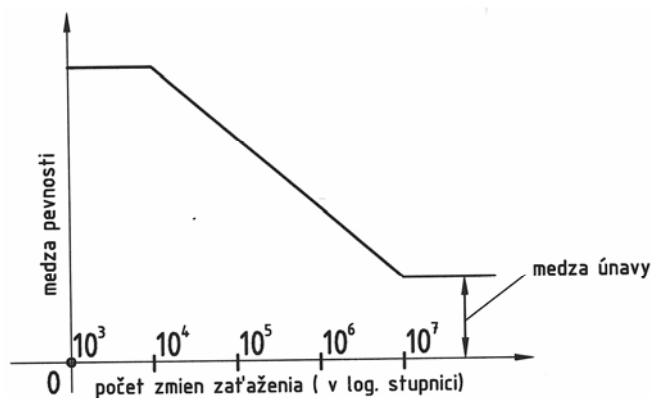
Základná medza únavy sa v praxi najčastejšie určuje skúškami podľa Wöhlerovej metódy. Výsledky získané pri únavových skúškach zobrazujúce závislosť medzi amplitúdovým napätím a počtom cyklov sa zoskupujú v blízkosti určitej čiary, tzv. *Wöhlerovej krivky* (obr. 10.4a).



Obr. 10.4a

Wöhlerova krivka pretína os amplitúd napätia v bode, ktorého poradnica σ_p zodpovedá statickej pevnosti skúšaného materiálu. Pri väčšom počte cyklov sa krivka asymptoticky blíži k priamke, rovnobežnej s osou počtu cyklov. Poradnica tejto priamky σ_c určuje základnú medzu únavy materiálu.

V technickej praxi (podľa STN) sa Wöhlerova krivka používa v tzv. semilogaritmickom tvare.



Obr. 10.4b

Označovanie medzného cyklu

Označovanie charakteristík cyklu na medzi únavy materiálu sa od označovania všeobecného cyklu líši iba tým, že indexy sa píšú veľkými písmenami, napr:

$$\sigma_c = \sigma_M \pm \sigma_A \quad (10.4)$$

alebo len pomocou amplitúdového napätia:

σ_{tAR}	medza únavy v ťahu (tlaku)	} označovania prislúchajúce cyklu so súčiniteľom nesúmernosti cyklu R
σ_{AR}	medza únavy v ohybe	
τ_{AR}	medza únavy v krútení	

Napr. σ_{TA-1} je podľa toho medzou únavy v ťahu pri súmernom strednom cykle, ktorý má $R = -1$

τ_{A0} je medza únavy v krútení pri miznúcom cykle v ťahu ($R=0$).

Vtedy, keď sa vyžaduje, aby súčiastka vydržala bez poruchy len určitú obmedzenú dobu, teda len určitý predpísaný počet cyklov N , potom hovoríme o tzv. **časovanej medzi únavy**, ktorú možno vyjadriť, ako:

- najväčšiu možnú amplitúdu napätia, ktorú materiál vydrží pri danom strednom napätí bez poruchy počas predpísaného počtu cyklov N , resp.
- najväčšiu možnú amplitúdu napätia cyklu o danej súmernosti R , ktorú materiál vydrží bez poruchy počas predpísaného počtu cyklov.

Medzný cyklus napr. v ohybe pre $N = 1,6 \cdot 10^6$ cyklov a dané σ_M a R označíme

$$\sigma_{C,N1,6.10^6} = \sigma_M \pm \sigma_{A,N1,6.10^6}$$

resp.

$$\sigma_{C,N1,6.10^6} = \pm \sigma_{AR,N1,6.10^6}$$

Podľa Wöhlerovej krivky je zrejmé, že podmienka bezpečnosti (s) znie:

$$\boxed{\sigma_{A,N} \dots \geq \sigma_A} \quad \boxed{\sigma_{AR,N} \geq \sigma_{AR}} \quad (10.5)$$

Skutočné veľkosti medze únavy rôznych materiálov v rôznych podmienkach zaťaženia možno zistiť iba experimentálne.

Výsledky mnohých skúšok však dovoľujú, aj keď zatiaľ len s presnosťou asi $\pm 10\%$ stanoviť dôležitú závislosť medzi statickou medzou pevnosti (σ_p), medzou klzu (σ_K) a hodnotami medze únavy. Napríklad pre namáhanie striedavým ohybom ($R = -1$) platí:

$$\sigma_{A-1} \doteq 0,25(\sigma_{kt} + \sigma_{pt}) + 50 \quad [\text{N.mm}^{-2}],$$

Pri namáhaní v ťahu (tlaku)

$$\tau_{tA-1} \doteq 0,8 \cdot \sigma_{A-1} \quad [\text{N.mm}^{-2}],$$

a pri striedavom krútení

$$\tau_{A-1} \doteq 0,6 \sigma_{A-1} \quad [\text{N.mm}^{-2}].$$

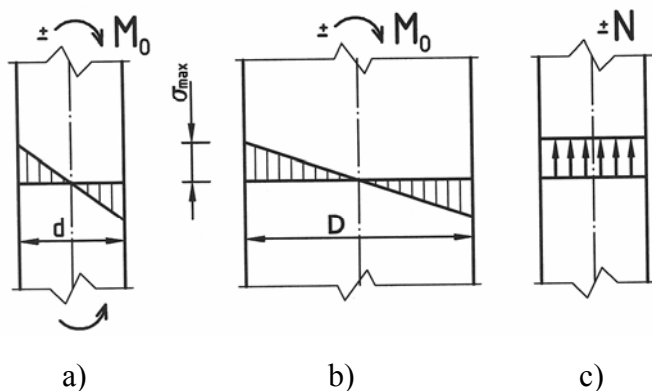
10.4 Faktory ovplyvňujúce medzu únavy

Výpočet na únavu materiálu je v súčasnosti ešte stále založený na fenomenologickom (zidealizovanom a popisnom) riešení. Medzi faktory majúce nesporný vplyv na medzu únavy patria:

- veľkosť a druh namáhania
- geometrický tvar súčiastky
- akosť povrchu súčiastky
- povrchová ochrana súčiastky.

10.4.1 Vplyv veľkosti a druhu namáhania

Skúšky na únavu dokazujú, že geometricky podobné vzorky, z rovnakého materiálu, s rovnakou kvalitou povrchu, ale rôznych veľkostí vykazujú rozdielnu medzu únavy. Tento jav sa zistil pri namáhaní na krútenie, zatiaľ čo pri namáhaní na tlak (ťah) pozorovaný nebol. Z toho vyplýva, že vplyv veľkosti súčiastky je viazaný na tie základné druhy namáhania, pri ktorých je napätie rozložené po priereze podľa priamky s istým gradientom, (t. j. na zmene veličiny, v závislosti na vzdialenosti); (obr. 10.5).



Obr. 10.5

Gradient napätia – pri rovnakom maximálnom napätí v prípade vzoriek ($D > d$)

obr. 10.5a je $\frac{\sigma_{\max}}{\frac{d}{2}}$ väčší,

v porovnaní s gradientom

napätia $\frac{\sigma_{\max}}{\frac{D}{2}}$ vzorky s väčším

priemerom (obr. 10.5b).

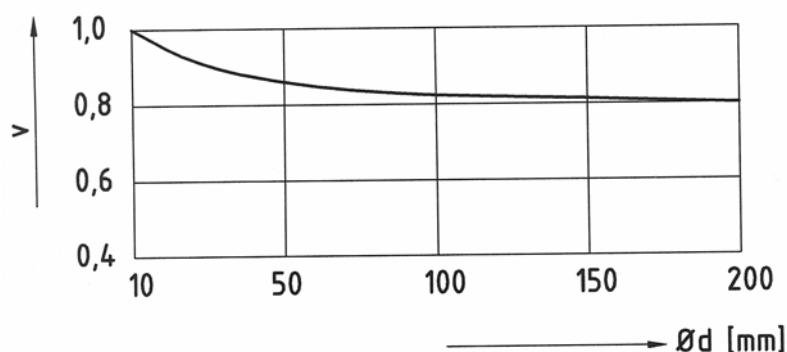
Pri namáhaní na ťah, tlak (obr. 10.5c) je gradient napätia nulový.

Možno konštatovať, že čím väčší je gradient napätia, tým výhodnejšie napäťové podmienky prislúchajú podpovrchovým vrstvám materiálu posudzovanej súčiastky.

Vo výpočte medze únavy sa rôzna veľkosť súčiastky zohľadňuje tzv. **súčiniteľom veľkosti** – v ; ktorý je určený podielom

$$v = \frac{\text{medza únavy hladkej leštenej tyče posudzovaného rozmeru}}{\text{medza únavy štandardnej tyče}}$$

Závislosť v na priemere súčiastky v rozsahu 10 až 200 mm je na základe mnohých experimentálnych výsledkov znázornená na obr. 10.6.



Obr. 10.6

10.4.2 Vplyv geometrického tvaru súčiastky

Medza únavy súčiastok je veľmi ovplyvnená vrubmi.

Vrubom sa rozumie náhla zmena tvaru súčiastky, ktorá má za následok náhlu zmenu silového toku.

Vruby sa delia na:

- konštrukčné – náhle, alebo zaokrúhlené prechody, otvory, drážky - čiže miesta na súčiastke vytvorené z funkčných dôvodov.
- technické – vznikajú z nedokonalosti materiálu a delia sa ďalej na vonkajšie technologické (korózia, chyby pri povrchových úpravách ...) a vnútorné (troska vo zvaroch, lunkre ...).

Určiť správne hodnotu **vrubového účinku** $-\beta$ súčiastok zložitejšieho tvaru je zložitá úloha a dá sa určiť opäť iba únavovými skúškami.

$$\beta = \frac{\text{medza únavy hladkej tyče}}{\text{medza únavy tyče s vrubom}}$$

Vplyv koncentrácie napätia spôsobnej vrubovým účinkom zapríčiňuje vždy zníženie základnej medze únavy súčiastky.

10.4.3 Vplyv akosti povrchu súčiastky

Mechanické vlastnosti povrchových vrstiev sú odlišné od mechanických vlastností vo vnútri materiálov. Veľmi záleží na technológii a kvalite obrábania súčiastok (napr. stopy po noži po sústružení a pod.).

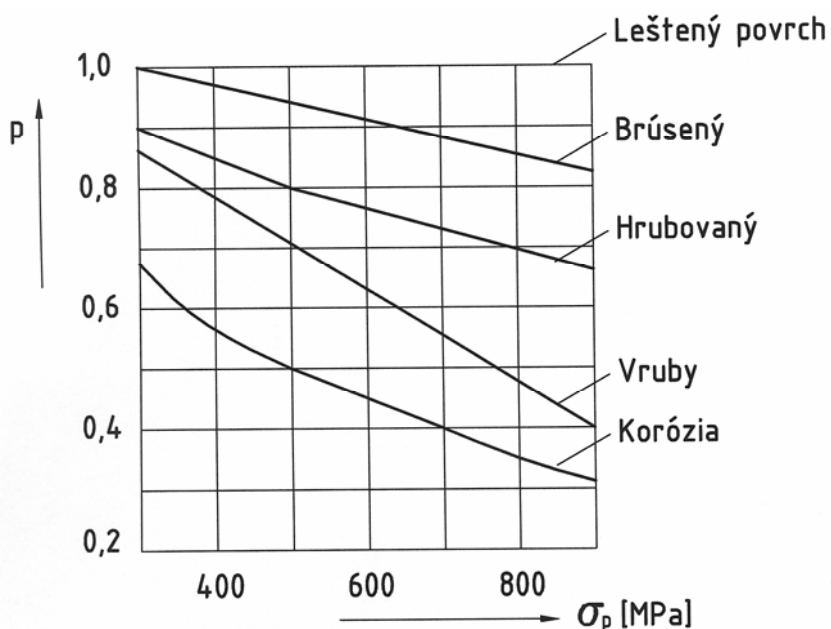
Skúsenosti potvrdzujú, že únavové trhliny sa najčastejšie vytvárajú v povrchových vrstvách.

Vo výpočtoch sa vplyv akosti povrchu na medzu únavy vyjadruje **súčiniteľom povrchu – p**.

$$p = \frac{\text{medza únavy pri danej akosti povrchu}}{\text{medza únavy vzorky s lešteným povrchom}}$$

Pozn.: Skúškami sa zistilo, že súčiniteľ akosti povrchu, podobne ako súčiniteľ veľkosti nezávisí od veľkosti napätia σ_M .

Závislosť súčiniteľa povrchu p na pevnosti materiálu σ_p je pri namáhaní na ohyb znázornená na obr. 10.7.



Pozn.:

V technických výpočtoch sa častejšie využíva súčiniteľ povrchu v tvare $\beta_p = \frac{1}{p}$

Obr. 10.7

Ako vidieť z diagramu, vplyv povrchu súčiastky na medzu únavy je väčší u ocelí vyšších pevností, pričom z uvažovaných vplyvov povrchovej úpravy sú vplyvy vrubov a korózie rozhodujúce.

10.4.4 Vplyv povrchovej úpravy súčiastky

Úpravou povrchu valcovaním, povrchovým kalením, cementovaním, atď. vznikajú vlastné napätia, ktoré pôsobia v nezaťaženej súčiastke už trvale.

Vo výpočtoch sa vplyv povrchových úprav zohľadňuje **súčiniteľom - k**, určeným podielom

$$k = \frac{\text{medza únavy vzorky s povrchovou úpravou}}{\text{medza únavy vzorky bez povrchovej úpravy}}$$

Pozn.: Vplyv faktorov na medzu únavy a výpočet skutočných súčiastok sa komplikuje napr. pri kombináciách typu vrub vo vrube a pod.

10.5 Miera bezpečnosti so zreteľom na cyklické namáhanie

Prekročenie medzného stavu pri cyklickom zaťažení sa prejaví únavovým lomom.

So zreteľom na definíciu medze únavy je **miara bezpečnosti na únavu číslo** $s > 1$, **ktoré udáva koľkokrát možno skutočné zaťaženie zvýšiť, kým sa dosiahne medzný stav.**

Zložitosť výpočtu bezpečnosti na únavu spočíva o. i. v tom, že medzný stav možno dosiahnuť rôznym spôsobom; môže vzrastať len amplitúda napätia, alebo len stredné napätie, môžu však vzrastať aj obidve časti cyklického napätia súčasne.

Vo výpočte miery bezpečnosti na poruchu od únavy treba vždy rozlišovať druh základného (prostého) namáhania, resp. ich konkrétnu kombináciu pri zložitom namáhaní a charakter súčiniteľa asymetrie cyklu **R**. Najnepriaznivejší stav nastane zrejme vtedy, keď všetky druhy pôsobiacich namáhaní pri súčasnom výskyte budú mať rovnakú frekvenciu (nebudú v čase navzájom posunuté) – keď budú v rezonancii.

Konkrétne vzťahy na výpočet miery bezpečnosti (s) v takto veľmi štruktúrovanej problematike možno v technickej praxi získať zo STN, alebo v odbornej literatúre (napr. lit. 6, 8 ...).

11. ZÁKLADY EXPERIMENTÁLNEJ PRUŽNOSTI

11.1 Predmet, ciele a delenie experimentálnej pružnosti

Teoretické riešenie úloh v pružnosti a pevnosti vychádza z určitých predpokladov a zjednodušení. To má za následok, že teoretické riešenie možno použiť na spoľahlivé dimenzovanie súčastok približne v 95% prípadoch.

Presnosť výsledkov je vždy podmienená presnosťou parametrov, ktoré do výpočtu vstupujú. Sú to napr. zaťažujúce sily (ich početnosť, druh, veľkosť, priebeh), okrajové podmienky (uloženie), geometrické tvary (prierezových plôch, telies) atď.

Matematické modely, ktoré sa používajú v teoretickom riešení, sú v abstrakčnej časti takmer dokonalé, ale pre uvedené zjednodušenia a predpoklady môžu byť výsledky v konkrétnych prípadoch nepresné. Preto, a zvlášť v prípadoch, kedy by mohli mať nepresnosti závažnejšie dôsledky, musia byť výpočty overené prakticky. *Výsledky experimentálne overeného matematického modelu a kontrola teoretického výpočtu je súčasťou riešenia dôležitých úloh pružnosti a pevnosti.*

Použitie experimentálneho riešenia je opodstatnené hlavne v tých prípadoch, keď matematické zvládnutie úloh v pružnosti a pevnosti je značne zložité, neisté, a keď sa výpočtom dajú ťažko vystihnúť skutočné pomery.

Ide najmä o nasledovné úlohy:

- určovanie fyzikálno-matematických parametrov materiálu (modul pružnosti, Poissonovo číslo, medze klzu apod.),
- zložité, mnohokrát staticky neurčité sústavy s premennými prierezmi,
- stabilitné problémy, problémy vzpernej pevnosti a pokritickej napätosti zložitejších sústav a pod.,
- kontrola životnosti, sledovanie šírenia napät'ových vĺn a nestacionárnych dejov vyvolaných cyklickými, jednorázovými zaťažzeniami a pod.,

- dynamické vlastnosti konštrukcií, ako napr. vlastné frekvencie, tvary kmitania, charakteristiky, skutočné amplitúdy, rýchlosti, zrýchlenia atď.,
- v tých prípadoch, keď experimentálne riešenia sú rýchlejšie alebo hospodárnejšie, ako výsledky riešenia získané teoretickým výpočtom.

Experimentálna pružnosť nielen overuje teoretické predpoklady, ale tvorí aj základ pre vybudovanie nových a zdokonaľovanie už existujúcich teórií. *Vzájomné dopĺňovanie a prelínanie* obidvoch. relatívne samostatných prístupov, t. j. *teórie a experimentu*, je základnou črtou riešenia úloh pružnosti.

Experimentálna pružnosť sa v závislosti na použitom kritériu delí podľa:

- druhu zaťaženia na statickú a dynamickú,
- experimentovania na skutočnej konštrukcii, alebo na jej mechanickom modeli.

Metódy experimentálnej pružnosti možno rozčleniť na *priame a nepriame*. Pri priamych metódach je hodnota fyzikálnej veličiny meraná na základe jej definície (vzdialenosť, hmotnosť, atď.). Nepriame metódy využívajú vhodné fyzikálne závislosti (napätie, rýchlosť, zrýchlenie atď.)

Podľa druhu zaťaženia majú experimentálne metódy väčšie opodstatnenie pri vyšetrovaní dynamických úloh ako pri vyšetrovaní statických úloh. Napríklad exaktné teoretické riešenie priestorového kmitania sa pri zložitých konštrukciách prakticky ani nedá uskutočniť.

Experimentálna pružnosť uprednostňuje merania na skutočných konštrukciách pred pokusmi na ich modeloch. *Model* musí vystihovať vlastnosti skutočnej konštrukcie do tej miery, aby výsledky merania zodpovedali očakávanej presnosti výsledkov. Pri tvorbe modelov sa vychádza z tzv. *modelovej podobnosti* (analógie), ktorá je v zložitejších prípadoch založená na tzv. *dimenziálnej analýze*.

Pre modelové vyšetrovanie bežných druhov stavebných konštrukcií a strojov však v prevažnej miere stačí (v medziach linearity podľa Hookovho zákona) *uvažovať s približnou mechanickou modelovou podobnosťou* (mierky rozmerov, síl, deformácií, modulov pružnosti atď.).

11.2 Statické experimentálne merania

Pojem napätia (ods. 1.5; $\sigma = S/F$) je fiktívny, dohovorený, a preto a nedá pri prevažnej väčšine metód merať priamo, ale len prostredníctvom pomerného predĺženia (ods. 2.1, 2.3; $\varepsilon = \Delta l/l$, $\sigma = \varepsilon E$). Pokiaľ sa týka presnosti v súvislosti s meraním, majú sa na mysli len tzv. *náhodné chyby*, nie chyby systematické (omyly), pretože len pre ne platí matematická teória chýb a Gaussovo rozdelenie náhodných chýb.

Na meranie pretvorení a napätí sa využívajú prakticky všetky známe fyzikálne princípy, napr.:

- ♦ Medzi *mechanické meradlá* absolútnych (skutočných) deformácií, t. j. posunov, priehybov, pootočení (skrútení) patria číselníkové úchylkomery (indikátorové hodinky), priehyboмеры, mikroskopy a geodetické prístroje.
- ♦ Medzi *metódy a prístroje na meranie pomerných (relatívnych) pretvorení* patria napr.:
 - Tenzometrické metódy a prístroje (tenzometre a tenzometrické snímače): Tenzometre sa delia na mechanické (prevody s pákovým, skrutkovým alebo kolesovým spôsobom) a odporové (u ktorých je zmena elektrického odporu $\Delta R/R$ priamoúmerná predĺženiu alebo skrúteniu $\Delta l/l$). Patria sem tiež tenzometre strunové (akustické, elektrónkové, magnetoelektrické, torzné atď.).
 - Metóda Moiré (rastrová). Hmota modelu je opatrená odrazovou zrkadlovou plochou, ktorá odráža raster rovnobežných tmavých pruhov. Pomocou dvojitej expozície pred a po deformácii modelu na tej istej ploche vzniknú tzv. Moirého interferenčné pruhy, z ktorých sa určuje priebeh a veľkosť deformácie.

- Metóda krehkých náterov (lakov). Na povrch skúšanej konštrukcie sa naniesie vrstva špeciálneho krehkého laku, ktorý po zaschnutí a po zaťažení konštrukcie popraská, pričom trhliny vznikajú v smere kolmom na max. ťahové napätie (σ_1).
- Medzi ďalšie, v praxi častejšie používané metódy ďalej patria: metóda holografická, fotoelasticimetrická, stereometrická, röntgenometrická a i.

11.3 Dynamické experimentálne merania

Dynamické experimentálne merania sa obyčajne sústreďujú na vyšetovanie nasledujúcich úloh:

- zistenie pretvorení, ako sú napr. amplitúdy od prevádzkového (budeného) kmitania,
- zistenie charakteristík cyklického (kmitavého) namáhania jednotlivých častí konštrukcie,
- vyšetrenie parametrov útlmu,
- šírenie napät'ových ťahových, tlakových, šmykových vln a i.

Podobne, ako pri statických meraniach i pri riešení dynamických úloh experimentálnej pružnosti sa používajú už spomínané (modifikované) metódy, ako napr.:

- dynamická tenzometria,
- dynamická fotoelasticimetria,
- metóda dynamickej elektromechanickej analógie, vychádzajúcich z matematickej podobnosti diferenciálnych rovníc, ktoré popisujú správanie sa mechanického a elektrického modelu; podobne ako predchádzajúca metóda na základe foto-elastickej podobnosti.

Dynamické merania a prístroje sa triedia podľa rôznych kritérií, napr.:

- podľa metódy merania na mechanické, optické, elektrické a i.,

- podľa meranej veličiny na meranie pohybu (vibrografy, akcelografy), na tenzometrické prístroje a na dynamometre (snímače síl),
- podľa toho, či prístroje tvoria uzavretý celok, alebo či snímacie zariadenie je oddelené od registrovaného prístroja, rozlišujeme prístroje na priame meranie (napr. vibrografy) a prístroje na meranie na diaľku (telemetrický prenos nameraných dát).

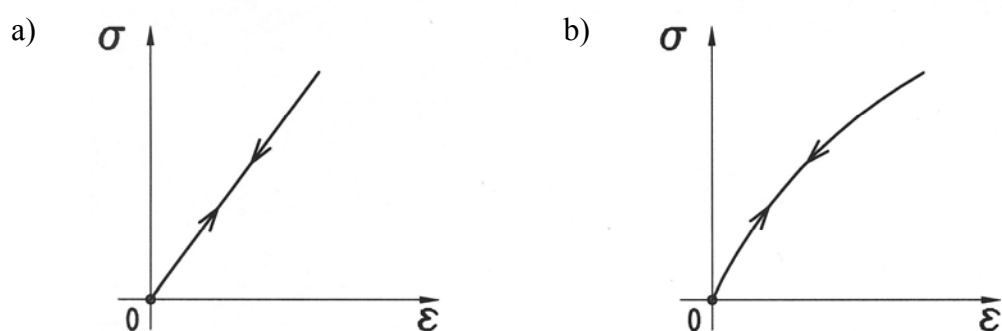
Prístroje na samotné dynamické merania sa podľa funkcie delia na:

- *budiče* kmitania (mechanické, elektrodynamické, kinematické),
- *snímače* kmitania pohybu. Používajú sa rozmanité druhy: mechanické, optické, pneumatické, akustické, laserové, elektrické (najčastejšie),
- *registračné prístroje* slúžia na zaznamenávanie (zapisovanie) časového priebehu meraných fyzikálnych veličín).

Pozn.: Podrobnejšie o metódach a prístrojoch experimentálnej pružnosti vid' napr. lit. 8, P-P I, kap. 14.

12. ZÁKLADY TEÓRIE PLASTICITY

V tretej kapitole sme sa zaoberali vzťahom napätia a pretvorenia. Vo všetkých doterajších úvahách (s výnimkou vzperného tlaku, kap. 9) sme predpokladali, že táto závislosť je lineárna (obr. 12.1a), t. j., že platí Hookov zákon. Predpokladali sme tiež, že materiál je dokonale pružný, takže telesá podrobené účinku vonkajšej zaťažujúcej silovej sústavy sa po odľahčení vrátia do svojho pôvodného tvaru.

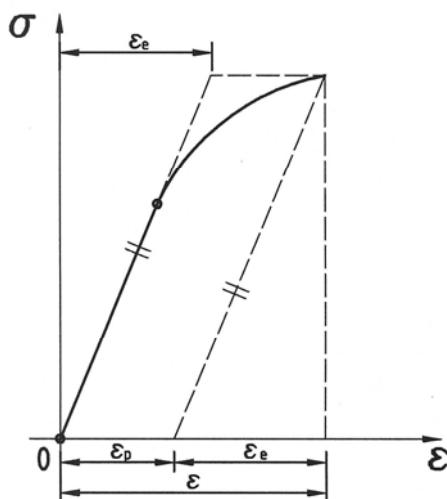


Obr. 12.1

V prípade, že závislosť napätia (σ) a pretvorenia (ϵ) v pružnej oblasti nebola lineárna a neplatil Hookov zákon (liatina, ...), tak sme ju v technických výpočtoch linearizovali - zjednodušovali (obr. 12.1b).

Dokonale pružný materiál má tú vlastnosť, že zaťažovanie a odľahčovanie prebehne po tej istej čiare, *dej je vratný* (obr. 12.1).

Keď materiál nie je dokonale pružný odľahčovanie prebieha po inej čiare než zaťažovanie. Z experimentov vyplýva, že u technických materiálov odľahčovanie prebieha v takom prípade po čiare, ktorá je rovnobežná s priamkovou časťou zaťažovacej čiary, (obr. 12.2).



Obr. 12.2

V telese zostanú v takomto prípade plastické (trvalé) deformácie.

Celková deformácia ε sa skladá z deformácie plastickej ε_p a pružnej (elastickej) ε_e . Veľkosť elastickej zložky deformácie je rovná deformácii, ktorá by v telese vznikla, keby si materiál zachoval pružné vlastnosti až do uvažovaného stavu napätosti.

Platí

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e \quad (12.1)$$

odkiaľ

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e \quad (12.2)$$

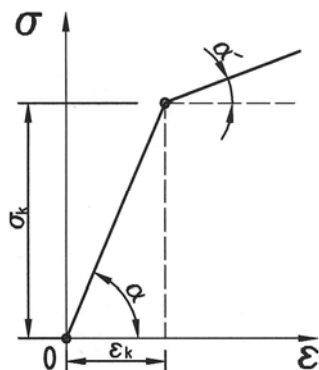
Vo výpočtoch sa používa (zjednodušený) schematizovaný pracovný diagram. Zjednodušenie sa dosiahne buď:

- parabolickou závislosťou

$$\varepsilon = K \cdot \sigma^m \quad (12.3)$$

kde konštanty, K , m sa určia na základe experimentov, alebo

- diagram sa nahradí lomenou čiarou, obr. 12.3.



Obr. 12.3

Potom diagram (uvažujúci spevnenie)

bude:

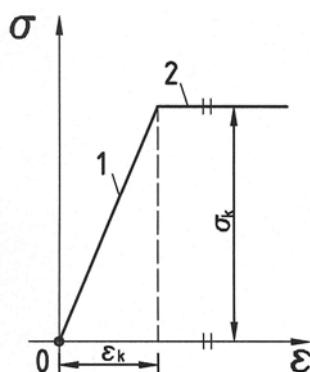
- pre $\sigma < \sigma_K$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E, \quad (12.4a)$$

- avšak pre $\sigma > \sigma_K$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \bar{E} = \frac{\sigma - \sigma_K}{\varepsilon - \varepsilon_K} \quad (12.4b)$$

V ktorom $\bar{E}$ je tzv. **modul spevnenia**. Pre ideálne mäkkú oceľ je $\bar{E} = 0$, obr. 12.4.



Obr. 12.4

Prvá priamka (1) (rovnica 12.4a) na diagrame 12.4 vyjadruje Hookov zákon a platí pre $|\sigma| < \sigma_K$.

Druhá priamka (2) $\sigma = \sigma_K$ vyjadruje napätosť v plastickej oblasti deformácií. Ku napätiu $\sigma = \sigma_K$ prináleží ľubovoľne veľké $\varepsilon \geq \sigma_K/E$. Materiál s týmito vlastnosťami je **ideálny pružno-plastický materiál** – t.j. v prvej časti je ideálne pružný, v druhej časti ideálne plastický.

Na matematické popísanie všeobecných závislostí medzi napätiami a deformáciami bol navrhnutý celý rad teórií.

Teórie plasticity možno vo všeobecnosti rozdeliť do dvoch skupín:

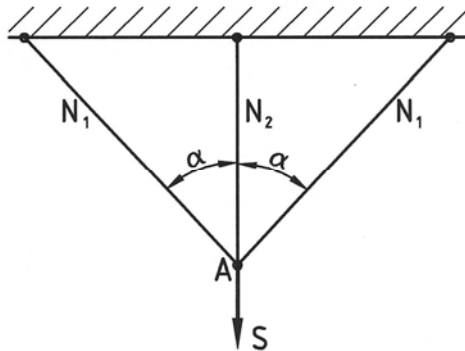
- teórie plasticity, ktoré dávajú do súvislosti napätie a deformáciu,
- teórie tečenia, ktoré vyjadrujú diferenciálnymi závislosťami napätia a deformácie.

Ich spoločným cieľom je matematicky popísať plasticke vlastnosti materiálov namáhaných nad medzou klzu a rezervu, ktorá by mohla byť v zdôvodnených prípadoch využitá v technológii.

♦ **Vplyv plasticity na únosnosť** ilustrujme najskôr *na riešení prútových sústav*.

• **Na prútovej staticky určitej sústave** so vzrastajúcim zaťažením rastú aj osovú sily v prútoch do okamihu, keď v jednom prúte sústavy dosiahne napätie medzu klzu σ_K . Prvý, takto namáhaný prút v sústave sa začne pretvárať podľa čiary (2) na obr. 12.4. Miera bezpečnosti celej sústavy závisí v tomto prípade iba na miere bezpečnosti (klzu) tohto jediného prúta.

- Podstatne inak je tomu u **staticky neurčitých sústav**. Majme napr. 1-krát staticky neurčitú sústavu (obr. 12.5) s troma prútmi z ideálne pružno-plastického materiálu o veľkosti prierezu F .



Obr. 12.5

Sila S vyvolá v prútoch osovú silu N_1 , N_2 , ktoré možno (použitím napr. energie napätosti) vypočítať z rovníc

$$N_1 = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot S \quad (12.6)$$

$$N_2 = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot S$$

Z porovnania oboch rovníc vidieť, že $N_2 > N_1$. Podľa metodiky dovolených napätí (ods. 2.3.1) platí

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{F} \leq \frac{\sigma_K}{\mu_K} \quad (12.7)$$

Kde μ_K je miera bezpečnosti v klze, ktorá je pre ideálny pružno-plastický materiál súčasne aj mierou bezpečnosti v pevnosti σ_m .

Od okamihu, keď (z rovnice 12.7; $\mu_K = 1$) sila v prúte č. 2 nadobudne hodnotu

$$N_2 = F \cdot \sigma_K \quad (12.8)$$

začne sa v tomto prúte prejavovať plastická deformácia, aj keď vzhľadom na $\sigma_1 < \sigma_K$ ešte nedôjde k porušeniu konštrukcie. Napätie v druhom prúte σ_K sa zachová aj pri pokračujúcom narastaní sily, pretože $\bar{E} = 0$. Zisťujeme, že keď napätie v nejakom prúte dosiahne hodnotu σ_K , zníži sa stupeň statickej neurčitosti prútovej sústavy o jedna.

Keď pri vzrastajúcej sile S vzniknú aj v krajných prútoch sily

$$N_1 = \sigma_K \cdot F \quad (12.9)$$

stane sa už (náš prípad) staticky určitá sústava pohyblivou.

Z podmienky rovnováhy vo zvislom smere sústavy v bode A možno napísať

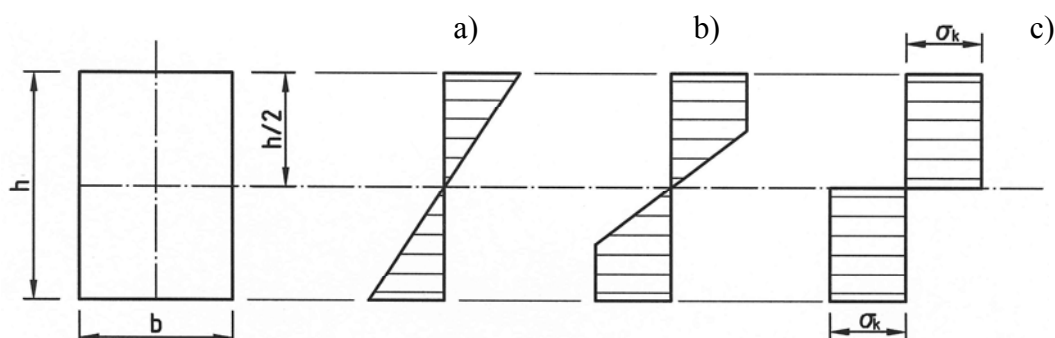
$$2N_1 \cos \alpha + \sigma_K F - S = 0 \quad (12.10)$$

a po dosadení do rovnice 12.9 za N_1 a úprave

$$S_m = S = F \cdot \sigma_K (2 \cos \alpha + 1) \quad (12.11)$$

V tomto okamihu, keď sila dosiahne medznú hodnotu S_m , deformácie prútov môžu narastať už ľubovoľne → bol dosiahnutý *medzný stav prútovej* (pôvodne) *staticky neurčitej konštrukcie*.

♦ **Vplyv plasticity na únosnosť v ohybe** analyzujeme stručne na jednoduchom prizmatickom nosníku z ideálne pružno-plastického materiálu obdĺžnikového prierezu (h, b) (obr. 12.6).



Obr. 12.6

Pri prostom ohybe vznikajú v pozdĺžnych vláknoch normálové napätia σ , ktoré sú v priečnom reze rozložené podľa priamky (ods. 7.12; rovnica 7.7).

Ked' napätie σ v krajných vláknach prierezu dosiahne hodnotu σ_K (obr. 12.6a) začínajú vznikať v krajných vláknach plastické deformácie. Ak bude napätie vzrastať ďalej, bude rozloženie napätia podľa obr. 12.6b. Zaťaženie prijímajú menej zaťažené vlákna, postupne, stále bližšie k neutrálnej osi, pretože napätie na okrajoch nemôže prekročiť hodnotu napätia σ_K .

Ak sa bude napätie zväčšovať i naďalej, vymizne elastická oblasť úplne, až sa celý prierez splastizuje (obr. 12.6c).

Dá sa dokázať (z obr. 12.6c), že tento stav nastane vtedy, keď

$$M_p = W_p \cdot \sigma_K = \frac{1}{4} b h^2 \cdot \sigma_K \quad (12.12)$$

kde	M_p ... medzný ohybový moment	[N.m]
	W_p ... modul odporu na medzi plasticity	[m ³]

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. CÚTH, V. – SÁGA, M. – TOTH, L.: Pružnosť a pevnosť – zbierka príkladov I, Žilina, 1999, ŽU
2. GOMOLA, A. – PODOLEC, O.: Pružnosť a pevnosť, Bratislava, 1987, SNTL – ALFA
3. HÁJEK, E. – REIF, P. – VALENTA, F.: Pružnosť a pevnosť I, Praha, 1988, SNTL – ALFA
4. NOVÁK, O. a kol.: Nauka o pružnosti a pevnosti ve stavitelství, Praha, 1963, SNTL – NTL
5. PODOLEC, O.: Mechanika, Bratislava, 1981, SNTL – ALFA
6. PUCHNER, O. a kol.: Pružnosť a pevnosť I, Bratislava, 1999, STU
7. SILOVSKÝ, K. – OLIVA, J.: Pružnosť a pevnosť I, Bratislava, 1963, SVTL
8. TREBUŇA, F. – JURICA, V. – ŠIMČÁK, F.: Pružnosť a pevnosť I, II, Košice, 1999-2001, Viena
9. KOVAČIK, J. – BENIAČ, M.: Statika pre špeciálne inžinierstvo, Žilina, 2003, ŽU

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor doc. Ing. Zdeněk Dvořák, PhD.

Autori	doc. Ing. Jozef KOVAČIK, CSc., Ing. Martin BENIAČ, PhD.
Názov	PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ PRE ŠPECIÁLNE INŽINIERSTVO
Vydala	Žilinská univerzita v Žiline v EDIS – vydavateľstve ŽU
Zodp. redaktor	
Vydanie	Druhé doplnené a upravené vydanie
Náklad	100 výtlačkov
AH/VH	11,48/11,98

ISBN 80-8070-433-3

Rukopis v EDIS – vydavateľstve ŽU neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.