ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta špeciálneho inžinierstva

Doc. Ing. Jozef KOVAČIK, CSc.

Ing. Martin BENIAČ, PhD.

STATIKA
PRE ŠPECIÁLNE INŽINIERSTVO

Druhé doplnené a upravené vydanie

Určené pre študijné odbory Bezpečnostný manažment, Špeciálny manažment, Doprava v krízových situáciách a Záchranné služby.

Vydala Žilinská univerzita
2005

Recenzenti: prof. Ing. Norbert Szuttor, DrSc.
doc. Ing. Josef Reitšpís, PhD.

Schválila edičná rada ŽU v Žiline výmerom číslo 8/2004

ISBN 80-8070-077-X

OBSAH

PREDSLOV

Skriptá Statika pre špeciálne inžinierstvo sú určené študentom Fakulty špeciálneho inžinierstva ŽU. Vznikli na podnet detašovaného pracoviska FŠI ŽU v Košiciach, na zabezpečenie literatúry najmä pre externú i dennú formu štúdia v odboroch špeciálneho a bezpečnostného manažmentu.

Úlohou predmetu statika, spoločne s ďalšími predmetmi tohto zamerania v špeciálnom inžinierstve je, aby analýza príčin a opatrenia prijímané na riešenie krízových situácií boli efektívne a vždy v súlade s ich fyzikálnou podstatou.

Obsiahnutá látka zo statiky je rozdelená do 6 kapitol, v ktorých okrem nutnej teórie sú na ilustráciu a získanie potrebnej zručnosti aj vypočítané príklady. Väčšia časť skrípt, počnúc treťou kapitolou, je venovaná metódam a aplikáciám základných vedomostí zo statiky (kap. 1 a 2) na riešenie podmienok rovnováhy a ekvivalencie silových sústav na skutočných telesách v rovine.

Štúdium a osvojenie si vedomostí zo statiky predpokladá znalosti matematiky a fyziky, v rozsahu týchto predmetov prednášaných na FŠI ŽU.

Pri spracovaní skrípt sme vychádzali z osnovy predmetov v oboch odboroch štúdia na FŠI ŽU a ustálenej metodiky vyučovania statiky na technických vysokých školách. Vodidlom nám boli najmä skriptá VTA v Brne. Snažili sme sa o pragmatický prístup - o čo najjednoduchšie a úsporné objasnenie teórie, o dôraz na jej aplikácie v príkladoch, a o využitie i vlastných skúseností z praktickej výučby.

Ďakujeme Prof. Ing. Norbertovi Szuttorovi, DrSc. a doc. Ing. Josefovi Reitšpísovi, PhD. za ich starostlivú recenziu a pripomienky.

Autori

1. ÚVOD DO MECHANIKY A STATIKY

1.1 Úvod do mechaniky, základné pojmy a definície

Mechaniku možno definovať ako vedu o pohybe a o vzájomnom pôsobení hmotných objektov.

Podľa druhu hmotných objektov sa mechanika delí na mechaniku tuhých telies, mechaniku deformovaných telies a mechaniku kvapalín a plynov.

Z viacerých ďalších možných delení uveďme najčastejšie **klasické rozdelenie mechaniky** (Lagrange, 1736- 1813) na statiku, kinematiku a dynamiku.

- **Statika** vyšetruje telesá a ich vzájomné pôsobenie (prevažne) v pokoji.
- **Kinematika** vyšetruje pohyb telies v priestore a v čase, pričom neuvažuje s ich hmotnosťou a vzájomným účinkom.
- **Dynamika** vyšetruje pohyb telies so zreteľom na ich hmotnosť a vzájomné silové pôsobenie.

V bežnej technickej praxi sa úlohy v mechanike riešia v medziach platnosti tzv. klasickej mechaniky, ktorej základom sú tri Newtonove (1642 - 1727) zákony:

- **Zákon zotrvačnosti** hmotný bod zotrváva v pokoji, alebo v rovnomernom pohybe, ak nie je okolitými telesami nútený zmeniť svoj pôvodný stav.
- **Zákon pohybový** zmena pohybu (zrýchlenie) je priamo úmerná sile, ktorá na teleso pôsobí a má smer pôsobiacej sily (Pozn.: tiež zvaný ako „zákon sily“).
- **Zákon akcie a reakcie** ak pôsobí teleso 1 na druhé silou $\mathbf{F}_{12}$ (akciou), pôsobí teleso 2 na prvé rovnako veľkou silou $\mathbf{F}_{21}$ opačného zmyslu (reakciou).

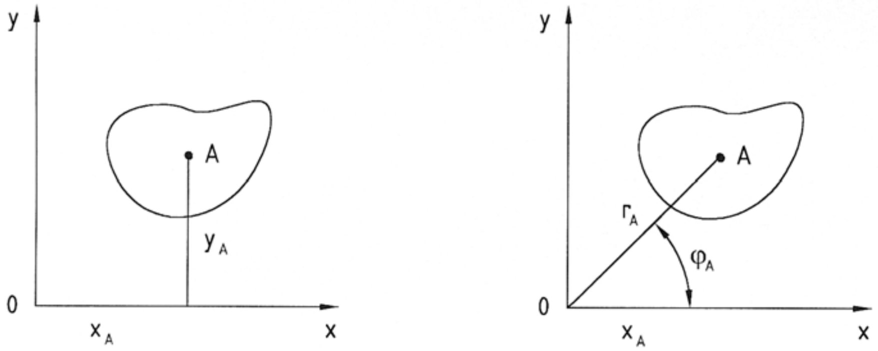
Hmota existuje v priestore a v čase. **Polohu akéhokoľvek objektu** v priestore **možno určiť** len ako relatívnu, t. j. vždy **iba vzhľadom na počiatok dajakého súradnicového systému**. (Termínom „priestor“ sa v klasickej mechanike rozumie euklidovský trojrozmerný priestor).

Neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty je pohyb, t. j. časová zmena polohy hmotného objektu v danej súradnicovej sústave (priestore). Neexistuje hmotný objekt, ktorý by nebol v pohybe aspoň v jednej súradnicovej sústave!

Aby bolo možné popísať, t. j. početne vyjadriť (kvantifikovať) úlohy v mechanike je teda potrebné najskôr zaviesť vhodnú súradnicovú sústavu.

Pri riešení úloh v priestore sa používajú: pravouhlá (ortogonálna) trojosá súradnicová sústava, ďalej valcová (cylindrická) a guľová (sférická) súradnicová sústava.

V úlohách riešených v rovine sa najčastejšie používa pravouhlá (ortogonálna) dvojosá súradnicová sústava a keď je to výhodnejšie polárna súradnicová sústava (obr. 1.1).



pravouhlá súradnicová sústava polárna súradnicová sústava

Obr. 1.1

Predpokladom na použitie zákonov klasickej mechaniky je inerciálnosť súradnicovej sústavy. Ako **interciálna** (nepohyblivá, stála) **súradnicová sústava** sa v bežných technických problémoch považuje sústava spojená so Zemou (pole zrýchlenia spôsobené rotáciou Zeme je zanedbateľné).

Základné veličiny mechaniky sú:
- hmotnosť
- dĺžka
- čas.

V sústave SI (Systéme International d`Unites) sa uvažuje s nasledujúcimi hodnotami základných veličín:

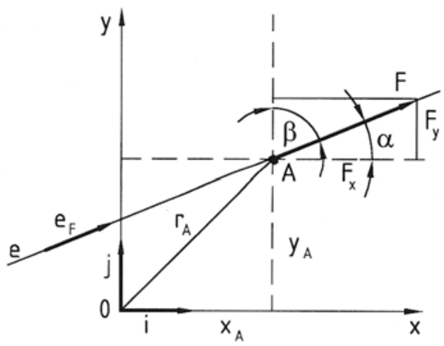
- **Jednotkou hmotnosti je 1 kg (kilogram).** Táto jednotka je daná (dohovorenou) hmotnosťou medzinárodného prototypu kilogramu.
- **Jednotkou dĺžky (vzdialenosti) je 1 m (meter).** Jeho veľkosť je daná národným štandardom dĺžkovej miery.
- **Jednotkou času je 1 s (sekunda).** Čas sa považuje za rovnomerne a nezávisle plynúcu veličinu.

Ostatné veličiny a ich jednotky, ktoré sa používajú v mechanike sú odvodené zo základných. K najvýznamnejším odvodeným veličinám patrí

Sila

Sila je vektor (**F**). Aby bol vektor sily jednoznačne určený (obr. 1.2) musí byť u sily známa jej:

- veľkosť
- miesto pôsobenia
- smer
- zmysel.



Obr. 1.2

F... vektor sily
/**F**/ = F... veľkosť sily
e$_F$... smer a zmysel („šípka“) sily
/**e**$_F$/ = 1 (jednotkový vektor)
e... nositeľka sily
A... pôsobisko sily
r$_A$... polohový vektor pôsobiska sily
0... počiatok súradnicovej sústavy
α, β... smerové uhly vektoru sily
F_x, F_y... súradnice vektoru sily
X_A, Y_A... súradnice polohového vektoru (pôsobiska sily)
x, y... osi súradnicovej sústavy

Priamka, na ktorej leží vektor sily, sa nazýva nositeľkou sily.

$\boxed{\textbf{Jednotkou veľkosti sily je 1 N (Newton)}}$

Sila s veľkosťou 1 N udelí hmotnému bodu s hmotnosťou 1 kg zrýchlenie $a = 1ms^{-2}$ v smere a zmysle sily (2. Newtonov zákon: m.**a** = **F**), t.j.: $\boxed{1N = [1kg.ms^{-2}]}$.

V technickej praxi sa často využívajú jej násobky, napr.: $1kN = 10^3$ N, 1 MN = 10^6 N, resp. 1mN = 10^{-3} N, 1μN = 10^{-6} N.

Rozdelenie síl

Sily sa rozdeľujú podľa rôznych kritérií tak, aby to zodpovedalo potrebám riešených úloh v mechanike. V súlade s tým sa sily delia na (obr. 1.3):

1. **Vonkajšie** (vyvolané vonkajšími účinkami na teleso) a **vnútorné** (sily vo vnútri telesa).

2. **Prvotné** (primárne, akcie) a **druhotné** (sekundárne, reakcie), ktoré sa prejavia vo väzbách medzi telesami.

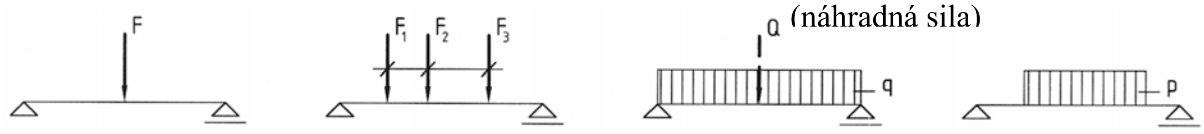
3. **Povrchové** (kontaktné, dotykové) a **objemové** (vlastná tiaž telesa, odstredivé sily, magnetické sily).

Vonkajšie sily môžeme ďalej rozdeliť na:

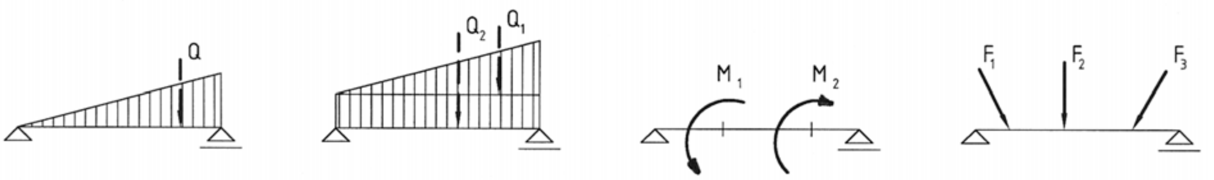
- **Osamelé**, ak sa účinok vonkajšej sily sústreďuje na veľmi malú plôšku v pomere k celkovým rozmerom telesa. (Pri výpočtoch uvažujeme, že takáto sila pôsobí v bode). Osamelé sily meriame v [N], [kN] ... .

- **Spojité**, keď vonkajšie zaťaženie je rozložené na určitej čiare alebo ploche (napr. vlastná tiaž telesa). Spojité zaťaženie, rozložené po čiare meriame v $[Nm^{-1}]$ a rozložené po ploche v jednotkách $[Nm^{-2}]$.

Zaťaženia možno deliť ďalej na **trvalé** (napr. vlastná tiaž) a d**očasné** (prechádzajúce vozidlo na moste, účinok vetra a pod.), alebo na **statické** a **dynamické** (pôsobiace v krátkej časovej perióde), **stále** a **cyklické** atď.



osamelá sila | sústava osamelých bremien | stále spojité zaťaženie | pohyblivé spojité čiastočné zaťaženie



stále spojité trojuholníkové zaťaženie | kombinované (zložené) zaťaženie | zaťaženie vonkajšími momentmi | zaťaženie silami rôzneho smeru

Obr. 1.3

Významnou objemovou silou je **sila tiaže.** Je priamoúmerná gravitačnému zrýchleniu a v blízkosti zemského povrchu má veľkosť g = 9,806 ms^{-2}. Sila tiaže pôsobiaca na teleso s hmotnosťou m je **G** = **g**.m [N].

Pre štúdium a všeobecný popis vlastností mechanických stavov a javov skutočných telies vznikol rad užitočných fyzikálnych abstrakcií, akými sú:

- **Hmotný bod** ... teliesko, ktoré má zanedbateľné rozmery, konečnú hmotnosť ($m \neq 0$) a nulový moment zotrvačnosti.
- **Hmotné teleso** ... súbor vzájomne viazaných hmotných bodov, ktorých celková hmotnosť sa rovná hmotnosti telesa. Ak sa vzdialenosti medzi viazanými hmotnými bodmi môžu meniť hovoríme o poddajnosti telesa (sústave hmotných bodov). Vtedy, keď tieto vzdialenosti považujeme za nepremenné (stále) hovoríme o dokonale tuhom telese. **Dokonale tuhé teleso** má tri zotrvačné charakteristiky: celkovú hmotnosť [kg], ťažisko (hmotný stred) a momenty zotrvačnosti, charakterizujúce rozloženie hmoty v telese [kgm^2] .

Fyzikálne abstrakcie umožňujú vytvárať primerane zjednodušené **fyzikálne modely** skutočných telies.

Z fyzikálneho modelu sa odvodzuje **model matematický** (výpočtový), ktorý vedie k sústave rovníc, ktorých riešenie je riešením problému.

Z uvedeného vyplýva, že ak máme získať riešením modelu správne výsledky, musí model vystihovať s dostatočnou presnosťou základné vlastnosti skutočného objektu. Tvorba modelu a jeho riešenie vyžaduje skúsenosti a znalosti, o. i. práve zo základov mechaniky.

So silami sa v statike pracuje ako s vektormi. Prednosť sa pritom dáva výpočtovým metódam, pričom grafické metódy sa používajú tam, kde umožňujú ľahkú orientáciu v úlohe a podporujú fyzikálne predstavy.

1.2 Základné pojmy, axiómy a úlohy statiky

Statika je časťou mechaniky, ktorá **sa zaoberá rovnováhou telies**, t. j. silovými účinkami, ktoré nevyvolávajú zmenu pohybového stavu telies. Statika je najstaršia časť mechaniky a jej niektoré princípy boli využité už pri stavbe egyptských pyramíd. Archimedes (287 - 212 pred n.l.) poznal rovnováhu na páke. Stevin (1548 - 1620) určil princíp rovnobežníka síl. Na rozvoji celej mechaniky sa ďalej podieľali Galileo Galilei (1564 - 1642), Christian Huygens (1629 - 1695) a ďalší. Najvýznamnejšími sa stali objavy Isaaca Newtona (1642 - 1727). V ďalšom období sa statika rozvíjala najmä v oblasti metód riešenia a v praktických aplikáciách. V súčasnosti, v ére výpočtovej techniky, sa prechádza viac od predtým veľmi rozšírených grafických metód k metódam výpočtovým.

Silové účinky uvažované vo fyzikálnom modeli sa nazývajú **silovou sústavou**.

V súvislosti s riešením rovnováhy silových sústav statika rieši tiež otázku **statickej ekvivalencie**.

Význam statickej ekvivalencie pri riešení silových sústav je tak významný, že sa často považuje za druhú úlohu statiky. Podľa takéhoto náhľadu **rieši statika dve úlohy**:

- **Statickú rovnováhu ...** silová sústava je v statickej rovnováhe ak nemení pohybový stav telesa (väčšinou stav telesa v pokoji).

- **Statickú ekvivalenciu ...** dve rôzne silové sústavy sú staticky ekvivalentné vtedy, keď spôsobujú rovnakú zmenu pohybového stavu telesa (majú na teleso rovnaký účinok).

Základnú úlohu statiky možno sformulovať takto:

Základnou úlohou statiky je určenie statickej rovnováhy a ekvivalencie silových sústav a ich aplikácie na riešenie staticky určitých úloh v technickej praxi.

Prvé kontakty s oboma úlohami prinášajú už základné **axiómy statiky**.

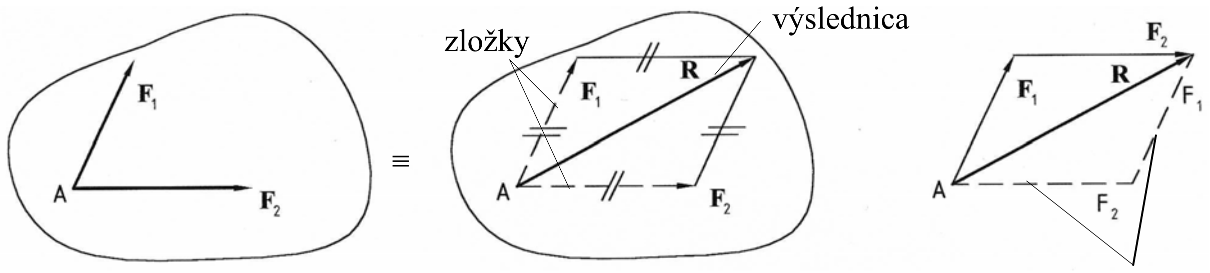
Axiómou sa rozumie (základná) pravda, poučka či tvrdenie, ktoré netreba dokazovať, pretože jej správnosť bola overená skúsenosťou.

Statika je vybudovaná na dvoch axiómach: na axióme o rovnobežníku síl a o rovnováhe dvoch síl. Dôležitým dôsledkom druhej axiómy je veta o pridaní (odňatí) rovnovážnych síl, ktorá sa niekedy uvažuje samostatne, ako *tretia axióma*.

1.2.1 Axióma o rovnobežníku síl

Dve rôznobežné sily F_1 a F_2, ktoré pôsobia v spoločnom bode A **tuhého telesa majú rovnaký účinok ako sila R pôsobiaca v tom istom bode, pričom jej veľkosť, smer a zmysel sa rovná orientovanej uhlopriečke rovnobežníka zostrojeného nad oboma silami.**

Sila **R** sa nazýva výslednica (rezultanta) a je staticky ekvivalentná silám $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$. Pri nahradení síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ ich výslednicou hovoríme o **redukcii** (zjednodušení) **silovej sústavy**. Sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ v rovnobežníku síl sa nazývajú **zložkami** výslednice.



a) b) silový rovnobežník c) silový trojuholník

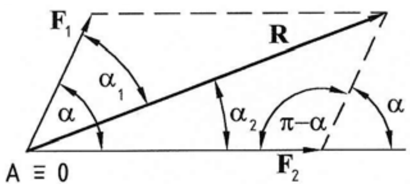
Obr. 1.4

Z obr. 1.4c je zrejmé, že výslednicu **R** možno získať tiež vektorovým súčtom síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \qquad (1.\ 1)$$

Uvedený súčet sa skladá zo **silových trojuholníkov** a **má charakter komutatívnosti** sčítania vektorov (nezáleží na poradí sčítania síl!).

- **Výpočtové (analytické) riešenie** vychádza zo skalárneho prepisu vektorovej rovnice (1.1). Z obr. 1.5, z kosínusovej a sínusovej vety (o všeobecnom trojuholníku) a skutočnosti, že $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ platí:

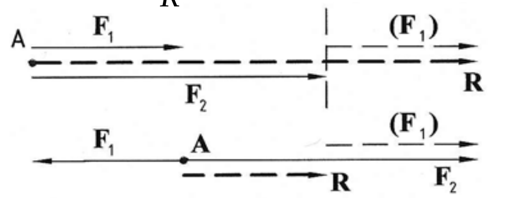


Obr. 1.5

$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (1.2)$$

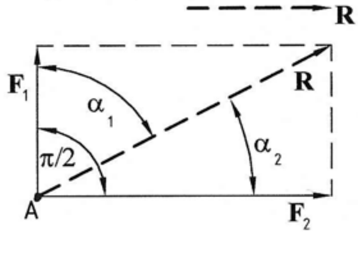
$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{F_2}{R}\sin\alpha \\ \sin\alpha_2 &= \frac{F_1}{R}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Pre uhol $\alpha = 0$ bude $R = F_1 + F_2$



$\alpha = \pi$ bude $R = F_2 - F_1$

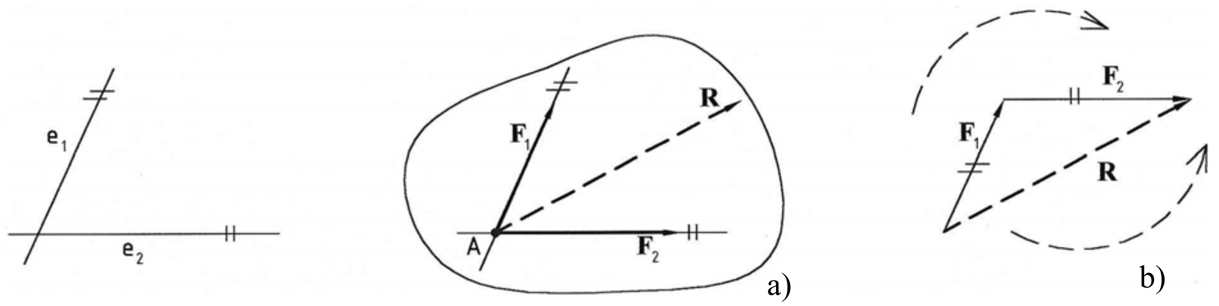
$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ bude $R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}}$



$$\sin\alpha_1 = \frac{F_2}{R}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_1}{R}$$

- **Grafické riešenie** na obr. 1.6 vychádza z rovnice 1.1



Obr. 1.6

Pre dané veľkosti a smery nositeliek $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a zmysly síl $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ zvolíme vhodnú mierku síl m_F (N/mm) a vypočítame veľkosť dĺžky úsečiek [mm] $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ na nakreslenie rovnice $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

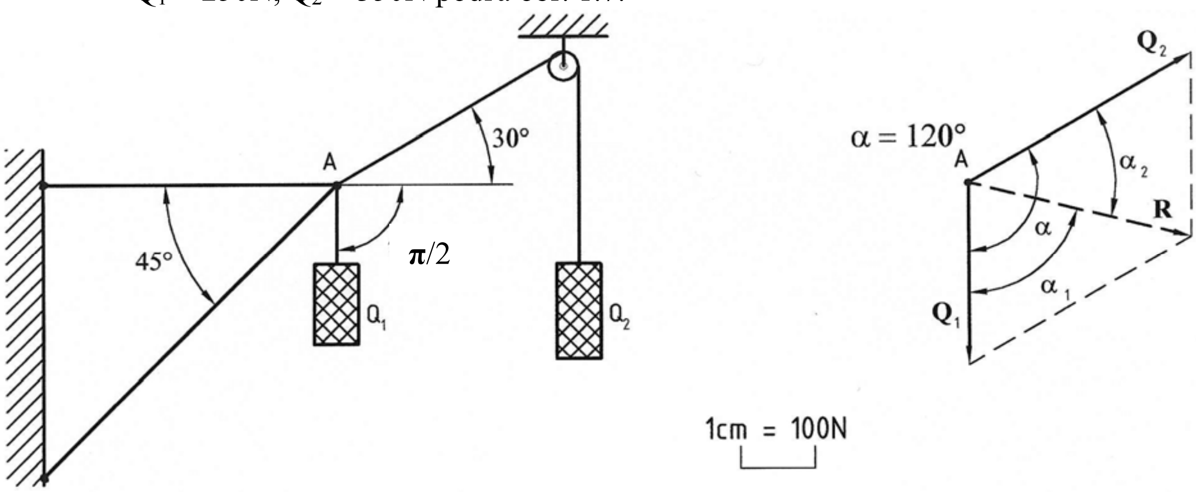
$$\overline{F}_1 = \frac{F_1}{m_F}, \qquad \mathrm{F}_2 = \frac{F_2}{m_F} \tag{1.4}$$

Pozor! Výslednica $\overline{R}$ (v obr. 1.6b) smeruje vždy proti zmyslu obehu zložiek $\overline{F_1}$ a $\overline{F_2}$ (vyznačené čiarkovane).

Na obrázku 1.6b odmeriame v silovom trojuholníku hodnotu $\overline{R}$ [mm] a vypočítame veľkosť výslednice **R**

$$\mathrm{R} = \overline{R}.m_F \qquad [\mathrm{N}] \tag{1.5}$$

Príklad 1.1: Určite výsledné zaťaženie konzolového nosníka so zavesenými bremenami $Q_1 = 250$N, $Q_2 = 350$N podľa obr. 1.7.



Obr. 1.7

- **Výpočtové riešenie**

Podľa obr. 1.7b je výsledné zaťaženie konzoly z rovnice 1.2

R = $\sqrt{Q_1^{\,2} Q_2^{\,2} + 2Q_1 Q \cos\alpha}$ = $\sqrt{250^2 + 350^2 + 2.250.350\cos 120^o}$ = $\sqrt{97500}$ = 312,24 N

uhol α_1 obdržíme z rovnice 1.3

sin α_1 = $\frac{Q_2}{R}$ sin α = $\frac{350}{312{,}24}$ sin 120° = 0,9707 α_1 = 76°7′

a uhol $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ = 120° - 76°7′ = 43°53′.

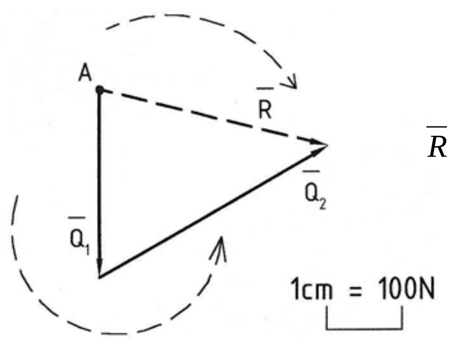
- **Grafické riešenie**

Podľa rovnice 1.4 zvolíme najskôr vhodnú mierku síl, napr. m_F = 10 N/mm a vypočítame veľkosti úsečiek oboch zložiek síl

$\overline{Q}_1 = \frac{Q_1}{m_F} = \frac{250}{10}$ = 25 mm, $\overline{Q}_2 = \frac{Q_2}{m_F} = \frac{350}{10}$ = 35 mm.

Zo silového trojuholníka $\overline{R} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_{21}$ (obr. 1.7c) odmeriame dĺžku úsečky výslednice a jej vynásobením zvolenou hodnotou mierky síl získame jej veľkosť:

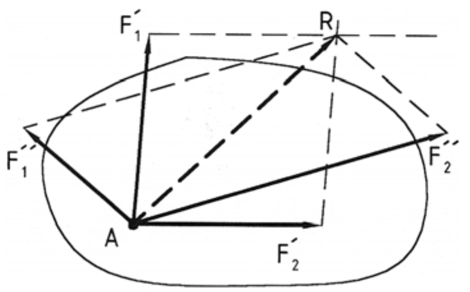
R = $\overline{R}$ .m_F = 31,5 . 10 = 315 N a jej uhol α = 76°



$\overline{R} = 31{,}5mm$

Obr. 1.7 c

Obrátenou, rovnako dôležitou úlohou je **rozklad danej sily na dve zložky**. Úloha ale nie je jednoznačná, pretože danú silu možno rozložiť na dve ľubovoľné zložky (obr. 1.8), pričom platí:



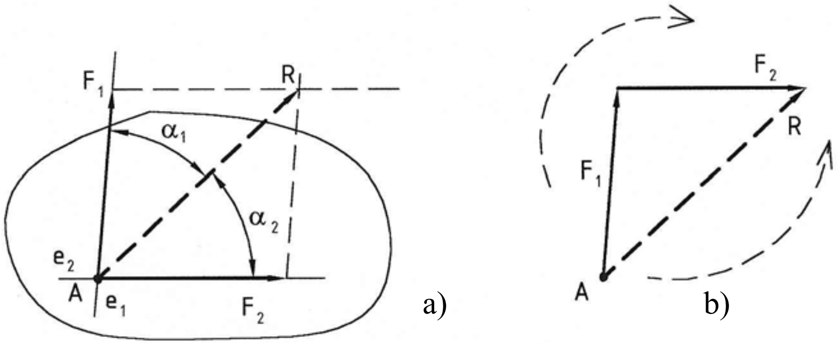
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_1'' + \mathbf{F}_2'' \ldots \qquad (1.6)$$

Obr. 1.8

Úloha sa stane jednoznačnou iba vtedy, keď sú zadané smery nositeliek síl $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oboch zložiek $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$. Ako vyplýva z nasledujúceho obr. 1.9a je pri početnom riešení

$$F_1 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} \,.\, R \qquad \text{a} \qquad F_2 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} \,.\, R, \qquad \text{kde } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (1.7)$$

Pri grafickom riešení zvolíme mierku síl m_F [N/mm] a vypočítame $\overline{R} = \dfrac{R}{m_F}$ [mm].



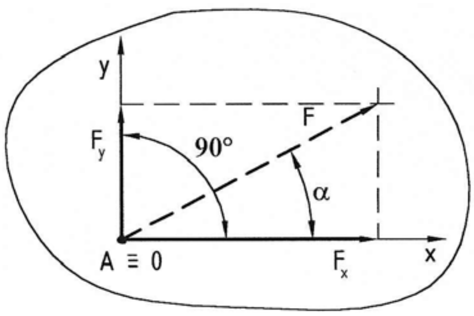
(1.8)

Obr. 1.9

Z nakresleného silového trojuholníka (obr. 1.9b) podľa rovnice 1.6 odmeriame dĺžku úsečiek $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ [mm] a vypočítame veľkosti oboch zložiek:

$$F_1 = \overline{F}_1 \,.\, m_F \qquad , \qquad F_2 = \overline{F}_2 \,.\, m_F \qquad [\text{N}] \qquad (1.9)$$

Veľmi častou úlohou je **rozkladanie sily do dvoch navzájom kolmých zložiek** - zvyčajne do smerov súradnicových osí x, y v pravouhlej sústave (obr. 1.10).

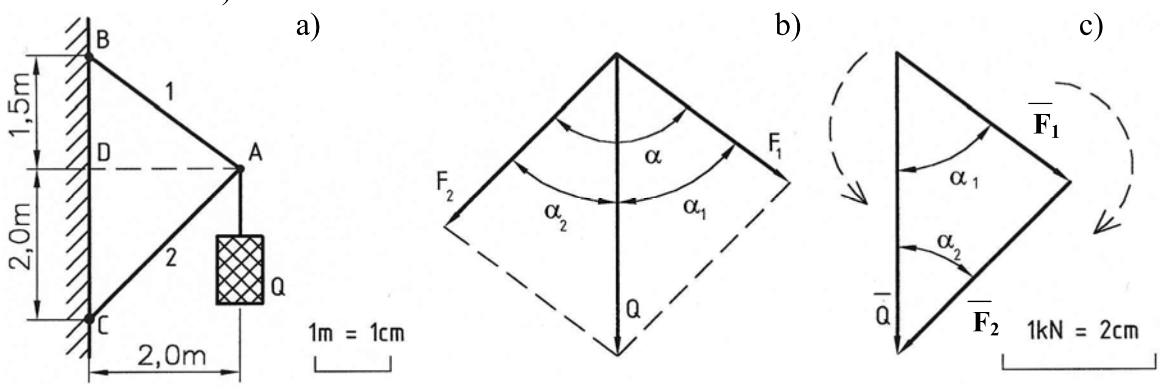


Obr. 1.10

Ak je daná sila F a uhol α, potom zložky sily F v smeroch súradnicových osí sú:

$$F_x = F.\cos\alpha \qquad (1.10)$$
$$F_y = F.\sin\alpha$$

Príklad 1.2: Konzola je zaťažená bremenom Q = 2 kN. Určite namáhanie prútov 1 a 2 (obr. 1.11).



Obr. 1.11

- **Výpočtové riešenie** podľa rovnice (1.3) zo silového rovnobežníka (obr. 1.11b)

určíme $F_1 = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha}\ .\ Q$, $\quad F_2 = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\ .\ Q$,

z obr. 1.11a určíme $\sin\alpha_1 = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{AB}}$ a $\sin\alpha_2 = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{AC}}$, kde $\overline{AB} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2} = 2{,}5$ m,

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2} = 2{,}828$ m, takže $\sin\alpha_1 = \dfrac{2}{2{,}5} = 0{,}8$; $\sin\alpha_2 = \dfrac{2}{2{,}828} = 0{,}707$ z čoho

$\alpha_1 = 53{,}131^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 98{,}131^\circ$, $\sin\alpha = 0{,}989$

Podľa toho hľadané sily v prútoch majú veľkosť:

$F_1 = \dfrac{0{,}707}{0{,}989}\ .\ 2 = 1{,}428$ kN, $\quad F_2 = \dfrac{0{,}8}{0{,}989}\ .\ 2 = 1{,}616$ kN,

- **Grafické riešenie**

Podľa rovnice 1.4 zvolíme vhodnú mierku síl, napr. $m_F = 0{,}05$ kN/mm, potom

$\overline{Q} = \dfrac{Q}{m_F} = \dfrac{2}{0{,}05} = 40$ mm.

Zo zložkového trojuholníka (obr. 1.11c) odmeriame $\overline{F_1} = 29$ mm, $\overline{F}_2 = 33{,}5$ mm.

Hľadané sily v prútoch sú:

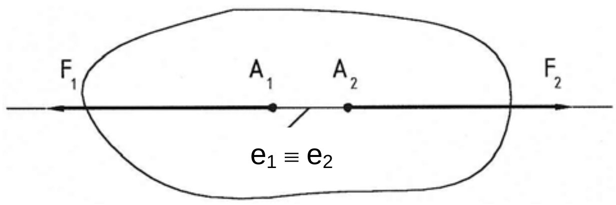
$F_1 = \overline{F_1}\ .\ m_F = 29\ .\ 0{,}05 = 1{,}45$ kN

$F_2 = \overline{F}_2\ .\ m_F = 33{,}5\ .\ 0{,}05 = 1{,}675$ kN.

1.2.2 Axióma o rovnováhe dvoch síl

Dve sily na tuhom telese sú v rovnováhe vtedy, ak sú kolineárne (majú spoločnú nositeľku)**, rovnako veľké a majú opačný zmysel (obr. 1.12).**

Táto axióma úzko súvisí s Newtonovým zákonom akcie a reakcie.



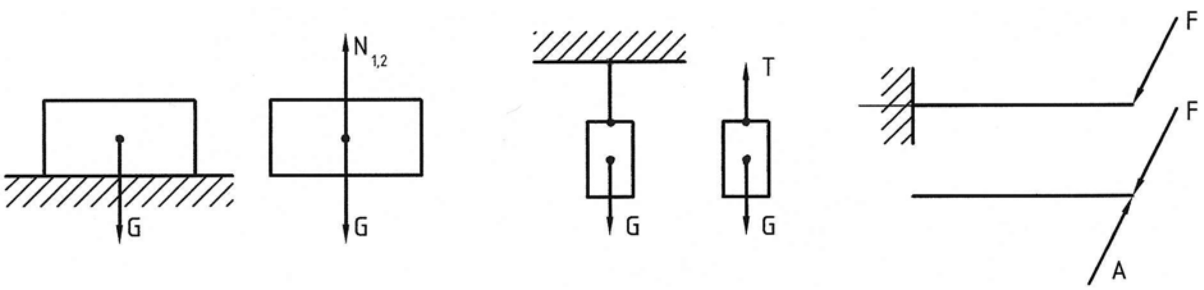
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= -\mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \text{kolinearita} \qquad (1.11)$$

Obr. 1.12

Podmienku rovnováhy silovej sústavy $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ na tuhom telese možno teda stručne napísať takto:

$$\boxed{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}} \qquad (1.12)$$

V nasledujúcich prípadoch (obr. 1.13) je zrejmý praktický význam aplikácie uvedenej podmienky rovnováhy dvoch síl pri určení výpočtového modelu viazaného telesa, v ktorom účinky väzieb sú nahradené druhotnými (sekundárnymi) silami - reakciami na uvoľnenom telese ($\mathbf{N}_{1,2}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{A}$).



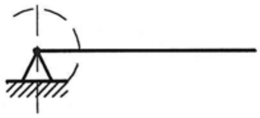
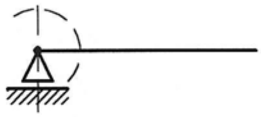
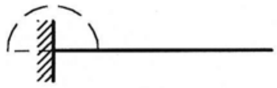
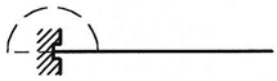
Prvotné (akčné, primárne) sily $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ sú kolineárne so silami druhotnými $\mathbf{N}_{1,2}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{A}$.

Obr. 1.13

Okrem väzieb uvedených v obr. 1.13 môžu na telesá pôsobiť aj iné druhy väzieb (teleso, na ktoré nepôsobia väzby sa nazýva voľným telesom). Ak začnú na voľné teleso pôsobiť vonkajšie sily začne sa teleso pohybovať. Pohybom telies v závislosti na ich zotrvačných charakteristikách a silách, ktoré na ne pôsobia sa však zaoberá (viď ods. 1.1) dynamika.

V technickej praxi sa veľmi často vyskytujú priame tyče či nosníky - viazané telesá, ktoré majú jeden rozmer (dĺžku) väčší, ako ďalšie dva rozmery (šírku a výšku).

Väzby týchto **telies** môžeme rozdeliť na tieto 4 hlavné druhy:

1. Kĺbové uloženie pevné 
2. Kĺbové uloženie posuvné 
3. Dokonalé votknuté uloženie 
4. Votknuté uloženie posuvné 

Teleso má v rovine 3 stupne voľnosti (2 posunutia v smere osí x, y a 1 otáčanie).

Aby sme zabránili jeho pohybu, musíme ho uložiť tak, aby sme mu odobrali všetky stupne voľnosti, čo možno dosiahnuť rôznym spôsobom usporiadania väzieb. Na to je treba ale vedieť, koľko stupňov voľnosti odoberajú jednotlivé väzby.

- **Kĺbové uloženie pevné odoberá 2 stupne voľnosti** (vodorovný a zvislý posun - vyznačené plnou čiarou). Teleso má v tomto prípade teda iba 1 stupeň voľnosti (otáčanie v kĺbe ... vyznačené čiarkovane).

- **Kĺbové uloženie posuvné odoberá 1 stupeň voľnosti** (zvislý posun). Telesu v tomto prípade ostávajú 2 stupne voľnosti (vodorovný posun a otáčanie).

- **Dokonalé votknuté uloženie odoberá 3 stupne voľnosti** (teleso sa nemôže posúvať horizontálne, vertikálne a ani sa otáčať, ak nemá dojsť k jeho porušeniu).

Keď je tuhé teleso uložené tak, že mu odoberáme práve tri stupne voľnosti - nie je možný ani nekonečne malý posun a ani pootočenie (teleso je v pokoji) - **hovoríme, že je podopreté staticky určito**.

Kritérium statickej určitosti sa vypočíta zo vzorca

$k = v - m$, kde k ... je kritérium statickej určitosti (1.13)

v... je počet možných stupňov voľnosti voľných telies (3^oV)

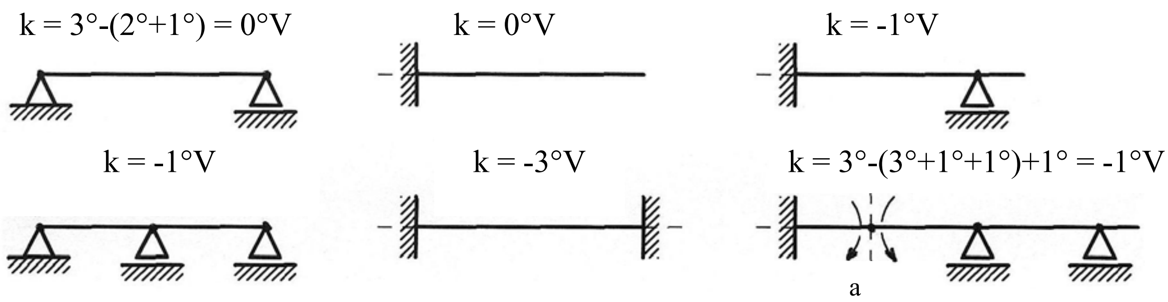
m ... je počet stupňov voľnosti odobranými väzbami

Ak je k = 0, je teleso podopreté staticky určito

k < 1, je teleso podopreté statický neurčito

k > 1, je teleso podopreté preurčito (nadbytočne).

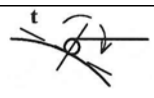
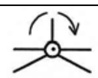
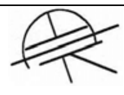
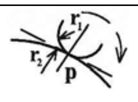
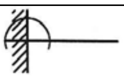
Na obr. 1.14 si ukážme na niektorých prípadoch spôsoby uloženia nosníkov.



Obr. 1.14

Vložením tzv. kĺbu (a) - ďalšieho druhu väzby, sme vniesli (pridali) 1 možný pohyb telesa (otáčanie). V tabuľke 1.1 sú uvedené druhy ideálnych rovinných väzieb a ich vlastnosti.

Tab. 1.1

DRUH VÄZBY			**KINEMATIKA STYKU**		**STATIKA STYKU (TRIEDA)**
P.č.	**Názov**	**Schéma**	**možný nezávislý posun**	**počet k °V**	**počet stupňov voľnosti**
1.	všeobecná		1 posun 1 otáčanie	2	1
2.	otáčavá		1 otáčanie	1	2
3.	posuvná		1 posun	1	2
4.	valivá		1 otáčanie (P)	1	2
5.	pevná		žiadny	0	3

1.2.3 Axióma o pridaní (odobratí) rovnovážnej sústavy síl

Pridaním (odňatím) rovnovážnej sústavy síl sa pohybový stav dokonale tuhého telesa nezmení. Dve silové sústavy, ktoré sa líšia iba o rovnovážnu sústavu sú ekvivalentné.

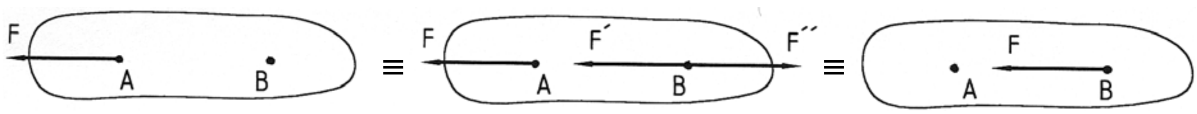
Z posledných dvoch axióm vyplýva **veta o posunutí sily po jej nositeľke**.

Silu pôsobiacu na dokonale tuhom telese možno po jej nositeľke ľubovoľne posúvať, pričom jej účinok na teleso sa nezmení.

Dôkaz je zrejmý z obr. 1.15, kde sila pôsobiaca v bode A telesa je podľa uvedenej axiómy staticky ekvivalentná so sústavou síl **F** v bode A a síl **F′** **F″**(**F′**+ **F″**= **0**) v bode B. Ak je ale sila **F′** = -**F″**= **F**, potom tiež **F** + **F″**= **0** a po jej odňatí zostáva na telese iba sila **F′** = **F** v bode B. Potom teda

$$\mathbf{F} \Rightarrow \mathrm{A} \equiv \mathbf{F} \Rightarrow \mathrm{B}$$

a silu po jej nositeľke môžeme posunovať ľubovoľne.



Obr. 1.15

Poznámka: Veta o posunutí sily po jej nositeľke platí len u dokonale tuhého telesa. Na skutočnom telese by premiestnenie sily malo za následok zmenu deformácie telesa.

Axiómu možno použiť priamo, napr. na určenie výslednice dvoch rôznobežných síl, ktorých priesečník (spoločný počiatok) neleží na nákresne (príklad 1.3).

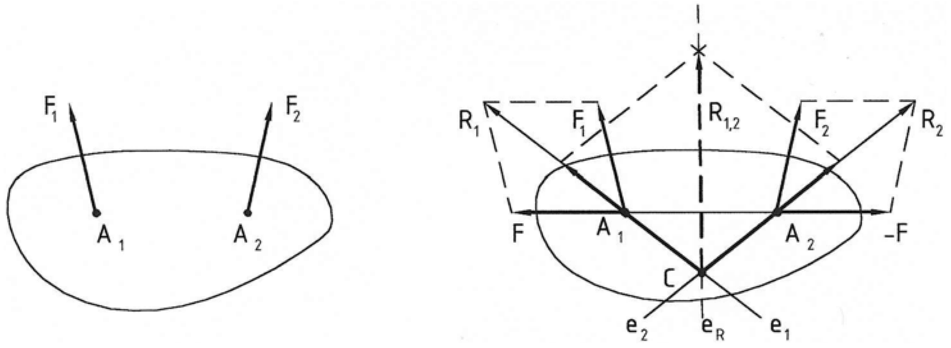
Príklad 1.3: Ak pôsobia na teleso v bodoch A_1 a A_2 sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ako je tomu na obr. 1.16, potom výslednicu $\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ určíme takto:

Na spojnici $\overline{A_1A_2}$ pridáme v bodoch A_1, A_2 sily **F** a **-F** (rovnovážnu silovú dvojicu s nulovým vektorom); zložením síl v bodoch A_1, A_2 obdržíme čiastkové výslednice $\mathbf{R}_1$ a $\mathbf{R}_2$ s účinkom ekvivalentným ako sily $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$.

Veľkosť síl **F** a **-F** volíme tak, aby sa nositeľky síl stretli v spoločnom počiatku C na nákresne. Týmto bodom prechádza výslednica **R** a je rovná:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = [\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}] + [\mathbf{F}_2 + (-\mathbf{F})] = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{R}_{1,2}$$

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F} \text{ a } \mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + (-\mathbf{F})$$



Obr. 1.16

Poznámka: Je zrejmé, že tak by bolo možné nájsť aj výslednicu dvoch rovnobežných síl (so spoločným priesečníkom, bodom C $\Rightarrow \infty$).

V tomto stručnom úvode do statiky sme sa zoznámili s väčšinou základných pojmov, axiómami a vetami zo statiky. Poznáme miesto statiky v mechanike a jej význam pri riešení praktických úloh.

V ďalších kapitolách rozoberieme postupne jednotlivé silové sústavy v rovine z hľadiska ekvivalencie a rovnováhy, s viacerými technickými aplikáciami.

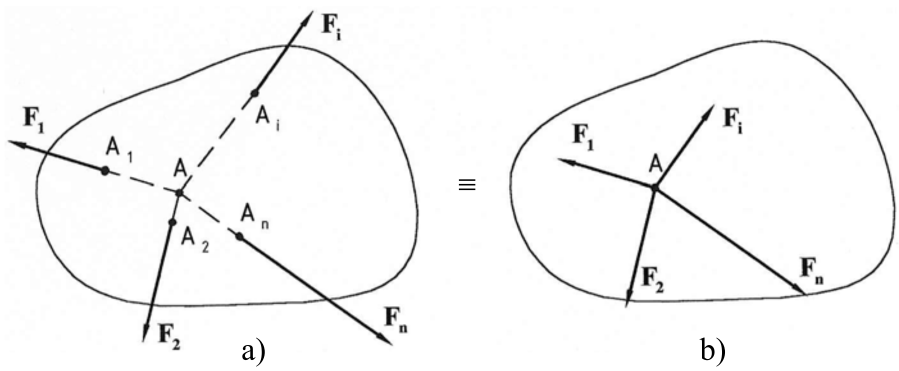
2. ROVINNÁ SÚSTAVA SÍL

Rovinnú sústavu síl tvoria sily, ktorých nositeľky ležia v jednej rovine. V prípade viazaného telesa musia väzby dovoľovať vznik reakcií v tej istej rovine pôsobiacich síl.

2.1 Rovinný zväzok síl

Sily tvoria rovinný zväzok síl, alebo tiež tzv. centrálny silový systém, keď nositeľky síl ležia v jednej rovine a majú spoločný priesečník (obr. 2.1)**.**

Vzhľadom na vetu o posunutí sily po jej nositeľke (ods. 1.3.3, obr. 1.15) je zrejmé, že zaťaženie telesa silami $\mathbf{F}_n$ na obr. 2.1b je staticky ekvivalentné so zaťažením na obrázku 2.1a .



Obr. 2.1

Prvou základnou úlohou statickej ekvivalencie je redukcia síl.

Výslednicou zväzku síl je vždy jediná sila na nositeľke, ktorá prechádza spoločným priesečníkom (dôsledok axiómy o rovnobežníku síl - ods. 1.3.1).

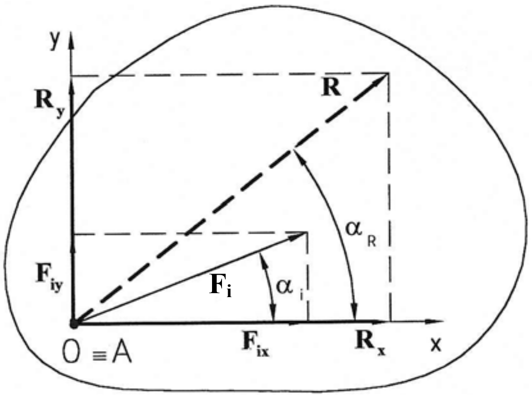
Druhou základnou úlohou je určenie podmienok rovnováhy silovej sústavy. Tento stav nastane zrejme vtedy, keď výslednica bude nulová (vektor nulovej veľkosti).

Obe úlohy je možno riešiť analyticky alebo graficky.

2.1.1 Redukcia rovinného zväzku síl

2.1.1.1 Analytické riešenie

Na analytické riešenie zvolíme najskôr súradnicový systém 0xy s počiatkom v spoločnom priesečníku nositeliek síl.



Obr. 2.2

Sú dané F_i a α_1 (obr. 2.2) každej zo síl. Sily $\mathbf{F}_i$ (kde i = 1,2, ...,n) nahradíme zložkami v osiach x a y o veľkostiach

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha$$

$$F_{iy} = F_i \sin\alpha \tag{2.1}$$

Ich výslednice v oboch osiach sú

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i$$

$$\tag{2.2}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i$$

Výslednica R má veľkosť

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{2.3}$$

a jej smer je určený uhlom α_R, pre ktorý platí

$$\mathrm{tg}\alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \tag{2.4}$$

Ak vyjadríme zložky výslednice pomocou uhla α_R, bude

$$R_x = R.\cos\alpha_R \quad \text{a} \quad R_y = R.\sin\alpha \tag{2.5}$$

čo umožňuje ďalej napísať, napr.

$$R.\cos \alpha_R = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \qquad (2.6)$$

Uvedený vzťah vyjadruje vetu o priemete výslednice:

Priemet výslednice rovinného zväzku síl do ľubovoľného smeru sa rovná algebraickému súčtu priemetov jej zložiek do toho istého smeru.

Doplňme, že pre $\alpha_i = \alpha$ ležia všetky sily nutne na spoločnej nositeľke a ich výslednica je

$$R = \sum_{i}^{n} F_i \qquad \text{a} \qquad \alpha_R = \alpha$$

2.1.1.2 Grafické riešenie

Na grafické riešenie sú dané veľkosti síl F_i a ich nositeľky e_i. Na riešenie zvolíme najskôr vhodnú mierku m_F [N/mm] a vypočítame veľkosti zobrazovacích úsečiek jednotlivých síl.

$$\overline{F_i} = \frac{F_i}{m_F} \qquad [\text{mm}] \qquad (2.7)$$

Vieme už, že skladanie (redukciu) síl rovinného zväzku možno vykonať buď postupným uplatnením axiómy o rovnobežníku síl, alebo (zrejme možným) rozšírením vektorového sčítania na viac než dve sily:

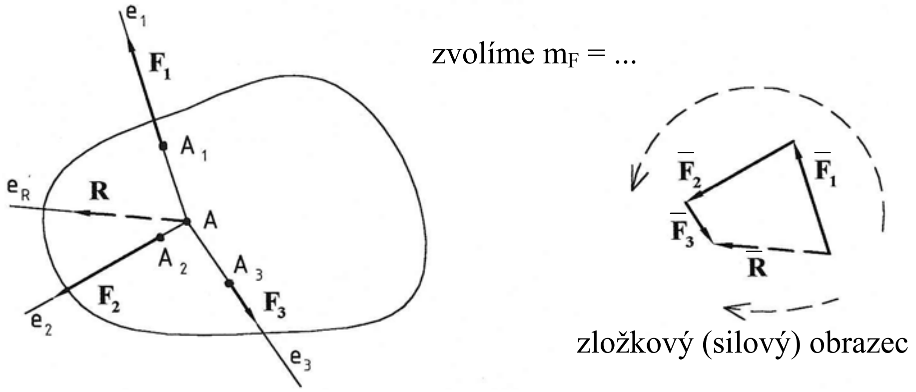
$$\mathbf{R} = \underbrace{\underbrace{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}_{\mathbf{R}_{1,2}} + \mathbf{F}_3}_{\mathbf{R}_{1,2,3}} + \ldots \mathbf{F}_n \qquad \text{atď.} \qquad (2.8)$$

To možno stručne zapísať ako

$$\mathbf{R} = \sum_{i}^{n} \mathbf{F}_i \qquad \text{(vektorový súčet } \mathbf{F}_i) \qquad (2.9)$$

V nasledujúcej úlohe na obr. 2.3 je riešenie vykonané pre tri sily, kde:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

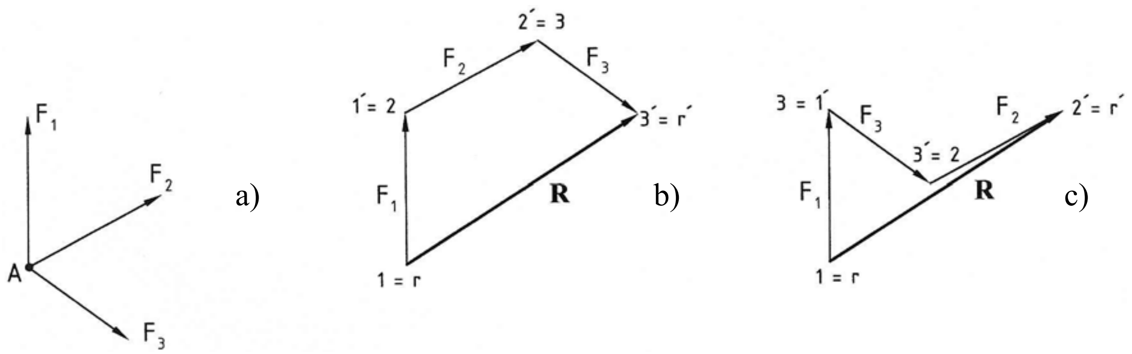


Obr. 2.3

Po nakreslení zložkového obrazca odmeriame $\overline{R}$ [mm] a vypočítame veľkosť výslednice $R = \overline{R} \cdot m_F$ [N].

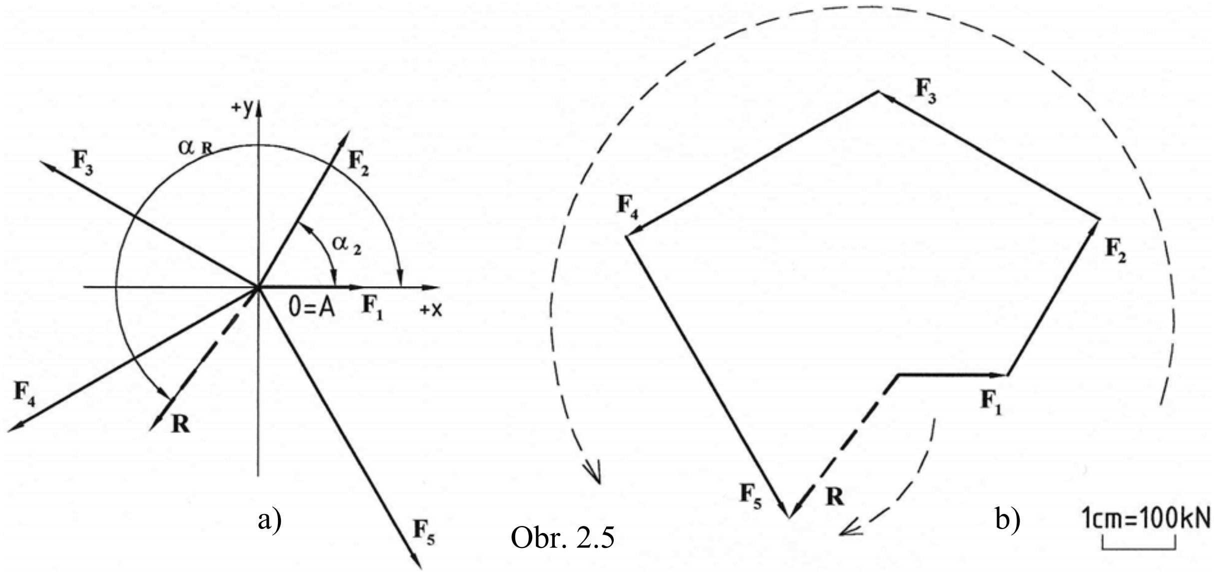
Pozor! Výslednica pôsobí v spoločnom priesečníku síl a jej zmysel v zložkovom obrazci je vždy proti zmyslu obehu jej zložiek (vyznačené čiarkovane).

Komutatívnosť sčítania vektorov dokumentujú časti obr. 2.4b,c



Obr. 2.4

Príklad 2.1: Určite analyticky aj graficky veľkosť, smer a zmysel výslednice rovinného zväzku síl F_1 = 150 kN, F_2 = 250 kN, F_3 = 350 kN, F_4 = 400kN, F_5 = 450 kN, s uhlami $\alpha_1 = 0^o$, $\alpha_2 = 60^o$, $\alpha_3 = 150^o$, $\alpha_4 = 210^o$, $\alpha_5 = 300^o$. Uhly sú merané (obr. 2.5) od kladnej osi x proti zmyslu pohybu hodinových ručičiek.



Obr. 2.5

Pri analytickom riešení sa zvyčajne usporiadajú zadané i postupne riešené výsledky do tabuľky.

Tab. 2.1

i	F_i [kN]	α_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$F_i \cos\alpha_i$ [kN]	$F_i \sin\alpha_i$ [kN]
1	150	0	1,000	0,000	150,0	0,0
2	250	60	0,500	0,866	125,0	216,5
3	350	150	-0,866	0,500	-303,1	175,0
4	400	210	-0,866	-0,500	-346,4	-200,0
5	450	300	0,500	-0,866	225,0	-389,7
				$\sum_{i=1}^{5}$	R_x = -149,5	R_y = -198,2

Poznámka: Usporiadanie výpočtu napr. do takejto tabuľky umožňuje pri „ručnom spôsobe“ zrýchliť výpočet, znížiť riziko chýb a pohotovejšie reagovať neskôr na prípadné zmeny v zadaní v rovinnom zväzku pôsobiacich síl.

Výslednica R má, s využitím čiastkových výsledkov v tabuľke veľkosť

$$R = \sqrt{(-149{,}5^2 + (-198{,}2)^2} = 248{,}26 \text{ kN}$$

a zviera s kladnou osobu uhol α_R

$$\mathrm{tg}\alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-198{,}2}{-149{,}5} = 1{,}3257$$

Uhol α_R meraný od osi x je potom

$$\alpha_R = 180^o + 52{,}97^o = 232{,}97^o$$

- **Grafické riešenie** je vykonané v obr. 2.5b v mierke m_F = 10 kN.mm^{-1}. Odmeraním obdržíme $\overline{R}$ = 25 mm, z čoho potom hľadaná výslednica má veľkosť R = $\overline{R}$. m_F = 25 . 10 = = 250 kN a odmeraný uhol od osi x je $\alpha_R = 230^o$.

Je zrejmé, že grafické riešenie závisí na starostlivosti, s akou je nakreslený zložkový obrazec. Ak však vezmeme do úvahy, s akou nepresnosťou bývajú často zadané jednotlivé sily vo zväzku, možno grafický postup akceptovať vo väčšine riešených praktických úloh.

Grafické riešenie sa preto často uprednostňuje pre svoju rýchlosť a názornosť.

2.1.2 Rovnováha rovinného zväzku síl

Rovinný zväzok síl je v rovnováhe, keď jeho silový účinok na tuhé teleso je nulový.

Takýto stav nastane vtedy, ak jeho výslednica je nulová (nulový vektor), t. j.

$$\boxed{\mathbf{R = 0}} \qquad (2.10)$$

- **Početné riešenie**

Z rovnice (2.3) pre veľkosť výslednice R = $\sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, kde $R_x = \sum F_{ix}$ a R_y = $= \sum F_{iy}$ vyplýva, že pri rovnováhe musia byť splnené rovnice

$$\boxed{\sum F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum F_{iy} = 0} \qquad (2.11)$$

Rovnice 2.11 vyjadrujú **podmienky rovnováhy rovinného zväzku síl** a je ich možno formulovať slovne takto:

Pri rovnováhe rovinného zväzku síl je algebraický súčet priemetov všetkých síl do smerov súradnicových osí rovný nule.

Poznámka: Pretože smery osí súradníc môžeme voliť ľubovoľne a sú na smeroch nositeliek v sústave síl nezávislé, možno pre podmienky rovnováhy použiť ľubovoľné dve nerovnobežné osi. Zvyčajne sa však používajú pravouhlé osi x, y.

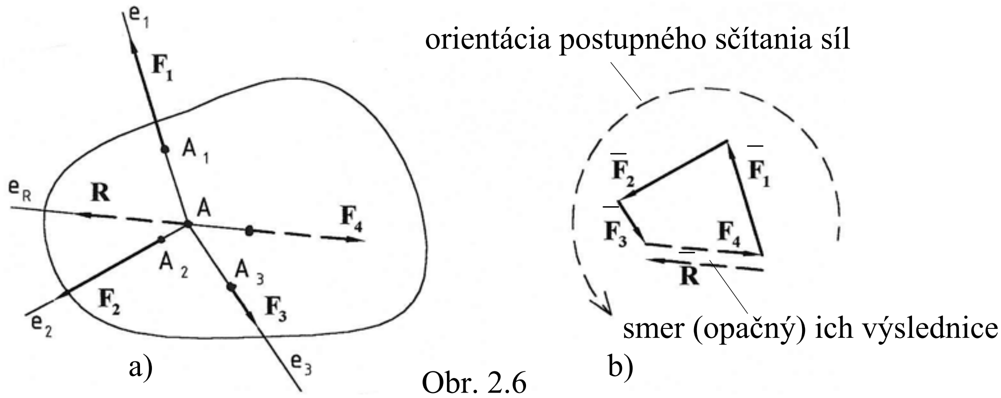
Z uvedeného vyplýva, že sily rovnakého smeru (so spoločnou nositeľkou) budú v rovnováhe, keď

$$\boxed{\sum_{1}^{n} \mathbf{F}_{\mathrm{i}} = \mathbf{0}} \qquad (2.12)$$

- **Grafické riešenie**

Na obr. 2.6 je nakreslený zväzok síl $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$, ktoré pôsobia v bodoch A_1, A_2, A_3 (ich nositeľky e_1, e_2, e_3 sa pretínajú v spoločnom bode A). Výslednica zväzku síl $\mathbf{R}$ leží na nositeľke e_r.

Zvolíme vhodnú mierku síl m_F a nakreslíme ich zložkový obrazec:



Obr. 2.6

Rovnováhe porozumieme vtedy, keď si uvedomíme, že keby sme pridali k tejto sústave (ďalšiu!) silu $\mathbf{F}_4$, ležiacu na nositeľke výslednice e_r, pre ktorú by platilo

$$-\mathbf{F}_4 = \mathbf{R} \qquad (2.13)$$

by bolo možno napísať

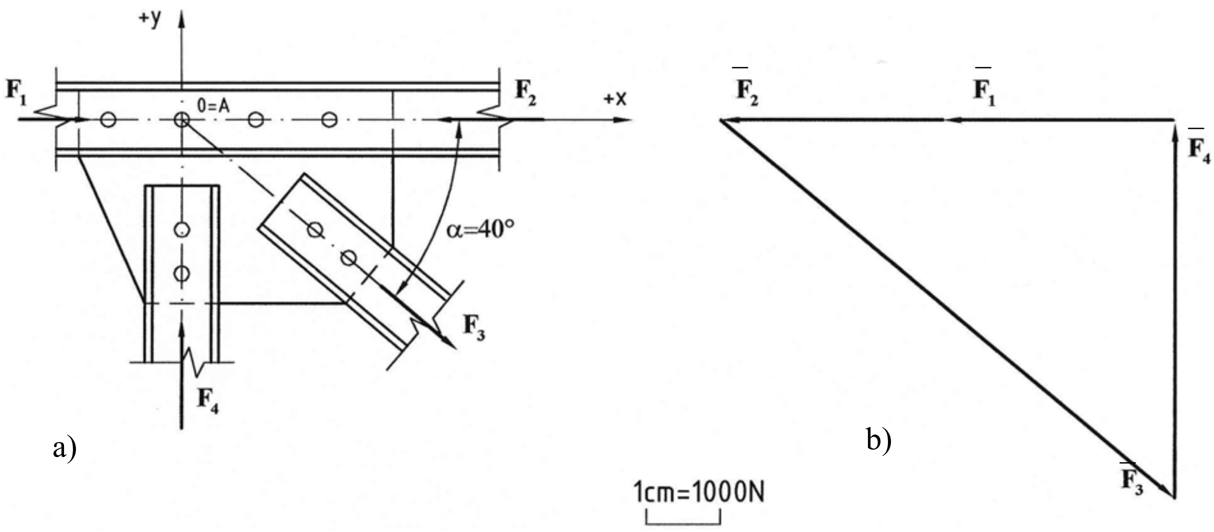
$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_4 = \underbrace{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3}_{\mathbf{R}} + \mathbf{F}_4 = \mathbf{R} + (-\mathbf{R}) = \mathbf{0} \qquad (2.14)$$

a splniť tak podmienku rovnováhy rovinného zväzku síl ($\sum_{1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$).

V zložkovom obrazci (obr. 2.6b) sa to prejaví v jednom zmysle uzavretým obrazcom síl. Podmienku rovnováhy rovinného zväzku síl pri grafickom riešení možno vysloviť takto:

Pri rovinnom zväzku síl musí byť zložkový obrazec uzatvorený a všetky jeho zložky sú orientované v tom istom zmysle.

Príklad 2.2 Nitovaný styk (obr. 2.7a) je zaťažený silami F_2 = 3000 N a F_3 = 8000 N. Určite veľkosť síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_4$, keď je styk v rovnováhe.



Obr. 2.7

- **Analytické riešenie**

Všetky osové sily v prútoch tvoria rovinný zväzok síl (majú spoločný priesečník A), pre ktorý pri rovnováhe (2.11) platí $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$.

Po dosadení dostávame rovnice: $F_1 - F_2 + F_3 \,.\, \cos\alpha = 0$

$F_4 - F_3 \sin\alpha = 0$

(sústavu 2 rovníc o dvoch neznámych F_1,- F_2)

Po dosadení hodnôt $F_1 = 3000 - 8000 \cos 40^{\circ} = - 3128$ N

$F_4 = 8000 \sin 40^{\circ} = 5142$ N.

Hľadané sily sú $F_1 = -3{,}128$ kN a $F_4 = 5{,}142$ kN, pričom si treba všimnúť, že sila F_1 má opačný zmysel, než sme pôvodne (v obr. 2.7a !) predpokladali.

Na obr. 2.7b je vykonané grafické riešenie rovnováhy v mierke $m_F = 1$ kN/cm^{-1} v súlade s rovnicou 2.14, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \mathbf{0}$.

Odmeraním priamo v obr. 2.7b zistíme (s presnosťou zrejme najviac na dve desatinné miesta!), že $F_2 = -3{,}12$ kN a $F_4 = 5{,}15$ kN

2.1.3 Statická určitosť úloh

Úloha rovinného zväzku síl je staticky určitá vtedy, keď neobsahuje viac neznámych než dve a ak nie je výnimočným prípadom.

Statickú ekvivalenciu alebo rovnováhu dvoch silových sústav $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_j$ možno teda napísať

- vektorovo $\boxed{\sum \mathbf{F}_i \pm \sum \mathbf{F}_j = \mathbf{0}}$, kde $i = 1,2 \ldots, n$

  $j = 1,2, \ldots, m$ (2.15)

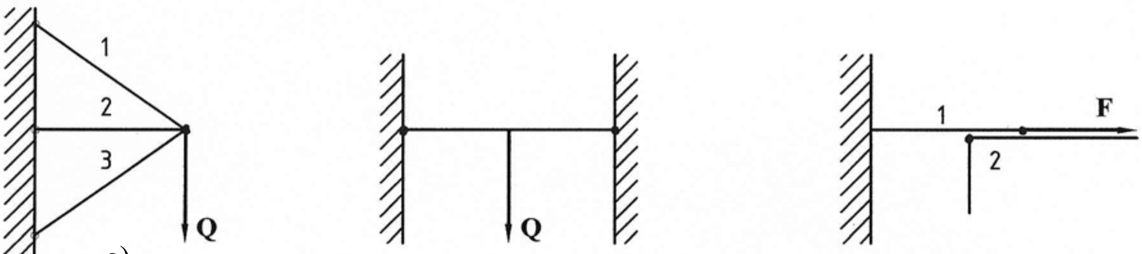
- alebo analyticky

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} = 0 \\ \sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} = 0 \end{array}} \qquad (2.16)$$

Znamienko $\ominus$ platí pre statickú ekvivalenciu, $\oplus$ pre statickú rovnováhu rovinného zväzku.

Rovnice pre analytické riešenie sú dve, z čoho teda vyplýva aj uvedená podmienka statickej určitosti.

Pri väčšom počte neznámych (obr. 2.8a) je úloha **staticky neurčitá** (nevieme s istotou - určite vypočítať, aké sily budú pripadať pri rovnováhe od jednej sily Q na tri! smery v prútoch 1,2,3). Pri nevhodnom usporiadaní síl vznikne výnimočný prípad (obr. 2.8b, 2.8c).



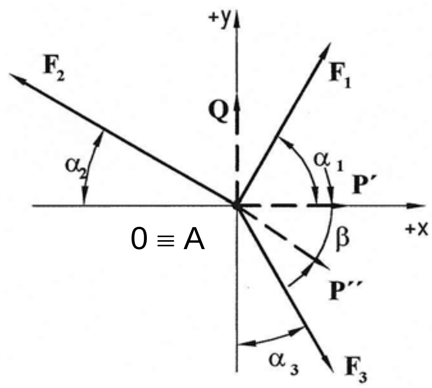
a)

b) nemôže byť $\Sigma F_{iy} = Q \neq 0$

c) chýba jedna rovnica $\Sigma F_{iy} = 0$ (úloha je triviálna)

Obr. 2.8

Príklad 2.3: Na bod A pôsobia známe sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ktoré majú byť nahradené zväzkom síl v tomto bode **P´**, **P˝** a **Q** v daných smeroch. Sily **P´** a **P˝** majú rovnakú veľkosť.



Obr. 2.9

Na riešenie statickej ekvivalencie sústav $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ a **P´**, **P˝**, **Q** sú využité rovnice (2.16)

$\sum F_{ix} - \sum F_{jx} = 0$

$\sum F_{iy} - \sum F_{jy} = 0$, kde $P' = P'' = P$

Po dosadení hodnôt dostávame z obrázku 2.9 rovnice pre neznáme hodnoty P a Q.

$$F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 + F_3\sin\alpha_3 + P\,(1 + \cos\beta) = 0$$

$$F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 - F_3\cos\alpha_3 + Q - P\,.\,\sin\beta = 0$$

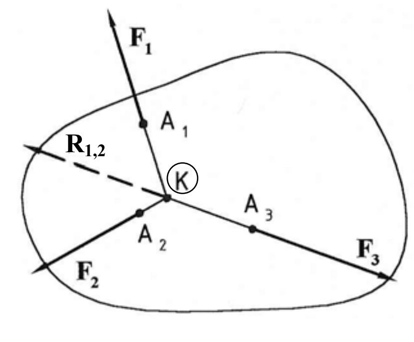
odtiaľ potom

$$P = \frac{1}{1+\cos\beta}\,(F_2\cos\alpha_2 - F_1\cos\alpha_1 - F_3\sin\alpha_3) = P' = P''$$

$$Q = -F_1\,.\sin\alpha_1 - F_2\sin\alpha_2 + F_3\cos\alpha_3 + P.\sin\beta$$

2.1.4 Rovnováha troch síl v rovine

Tri sily v rovine na tuhom telese sú v rovnováhe vtedy, keď tvoria rovinný zväzok síl a spĺňajú podmienky rovnováhy zväzku.



Obr. 2.10

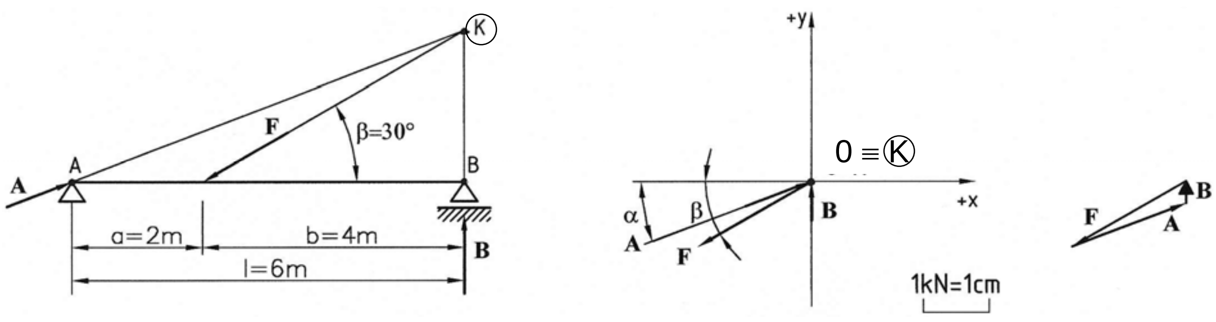
Dôkaz je zrejmý z obr. 2.10. Sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ majú výslednicu $\mathbf{R}_{1,2}$, ktorá prechádza ich priesečníkom K. Tretia sila $\mathbf{F}_3$ musí byť pri rovnováhe s výslednicou $\mathbf{R}_{1,2}$ kolineárna (1.11) a teda nositeľky síl $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ sa pretínajú v spoločnom bode K.

Ďalej musia byť splnené rovnice 2.12 a 2.11

$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ - pri grafickom riešení

$\left.\begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0 \\ \\ \sum F_{jy} = 0 \end{array}\right\}$ - pri analytickom riešení

Príklad 2.4: Určite analyticky a graficky reakcie na nosníku (obr. 2.11a) uloženom prosto na podperách A, B. Nosník je zaťažený šikmou silou F = 2 kN.



a) b) c)

Obr. 2.11

Nosník $\overline{AB}$ je v rovnováhe pri účinku troch síl **F**, **A**, **B**, pre ktoré platí **F** + **A** + **B** = **0** $\Rightarrow$ K.

Nositeľky troch síl sa musia pretínať v spoločnom priesečníku K a tým je určený aj smer tretej sily **A**. (Smer nositeľky reakcie **B** je daný vlastnosťou posuvnej väzby).

- Na **analytické riešenie** treba určiť uhol α. Z obr. 2.11a plynie

$$\text{tg}\alpha = \frac{b.tg\beta}{(a+b)} = \frac{4.tg30^o}{(2+4)} = 0{,}3849 \Rightarrow \alpha = 21{,}1^o .$$

Podľa rovníc o rovnováhe zväzku síl (obr. 2.11b) platí:

$\Sigma F_{ix} = 0$: $\quad -F.\cos\beta + A.\cos\alpha = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0$: $\quad -F.\sin\beta + A.\sin\alpha + B = 0$

A po úprave a dosadení určíme

$$A = F\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 2.\frac{\cos 30^o}{\cos 21^o} = 1{,}855 \text{ kN}$$

$$B = F.\sin\beta - A\sin\alpha = 2.\sin30^o - 1{,}855.\sin21^o = 0{,}335 \text{ kN}$$

- **Z grafického riešenia** (obr. 2.11c) vo zvolenej mierke m_F = 1 kN/5 mm odmeriame $\overline{A}$ a $\overline{B}$ a vypočítame

$A = \overline{A}\ .\ m_F = 3{,}7\ .\ 0{,}5 = 1{,}86$ kN

$B = \overline{B}\ .\ m_F = 0{,}65\ .\ 0{,}5 = 0{,}33$ kN

2.2 Všeobecná rovinná sústava síl

Všeobecnú rovinnú sústavu (systém) síl tvoria sily, ktorých nositeľky ležia v jednej rovine a majú v nej všeobecnú polohu (nepretínajú sa všetky v spoločnom priesečníku).

Treba doplniť, že medzi silovými účinkami v rovine sa môžu vyskytovať nielen **osamelé sily**, ale tiež **spojité zaťaženia** a **zaťaženie momentmi**. Spojité zaťaženia na dokonale tuhom telese nahradzujeme vo výpočtoch osamelými silovými účinkami. Moment spoločne s osamelou silou sú dva základné druhy silového pôsobenia na teleso.

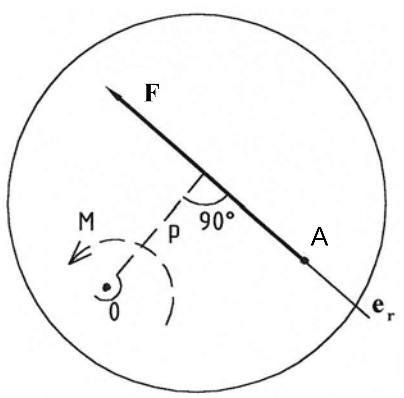
Preto, skôr než pristúpime k riešeniu všeobecnej sústavy síl, je treba sa zoznámiť s nasledujúcimi pojmami:

- Statický moment sily k bodu roviny,
- Silová dvojica a jej statický moment,
- Preloženie sily na telese a skladanie sily a momentovej silovej dvojice.

2.2.1 Statický moment sily

Ak pôsobí sila **F** v bode A telesa, ktoré sa môže otáčať okolo bodu 0, bude ako vieme otáčavý účinok tým väčší, čím väčšia bude sila **F** a čím väčšia bude jej vzdialenosť p od bodu 0.

Otáčavý účinok sily vyjadruje statický moment sily **F** k bodu 0 a označuje sa písmenom M.



Obr. 2.12

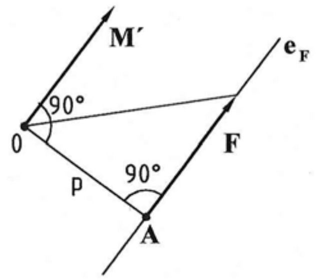
$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot p} \qquad [\text{N.m}] \qquad (2.17)$$

p ... rameno sily (najkratšia, kolmá vzdialenosť nositeľky sily e_r od bodu otáčania 0)

0 ... momentový bod

Možno vysloviť tieto vety:

- Mierou točivého účinku sily **F** okolo bodu 0 je statický moment sily **F** k tomuto bodu.
- Statický moment sily je rovný súčinu sily **F** a jej vzdialenosti od momentového bodu 0 (ramena sily) p.
- Momentu sily je možno priradiť vektor **M** na nositeľke e_F a jeho smer je kolmý na rovinu momentu.



a)

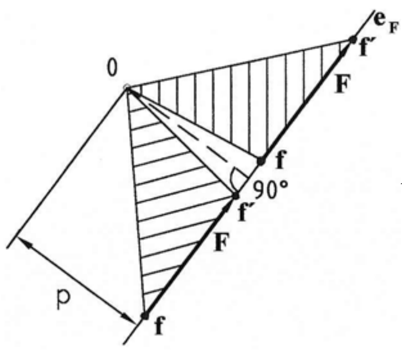
Obr. 2.13

Znamienko momentu sa podľa dohovoru označuje podľa zmyslu točivého účinku takto:

(proti chodu hodinových ručičiek)

v smere hodinových ručičiek)

Technickým (praktickým) aplikáciám prospeje, keď si uvedomíme, že z definície statického momentu sily priamo vyplýva, že jeho veľkosť (obr. 2.13b) je vlastne daná dvojnásobným obsahom trojuholníka (0ff′).

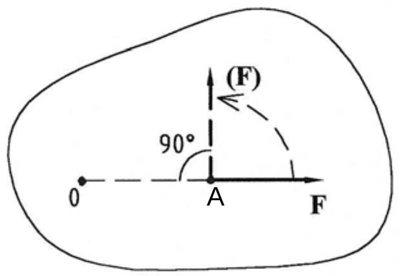


b)

Obr. 2.13

Ako tiež priamo z definície vyplýva, sila **F** má na teleso nulový otáčavý účinok vtedy, keď prechádza jej nositeľka momentovým bodom.

V tomto prípade je p = 0 a teda súčin $M = F.p = 0$.

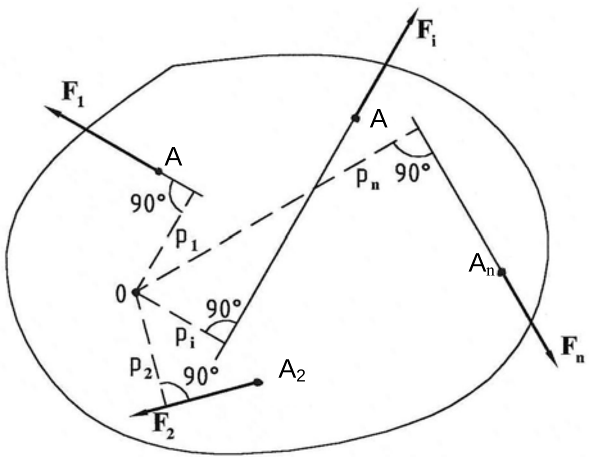


Obr. 2.14

Naopak, maximálny moment sily **F** vzniká vtedy, keď sila je kolmá na spojnicu $\overline{OA}$, keď jej rameno je najväčšie (obr. 2.14).

$$M_{max} = F\,.\,\overline{OA} = F\,.\,p_{max}$$

Keď na teleso pôsobí viac síl (obr. 2.15) je výsledný (celkový) otáčavý účinok okolo bodu 0 daný algebraickým súčtom veličín M_i.



Obr. 2.15

$$M = F_1.p_1 - F_2.p_2 + ... + F_n.p_n$$

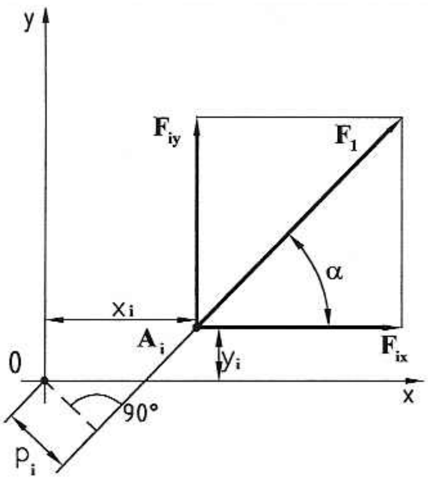
$$= \sum_1^n F_i p_i = \sum_1^n M_i \qquad (2.18)$$

Podmienka rovnováhy momentov pôsobiacich na otočne uložené teleso je potom

$$M = \sum M_i = \sum F_i p_i \qquad (2.19)$$

Dosiaľ, v snahe vysvetliť točivý účinok sily, sme pre statický moment M mali vždy zadanú veľkosť i rameno sily **F**.

V technickej praxi však býva úloha často zadaná všeobecnejšie, napr. sú známe len F_i, α_i, $A_i(x_i, y_i)$, kde i = 1,2, ..., n.



Obr. 2.16

Z obr. 2.16 plynie, že rameno sily $\mathbf{F}_i$ je $p_i = x_i \sin\alpha i - y_i \cos\alpha_i$
a teda
$M_i = F_i.p_i = F_i(x_i\sin\alpha_i - y_i\cos\alpha_i) = x_iF_i\sin\alpha_i - y_iF\cos\alpha_i = x_iF_{iy} - y_iF_{ix}$ (2.20)

Ak dosadíme do výrazu pre M_i hodnoty súradníc i zložiek síl s ohľadom na znamienka (+, -) , dostaneme výsledné znamienko (zmysel) momentu v súlade s prijatou dohodou +.- .

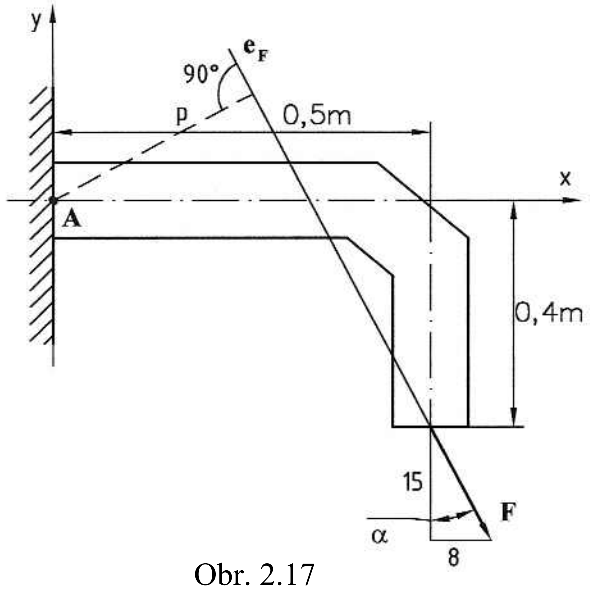
Výsledný moment všetkých síl k tomu istému bodu otáčania na dokonale tuhom telese je

$$M = \sum M_i = \sum (x_i F_{iy} + y_i F_{ix}) \qquad (2.21)$$

Uvedená rovnica (2.21)sa uvádza ako **Varignonová** (1654 - 1722) **momentová veta**:

Statický moment výslednice k ľubovolnému bodu roviny síl sa rovná algebraickému súčtu statických momentov všetkých jej zložiek k tomu istému bodu

Príklad 2.5: Určite moment sily **F** k bodu A. Sú dané F = 225N a rozmery uvedené v obr. 2.17.



Obr. 2.17

$M_A = F.p = x_B.F_y - y_B F_x =$

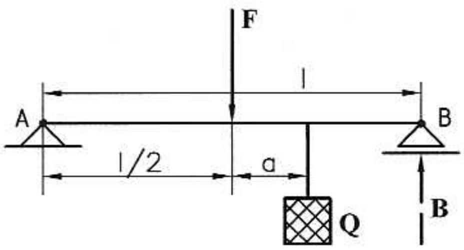
$0{,}5(-F\cos\alpha) - (-0{,}4)\,.\,F\sin\alpha =$

$F(-0{,}5\cos\alpha + 0{,}4\sin\alpha) =$

$$= \frac{225}{\sqrt{15^2 + 8^2}}(-0{,}5.15 + 0{,}4.8) =$$

= - 56,91 Nm (v zmysle ↻).

Príklad 2.6: Určite reakcie B v mieste podopretia (vo väzbe) B nosníka dĺžky l, ktorý je otočne uložený na podpere v bode a. Nosník je zaťažený silou **F** a bremenom tiaže **Q** podľa obr. 2.18.



Obr. 2.18

Pre nosník otočne uložený v (kĺbe) bode A môžeme napísať momentovú podmienku rovnováhy k tomuto bodu.

$$M_A = -F\,.\,\frac{l}{2} - Q\,(\frac{l}{2} + a) + B\,.\,l = 0$$

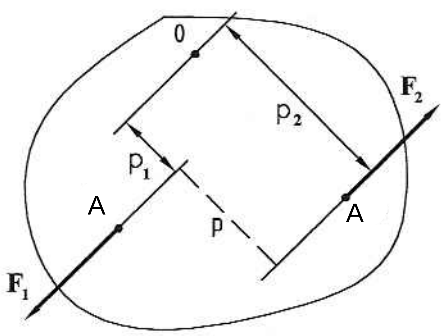
Odkiaľ reakcia **B** má veľkosť

$$B = \frac{1}{2}\left[F + Q(1 + \frac{2a}{l})\right]$$

Reakcia **B** ruší otáčavý účinok síl **F** a **Q** k bodu A, resp. keby sme nahradili podperu nosníka B silou **B** so silami **F** a **Q** ako sú nakreslené na obrázku, nosník by zostal v pokoji - (neotáčal by sa v kĺbe okolo bodu A).

2.2.2 Silová dvojica

Dve rovnobežné nekolineárne sily (neležia na tej istej nositeľke)**, rovnako veľké a opačného zmyslu tvoria silovú dvojicu**.



Obr. 2.19

Na obr. 2.19 je nakreslená silová dvojica tvorená silami $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, pre ktoré platí

$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, takže

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_1) = \mathbf{0} \qquad (2.22)$$

Z uvedeného plynie, že **silová dvojica má výslednicu vždy rovnú nule** (nemá teda žiadny posuvný účinok na teleso).

Statický momentový (točivý) účinok silovej dvojice k ľubovoľnému bodu 0 je

$M = \sum M_i = \sum F_i \,.\, p_i = -F_1.p_1 + F_2.p_2 = F(p_2 + p_1) = F \,.\, p$

Moment silovej dvojice je teda

$$\boxed{M = F \,.\, p} \qquad (2.23)$$

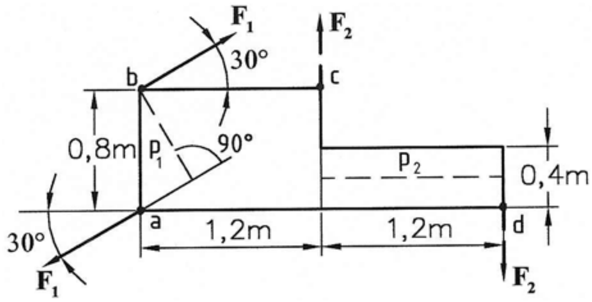
kde rameno p dvojice je vzdialenosť nositeliek síl o veľkosti F. Pre rovnováhu k ľubovoľnému bodu môžeme potom tiež napísať

$$\boxed{\sum M_K = 0} \qquad (2.24)$$

Čo možno slovne vyjadriť takto:

Sústava silových dvojíc je v rovnováhe, keď algebraický súčet momentov dvojíc sa rovná nule.

Príklad 2.7: Je treba nahradiť dvojicu síl $\mathbf{F}_1$, - $\mathbf{F}_1$ inou dvojicou v bodoch c, d, v ktorej majú mať sily zvislý smer. (obr. 2.20)



Obr. 2.20

Dané F_1 = 65 N

Moment danej dvojice je

$M_1 = F_1.p_1 = F_1 \,.\, \overline{AB}\cos 30^\circ$

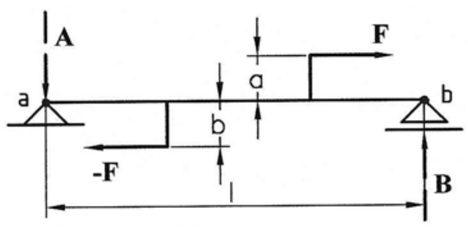
$= 65 \,.\, 0{,}8.\cos 30^\circ = 45{,}03$ Nm

Iná ekvivalentná dvojica s (rovnakým!) momentovým účinkom čo do veľkosti a zmyslu, pôsobiaca v bodoch c, d je

$M_2 = F_2.p_2 = M_1$, z čoho vyplýva veľkosť sily F_2

$$F_2 = \frac{M_1}{p_2} = \frac{45{,}03}{1{,}2} = 37{,}52 \text{ N}$$

Príklad 2.8: Určite reakcie **A** a **B** nosníka zaťaženého silami **F** a **-F** podľa obr. 2.21



Obr. 2.21

Zaťažujúce sily tvoria silovú dvojicu o momente

$$M_i = -F(a+b)$$

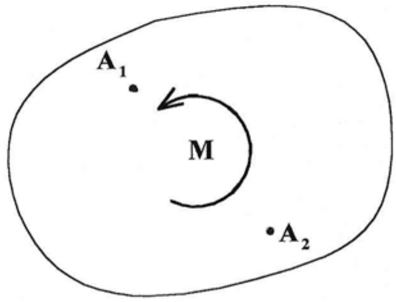
Reakcie **A**, **B** musia pri rovnováhe tvoriť tiež silovú dvojicu, a teda ak je známy smer reakcie **B** musí byť $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$.

Podľa rovnice 2.24 potom možno napísať

$\sum M_i = -F(a + b) + A \,.\, l = 0$ a odtiaľ $A = B = \dfrac{F(a+b)}{l}$.

Predpokladaný smer reakcií bol zvolený správne, pretože hodnoty A, B sú kladné.

Zo vzťahu pre M vyplýva, že **moment dvojice nezávisí na polohe momentového bodu a teda je ku všetkým bodom roviny rovnaký**. Treba ešte raz zdôrazniť, že **silová dvojica má na teleso len krútiaci účinok** - rovnaký okolo každého bodu roviny - vyjadrený veličinou M - momentom dvojice.



Obr. 2.22

V rovine dokonale tuhého telesa môžeme účinok dvojice znázorniť napr. tak, ako ukazuje obr. 2.22, t. j. orientovaným oblúčikom a veličinou M [Nm].

Ak na teleso pôsobia viaceré silové dvojice, je výsledný točivý účinok daný momentom

$M = \sum M_i = \sum F_i p_i$ (2.25)

Z charakteru silovej dvojice ako bola už popísaná vyplývajú nasledujúce vety, ktoré súvisia s riešením statickej ekvivalencie a rovnováhy silových dvojíc:

- Silovú dvojicu možno v rovine ľubovoľne posunúť a natočiť.
- Danú dvojicu $(\overset{\curvearrowleft}{F_i p_i})$ možno nahradiť ľubovoľnou inou dvojicou $(\overset{\curvearrowleft}{F_j p_j})$, keď je splnená rovnica $F_i p_i = F_j p_j$ a zmysel točivého účinku má rovnaký.
- Dvojica sa nedá nahradiť jedinou silou, teda sila a dvojica nemôžu byť ekvivalentné (momenty sily k rôznym bodom roviny sú všeobecne rôzne, zatiaľ čo momenty dvojíc sú rovnaké).
- Dvojica môže byť v rovnováhe s inou dvojicou len vtedy, keď jej točivý účinok $(\overset{\curvearrowleft}{M})$ možno zrušiť točivým účinkom inej dvojice opačného zmyslu $(-\overset{\curvearrowright}{M})$.

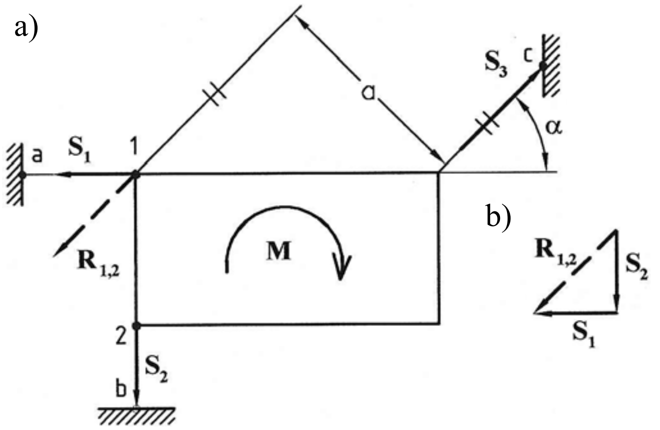
Z posledných dvoch viet vyplývajú i podmienky statickej ekvivalencie a rovnováhy. Pre sústavy M_i a M_j ($i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,m$) musí byť splnená rovnica

$$\boxed{\sum M_i \pm \sum M_j = 0}$$, pričom znamienka (2.26)

v rovnici značia (-) ... ekvivalenciu

(+) ... rovnováhu .

Príklad 2.9: Určite osové sily v prútoch nesúcich dosku zaťaženú momentom M, keď vlastnú tiaž dosky možno zanedbať.



Pri zaťažení telesa momentom M musia hľadané osové sily v prútoch tvoriť silovú dvojicu.

Napr. $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$ majú výslednicu

$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$,

ktorá so silou $\mathbf{S}_3$ vytvára dvojicu.

Obr. 2.23

potom $S_3 \cdot a - M = 0$

$$S_3 = R_{12} = \frac{M}{a}$$

zo známej sily $\mathbf{R}_{12}$ určíme zložky S_1 a S_2 (obr. 2.23b),

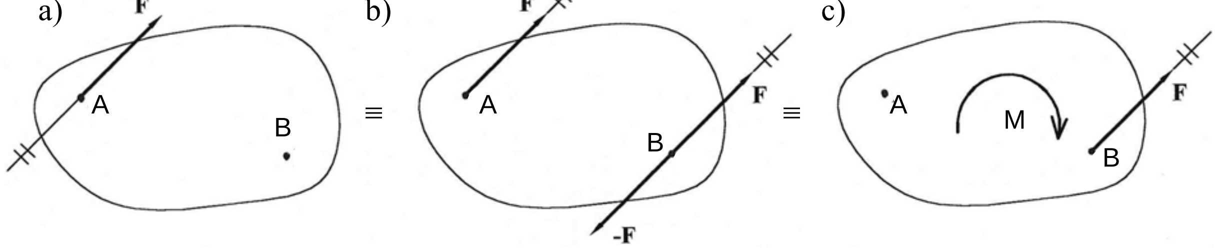
$S_1 = R_{12}.\cos\alpha$, $S_2 = R_{12}.\sin\alpha$

Poznámka: Riešenie s rovnakým výsledkom môžeme vykonať samozrejme aj pre inú kombináciu síl.

2.2.3 Preloženie sily na telese a skladanie sily a dvojice síl

Silu na dokonale tuhom telese možno preložiť do ľubovoľného bodu telesa, ak v rovine danej nositeľkou sily a týmto bodom pridáme silovú dvojicu, ktorej moment sa rovná statickému momentu sily v pôvodnej polohe k bodu prekladu.

Dôkaz tejto dôležitej vety pre riešenie úloh v technickej praxi je zrejmý z nasledujúceho obr. 2.24.



Obr. 2.24

Podľa axiómy o pridaní rovnovážnej sústavy síl (ods. 1.2.3) **F**, **-F** →B (→...označenie miesta sily) v obr. 2.24b je sústava ekvivalentná (≡...označenie pre ekvivalenciu) so sústavou na obrázku 2.24a i sústavou na obrázku 2.24c.

Takže

$$\boxed{\mathbf{F} \rightarrow A \equiv \mathbf{F} \rightarrow B, \qquad M = F.p} \tag{2.27}$$

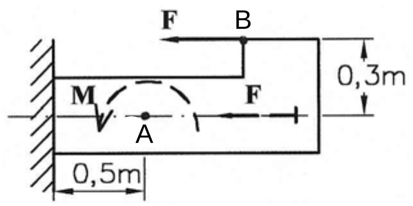
Čo je vlastne vyjadrenie skôr vyslovenej vety o preložení sily.

Všimnúť si treba tiež, že ak postupujeme v obr. 2.24a,b,c obrátene, **silu F a moment M možno nahradiť inou silou F** posunutou o vzdialenosť

$$p = \frac{M}{F},$$

s tým, že zmysel otáčavého účinku oboch sústav (obr. c, a) musí byť rovnaký.

Príklad 2.10: Nahraďte silu F = 360 N pôsobiacu v bode B silou a momentom v bode A (obr. 2.25).

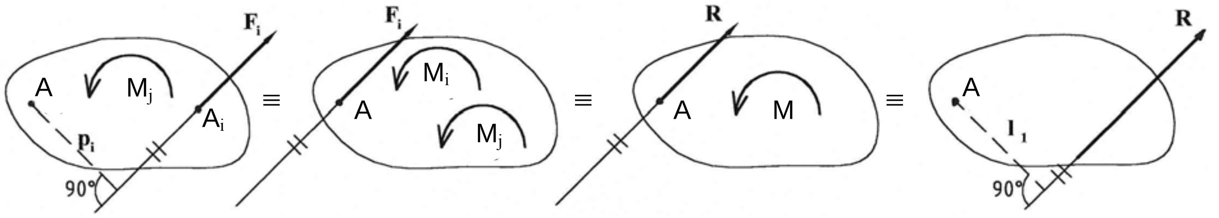


Obr. 2.25

Ekvivalentná sústava v bode A je sila F = 360 N a moment M = F . 0,3 = = 360 . 0,3 = 108 Nm.

2.2.4 Redukcia všeobecnej rovinnej silovej sústavy

Podľa poznatkov uvedených v predošlej kapitole môžeme nakresliť nasledujúcu schému redukcie silovej sústavy a momentov (obr. 2.26)



⇓ ⇓ to možno napísať ⇓ ⇓

$\mathbf{F}_i \rightarrow A_i$ M_j	$\mathbf{F}_i \rightarrow A$ $M_j, M_i = F_i.pi$	$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ $M = \sum M_i + M_j$	$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ $h = \dfrac{M}{R}$

Obr. 2.26

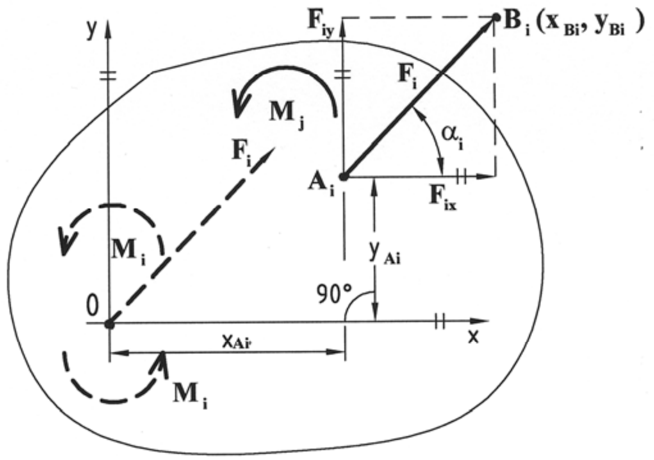
2.2.4.1 Analytické (výpočtové) riešenie

Postupujme tak, ako je riešená redukcia v poradí po sebe idúcich obrázkoch v schéme 2.26.

V technických výpočtoch býva zvyčajne dané F_i, $A_i(x_i, y_i)$, α_1, M_j ($i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,m$) v ortogonálnej súradnicovej sústave. Inokedy môžu byť zadané smery síl pomocou súradníc bodov $\overline{A_i B_i}$ na sile $\mathbf{F}_i$, ako tomu je na obr. 2.27

Pri zadaní síl pomocou $\overline{A_i B_i}$ je zrejmé, že

$$\cos\alpha_i = \frac{(x_B - x_A)}{\overline{A_i B_i}} \quad , \qquad \sin\alpha_i = \frac{(y_B - y_A)}{\overline{A_i B_i}} \tag{2.28}$$



$$\overline{A_i B_i} = \sqrt{(x_B - x_A)_i^2 + (y_B - y_A)_i^2}$$

Poznámka: Aby bol obrázok prehľadný, je zo všetkých síl a momentov sústavy v ňom nakreslená iba jediná sila $\mathbf{F}_i$ a jeden moment M_j.

Obr. 2.27

Postup riešenia usporiadajme do štyroch krokov odpovedajúcich obrázku 2.26.

1. Sily F_i preložíme do bodu 0. Vznikne zväzok síl $\mathbf{F}_i$ v bode 0 a sústava momentov

$$M_i = x \,.\, F_{iy} - y.F_{ix} \tag{2.29a}$$

2. Vykonajme redukciu síl a určime ich veľkosť

$$R_x = \sum_1^n F_{ix} = \sum_1^n F_i \cos\alpha_i$$

$$R_y = \sum_1^n F_{iy} = \sum_1^n F_i \sin\alpha_i \;,$$

$$\text{z čoho } R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}, tg\alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R = \text{arctg}\frac{R_y}{R_x} \tag{2.29b}$$

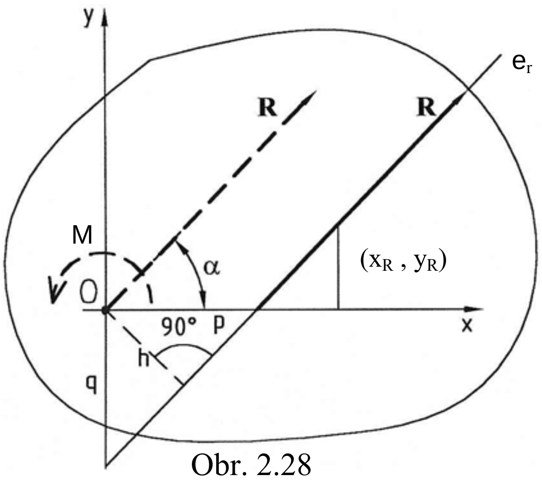
3. Po redukcii momentov silových rovníc je výsledný moment

$$M = \sum_1^n M_i + \sum_1^m M_j = \sum_1^n (x.F_y - y.F_x)_i + \sum_1^m M_j \,. \tag{2.29d}$$

4. Vzniknutú sústavu R, M nahradíme výslednou silou posunutou o vzdialenosť h, ako ukazuje obr. 2.28.

$$\text{Posunutie} \qquad h = \frac{M}{R} \tag{2.29e}$$

Pozor! Zmysly momentov M a R . h musia byť zhodné $\Rightarrow \overset{\curvearrowleft}{M}, \; \overset{\curvearrowleft}{R\,.\,h}$.



Obr. 2.28

Pretože $M = \sum(xF_y - yF_x) + M_j$,

môžeme napísať

$$R\,.\,h = \sum(xF_y - yF_x) + M_j \tag{2.30}$$

Rovnica (2.30) **vyjadruje Varignonovú momentovú vetu** pre všeobecnú rovinnú sústavu síl. Možno ju slovne vyjadriť takto:

Moment výslednice všeobecnej rovinnej sústavy síl k ľubovoľnému bodu roviny je rovný algebraickému súčtu momentov (od síl a silových dvojíc) k tomu istému bodu roviny.

Z uvedenej vety možno o. i. určiť tiež súradnice miesta výslednice všeobecnej rovinnej sústavy pomocou jej zložiek R_x a R_y.

Podľa rovnice (2.30) a obr. 2.28 pre ktorýkoľvek bod na nositeľke e_r platí

$$M = R \,.\, h = x_R R_y - y_R R_x \tag{2.31}$$

odkiaľ pre ľubovoľne zvolenú súradnicu x_R možno určiť

$$y_R = \frac{x_R . R_y - M}{R_x} \tag{2.36}$$

Pri vlastnom výpočte dĺžky úsekov súradníc uvažujeme buď y_R alebo x_R v počiatku, teda $y_R = 0$, alebo $x_R = 0$. Po ich dosadení do rovnice získame hľadané súradnice bodov, v ktorých výslednica tieto osi pretína (obr. 2.28).

$$p = \frac{M}{R_y} \qquad q = \frac{-M}{R_x} \tag{2.37}$$

Z obr. 2.26 je zrejmé, že **vo všeobecnom prípade možno rovinnú sústavu síl a momentov (redukovať) nahradiť jedinou silou R**, pričom môžu nastať tieto štyri prípady:

1. **R** ≠ 0; M ≠ 0 → sústava sa redukuje na jedinú silu **R**, ktorá neprechádza zvoleným počiatkom súradnicovej sústavy.

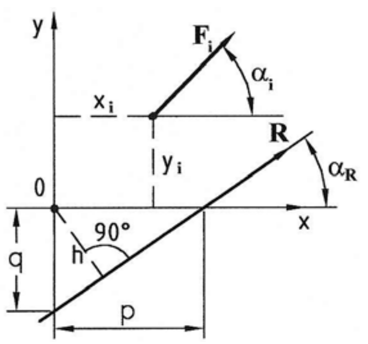
2. **R** ≠ 0; M = 0 → počiatok súradnicovej sústavy bol zvolený na nositeľke výslednice **R**,

3. **R** = 0; M ≠ 0 → sústava sa redukovala len na výsledný moment (dvojicu).

4. **R** = 0; M = 0 → sústava je v rovnováhe.

Najčastejšie sa vo výpočtoch v statike využíva 4. prípad, ktorý vyjadruje rovnovážny stav všeobecnej rovinnej sústavy (podrobnejšie ďalej, ods. 2.2.5).

Príklad 2.11: Určite výpočtom výslednicu síl F_1 = 1200 N, F_2 = 1500 N, F_3 = 800 N, F_4 = 2000 N, ktoré zvierajú s kladnou osou x uhly $\alpha_1 = 45^o$, $\alpha_2 = 120^o$, $\alpha_3 = 250^o$, $\alpha_4 = 330^o$ a majú súradnice pôsobísk A_1 (2; 3) m, A_2 (-3; 2) m, A_3 (-4; -1) m, A_4 (3; -4) m, (obr. 2.29).



Obr. 2.29

Poznámka: Zadané hodnoty je vhodné, ako sme už uviedli pri ručnom spôsobe výpočtu, usporiadať do tabuľky. Takto usporiadaný výpočet a jeho postupne získavané dielčie výsledky umožňuje pôsobenie síl v sústave analyzovať, resp. ľahko výsledok redukcie prepočítať, ak by v silovej sústave nastali neskôr zmeny.

Tab. 2.3

i	F_i [N]	α_i [^{o}]	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	Súradnice pôsobísk síl		Priemety síl do súradnicových osí		Momenty zložiek k počiatku	
					x_i [m]	y_i [m]	$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$ [N]	$F_{iy} = F_i \sin\alpha_i$ [N]	$-F_{ix} . y_i$ [Nm]	$F_{iy} . x_i$ [Nm]
1	1200	45	0,707	0,707	2	3	849	849	-2547	1698
2	1500	120	-0,500	0,866	-3	2	-750	1299	1500	-3897
3	800	250	-0,342	-0,940	-4	-1	-274	-752	-274	3008
4	2000	330	0,866	-0,500	3	-4	1732	-1000	6928	-3000
					$\sum_{i=1}^{4}$		R_x=1557	R_y=396	5607	-2191
									$M_{(0)}$=3416	

- Veľkosť výslednice **R**: R = $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1557^2 + 396^2}$ = 1607 N

- Smer výslednice, resp. jej uhol α_R

$$\alpha_R = \text{arctg}\,\frac{396}{1557} = 14^{o}16'$$

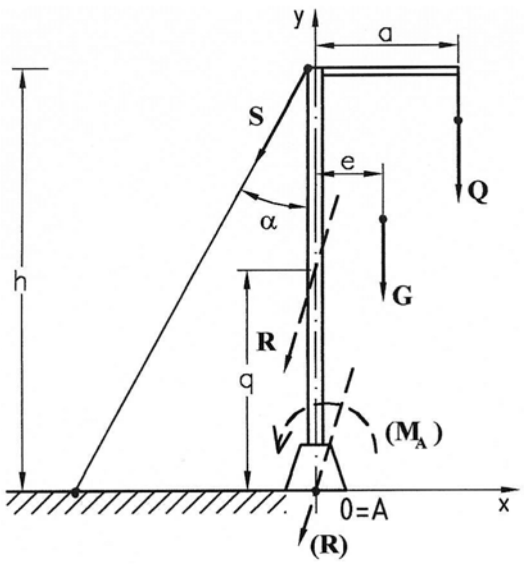
- Nositeľka výslednice pretína osi x, y v úsekoch

$$p = \frac{M_{(O)}}{Ry} = \frac{3416}{396} = 8{,}62\text{m a } q = \frac{-M_{(O)}}{Rx} = -\frac{3416}{1557} = -2{,}19\text{ m}$$

- Vzdialenosť nositeľky výslednice od počiatku súradnicovej sústavy

$$h = \frac{M_{(O)}}{R} = \frac{3416}{1607} = 2{,}125\text{ m.}$$

Príklad 2.12: Na stožiar trolejového vedenia (obr. 2.30) pôsobia sily **S**, **G** a **Q**. Určite výslednicu **R** a jej priesečník (q) s osou stožiaru.



Obr. 2.30

$R_x = -\,S\sin\alpha$

$R_y = -S\cos\alpha - G - Q$

$R = \sqrt{(-S\sin\alpha)^2 + (-S\cos\alpha - G - Q)^2}$

$\alpha_R = \text{arctg}\,\dfrac{-(S\cos\alpha - G - Q)}{-S.\sin\alpha}$

$M_A = S.\,h\,.\,\sin\alpha - G.e - Q.a$

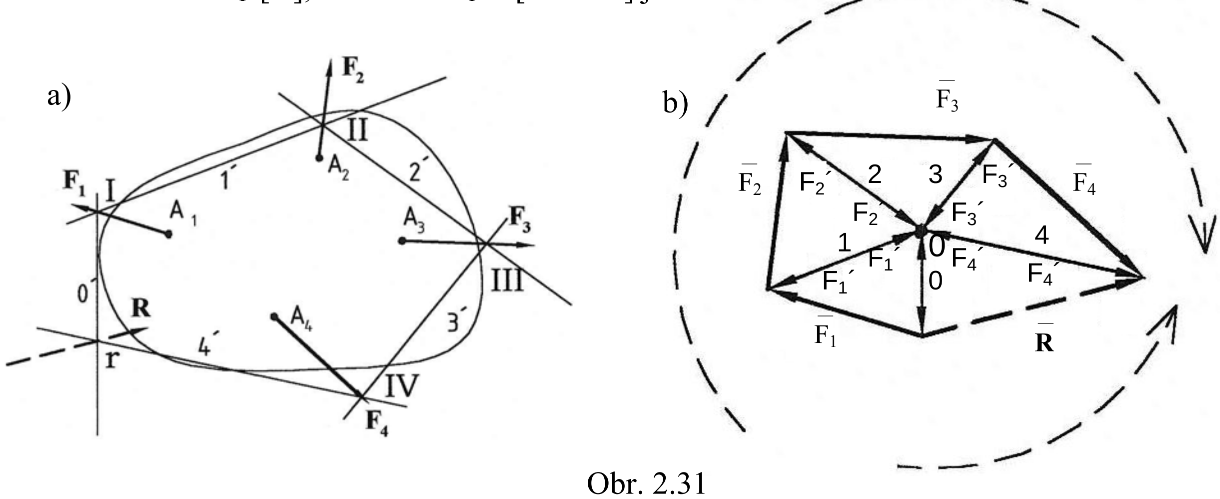
Z momentovej vety (2.37) určíme súradnicu

$$q = -\frac{M_A}{R_x} = \frac{S.h.\sin\alpha - G.e - Q.a}{S.\sin\alpha}$$

2.2.4.2 Grafické riešenie

Vieme už, že všeobecnú rovinnú sústavu osamelých síl spojitého zaťaženia a momentov možno na dokonale tuhom telese nahradiť sústavou len osamelých síl (momenty ako silové dvojice a spojité zaťaženia náhradnými bremenami). Preto grafické riešenie vykonáme pre sústavu osamelých síl.

Majme sústavu osamelých síl $\mathbf{F}_i$ (i = 1,2,...,n) na obr. 2.31a. Výslednicou **R** tejto sústavy je $\mathbf{R} = \sum_{1}^{n} F_i$. Pri grafickom riešení rovinného zväzku síl (2.1.1.2) je výslednica daná uzatváracou stranou $\overline{R}$ v silovom mnohouholníku a smeruje proti zmyslu obehu jej zložiek (obr. 2.31b). Po odmeraní dĺžky strany $\overline{R}$ v [mm] v obr. 2.31b vypočítame výslednicu zo vzťahu R = $\overline{R}$. m_F [N], v ktorom m_F = [N.mm^{-1}] je mierka síl.



Obr. 2.31

Polohu výslednice rovinnej sústavy (v rovinnom zväzku síl sme polohu výslednice už popredu poznali - priamo z axiómy o rovnobežníku síl totiž vyplýva, že musí prechádzať spoločným priesečníkom!) určíme takto:

- zvolíme vhodne tzv. pól 0 a v silovom (zložkovom) obrázku 2.31b nakreslíme pólové lúče 0,1,...,n,
- z ľubovoľného bodu I na nositeľke sily $\mathbf{F}_1$ (2.31a) vedieme rovnobežky 0´, 1´s lúčmi 0,1. Rovnobežku 0´vedieme až k priesečníku II so silou $\mathbf{F}_2$. Z bodu II pokračujeme rovnobežkou 2´až k bodu III na sile $\mathbf{F}_3$ atď. (Lomená čiara 0´, 1´, 2´,...n´ sa nazýva **vláknový mnohouholník**, **prípadne výslednicová čiara**), v literatúre sa uvádza aj názov **pólový obrazec**. Všetky pomocné sily prechádzajú v silovom obrazci cez spoločný pól – **pól 0** a vytvárajú **pólový obrazec**,
- priesečníkom r prvého (0´) a posledného (n´) vlákna (musí !) prechádza výslednica R celej sústavy.

Statická podstata riešenia je v tom, že v zložkovom obrazci (obr. 2.31b) je každá sila fiktívne nahradená dvoma zložkami F_i'a F_i'' , a to tak, že platí

$$\mathbf{Fi''} = - \mathbf{F'}_{2+1}$$

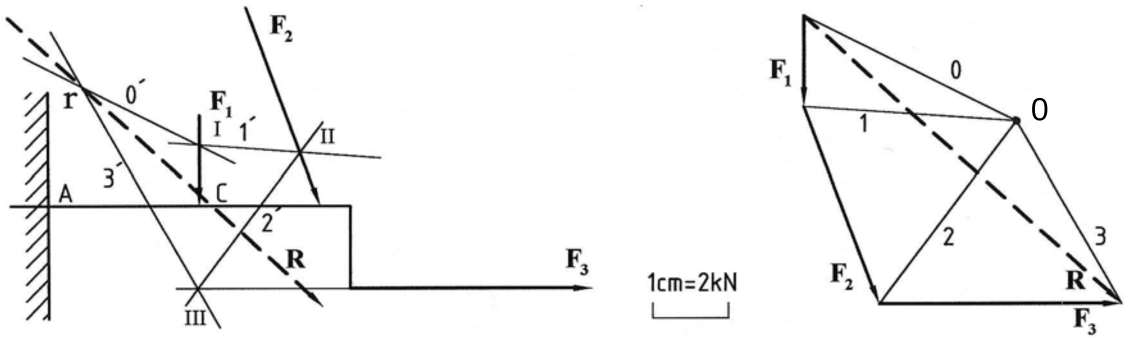
a jej zložky $\mathbf{Fi''}$ a $\mathbf{F'}_{2+1}$ ležia na telese na spoločnej nositeľke (i´), pritom ich účinok je ale na teleso nulový (nulový vektor).

Z rovnice $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \sum(F_i' + F_i'') = \mathbf{F}_i'$a $\mathbf{F}_1'' + ... \mathbf{F'}_{n-1} + \mathbf{F'}_n + \mathbf{F''}_n = \mathbf{F'}_1 + \mathbf{F''}$ vyplýva, že výslednica R je daná tiež súčtom vektorov $\mathbf{F'}_1$ a $\mathbf{F''}_n$, ktorá leží na nositeľkách 0´ a n´ a prechádza teda ich priesečníkom r (obr. 2.31a).

Statickú podstatu možno zdôvodniť tiež aj ako priamy dôsledok Varignonovej vety (2.30) → Momenty síl v zložkovom obrazci sú v rovnováhe s ich výslednicou k ľubovoľne zvolenému pólu bodu 0.

Poznámka: Iná poloha pólu by mala za následok nutne iný tvar zložkového i vláknového mnohouholníka, ale výsledok - sila **R** (ako vyplýva z dôkazu) by bola vždy rovnaká. V prípade inej voľby bodu I na sile $\mathbf{F}_1$ by napr. vznikol iný (väčší, alebo menší) mnohouholník, rovnobežný s tým, ktorý je nakreslený na obrázku 2.31a (pri nevhodnej polohe bodu I dokonca so stranami - vláknami mimo nákresňu).

Príklad 2.13: Určite graficky výslednú silu R zaťažujúcu votknutý rám. Je dané: $\mathbf{F}_1 = 2{,}4$ kN, $\mathbf{F}_2 = 5{,}6$ kN, $\mathbf{F}_3 = 6{,}6$ kN. Mierka síl je $m_F = 0{,}2$ kN.mm^{-1}, mierka dĺžok $m_F = =0{,}02$ m.mm^{-1}.



Obr. 2.32

Výslednica prechádza bodom r a má veľkosť $R = \overline{R} \cdot m_F = 60 \cdot 0{,}2 = 12$ kN a pretína rám vo vzdialenosti $\overline{AC} = 0{,}28$ m.

2.2.5 Rovnováha všeobecnej rovinnej sústavy síl

Rovnováha všeobecnej rovinnej sústavy nastane vtedy, keď budú splnené podmienky nulového účinku síl celej sústavy

$$\boxed{\mathbf{R} = 0 \quad ; \quad M = 0} \tag{2.39}$$

2.2.5.1 Analytické riešenie rovnováhy

Pre analytické riešenie prepíšeme uvedené podmienky rovnováhy (2.39) vo vektorovom vyjadrení vo zvolenej súradnicovej sústave na rovnice skalárneho typu

①
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_i = 0 \end{array}} \tag{2.40}$$

Rovnice v takomto tvare predstavujú **základný tvar podmienok** rovnováhy všeobecnej rovinnej sústavy síl. (Sily dvojíc sú zahrnuté v ostatných silách).

Pri rovnováhe všeobecnej rovinnej sústavy síl v rovine je algebraický priemet všetkých síl vo dvoch smeroch (zvyčajne navzájom kolmých) a algebraický súčet momentov všetkých síl a dvojíc k ľubovoľnému bodu roviny rovný nule.

Okrem základného tvaru možno použiť i alternatívne, ďalšie kombinácie rovníc rovnováhy

②
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum F_x = 0 \end{array}} \tag{2.40a}$$

③
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{array}} \tag{2.40b}$$

kde $C \notin \overline{AB}$

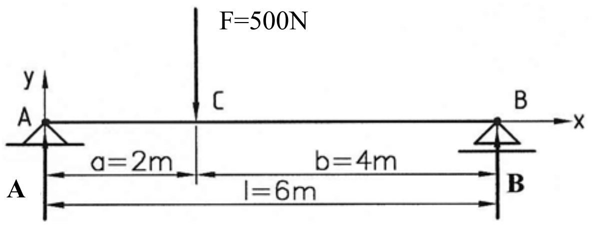
V týchto výrazoch sú zložkové rovnice z časti alebo úplne nahradené momentovými . **Momentovú podmienku M_i, ktorá ako jediná obsahuje polohové parametre zo základného tvaru nie je možné vypustiť!**

Pri číselnom riešení úloh je treba k jednotlivým formám pripojiť ešte kontrolnú podmienku (rovnicu):

① → $\sum M_A = 0$, ② → $\sum F_{iy} = 0$, ③ → $\sum F_{ix} = 0$

(Týmito rovnicami možno overiť správnosť vykonaného riešenia).

Príklad 2.14: Na nosníku (obr. 2.33) zaťaženom (⊥) osamelou silou F = 500 N určite reakcie A, B.



Obr. 2.33

Na riešenie využime napr. dve podmienky momentové a jednu zložkovú (2.40b → ②).

$\sum M_A = 0$; $B \cdot l - F \cdot a = 0$

$\sum M_B = 0$; $-A \cdot l + F \cdot b = 0$

$\sum F_{ix} = 0$

Odkiaľ (všimnime si, že pri tejto alternatíve použitých rovníc rovnováhy každá z rovníc obsahuje iba jednu ! neznámu) dostávame:

$$B = \frac{F.a}{l} = \frac{500.2}{6} = 166{,}7 \text{ N}$$

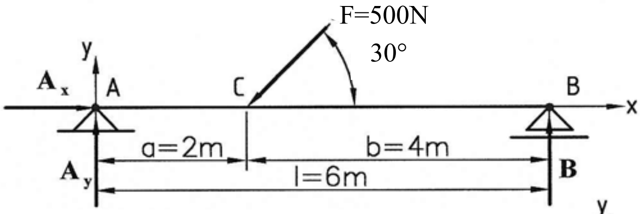
$$A = \frac{F.b}{l} = \frac{500.4}{6} = 333{,}3 \text{ N}$$

$\sum F_{ix} = 0$ ... podmienka je zjavne splnená! Na nosníku nepôsobia v smere osi x žiadne (vodorovné) sily.

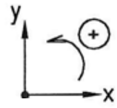
Na kontrolu správnosti výsledkov použime v danom prípade rovnicu $\sum F_{iy} = 0$;

$A + B - F = 166{,}7 + 333{,}3 - 500 = 0$ → riešenie vyhovuje (je správne)!

Príklad 2.15: Na nosníku (obr. 2.34) zaťaženým osamelou šikmou silou F = 500 kN pod uhlom $\alpha = 30^o$ určite reakcie $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, **B**.



Obr. 2.34



Rovnako ako v príklade 2.7 i teraz využijeme tú istú alternatívu rovníc rovnováhy, takže:

$\sum M_A = 0$: $B \,.\, l - F\sin\alpha \,.\, a = 0$

$\sum M_B = 0$: $-A_y \,.\, l + F\sin\alpha \,.\, b = 0$

$\sum F_{ix} = 0$: $A_x - F\cos\alpha = 0$

odtiaľ $$B = \frac{F.\sin\alpha.a}{l} = \frac{500.0,5.2}{6} = 83,33 \text{ N}$$

$$A_y = \frac{F.\sin\alpha.b}{l} = \frac{500.0,5.4}{6} = 166,67 \text{ N}$$

$\sum F_{ix} = 0 : A_x - F\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = F\cos30^o = 500 \,.\, 0,866 = 433$ N

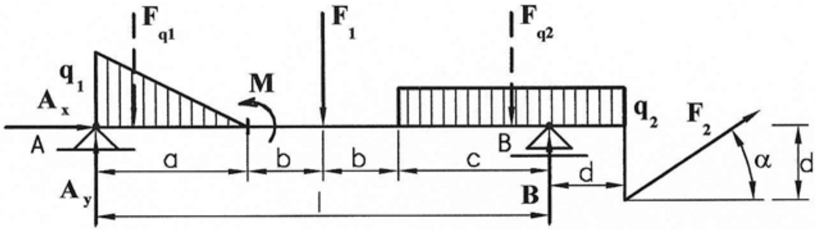
a opäť kontrola správnosti $\sum F_{iy} = 0$: $A_y + B - F_y = 166,7 + 83,3 - 500 \,.\, 0,5 = 0$

$\sum F_{iy} = 0$: $A_y + B - F_y = 166,7 + 83,3 = -500 \,.\, 0,5 = 0 \quad \rightarrow$ vyhovuje!

Pozn.: - Sila A_x vyšla kladná, t. j. náš predpoklad o zmysle jej pôsobenia v obr. 2.34 bol správny (v opačnom prípade, keby vyšlo znamienko záporné - zmýlili sme sa - sila by mala opačný zmysel).

- Vieme, že reakcia v podpere B s ohľadom na jej triedu (tab. 1.1), môže byť len zvislá!

Príklad 2.16: Na nosníku zaťaženom osamelými silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, momentom M a spojitými zaťaženiami určite reakcie $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}$ (obr. 2.35).



Obr. 2.35

Pozn.: Dohovor o orientácii (zmysle a smere) síl a momentov sa zvyčajne už nekreslí.

Spojité zaťaženia o intenzitách q_1, q_2 [N/mm] nahradíme náhradnými bremenami $\mathbf{F}q_1$ a $\mathbf{F}q_2$ (silami v ťažisku obrazov trojuholníka a obdĺžnika).

$Fq_1 = \frac{1}{2}\ q_1 \ .\ a$ ...pôsobí v jednej tretine dĺžky a základne trojuholníka

$Fq_2 = q_2\ (c + d)$ ...pôsobí uprostred dĺžky (c + d).

Na riešenie použijeme dve podmienky momentové a jednu silovú:

$$\sum M_A = 0:\ -F\ q_1 \ .\ \frac{a}{3} + M - F_1\ (a + b) - Fq_2\ .\ (1 - \frac{c-d)}{2}) + F_2\ \sin\alpha\ (1 + d) + F_2\cos\alpha\ .\ d + B\ .\ l = $$
$$= 0$$

$$\sum M_B = 0:\ -A_y\ .\ l + Fq_1\ (1 - \frac{a}{3}) + M + F_1\ (b + c) + Fq_2\ .\ \frac{c-d}{2} + F_2\cos\alpha\ .\ d + F_2\sin\alpha\ .d = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0\ :\ A_x + F_2\cos\alpha = 0$$

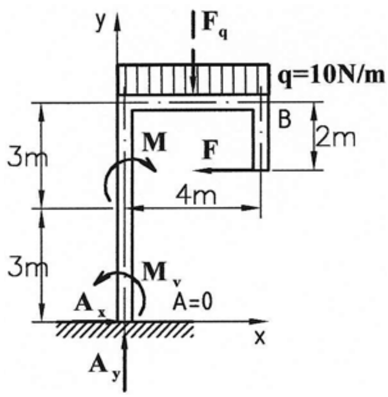
O správnosti výpočtu sa možno presvedčiť na konkrétne zadaných hodnotách, napr. $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 4$ kN, $q_1 = 1$ kN.m^{-1}, $q_2 = 0{,}5$ kN.m^{-1}, M = 2 kN m, $\alpha = 30^{O}$, a = 3 m, b = 1 m, c = 2,5 m, d = 1,5 m .

Po dosadení do rovníc rovnováhy dostaneme:

$A_x = -3{,}464$ kN, $A_y = 3{,}726$ kN, $B = -0{,}226$ kN

Kontrolou správnosti sa z podmienky rovnováhy $\Sigma F_{iy} = 0$, $A_y - Fq_1 - F_1 - Fq_2 + B + F_2.\sin\alpha = 0$ presvedčíme, či je riešenie správne.

Príklad 2.17: Určite reakcie vo votknutí A rovinného rámu. Rozmery i zaťaženia sú zrejmé z obr. 2.36.



Obr. 2.36

Nahradené bremeno je $F_q = q.4 = 40$ kN, F = 20 kN, M = 30 kNm.
Na určenie reakcií A_x, A_y a M_v (moment vo votknutí - okolo bodu A) použijeme základný tvar podmienok rovnováhy:

$\sum F_{ix} = 0$: $\quad A_x - F = 0$

$\sum F_{iy} = 0$: $\quad A_y - F_q = 0$

$\sum M_A = 0$: $\quad - M - F_q \,.\, 2 + F \,.\, 4 + M_v = 0$

Po dosadení hodnôt zo zadania postupne obdržíme

$$A_x = 20 \text{ kN},\ A_y = 40 \text{ kN},\ M_v = 30 \text{ kNm}$$

Z kontrolnej rovnice ($\sum M_B = 0$ je) po dosadení a výpočte zistíme

$M_v - M - A_y \,.\, 4 + A_x \,.\, 6 + F_q.2 - F.2 = 30 - 30 - 40 \,.\, 4 + 20 \,.\, 6 + 40 \,.\, 2 - 20 \,.\, 2 = 0 \rightarrow$
Riešenie je správne.

2.2.5.2 Grafické riešenie rovnováhy

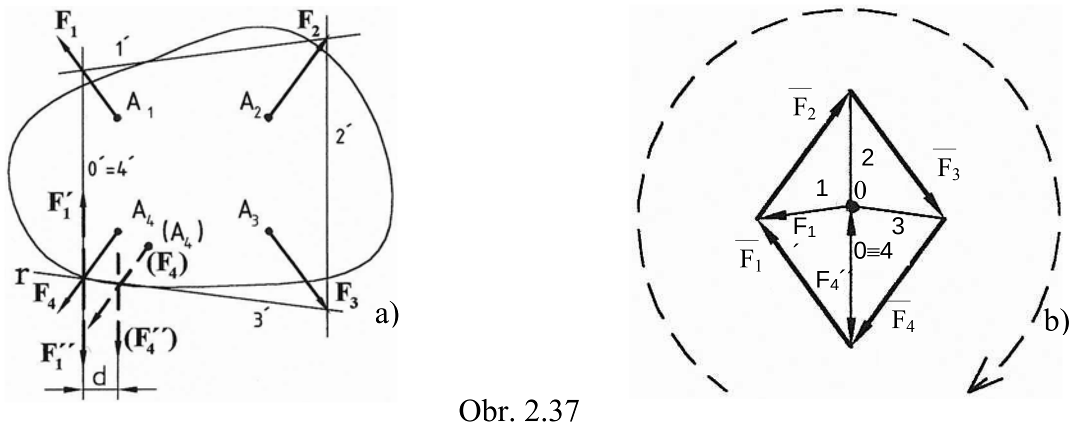
Ak má byť sústava síl $\mathbf{F}_i$ v rovnováhe, musí byť splnená podmienka

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \tag{2.41}$$

Vtedy zrejme i pre jednotlivé zložky $\mathbf{F}_i'$ a $\mathbf{F}_n''$ platia rovnice

$$\mathbf{F}_i' + \mathbf{F}_n'' = \mathbf{0} \tag{2.42}$$

Pólové lúče 0 a n sa stotožnia (obr. 2.37b) a vlákna 0´a n´ sú kolineárne (obr. 2.37a). Pre n = 4 je 0 ≡ 4 a 0´ ≡ 4 (obr. 2.37).



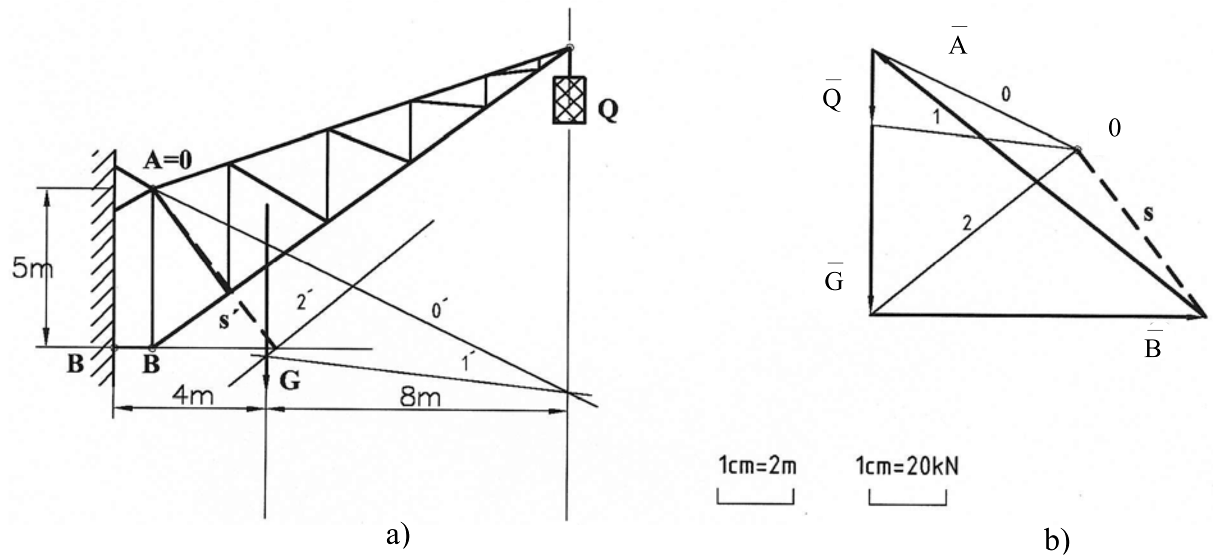
Obr. 2.37

Podmienku rovnováhy všeobecnej rovinnej sústavy síl pri grafickom riešení možno slovne vyjadriť takto:

Všeobecná rovinná sústava síl pri grafickom riešení je v rovnováhe, keď silový obrazec (obr. 2.37b) **opísaný v jednom zmysle je uzavretý a aj jej vláknový (pólový) obrazec** (obr. 2.37a) **je medzi danými silami uzatvorený.**

Poznámka: Keby sila $\mathbf{F}_4$ pôsobila v bode (A_4), potom by sily $\mathbf{F}_1$´a $\mathbf{F}_4$´tvorili silovú dvojicu o veľkosti momentu M = $\mathbf{F}_1$´. d (obr. 2.37a, vyznačené čiarkovane).

Príklad 2.18: Určite graficky reakcie v kĺboch A a B uloženia žeriavu, zaťaženého tiažou G = 50 kN a bremenom Q = 20 kN. Mierka dĺžok je m_l = 0,2 m.mm^{-1} a mierka síl m_F = 2 kN.mm^{-1} (obr. 2.38).



Obr. 2.38

V zložkovom obrazci (2.38b) vynesieme všetky sily $\overline{Q}$ a $\overline{G}$ a smer nositeľky sily $\overline{B}$ (má smer kyvného prúta v mieste B). Ďalej zvolíme pól 0 a nakreslíme pólové lúče.

Vláknový mnohouholník (obrazec) (obr. 2.38a) musíme začať kresliť tak, že ako prvé nakreslíme vlákno 0´, ktoré prechádza bodom A (jediný známy bod reakcie **A**; inak by sme vláknový obrazec medzi silami neuzavreli).

Po odmeraní v obrázku vypočítame $A = \overline{A} \,.\, m_F = 58 \,.\, 2 = 116$ kN

$B = \overline{B} \,.\, m_F = 47 \,.\, 2 = 94$ kN.

V úlohách o rovnováhe síl sa často vyskytuje **úloha uviesť do rovnováhy danú silu F s troma neznámymi silami** na nositeľkách, ktoré sa nepretínajú v spoločnom priesečníku. Graficky sa úloha rieši pomocou **tzv. Culmannovej** (1821 - 1888) **priamky**.

Na obr. 2.39a je nakreslená sila **F** a nositeľky e_1, e_2, e_3 (zatiaľ) neznámych síl na telese $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.

Podľa (2.41) pri rovnováhe musí byť splnená podmienka

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$$

Sily **F** a $\mathbf{F}_1$ majú výslednicu, ktorá prechádza priesečníkom ich nositeliek I.

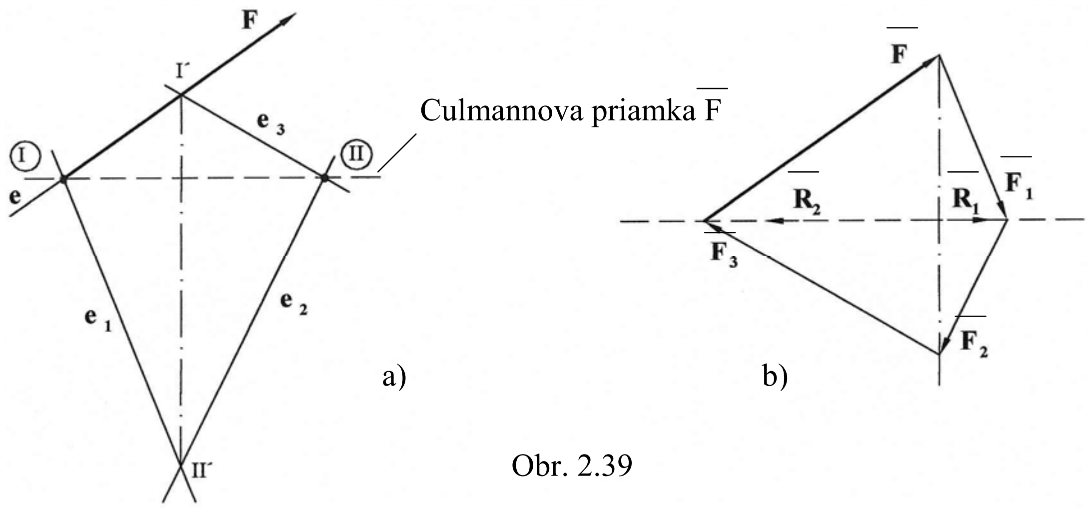
$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1$$

Podobne výslednica síl $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}_3$ prechádza bodom II

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

Pri rovnováhe musia byť $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$ $\Rightarrow$ kolineárne.

Spoločná nositeľka oboch výsledníc je zjavne spojnica $\overline{I,II}$, zvaná Culmannova priamka. Tak získame smer výsledníc $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ a riešenie môžeme vykonať v silovom obrazci (obr. 2.39b).

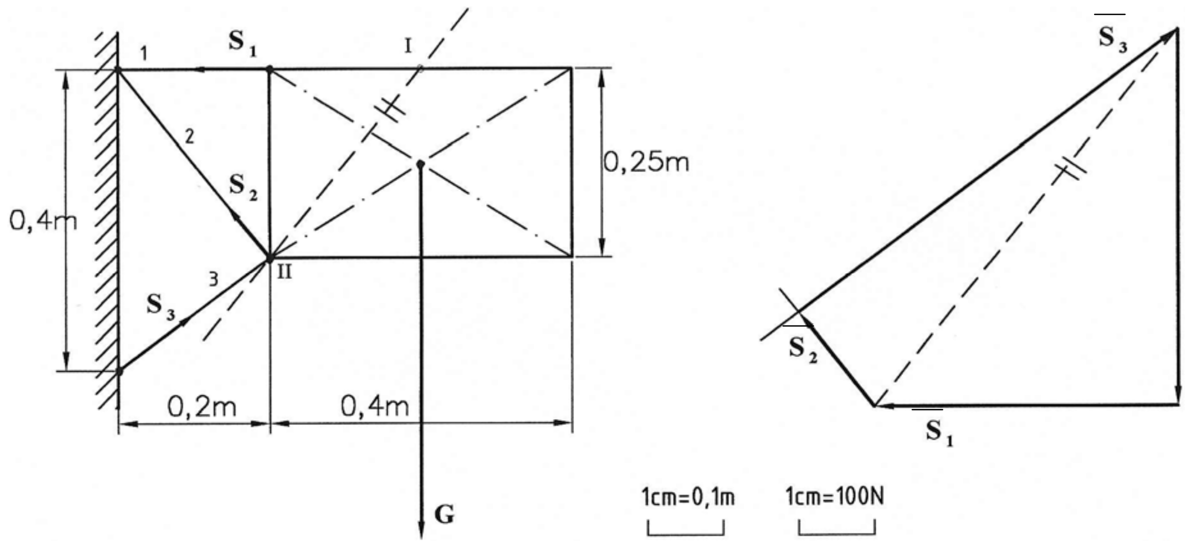


Obr. 2.39

Úloha má ako je zrejmé z obrázku alternatívne riešenia pomocou spojnice $\overline{I'II'}$ a tiež $\overline{I''II''}$ (má však nevhodné umiestnenie).

Dodajme, že v prípade nahradenia sily **F** staticky ekvivalentnými silami (opačná úloha) majú sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ opačný zmysel.

Príklad 2.19: Teleso tiaže G = 500 N je zavesené na konzole z troch prútov. Určite graficky osové sily v prútoch (obr. 2.40).



Obr. 2.40

Výsledok: S_1 = 375N, S_2 = 220N, S_3 = 590N

2.2.6 Statická určitosť úloh

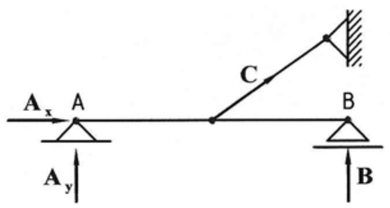
Úloha vo všeobecnej rovinnej sústave síl je staticky určitá, keď neobsahuje viac neznámych než tri a je riešiteľná, (keď nie je výnimočným prípadom).

Statickú ekvivalenciu alebo rovnováhu dvoch silových sústav v rovine $\mathbf{F}_i$ a $\mathbf{F}_j$ (v praktických úlohách sú $\mathbf{F}_j$ zvyčajne druhotné sily - reakcie) možno zapísať rovnicami

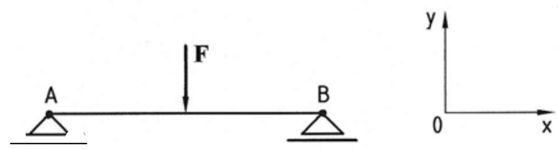
$$\boxed{\begin{aligned} &\sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} = 0 \\ &\sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} = 0 \\ &\sum M_{iA} \pm \sum M_{jA} = 0 \end{aligned}} \qquad (2.43)$$

Rovnice pre analytické riešenia sú tri, čo zodpovedá uvedenej definícii statickej určitosti. Pri väčšom alebo menšom počte neznámych nie je úloha staticky určitá a preto ju riešiť metódami statiky nie je možné.

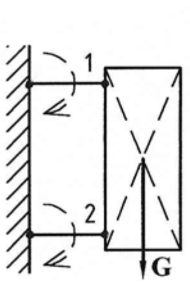
Na obr. 2.41a je úloha staticky neurčitá a na ďalších obr. 2.41b,c,d sú nevhodne usporiadané väzby, tzv. výnimočné prípady usporiadania väzieb.



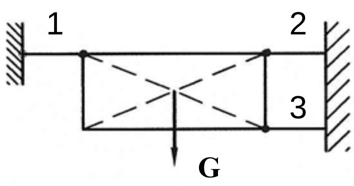
a) úloha 1x staticky neurčitá („preurčená“)



b) úloha 1x staticky neurčitá, $\sum F_{ix} = 0$ („triviálna“)



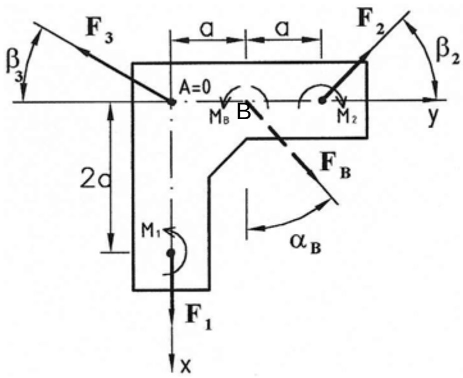
c) pohyblivá sústava



c) rovnováha nastať nemôže, $\sum F_{iy} = G \neq 0$

Obr. 2.41

Príklad 2.20: V rovine dosky pôsobia sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ a momenty M_1, M_2 (obr 2.42). Úlohou je nahradiť účinok tejto sústavy ekvivalentným účinkom inej sústavy - sily $\mathbf{F}_B$ a momentu M_B v bode B.



Obr. 2.42

Je dané: $F_1 = 100$ N, $F_2 = 100$ N, $F_3 = 150$ N, $\beta_2 = 45^o$, $\beta_3 = 30^o$, $M_1 = 30$ Nm, $M_2 = 60$Nm, $Q = 0{,}1$ m

Z rovníc o statickej ekvivalencii oboch sústav vyplýva

$F_1 - F_2.\sin\beta_2 = F_3.\sin\beta_3 + (F_B\cos_B) = 0$

$F_2.\cos\beta_2 - F_3.\cos\beta_3 + (F_B\sin_B) = 0$

$F_2.\sin\beta_2 \,.\, 2a + M_1 - M_2 - (-F_B\cos\alpha_B.\ a + M_B) = 0$

Po dosadení a výpočte dostaneme $F_B = 74{,}78$ N ; $\alpha_B = 232^o{,}76'$; $M_B = -20{,}43$ Nm.

Pozn.: Úloha by mohla znieť i opačne - nájsť inú silovú sústavu, ktorá by bola so zadanou silovou sústavou v rovnováhe. Je zrejmé, že výsledkom riešenia by boli hodnoty F_B a M_B, rovnako veľké, ale opačného zmyslu.

2.2.7 Riešenie sústavy rovnobežných síl

- **Analytické riešenie**

Sústava rovnobežných síl Fi (obr. 2.43) **patrí, ako si ešte ďalej ukážeme medzi veľmi dôležité a časté úlohy riešenia sústav**. Sústava rovnobežných síl je zvláštnym prípadom všeobecnej rovinnej sústavy síl. Výslednica **R** je s danými silami (zložkami) rovnobežná, a jej veľkosť je

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i \qquad (2.44)$$

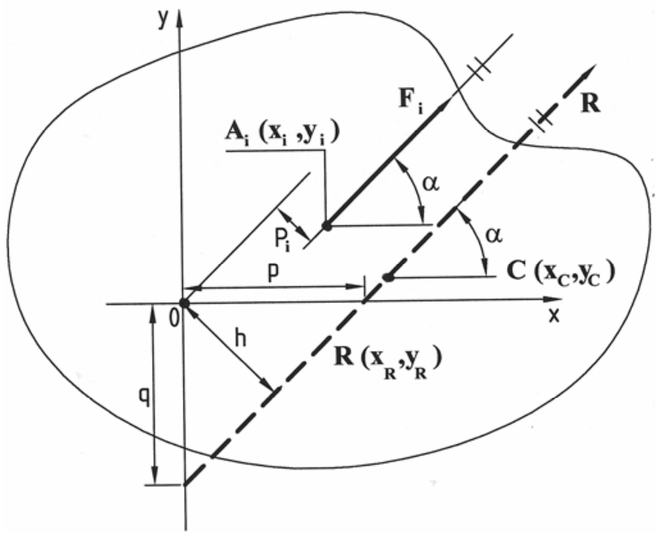
a jej poloha od zvoleného bodu sa určí z momentovej vety (2.30), kde

$$h = \frac{\sum F_i p_i}{R} = \frac{M_o}{R} \qquad (2.45)$$

Momentovú rovnicu možno napísať i vo tvare

$$x_R R_y - y_R R_x = \sum (x_i . F_{iy} - y_i F_{ix}) \qquad (2.46)$$

z ktorej pri voľbe x_R určíme súradnicu y_R bodu **R** výslednice, a pre $y_R(x_R) = 0$ súradnice p (q) priesečníka nositeľky výslednice s osou x(y).



Obr. 2.43

Keď priemety síl do osi súradnicovej sústavy vyjadríme početne pomocou uhlu α, bude

$$x_R R.\sin\alpha - y.R.\cos\alpha =$$
$$= (\sum x_i F_i)\sin\alpha - (\sum y_i F_i)\cos\alpha \qquad (2.47)$$

Riešením rovnice sú samozrejme aj súradnice bodu C (x_C, y_C) výslednice podľa rovníc

$x_C . R = \sum x_i F_i$

$y_C . R = \sum y_i F_i$

Z postupu a rovníc je zrejmé, že súradnice bodu C závisia len na súradniciach pôsobísk A_i a veľkostiach F_i sústavy a že vôbec nezávisia na uhle (α) pootočenia síl. Tento bod sa nazýva tzv. **statický stred** C **sústavy rovnobežných síl**.

Súradnice statického stredu C sú:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \quad , \quad y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} \qquad (2.48)$$

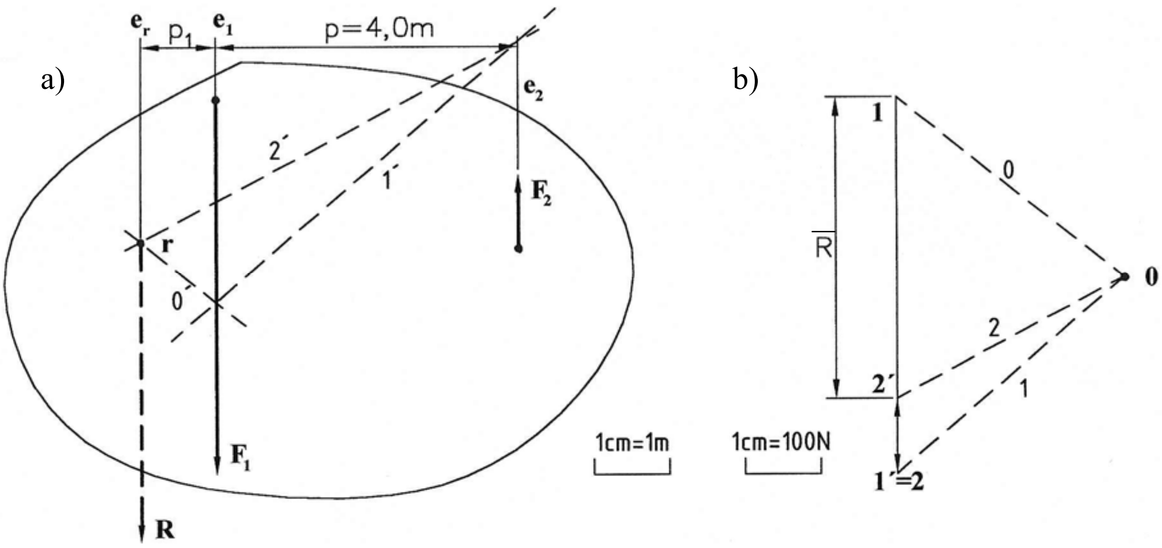
Pre sústavu rovnobežných síl možno vysloviť teda vetu

Ak sa sústava rovnobežných síl otáča okolo svojich pôsobísk, otáča sa ich výslednica okolo jediného bodu - okolo statického stredu sústavy.

Z uvedeného plynie tiež **dôležitý záver, že polohu statického stredu rovnobežnej sústavy síl možno určiť ako priesečník výsledníc pre dva smery pootočenej sústavy**. Zvyčajne sa volia stredy na seba kolmé.

Riešenie možno vykonať opäť buď analyticky alebo graficky pomocou zložkovej a výslednicovej čiary.

Príklad 2.21: Určite graficky a výpočtom veľkosť a polohu výslednice R dvoch rovnobežných síl $\mathbf{F}_1$ = 500 N, $\mathbf{F}_2$ = -100 N, ktoré majú opačný zmysel. Vzdialenosť síl p = 4 m (obr. 2.44).



Obr. 2.44

$$\text{Určovacie úseky síl } \overline{F_1} = \frac{F_1}{m_F} = \frac{500N}{10Nmm^{-1}} = 50 \text{ mm}$$

$$\overline{F_2} = \frac{F_2}{m_F} = \frac{100N}{10Nmm^{-1}} = 10 \text{ mm}$$

- **Grafické riešenie**

Vynesieme do silového obrazca (obr. 2.44b) v príslušných zmysloch $\mathbf{F}_1$ $(\overline{11'})$, $\mathbf{F}_2$ $(\overline{22'})$. V ňom má výslednica určovací úsek $\overline{12'}$ (smeruje dole). Odmeraním zistíme $\overline{R}$ = 40 mm, t. j. $\mathbf{R} = \overline{R}$. m_F = 40 mm. 10 N.mm^{-1} = 400 N.

Polohu výslednice (stačí zistiť jediný bod r, pretože výslednica **R** rovnobežných síl je s nimi rovnobežná) zistíme z vláknového obrazca 2.44a.

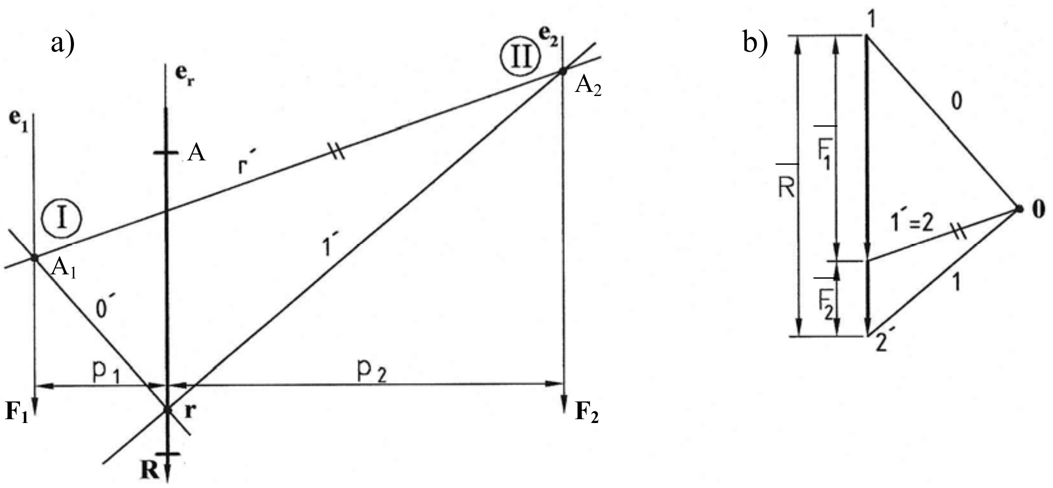
- **Analytické riešenie**

Z momentovej rovnice (2.45)

$$R \,.\, 0 = F_1.p_1 - F_2(p_1 + p) = 500 \,.\, p_1 - 100(p_1\text{-}4{,}0) = 0$$

$$\text{odkiaľ } p_1 = \frac{400}{400} = 1{,}0 \text{ m.}$$

Príklad 2.22: Rozložiť danú silu R na dve rovnobežné sily, ktorých nositeľky sú dané (obr. 2.45) - úloha je opakom predchádzajúcej úlohy v príklade 2.13.



Obr. 2.45

- **Analytické riešenie**

Zvolíme bod otáčania na jednej z neznámych síl (čo zrýchľuje výpočet), napr. na nositeľky sily **F**$_2$ bod A$_2$. Potom podľa momentovej vety (2.45)

$$R.\, p_2 = F_1(p_1 + p_2) \pm p_2 \,.\, 0$$

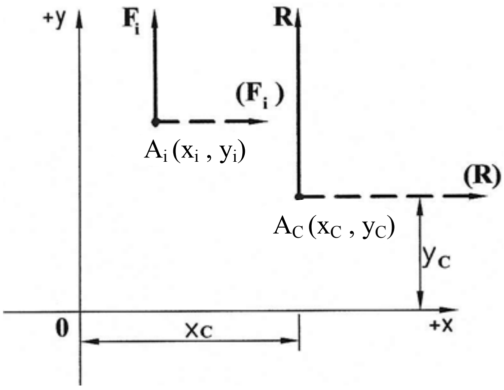
$$\text{odtiaľ } F_1 = \frac{R.p_2}{p_1 + p_2}\,,$$

resp. ak zvolíme na sile F$_1$ bod otáčania A$_1$ dostaneme $F_2 = \dfrac{R.p_1}{p_1 + p_2}$.

- **Grafické riešenie**

Na ľubovoľnej priamke $\overline{12'} \parallel \mathbf{F}_1 \parallel \mathbf{F}_2$ vynesieme zobrazovací úsek sily **R**, t. j. $\overline{R} = \overline{AB} = \overline{12}\,'$. Rovnobežky 0´a 1´vo vláknovom obrazci (2.45a) so silami 0, 1 v silovom obrazci v ľubovoľnom bode R pretínajú nositeľky síl e_1, e_2 v bodoch I, II. Lomená čiara $\overline{0',1',r'}$ je výslednicovou čiarou. Preto čiara r´ $\parallel$ $\overline{01'}$ v silovom obrazci rozdelí úsečku $\overline{12'}$ na dva diely $F_1 = \overline{11}$ a $F_2 = \overline{12}$, ktoré prináležia hľadaným silám **F**.

Príklad 2.23: Určite polohu statického stredu sústavy rovnobežných síl F_1 = 200 N, F_2 = = -100 N, F_3 = 400 N so súradnicami pôsobísk A_1 (1; 2,5), A_2 (2,5; 1,5), A_3 (4; -0,5) m (obr. 2.46).



Obr. 2.46

- **Analytické riešenie**

Z rovníc pre statický stred (2.48), keď dosadíme zadané hodnoty so zreteľom na ich znamienka dostaneme:

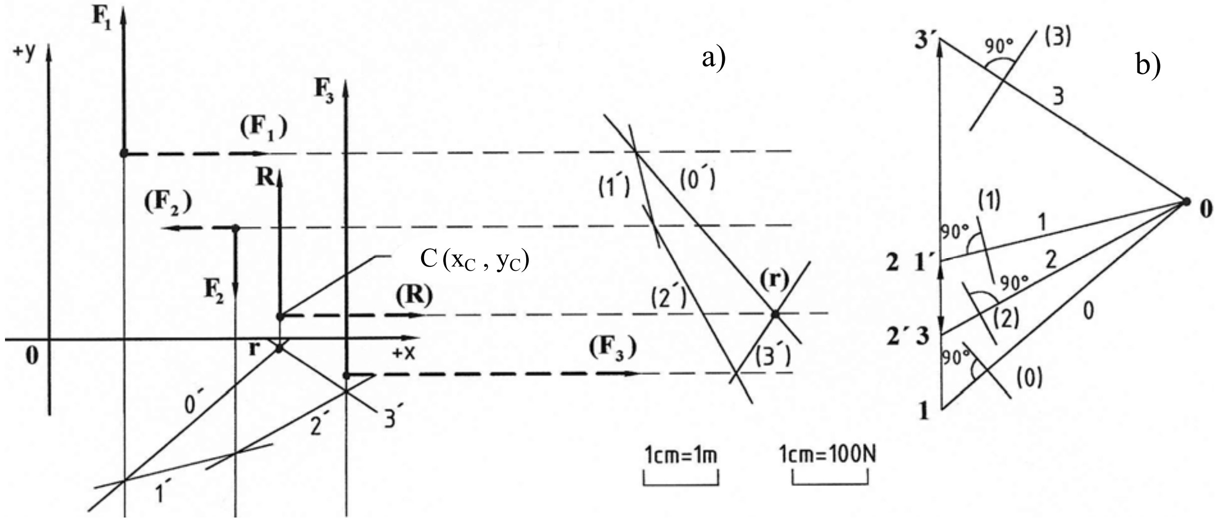
$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{200.1 + (-100).2{,}5 + 400.4}{200 + (-100) + 400} = 3{,}01 \text{ m}$$

$$y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} = \frac{200.2{,}5 + (-100).1{,}5 + 400.(-0{,}5)}{200 + (-100) + 400} =$$

$= 0{,}3$ m.

Grafické riešenie

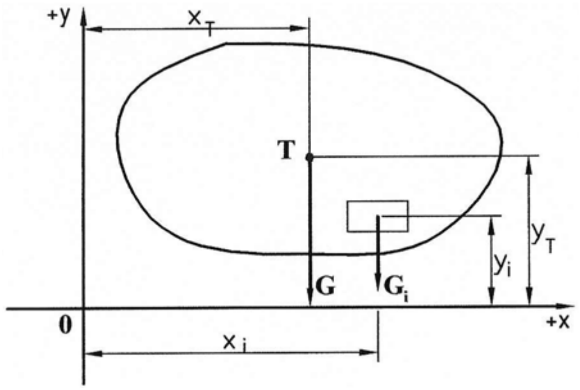
Zvolíme m_L = 0,1 m/mm, m_F = 10N/mm. Silový obrazec nakreslíme len raz, pre zvislé sily (obr. 2.47b), pre vodorovné sily využijeme ten istý obrazec myslene pootočený o π/2 [(i) ⊥ i]; (i´) ⊥ i´).



Obr. 2.47

3. ŤAŽISKÁ HMOTNÝCH ÚTVAROV

Rovinné hmotné útvary sú také telesá, ktorých tretí rozmer je zanedbateľný, alebo majú rovinu symetrie. Ich modelom je rovinná čiara (L), alebo plocha A, ktorých hmotnosti sú ρ_L [kgm^{-1}], resp. ρ_A [kgm^{-2}], tzv. špecifické (merné) hmotnosti útvarov - hustoty.



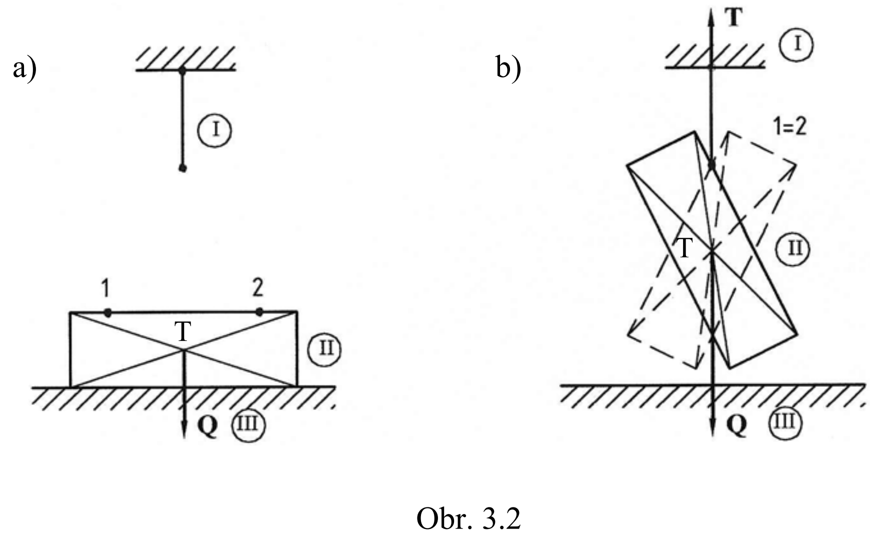
Obr. 3.1

Na teleso, ktorého rozmery sú v porovnaní s rozmermi Zeme zanedbateľné, pôsobí v jej gravitačnom poli sústava elementárnych síl G_i, ktoré možno považovať (vzhľadom na veľmi vzdialený stred gravitácie) ako sústavu rovnobežných síl (obr. 3.1).

Statický stred síl $\mathbf{G}_i$ dokonale tuhého telesa sa nazýva **ťažisko** T.

Z vlastností statického stredu vyplýva, že sila tiaže G = $\sum \mathbf{Q}_i$ prechádza ťažiskom telesa nezávisle na polohe telesa.

Podľa toho, keď zavesíme homogénne teleso (obr. 3.2a) v ktoromkoľvek bode, napr. 1,2, ustáli sa jeho poloha vtedy (obr. 3.2b), keď nositeľka síl **T** bude kolineárna (stotožní sa) s nositeľkou sily tiaže **Q,** pôsobiacou v ťažisku telesa (**Q** = -**T**).



Obr. 3.2

Ťažisko T rovinného hmotného útvaru sa určí z momentovej vety vzťahmi

$$\boxed{x_T = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} \quad , \quad y_T = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}} \qquad (3.1)$$

Keď dosadíme pre čiaru ρ_L alebo ρ_A, potom

$$G_i = \rho_L \,.\, l_i \,.\, g \qquad \text{alebo} \qquad G_i = \rho_A \,.\, A_i \,.\, g$$

Pre homogénne teleso (ρ_L = konšt., ρ_A = konšt.) môžeme výrazy na výpočet súradníc ťažiska napísať v tvare

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_T = \dfrac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} & x_T = \dfrac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \\[2ex] y_T = \dfrac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} & y_T = \dfrac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \end{array}} \qquad (3.2)$$

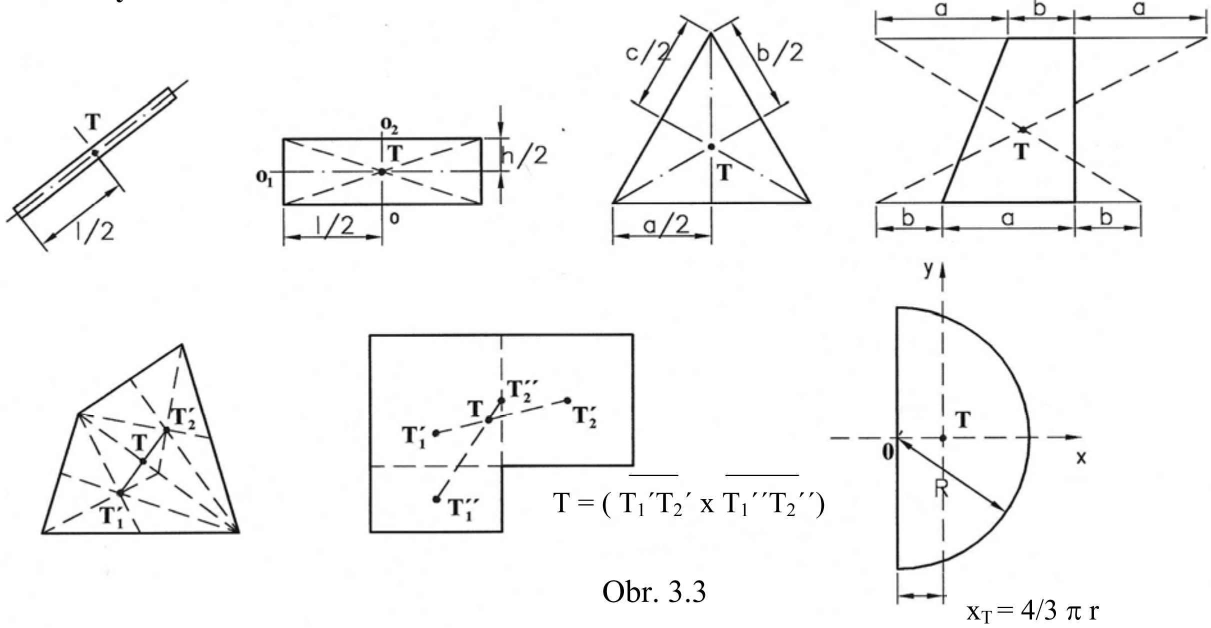
kde $\sum l_i$, $\sum A_i$ je celková dĺžka [m] a plocha [m^2] homogénneho útvaru.

Pomocou týchto rovníc riešime i tvarovo komplikovanejšie telesá. Takéto telesá najskôr rozložíme na viac jednoduchých telies, v ktorých dĺžky (resp. plochy) a polohy ťažísk vieme riešiť výpočtom alebo graficky pomocou zložkovej a výslednicovej čiary.

Pre ťažiská homogénnych (rovnorodých) útvarov platia nasledujúce poučky:

- ťažiská útvarov so stredom súmernosti, majú ťažiská v tomto strede,
- útvary, ktoré majú os súmernosti, majú ťažisko na tejto osi,
- útvary, ktoré majú rovinu súmernosti, majú ťažiská v tejto rovine,
- ak sú známe ťažiská dvoch častí telesa, leží ťažisko celého telesa na spojnici oboch ťažísk.

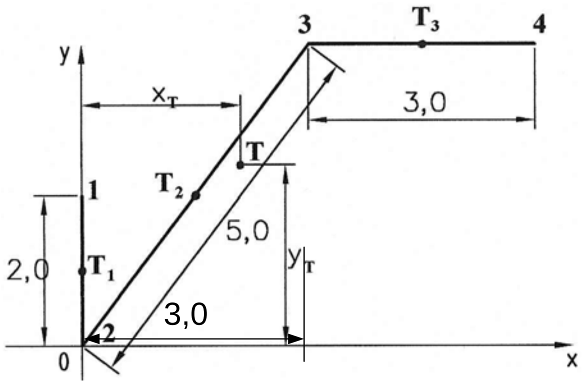
Príklady:



Obr. 3.3

Pozn.: Ťažisko môže ležať aj mimo hmotný útvar (čiaru, plochu) !

Príklad 3.1: Určite ťažisko tuhej lomenej čiary $\overline{1,2,3,4}$ ležiacej v jednej rovine.



Obr. 3.4

Keď rozdelíme lomenú čiaru na tri rovné časti $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}$, o dĺžkach $l_1 = 2{,}0$ m, $l_2 = 5{,}0$ m, $l_3 = 3{,}0$ m, sú súradnice ťažísk jednotlivých častí:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$ m, $x_3 = (3{,}0 + 1{,}5) = 4{,}5$ m

$y_1 = 1{,}0$m, $y_2 = 2{,}0$ m, $y_3 = 4{,}0$ m.

Ťažisko T celej lomenej čiary má súradnice

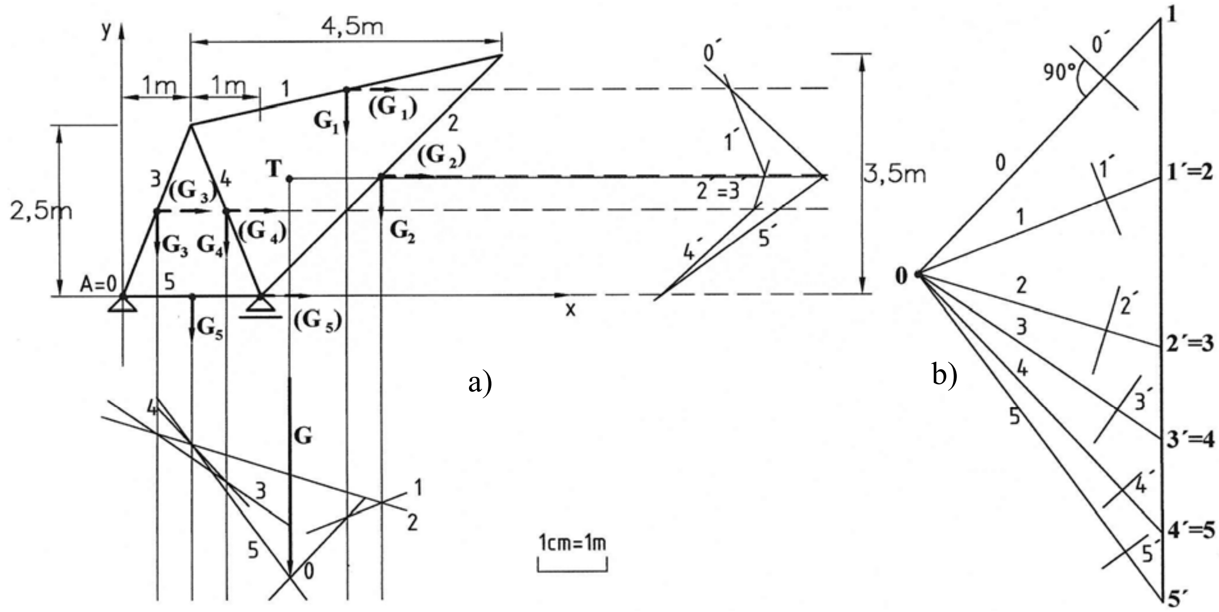
$$x_T = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{0.2{,}0 + 1{,}5.5{,}0 + 4{,}5.3{,}0}{2{,}0 + 5{,}0 + 3{,}0} = \frac{21{,}0}{10} = 2{,}1 \text{ m}$$

$$y_T = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{1{,}0.2{,}0 + 2{,}0.5{,}0 + 4{,}0.3{,}0}{10{,}0} = \frac{24{,}0}{10} = 2{,}4 \text{ m}$$

Príklad 3.2: Určite súradnice ťažiska a silu tiaže žeriavu zostaveného z homogénnych prútov rovnakého prierezu $\rho_L = 5{,}5$ kg/m. Rozmery žeriavu sú na obr. 3.5.

- **Grafické riešenie**

Pri grafickom riešení vynesieme do silového obrazca (obr. 3.5b), napr. len polovice dĺžok prútov v mierke $m_L = 0{,}1 \mathrm{m.mm}^{-1}$. V rovnakom smere (vodorovne a zvislo) pôsobiace prúty 3,4,5 môžeme nahradiť ich výslednicou v mierke m_F. Na kreslenie vláknového obrazca (obr. 3.5a) pre vodorovný smer použijeme otočené pólové lúče zvislého smeru o 90° (ako v príklade 2.15).



Obr. 3.5

Odmeraním získame súradnice ťažiska

$x_T = 2{,}45$ m , $y_T = 1{,}75$ m

Sila tiaže žeriavu je $G = 2.\overline{15'}.m_L.\, \rho_1 \,.\, g = 913$ N.

- **Analytické riešenie**

Vyžaduje najskôr (prácne) vypočítať pomocou trigonometrických funkcií dĺžky prútov $l_1 = 4{,}609$ m, $l_2 = 4{,}949$ m, $l_3 = l_4 = 2{,}692$ m, $l_5 = 2$ m. Ťažiská prútov možno určiť priamo z obrázku 3.2a $x_{T_1} = 3{,}25$ m, $y_{T_1} = 3{,}00$ m, $x_{T_2} = 3{,}75$ m, $y_{T_3} = 1{,}75$ m, $x_{T_{3,4,5}} = 1$ m, $y_{T_{3,4}} = 1{,}25$ m, $y_{T_5} = 0$ m.

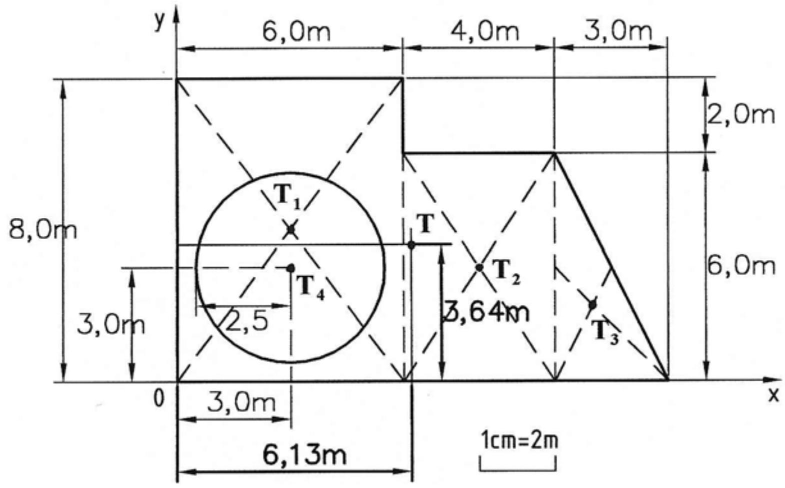
Tiaž žeriavu je $G = \rho_L \cdot g \cdot \sum l_i = 5{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 16{,}942 = 914{,}1$ N. Súradnice ťažiska (z rovníc 3.2) sú:

$$x_T = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{40{,}922}{16{,}942} = 2{,}415 \text{ m}$$

$$y_T = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{29{,}217}{16{,}942} = 1{,}724 \text{ m}$$

Poznámka: Na riešení sa možno presvedčiť, že grafické riešenie je rýchlejšie, ako výpočtové riešenie.

Príklad 3.3: Aby „nadrozmerné“ teleso podľa obr. 3.6 sa mohlo uložiť na prevoz do osi špeciálneho vozidla (bezpečnosť jazdy), treba vypočítať súradnice jeho ťažiska.



Obr. 3.6

Prierez (v rovine súmernosti) rozdelíme na štyri časti: 2 obdĺžniky, 1 trojuholník a 1 kruh, ktorého plocha je „negatívna“ (treba ju odpočítať!). Súradnice ťažísk jednotlivých častí x_i, y_i (i = 1,2,3,4) sú uvedené aj s dielčími výpočtami vo výpočtovej tabuľke.

Tab. 3.1

i	x_i [m]	y_i [m]	A_i [m^2]	y_iA_i	x_iA_i
0	1	2	3	4 = (2 x 3)	5 = (1 x 3)
1	3,00	4,00	48,00	192,00	144,0
2	8,00	3,00	24,00	72,00	192,0
3	11,00	2,00	9,00	18,00	99,0
4	3,00	3,00	-19,63	-58,89	-58,89
$\sum_1^4$			61,37	223,11	376,11

Podľa rovníc (3.2) sú súradnice ťažiska prepravovaného telesa

$$x_T = \frac{376{,}11}{61{,}37} = 6{,}13 \text{ m} \quad , \qquad y_T = \frac{223{,}11}{61{,}37} = 3{,}64 \text{ m.}$$

Poznámka: Názvom nadrozmerné telesá sa označujú také telesá, ktoré majú väčšie rozmery, ako sú technickými normami (STN) stanovené priečne prechodové prierezy komunikácií. Nadrozmerné telesá zvyčajne prekračujú aj dovolené zaťaženie umelých stavieb na komunikáciách (mosty), na čo je pri výbere a príprave trasy treba brať zreteľ.

Vtedy, keď čiaru alebo plochu možno vyjadriť analyticky, využíva sa na určovanie ťažiska integrálny výpočet. Súradnice ťažísk sú potom dané vzťahmi:

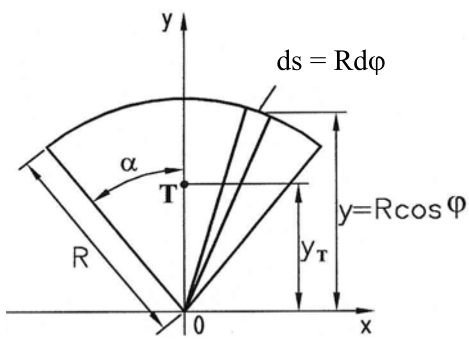
$$x_T = \frac{\int_s x\,ds}{\int_s ds} \qquad x_T = \frac{\iint_A x\,dA}{\iint_A dA}$$

$$y_T = \iint_s \frac{y\,ds}{ds} \qquad y_T = \frac{\iint_A y\,dA}{\iint_A dA}$$

, kde $\int_s ds = s$ [m] (3.3)

$$\iint_A dA = A \ [m^2]$$

Príklad 3.4: Určite súradnice ťažiska oblúka o polomere R, vymedzeného uhlom α.



Obr. 3.7

Os y je osou symetrie oblúka a teda $x_T = 0$. Druhú súradnicu y_T určíme z rovnice (3.3)

$$y_T = \frac{\int_s y\,ds}{\int_s ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\varphi.Rd\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R.d\varphi} =$$

$$= \frac{R^2.2.\sin\alpha}{2.R.\alpha} = \frac{R.\sin\alpha}{\alpha}$$

Poznámka: Veľkosti plôch a súradnice ťažísk mnohých čiar a útvarov možno nájsť napr. v statických, stavebných alebo strojníckych tabuľkách.

4. PRIAME NOSNÍKY A RÁMY

Priame a lomené nosníky (rámy) tvoria základné nosné časti rôznych konštrukcií a strojov. Ich zaťaženie a uloženie je riešené tak, že sústava prvotných (akčných) a druhotných síl (reakcií) tvorí rovinnú sústavu.

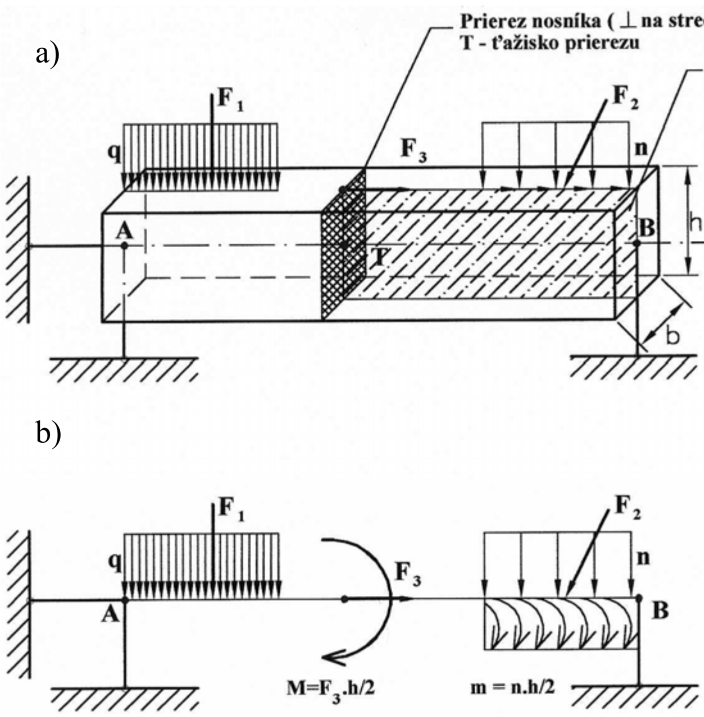
Okrem výpočtu reakcií v staticky určitých úlohách je možné v statike vyriešiť tiež analýzu vnútorných síl v ktoromkoľvek bode nosníka.

V rovinných nosníkoch a rámoch sú to tieto **vnútorné sily**:

- osová (normálna) sila N,
- priečna (posúvajúca, tangenciálna) sila Q,
- ohybový moment M_O.

Riešiť vnútorné veličiny pri rôznom uložení a zaťažení nosníkov patrí medzi základné vedomosti potrebné (neskôr v predmete pružnosť a pevnosť) na navrhovanie (dimenzovanie) a posudzovanie skutočných nosníkov (telies).

Na obr. 4.1a je nakreslený prizmatický nosník zaťažený a uložený na podperách v rovine symetrie. Na obr. 4.1.b je jeho výpočtový model, predstavovaný osou nosníka (tzv. strednicou), ktorá prechádza ťažiskami T priečnych rezov.

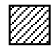
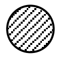
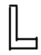
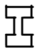


Obr. 4.1

Poznámka: Spôsob nakreslenia podpier (väzieb nosníka v miestach) A, B v tomto obrázku zodpovedá spôsobu zakreslenia pevnej a posuvnej podpery na obr. 1.14 a ich funkcií v tab. 1.1.

Všimnime si, že aj normálne sily a momenty kreslíme pre názornosť kolmo na strednicu, aj keď v skutočnosti pôsobia v jej smere.

Na obr. 4.1b vidieť, že všetky zaťaženia vyznačujeme na osi nosníka. V danom prípade to sú osamelé sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ a spojité zaťaženia **q**, **n**. Pri prenesení na os nosníka bude zaťažená v miestach 1, 2, 3 silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ [N], spojitými bremenami **q**, **n** [N.mm^{-1}], momentom M [Nm] a spojitým momentom m [N.mm^{-1}], ktoré vzniknú pri prekladaní sily $\mathbf{F}_3$ a zaťaženia **n**.

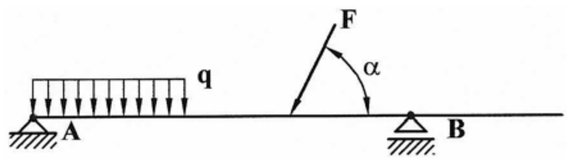
Pri statickom vyšetrovaní nosníkov a rámov nezáleží na tvare prierezu (napr.  , 
 ,  ,  , atď.) a ani na druhu materiálu nosníkov. Rozhoduje len tvar strednice, a preto ňou vo výpočtových modeloch nahradzujeme skutočné telesá.

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov - uloženie a vonkajšie zaťaženie

Nosníkom sa rozumie teleso, ktorého jeden rozmer (dĺžka) je oveľa väčší, ako ďalšie dva rozmery (výška a šírka) a je uložený tak, že sa pri zaťažení ohýba.

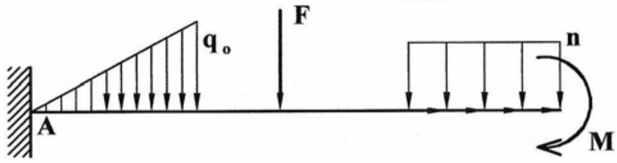
Na obr. 4.2 sú nakreslené výpočtové schémy niektorých typov nosníkov a rámov pri rozličnom uložení a zaťažení.

a)



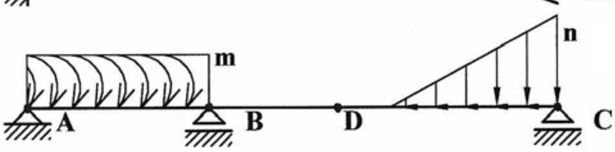
prostý nosník (s previsnutým, prečnievajúcim koncom)

b)



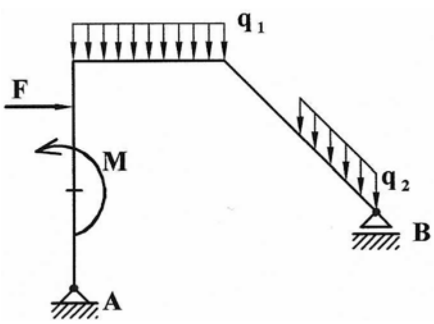
votknutý (konzolový) nosník

c)



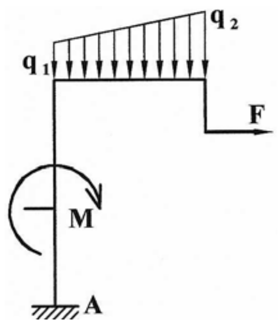
nosník s vloženým kĺbom

d)



rám (lomený nosník) prosto uložený

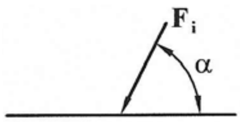
e) votknutý rám



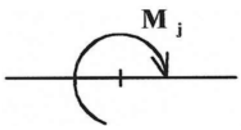
Obr. 4.2

Na nosníkoch a rámoch na obr. 4.2 sú nakreslené nasledujúce druhy zaťaženia (obr. 4.3).

a) zaťaženie osamelou silou

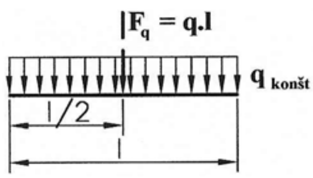


b) zaťaženie osamelým momentom



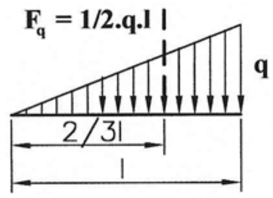
c) spojité zaťaženie priečne

α) rovnomerné



β) nerovnomerné

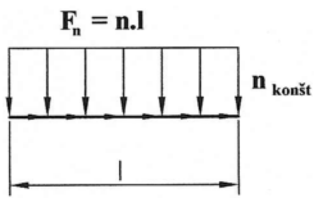
(napr. lineárne)



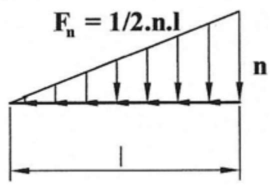
d) spojité zaťaženie osové

(normálne)

α) rovnomerné



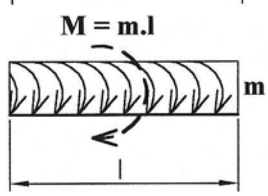
β) nerovnomerné



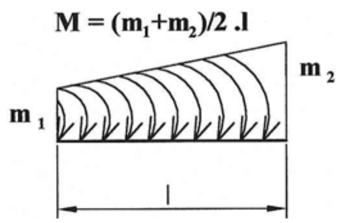
e) spojité zaťaženie

momentové

α) rovnomerné



β) nerovnomerné



Obr. 4.3

Možno si všimnúť, že zaťaženia rozdeľujú strednicu nosníkov a rámov na úseky, v ktorých je **q**, **n**, m rovné nule, alebo rôzne od nuly, a to buď konštantné alebo premenné [$\mathbf{q}_{(x)}$, $\mathbf{M}_{(x)}$, $m_{(x)}$]. Ďalej vidno, že na strednici sú miesta, kde pôsobia osamelé sily $\mathbf{F}_i$ alebo momenty M_j. Ekvivalentné náhradné silové účinky $\mathbf{F}_q$, $\mathbf{F}_n$, M_m sa používajú pri výpočte sekundárnych síl (reakcií).

V praktických úlohách sa vyskytujú najčastejšie zaťaženia uvedené na obr. 4.3a,b,c a preto sa najmä nimi ďalej budeme zaoberať.

4.2 Výpočet reakcií

Statický výpočet nosníkov a rámov začína vždy výpočtom sekundárnych síl - reakcií. Určovaniu reakcií u staticky určite uložených telies sme sa venovali v príkladoch (2.7 - 2.10) - v rovinnej sústave síl.

Preto len zopakujme, že podmienky rovnováhy môžu mať spoločne s kontrolnými rovnicami niektorý z nasledujúcich tvarov:

a)	b)	c)
$\sum F_{ix} = 0$	$\sum M_A = 0$	$\sum M_A = 0$
$\sum F_{iy} = 0$	$\sum M_B = 0$	$\sum M_B = 0$
$\sum M_A = 0$	$\sum F_{ix} = 0$	$\sum M_C = 0$
$\sum M_B = 0$	$\sum F_{iy} = 0$	$\sum F_{ix} = 0$

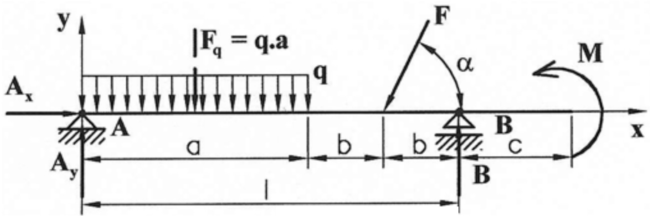
kde $C \notin \overline{AB}$

→ kontr. rovnice

Na riešenie prosto uložených nosníkov sa najčastejšie používa tvar rovníc b.

V ďalšom si ukážeme zostavovanie rovníc rovnováhy pre najčastejšie prípady a druhy zaťaženia (obr. 4.3a-c).

Príklad 4.1: **Prostý nosník** (obr. 4.4)



Obr. 4.4

Dané: F, q, M, α, a, b, c

Náhradné bremeno $F_q = q \cdot a$

Hľadáme: $\mathbf{A_x}$, $\mathbf{A_y}$, **B**

Rovnice rovnováhy podľa tvaru (4.1) b sú:

$$\sum M_A = 0: \quad -F_q \cdot \frac{a}{2} - F\sin\alpha\,(a + b) + B \cdot l + M = 0 \quad \ldots \text{ odtiaľ} \rightarrow B$$

$$\sum M_B = 0: \quad -A_y \cdot l + F_q\,(l - \frac{a}{2}) + F\sin\alpha \cdot b + M = 0 \quad \ldots \text{ odtiaľ} \rightarrow A_y$$

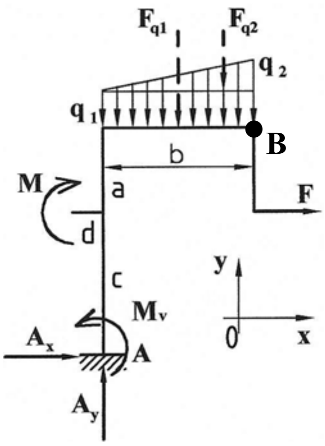
$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x - F\cos\alpha = 0 \quad \ldots \text{ odtiaľ} \rightarrow A_x$$

Po určení neznámych zložiek reakcií vykonáme kontrolu

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_q - F\sin\alpha + B = 0.$$

Poznámka: Pri použití rovníc v tvare b) k bodom podopretia A, B je v každej rovnici iba jedna neznáma, čo veľmi urýchľuje výpočet.

Príklad 4.2: **Votknutý rám**



Obr. 4.5

Dané: F, q_1, q_2, M, a , b, c, d

Náhradné bremená sú: $F_{q1} = q_1 \cdot b$

$$F_{q2} = \frac{1}{2}\,(q_2 - q_1)\,b$$

Hľadáme A_x, A_y, a moment vo votknutí M_v

Rovnice rovnováhy podľa základného tvaru sú:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x + F = 0 \quad \rightarrow A_x$$

je zrejmé, že sme v obrázku „chybne“ predpokladali zmysel sily $\mathbf{A_x}$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_{q1} - F_{q2} = 0 \quad \rightarrow A_y$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M - F_{q1} \cdot \frac{b}{2} - F_{q2} \cdot \frac{2}{3}b - F \cdot c + M_v = 0 \quad \rightarrow M_v$$

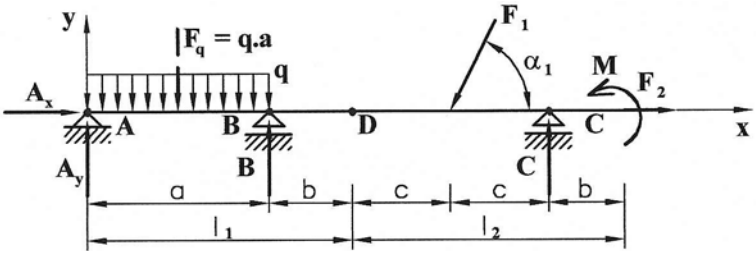
Kontrolná rovnica: $\sum M_B = 0$: $M_v + A_x \cdot (c+a) - A_y \cdot b - M + F_{q1}\,\frac{b}{2} + F_{q2} \cdot \frac{b}{3} + F.a = 0$

Príklad 4.3: **Nosník s vloženým kĺbom**

Statická neurčitosť nosníka uloženého na troch podperách A, B, C je odstránená vloženým kĺbom D. Nosník sa vlastne skladá z dvoch telies, spojených v kĺbe D. Dané: F_1, F_2, M, α, a, b, c (obr. 4.6).

Náhradné bremeno je $F_q = q \cdot a$

Hľadáme A_x, A_y, B, C



Obr. 4. 6

Rovnice rovnováhy podľa (4.1b) sú:

$\sum F_{ix} = 0$: $A_x - F_1\cos\alpha_1 + F_2 = 0 \rightarrow$ A_x

$\sum F_{iy} = 0$: $A_y - F_q + B - F_1\sin\alpha_1 + C = 0 \rightarrow$ A_y

$\sum M_{iA} = 0$: $-F_q \cdot \dfrac{a}{2} + Ba - F_1\sin\alpha_1\,(l_1 + c) + C(l_1 + 2c) + M = 0 \qquad \rightarrow$ B

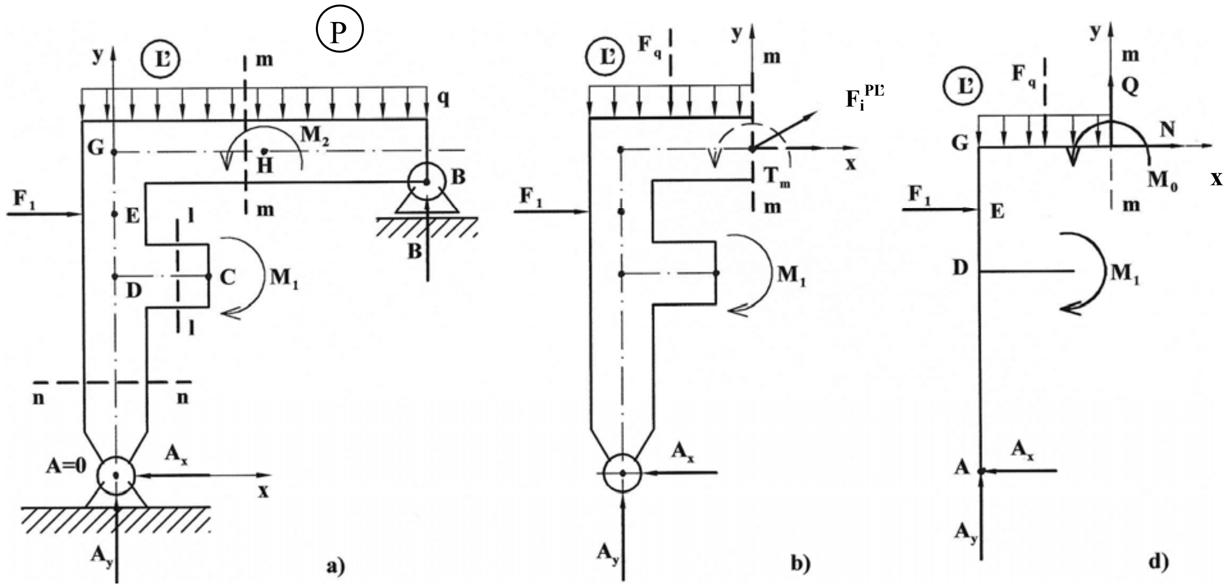
Rovnice sú len tri, zatiaľ čo neznáme zložky reakcií sú štyri, a teda jedna rovnica chýba. Spojenie telies v kĺbe D ale umožňuje napísať napr. pre pravú časť od kĺbu D podmienku $\sum M_D^P = 0 \quad \rightarrow$ C .

Na základe známej veľkosti reakcie C môžeme potom určiť zostávajúce reakcie B a A_y.

4.3 Vnútorné sily

Sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, momenty M_1, M_2 a spojité zaťaženie $\mathbf{q}$ spoločne s reakciami $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}$ sú primárne vonkajšie sily zaťažujúce teleso (lomený nosník - rám, obr. 4.7a). Všetky tieto vonkajšie zaťaženia vyvolávajú v telese vnútorné sily.

Na nosníkoch a rámoch sa vnútorné sily zisťujú v prierezoch kolmých na os (strednicu) nosníka alebo rámu (napr. $\overline{mm}, \overline{nn}, \overline{ll}$ atď.).

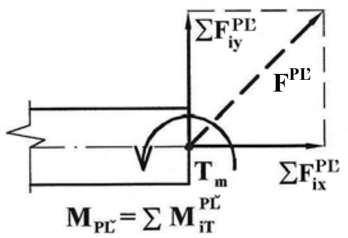


Obr. 4.7

Na vyšetrenie vnútorných síl použime napr. ľavú časť Ľ telesa, oddelenú myslene (fiktívne) rezom $\overline{mm}$ od pravej časti P . Ľavá časť telesa lomeného nosníka je zaťažená, rovnovážnou sústavou:

- vonkajších síl $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_q$, $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, M_1
- vnútorných síl $\mathbf{F}_i^{PĽ}$, t. j. silami, ktorými pôsobí v priereze $\overline{mm}$ pravá časť telesa na ľavú.

Vnútorné sily $\mathbf{F}_i^{PĽ}$ tvoria všeobecnú sústavu síl v rovine rezu $\overline{mm}$. Aj keď zatiaľ nepoznáme ich polohu v tomto priereze, môžeme ich v ďalšom riešení nahradiť ekvivalentnou silovou sústavou, a to silou $\mathbf{F}^{PĽ}$ a momentom $\mathbf{M}^{PĽ}$ vo výpočtovom modeli 2.8c.



Obr. 4.7c

Keď vykonáme naznačenú redukciu vnútorných síl $\mathbf{F}_i^{PĽ}$ do ťažiska prierezu T_m v použitej súradnicovej sústave x, y

môžeme napísať $\mathbf{F}_x^{PĽ} = \sum \mathbf{F}_{ix}^{PĽ}$, $\mathbf{F}_y^{PĽ} = \sum \mathbf{F}_{iy}^{PĽ}$, $M^{PĽ} = \sum M_{iT}^{PĽ}$.

Podľa pôsobenia v priereze označujeme a nazývame vnútorné silové účinky takto:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum \mathbf{F}_{ix}^{PĽ} = \mathrm{N} & \text{... osová (normálna) sila} \\ \sum \mathbf{F}_{iy}^{PĽ} = \mathrm{Q} & \text{... priečna sila} \\ \sum \mathrm{M}_{iT}^{PĽ} = \mathrm{M_O} & \text{... ohybový moment} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{v priereze} \\ \text{(vo vnútri)} \\ \overline{mm} \text{ (obr. 4.7c)} \end{array} \qquad (4.1)$$

4.3.1 Výpočet vnútorných síl N, Q, $\mathbf{M_O}$

Spôsob a veľkosť vnútorných silových účinkov N, Q, M_O vyplýva z podmienok rovnováhy síl na časti Ľ, pre ktorú platí (obr. 4.7d)

$$\begin{aligned} &\sum F_{ix}^{Ľ} + N &&= 0 \\ &\sum F_{iy}^{Ľ} + Q &&= 0 \qquad (4.2) \\ &\sum M_{iT}^{Ľ} + M_O &&= 0 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že rovnaké rovnice by sme mohli napísať aj pre riešenie na pravej časti telesa P.

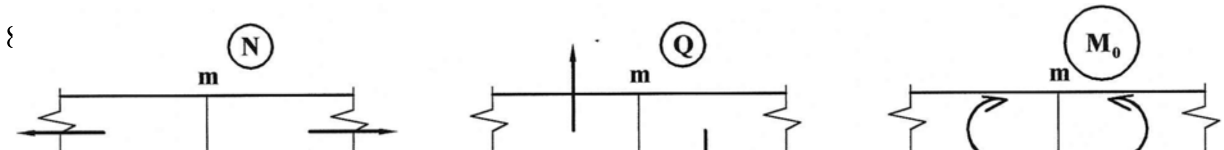
Nakoľko vonkajšie (primárne a sekundárne) sily tvoria rovnovážnu sústavu, sú veľkosti veličín N, Q, M_O v rovine ľubovoľného fiktívneho rezu:

$$\begin{aligned} N &= / \sum F_{ix}^{Ľ} / = / \sum F_{ix}^{P} / \\ Q &= / \sum F_{iy}^{Ľ} / = / \sum F_{iy}^{P} / \qquad (4.3) \\ M_O &= / \sum M_{iT}^{Ľ} / = / \sum M_{iT}^{P} / \end{aligned}$$

Zo spôsobu, ako boli zadefinované vnútorné sily možno vysloviť vetu na určenie ich veľkosti stručne takto:

Veľkosť vnútorných síl N, Q, a momentu $\mathbf{M_O}$ v ľubovoľnom priereze sa rovná ich algebraickému súčtu po jednej strane vyšetrovaného prierezu.

Pri algebraickom sčítaní po jednej strane prierezu sa berie zreteľ na zmysel pôsobenia vnútorných síl podľa nasledujúceho dohovoru:

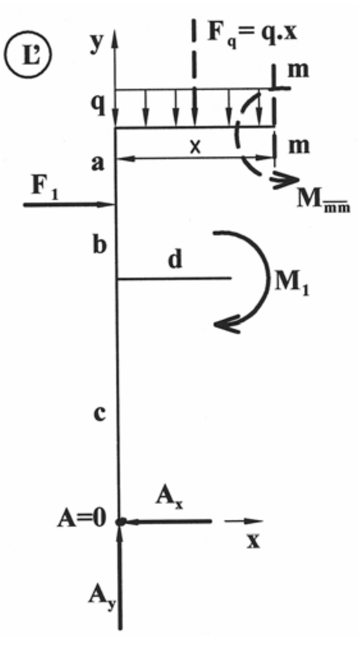


Obr. 4.8

Poznámka: Pôsobenie vnútorných síl a momentov v opačnom zmysle ako je vyznačený na obr. 4.8 po oboch stranách prierezu $\overline{mm}$ označujeme znamienkom (-) .

Možno si všimnúť, že znamienkový dohovor závisí na orientácii telesa, t. j. na určení jeho ľavého a pravého konca, resp. v prípade momentu na horných a dolných vláknach priečneho rezu. Pri inej než vodorovnej polohe nosníka, alebo napr. na zvislici rámu, nemusí byť takto jednoducho popísaný znamienkový dohovor jednoznačný.

Vo zvolenom priereze $\overline{mm}$ (obr. 4.7d) po označení jednotlivých úsekov strednice v obr. 4.9 vo výpočtovom modeli rovinného rámu, bude (s ohľadom na znamienkovú konvenciu) veľkosť jednotlivých vnútorných síl nasledujúca:



Obr. 4.9

$$N = A_x - F_1$$

$$Q = A_y - q.x$$

$$M_{mm} = -A_x\,(c + b + a) - A_y.x + F_1.a + qx.\frac{x}{2} - M_1$$

Pozn.: Vieme už, že ak počítame vnútorné sily z pravej alebo z ľavej strany vyšetrovaného prierezu výsledok musí byť rovnaký. Preto pri praktických výpočtoch dávame prednosť tej strane prierezu, kde je menej vonkajších síl a výpočet je jednoduchší (rýchlejší).

Spôsobom, ako je uvedený na obr. 4.9 možno vypočítať hodnoty N. Q M_O v ľubovoľnom mieste nosníka alebo rámu.

4.3.2 Priebeh vnútorných síl N, Q, M_O

Pri vyšetrovaní namáhania telies je treba poznať nielen veľkosť vnútorných síl v niektorom náhodne zvolenom reze, ale poznať aj ich priebeh po celej strednici. Len tak možno určiť miesto a hodnotu maximálneho namáhania - v prípade nosníkov a rámov **miesto a veľkosť maximálneho momentu M_{Omax}.**

Na vyriešenie týchto úloh nestačí teda vyriešiť len lokálne hodnoty N. Q, M_O, ale je treba poznať aj zákonitosti ich priebehu **N(x), Q(x), M_O(x)**, **v závislosti na charaktere zaťaženia** (obr. 4.3) na vyšetrovanej časti telesa.

Teleso (rám), ktoré konkrétne vyšetrujeme (obr. 4.7a) sa dá rozdeliť na jednotlivé časti, zaťažené takto:

$$\overline{AE}, \overline{EG}, \overline{DC} \rightarrow q = 0$$
$$\overline{GH}, \overline{HB} \rightarrow q = konšt.$$

V miestach A, B, C, E, H na strednicu pôsobia osamelé sily a momenty. Výpočet v priereze $\overline{mm}$, teda $\overline{GH}$ (q = konšt.) ukazuje, že v závislosti na mieste rezu x je v tomto intervale

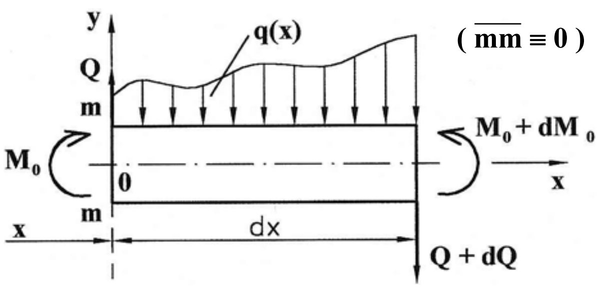
$N = A_x - F_1$ → **konštantná** (na x nezávislá)

$Q = A_y - q.x$ → **lineárna funkcia** x (x^1)

$M_O = A_x\,(b + c + a)$ a $A_y.x - F_1.a - q.\dfrac{x^2}{2} + M_1$ → **kvadratická funkcia** x (x^2)

Nakoľko sa nosníky a rovinné rámy veľmi často vyšetrujú s priečnym zaťažením $q_{(x)}$, odvodíme vzťahy, ktoré umožnia bližšie analyzovať charakter prierezu $Q_{(x)}$ a $M_{(x)}$ pre tento spôsob zaťaženia.

Schwedlerova (1823 - 1894) **- Žuravského** (1821 - 1891) **veta**



Obr. 4.10

Ak vyjmeme z telesa (obr. 4.10) fiktívny elementárny prvok o dĺžke dx, potom rovnice rovnováhy prvku, napr. k bodu (x + dx) sú:

$\sum F_{iy} = 0$: $Q - (Q + dQ) - q_{(x)}.dx = 0$

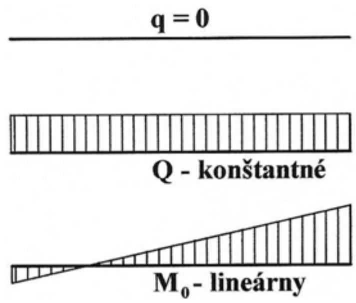
$\sum M_{iO} = 0$: $-M_O - Q.dx + q_{(x)}.dx\ .\dfrac{dx}{2} + (M_O + dM_O) = 0$

Po úprave (so zanedbaním malej hodnoty momentového účinku $q_{(x)}\ .\ \dfrac{dx^2}{2}$ od vlastnej tiaže) dostávame:

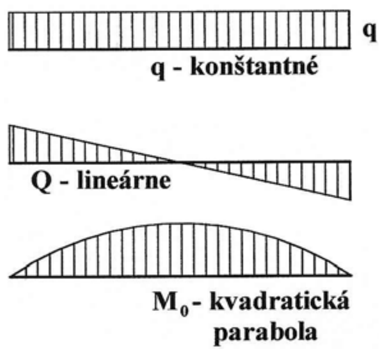
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -q_{(x)} \\ \frac{dM_O}{dx} &= Q \end{aligned}} \qquad (4.4)$$

Z týchto diferenciálnych rovníc 1. rádu možno **pri známom priečnom zaťažení** $q_{(x)}$ určiť v danom intervale telesa **charakter priebehu** (tvar krivky) **veličín** Q **a** M_O (obr. 4.11).

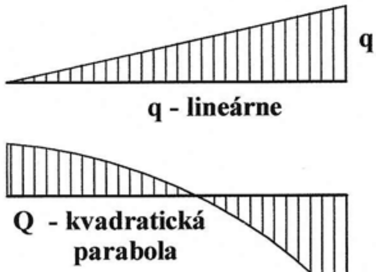
a) q = 0 → Q ... konštantná
→ M_O ... lineárny



b) q = konšt. → Q ... lineárna
→ M_O ... kvadratický



c) q ...lineárne → Q ... kvadratická
→ M_O ... kubický



Obr. 4.11

Z vlastnosti derivácie funkcie vyplýva, že v poradí veličín q, Q, M_O sa jedná vždy o krivku rádovo vyššiu a súčasne, že poradnice $q_{(x)}$, $Q_{(x)}$ predstavujú smernice dotyčníc ku krivkám $Q_{(x)}$ a $M_{O(x)}$ v danom priereze (extrémy funkcie).

To dovoľuje, **pomocou priebehu** $Q_{(x)}$ **kontrolovať správnosť priebehu** $M_{O(x)}$ **a naopak (!).**

Okrem priebehu Q a M_O treba určiť tiež **polohu** (x_m) a **veľkosť** (M_{Omax}) **najväčšieho ohybového momentu**.

Vtedy, keď má ohybový moment M_O priamkový priebeh, je miesto a veľkosť M_{Omax} z výpočtu zrejmá. Ak však leží M_{Omax} v intervale, kde $M_O(x)$ je krivka, treba jeho polohu a veľkosť určiť.

Maximum v tomto intervale sa určí z podmienky extrému funkcie jednej premennej. Z podmienky

$$\frac{dM_O}{dx} = 0 \qquad (4.5)$$

určíme miesto x_m a potom

$$M_{Omax} = M_O(x)\Big|_{x = x_m} \qquad (4.6)$$

Pretože podľa Schwedlerovej - Žuravského vety platí $\frac{dM_O}{dx}$ = Q, je extrém ohybového momentu tam, kde je priečna sila rovná nule (kde mení svoje znamienko)!

Poznámka: Z uvedeného tiež vyplýva, že v miestach, kde pôsobia osamelé sily $\mathbf{F}_i$, sú v diagramoch N a Q skoky a v diagramoch M_O zlomy (náhle zmeny hodnôt M_O).

Ak sú vo vyšetrovanom intervale nosníka spojité zaťaženia n(x), prípadne m(x), potom majú predchádzajúce vzťahy tvar

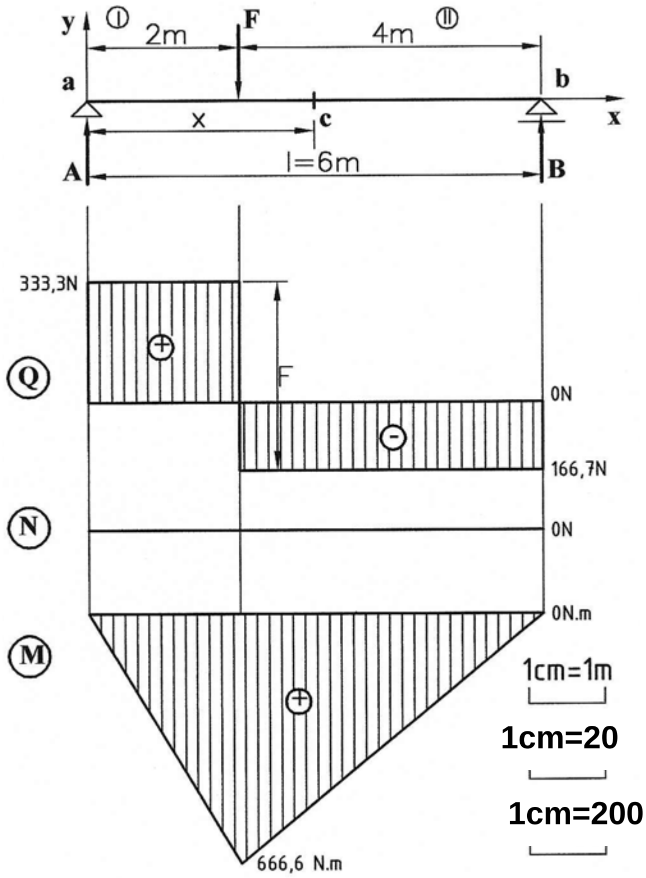
$$\frac{dN}{dx} = n(x) \quad , \qquad \frac{dM}{dx} = Q - m(x) \qquad (4.7)$$

s rovnakým významom použitia ako pre $q_{(x)}$.

V nasledujúcich príkladoch na vyšetrovanie priebehu N. Q, M budú použité už vyriešené hodnoty reakcií (ich výpočtu sme sa podrobne venovali v predchádzajúcom ods. 4.2).

Pri kreslení diagramu na priamych nosníkoch budeme kladné hodnoty N a Q vynášať nad osou, hodnoty momentov M_O na stranu ťahaných vlákien (pod osou). Na rámoch N a Q ľubovoľne a M_O opäť na strane ťahaných vlákien.

Príklad 4.4: Určite výpočtom priebehy N, Q, M_O na prostom nosníku od osamelej sily F.



Obr. 4.12

Dané: F = 500 N a rozmery podľa obrázku 4.12

Reakcie: A = 333,3 N, B = 166,7 N (viď. príklad 2.14)

- Vnútorné sily Q:

- v priereze C, v intervale I je
  $Q_I = A = 333{,}3$ N
- v priereze C, v intervale II je
  $Q_{II} = A - F = 333{,}3 - 500 = -166{,}7$ N

- Vnútorné sily N:

$\sum F_{ix} = N = 0$

- **Ohybový moment** M_O (v mieste sily, kde mení priečna sila znamienko)

$M_O = 333{,}3 \; . \; 2 = 666{,}6$ Nm

Na zobrazenie sú použité mierky $m_L = 0{,}1$ m.mm^{-1}, $m_F = 20$ N.mm^{-1}, $m_M = 20$Nm.mm^{-1}, pričom v oboch intervaloch $\frac{dN}{dx} = -n = 0 \Rightarrow$ Q konšt., $\frac{dM_O}{dx} = Q =$ konšt. $\Rightarrow M_O$ má lineárny priebeh.

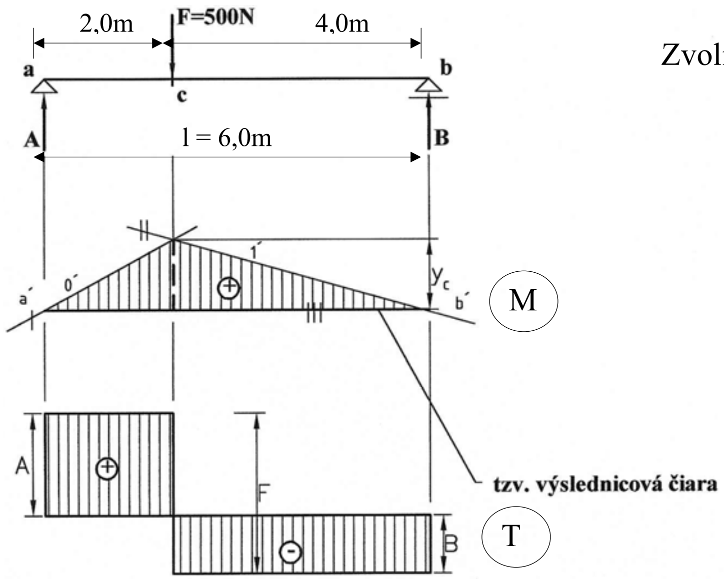
Príklad 4:5: Určite graficky veľkosť a priebehy vnútorných síl N, Q, M_O na prostom nosníku od osamelej sily F

Dané: F = 500 N a rozmery podľa obrázku 4.13

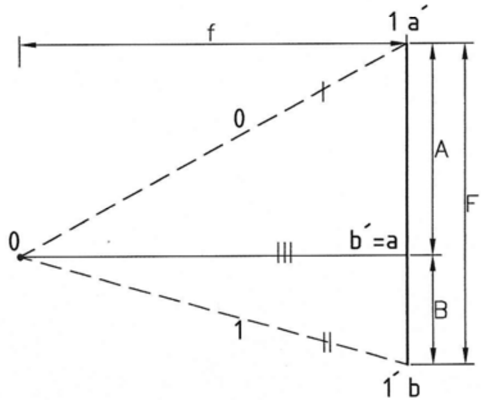
Zvolíme mierky $m_L = 0{,}1$ m.mm^{-1}

$m_F = 10$ N.mm^{-1}

$m_M = 20$ N.mm^{-1}



Obr. 4.13



Odmeraním A = 335 N, B = 165 N

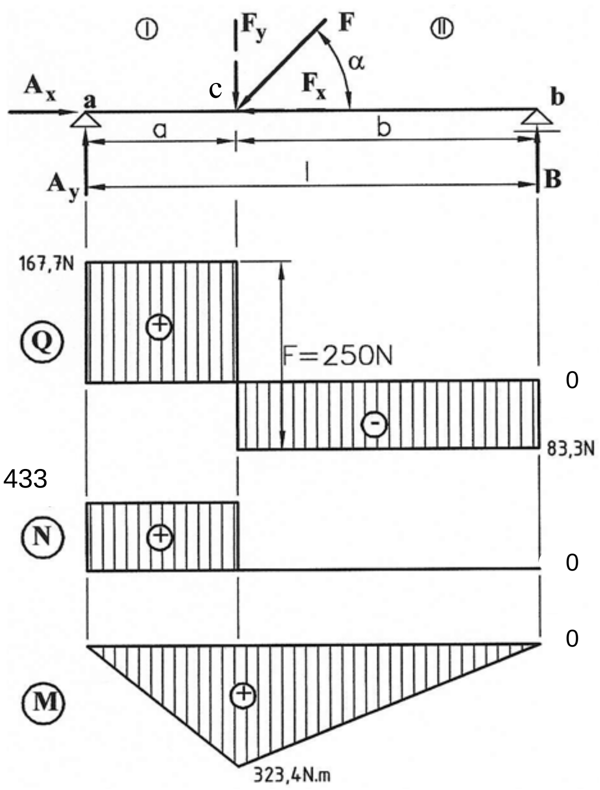
$M_{max} = y_c \cdot f = 1{,}10.600 = 660$ Nm

kde (y_c v mierke dĺžok a f v mierke síl).

Zdôvodnenie súčinu $M_{max} = y_c \cdot f$ viď odst. 2.21, obr. 2.13.

Pozn.: V obrazci T je veľkosť síl A, B a F polovičná voči mierke síl.

Príklad 4.6: Určite výpočtom priebehy N, Q, M_O na prostom nosníku od šikmej sily F (obr. 4.14)



Obr. 4.14

Dané: **F** = 500 N, a = 2,0 m, b = 4,0 m,

l = 6,0 m, $\alpha = 30^o$

Reakcie: A_y = 166,7 N, A_x = 433 N,

B = 83,3 N (viď. príklad 2.15),

F_y = 250 N

- Vnútorné sily Q

- v priereze C, v intervale I je

  $Q_I = A_y = 166{,}7$ N

- v priereze C, v intervale II je

  $Q_{II} = A_y - F_y = A_y - F.\sin 30^o =$

  $= 166{,}7 - 500 \,.\, 0{,}5 = -83{,}3$ N

- Vnútorné sily N:

- v priereze C, v intervale I je

  $\sum F_{ix} = A_x = 433$ N

- v priereze C, v intervale II je

  $\sum F_{ix} = A_x - F_x = 0$ N

Pozn.: Na zobrazenie zvolíme $m_L = 0{,}1$ m.mm^{-1}, $m_F = 10$ N.mm^{-1}, $m_M = 20$ Nm.mm^{-1}.

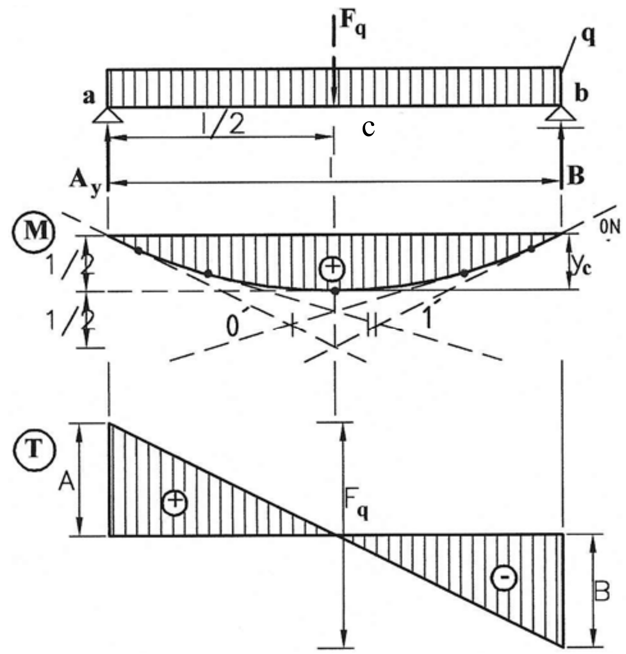
- **Ohybový moment** M(x=c)

$Mo = A_y \,.\, a = 166{,}7 \,.\, 2{,}0 = 323{,}4$ Nm

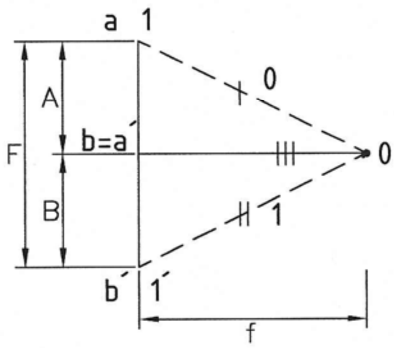
Pozn: Rameno sily A_x voči bodu C, ktorý tiež leží na strednici je nulové, preto aj momentový účinok tejto sily k bodu C je nulový!

Príklad 4.7: Určite výpočtom a graficky veľkosť a priebehy vnútorných síl na prostom nosníku od spojitého rovnomerného zaťaženia (obr. 4.15).

- **Grafické riešenie**



Zaťaženie $q[N.m^{-1}]$ nahradíme osamelým náhradným bremenom $F_q = q.l$. Vo zvolených mierkach vzdialeností a síl nakreslíme zložkový obrazec a priebeh vnútorných síl a momentov.



Obr. 4.15

- **Analytické riešenie**

Reakcie $A = B = \frac{F}{2} = q \, . \, \frac{l}{2}$

Zmena znamienka priečnych síl musí nastať vždy keď bude platiť A - q . x = 0.

Odtiaľ $x = \frac{A}{q} = \frac{q.l}{2} . \frac{1}{q} = \frac{l}{2}$.

V tejto vzdialenosti platí, že $q.l = F_q$ a teda aj, že v smere nosníka, v bode C bude

$M_C = M_{Omax} = A.\frac{l}{2} - \frac{qx}{2}.\frac{l}{4} = \frac{1}{8} q l^2$

Poznámka:
- V príkladoch 4.5 a 4.7 na grafickom riešení si možno všimnúť, že pri vynášaní priebehu N a Q sa vlastne kreslí rovnovážny zložkový obrazec vonkajších síl roztiahnutý na celú dĺžku nosníka.
- V príklade 4.7 je použitý bežný spôsob zostrojenia kvadratickej paraboly, ktorým pri pozornom kreslení možno získať dostatočne presné poradnice priebehu momentov.

Príklad 4.8: Určite výpočtom priebehy N, Q, M_O na nosníku s osamelými silami (obr. 4.16).

Dané: F_1 = 2 kN, F_2 = 3 kN, F_3 = 2 kN, F_4 = 3 kN, $\alpha_1 = 60^o$, $= 45^o$, $= 60^o$.

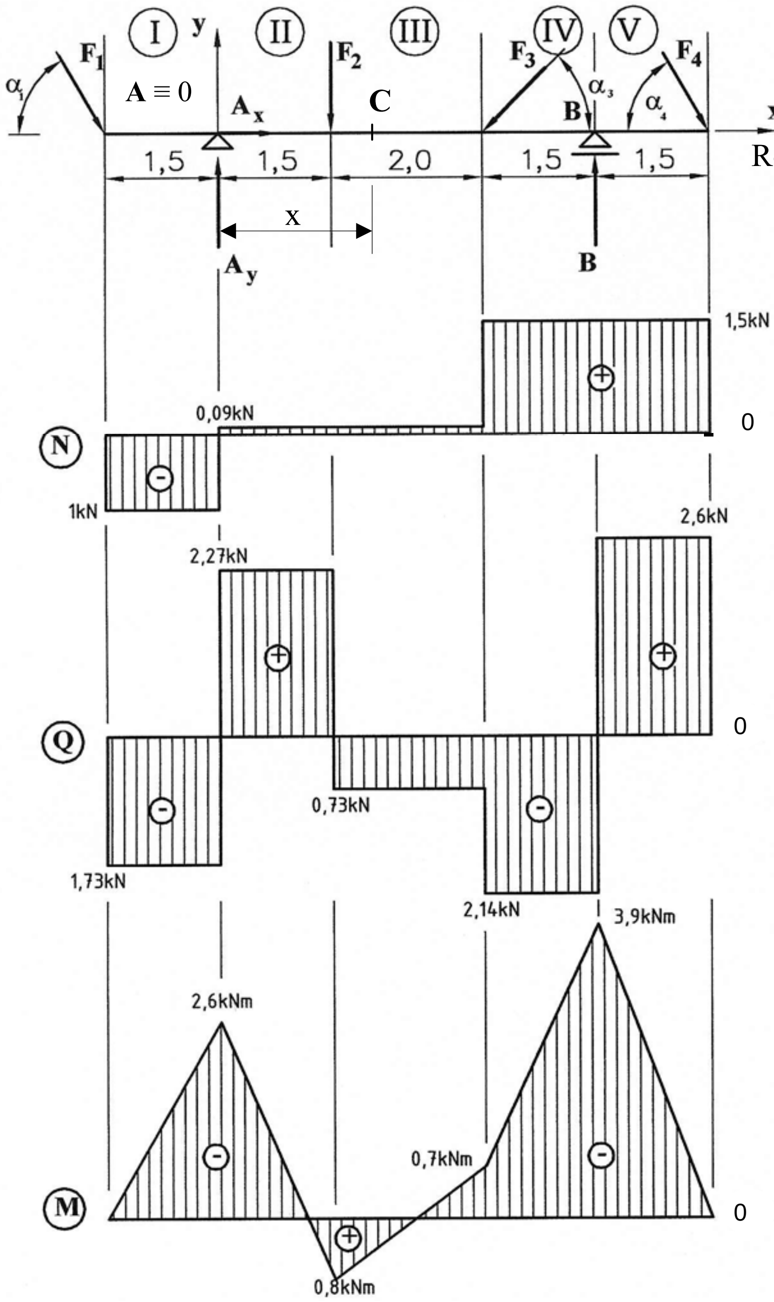
Rozmery sú v obrázku.

Reakcie: $\sum M_A = 0 \rightarrow B = 4{,}74$ kN

kontrola $\sum Fy = 0$

$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow A_y = 4{,}0$ kN

$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow A_x = -1{,}09$ kN



Obr. 4.16

Vnútorné sily Q

Napr. v priereze C, v intervale III

$N = -F_1\cos\alpha_1 - A_x = -2\cos 60^o + 1{,}09 = 0{,}09$ kN

$Q = -F_1\sin\alpha_1 + A_y - F_2 = -2\sin 60^o + 4{,}0 - 3 = -0{,}73$ N

$M_O = -F_1\sin\alpha_1(1{,}5 + x) + A_y.x - + F_2(x-1{,}5) = 1{,}9 - 0{,}73\,x$

N a Q sú konštantné.

M_O je lineárna funkcia x.

To zodpovedá q = n = 0.

Použité mierky

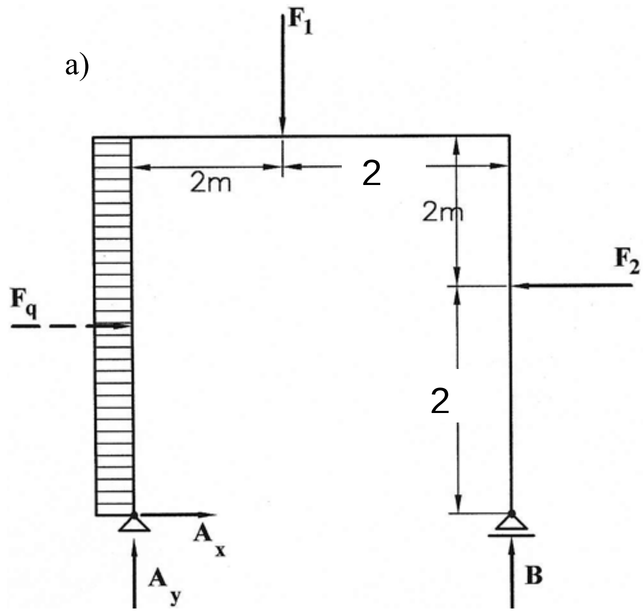
$m_L = 0{,}1$ m.mm^{-1}

$m_F = 0{,}1$ kN.m^{-1}

$m_M = 0{,}1$ kNm.mm^{-1}

Podobne aj v ostatných intervaloch.

Príklad 4.9: Určite priebehy N, Q, M_O na pravouhlom rovinnom ráme (obr. 4.17).



Dané: $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3$ kN, $q = 1$ kNm^{-1}

Rozmery dĺžok v $m_F = 0{,}1$ m.mm^{-1}.

Reakcie: $\sum M_A = 0 \rightarrow B = 1{,}5$ kN

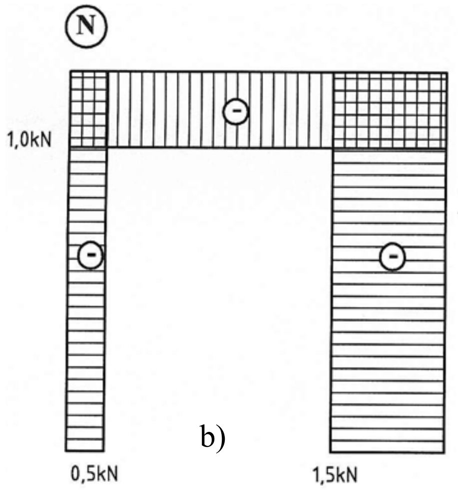
$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow A_y = 0{,}5$ kN

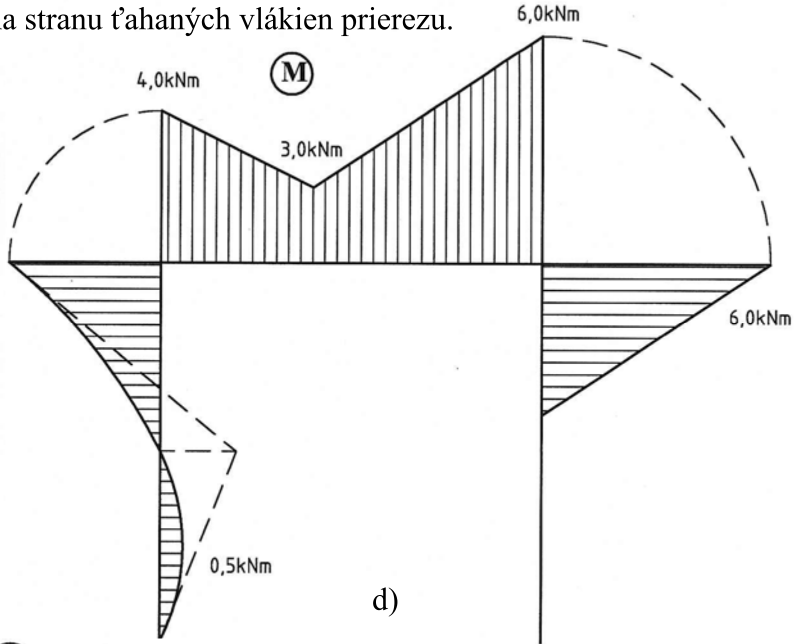
$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow A_x = -1$ kN

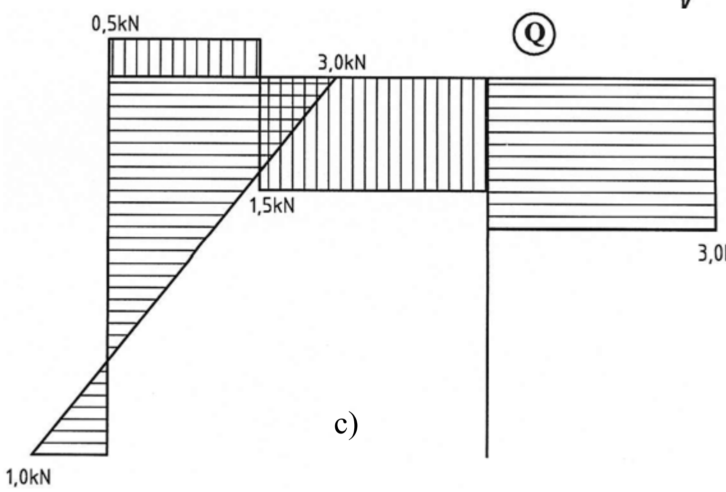
Obr. 4.17

Vnútorné sily

Obrazce N, Q, M_O sa kreslia zvyčajne do troch samostatných diagramov (obr. 4.17 b,c,d). Ohybové momenty kreslíme na stranu ťahaných vlákien prierezu.







Možno si všimnúť, že v pravouhlých rámoch pri prechode z jednej časti na druhú prechádzajú osové sily v priečne a naopak.

Ohybové momenty majú v mieste prechodu na oboch častiach rovnakú hodnotu.

5. ROVINNÉ SÚSTAVY TELIES

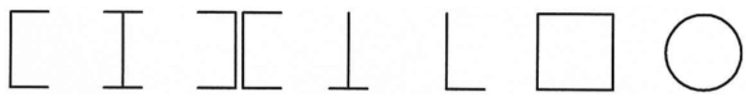
Rovinná sústava telies je tvorená telesami, ktoré sú navzájom spojené pohyblivo. Spojenie je prevedené tak, že vzájomný pohyb telies je možný iba v rovinách rovnobežných s jednou základnou rovinou. Rovnako aj vonkajšie (primárne) silové účinky i väzbové reakcie tvoria rovinnú sústavu síl.

Sústavy telies môžu byť **nepohyblivé** alebo **pohyblivé** (mechanizmy). Medzi nepohyblivé sústavy zaraďujeme tiež tzv. prútové sústavy.

5.1 Rovinné prútové sústavy

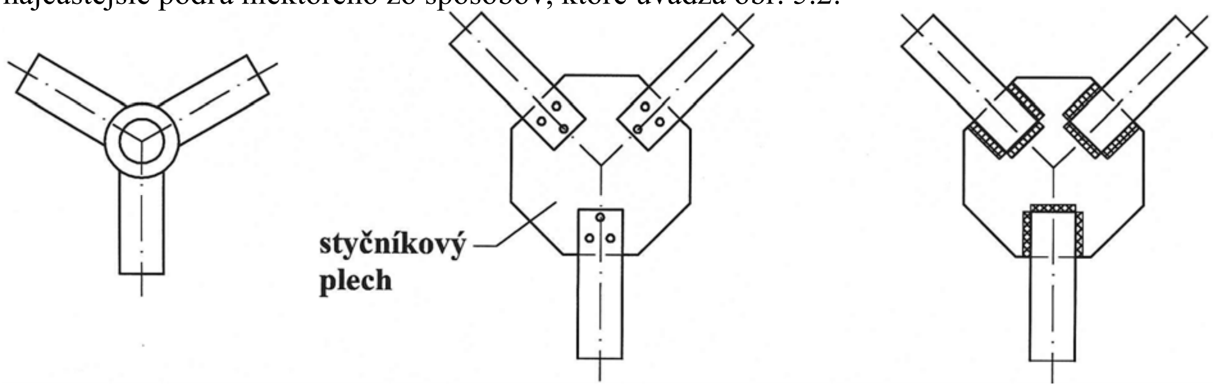
Prútová sústava je najjednoduchší **výpočtový model priehradovej konštrukcie**, ktorý je **tvorený nehmotnými štíhlymi telesami - prútmi**, **spojených navzájom kĺbmi**. Ak zaťaženie i uloženie sústavy pôsobí v jednej rovine, je **takáto prútová sústava rovinná**.

Telesá priehradovej konštrukcie (zvislice, diagonály - priečky, pásy ...) sú najčastejšie z valcovaných oceľových profilov rôzneho tvaru (obr. 5.1) a usporiadania. Ich názvy, najčastejšie odvodené od geometrického tvaru konštrukcií určujú záväzné technické normy.



Obr. 5.1

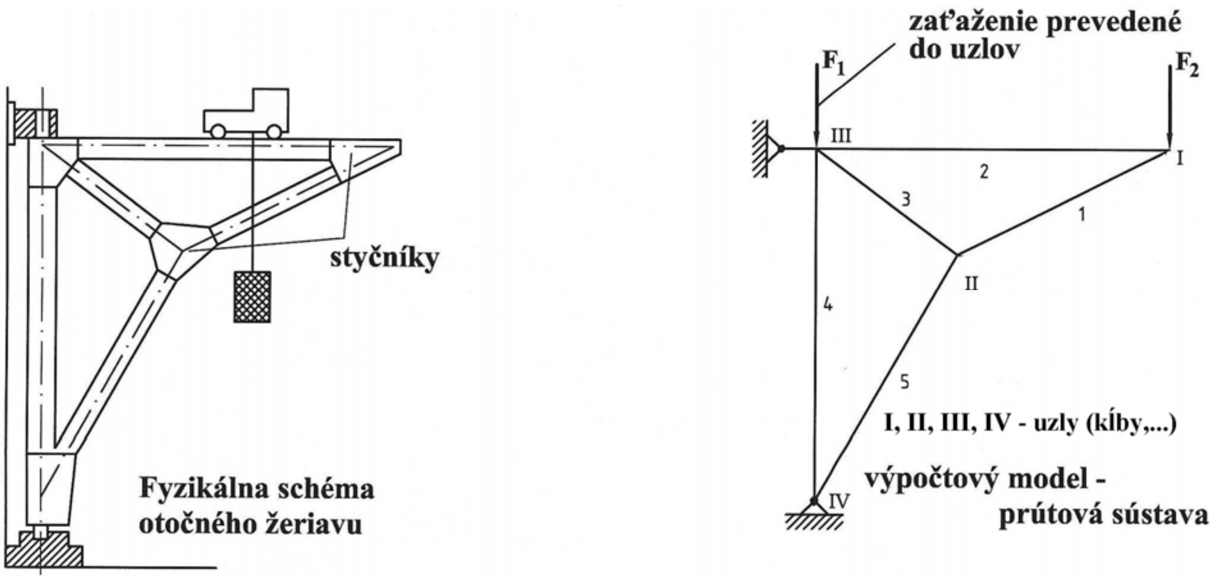
Telesá sú spojené v tzv. styčníkoch. Konštrukčné prevedenie styčníkov býva najčastejšie podľa niektorého zo spôsobov, ktoré uvádza obr. 5.2:



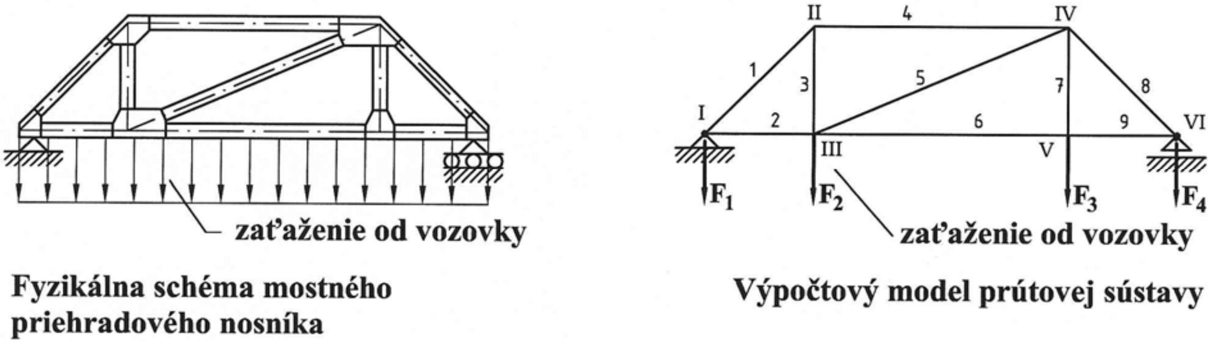
kĺbové nitované alebo skrutkované zvarované

Obr. 5.2

Na nasledujúcich obrázkoch 5.3 a 5.4 sú nakreslené príklady trojuholníkových priehradových konštrukcií a ich výpočtové modely.



Obr. 5.3



Obr. 5.4

Výpočtový model priehradovej konštrukcie - prútová sústava - je vytvorený na základe týchto predpokladov:

- Jednotlivé telesá sú štíhle a možno ich považovať ako jednorozmerné - tzv. **prúty**.
- Prúty sa pretínajú v jednom bode - **styčníku** a (sú natoľko štíhle, že) ich ohybovú tuhosť nemusíme brať do úvahy. Spojenie prútov v uzle potom pôsobí ako kĺbové spojenie.
- Zaťaženie konštrukcie sa uvažuje len v uzloch. Keďže osi prútov prechádzajú ťažiskami telies, **prúty prenášajú len osové (normálne) sily - ťah alebo tlak**.

5.1.1 Základná úloha, statická a tvarová určitosť

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že každý prút môže byť namáhaný len osovou silou. Každý uzol, pokiaľ zaťaženie i uloženie je v styčníkoch, predstavuje rovinný zväzok síl. Keď je prútová sústava ako celok v pokoji, musí byť v pokoji aj každá jej časť, a preto sily v každom uzle musia byť v rovnováhe a spĺňať známe dve podmienky rovnováhy

$$\sum F_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0$$

Základnou úlohou riešenia prútovej sústavy je určenie neznámych osových síl v prútoch.

Prútová sústava je v rovnováhe vtedy, ak je v rovnováhe každý jej uzol, preto pri počte uzlov u musí byť v rovinnej prútovej sústave splnených 2.u rovníc typu

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0\\ \sum F_{iy} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{(pre každý uzol)}$$

V týchto rovniciach sú zahrnuté tiež tri podmienky rovnováhy vonkajších síl pôsobiacich na prútovú sústavu. **Počet voľných rovníc**, ktoré sú k dispozícii **je teda len 2u - 3**.

Ak má byť prútová sústava s počtom p prútov **tvarovo a staticky určitá, musia byť splnené vzťahy**:

$$\boxed{p = 2.u - 3} \quad \text{pre voľnú prútovú sústavu} \tag{5.1}$$

$$\boxed{2.u = p + 2p_2 + p_1} \quad \text{pre viazanú (nepohyblivú) prútovú sústavu}$$

kde p je počet prútov, u počet uzlov, p_2 počet väzieb, ktoré odoberajú prútovej sústave 2^{o}V a p_1 počet väzieb odnímajúcich 1^{o}V.

Základnú úlohu - určiť neznáme sily v prútoch od vonkajších (primárnych a sekundárnych) síl pôsobiacich na prútovú sústavu v jej uzloch **vieme metódami statiky vyriešiť len vtedy, keď prútová sústava je staticky a súčasne aj tvarovo určitá**!

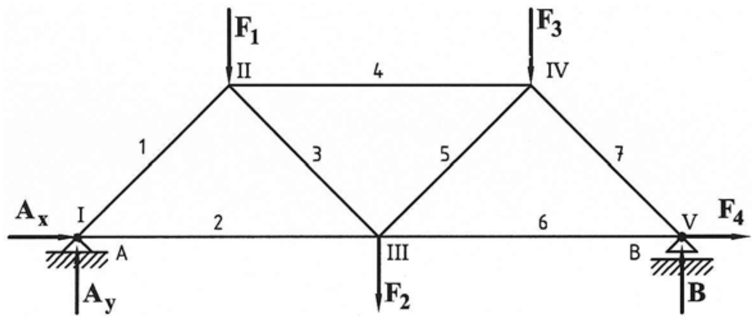
5.1.2 Rozdelenie staticky určitých prútových sústav

Osové sily v prútoch môžeme určovať analyticky alebo graficky rôznymi metódami. Voľba metódy riešenia staticky a tvarovo určitej prútovej sústavy závisí na jej type.

Rovinné staticky určité prútové sústavy sa podľa typu delia na jednoduché, zložené a zložité.

5.1.2.1 Jednoduchá prútová sústava (obr. 5.5)

Jednoduchá prútová sústava vznikne vtedy, keď k základnému trojuholníku je každý ďalší styčník pripojený najviac dvoma prútmi a sústava má aspoň jeden dvojný uzol (len dve neznáme sily v uzle = počtu podmienok, resp. počtu rovníc rovnováhy v ňom).



$u = 5$
$p = 7$
$p_2 = 1$
$p_1 = 1$

podľa (3.1)

$2.5 = 7 + 2.1 + 1.1 \Rightarrow$

podmienka riešiteľnosti statickými metódami je splnená!

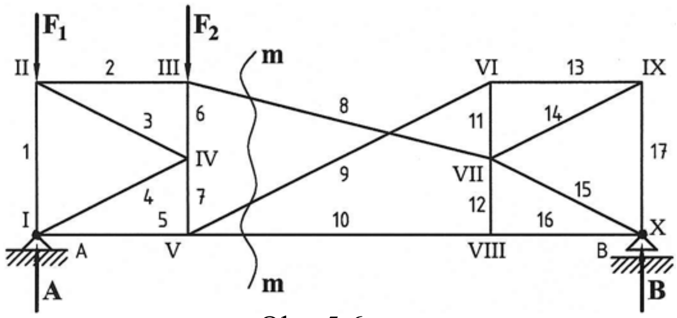
Obr. 5.5

Metódou riešenia je **postupná uzlová metóda**. Riešenie základnej úlohy začína vždy vo dvojnom styčníku.

Pri grafickom riešení možno použiť aj **Cremonovu** (1830 - 1903) **metódu**.

5.1.2.2 Zložená prútová sústava (obr. 5.6)

Zložená prútová sústava vznikne spojením dvoch jednoduchých sústav pomocou troch prútov, ktoré sa nepretínajú v jednom uzle, pričom sústava nemá dvojný styčník.



u = 10
p = 17
p_2 = 1
p_1 = 1

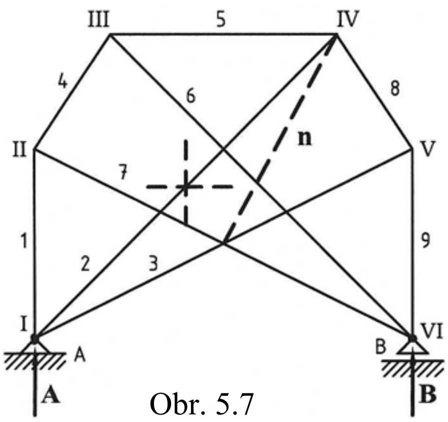
podľa (3.1) 2.10 = 17 + 2 + 1 ⇒ splnené!

Obr. 5.6

Takúto sústavu možno riešiť tzv. **priesečnou metódou**, a to **buď analytickou Ritterovou** (∗1826), alebo **Culmannovou grafickou metódou**.

5.1.2.3 Zložitá prútová sústava (obr. 5.7)

Zložitá prútová sústava neobsahuje dvojný styčník (uzol) a jediným rezom ($\overline{m,m}$) cez tri prúty, vedeným podobne ako v predchádzajúcej zloženej sústave, sa nedá rozdeliť na dve časti.



Obr. 5.7

u = 6
p = 9
p_2 = 1
p_1 = 1

podľa (3.1) 2.6 = 9 + 2.1 + 1.1 ⇒ splnené!

Vhodnými metódami riešenia sú tzv. **Hennebergova** (∗ 1850) **metóda náhradného prúta** (n) a **metóda neurčitej mierky**.

Poznámka: V ďalšom sa budeme podrobnejšie zaoberať len metódami a riešením jednoduchých prútových sústav. U ostatných metód budú vysvetlené iba princípy.

5.2 Metódy riešenia statických určitých rovinných prútových sústav

5.2.1 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

Ako bolo už uvedené (ods. 5.1.2.1) možno jednoduché prútové sústavy riešiť pomocou uzlovej a Cremonovej metódy. Ukážeme si, že Cremonova metóda vychádza z uzlovej metódy a že v určitých prípadoch zrýchľuje a objektivizuje jej postup.

5.2.1.1 Postupná uzlová metóda

Pri postupnej uzlovej metóde (má niekoľko variantov) sa v jednoduchej prútovej sústave rieši rovnováha v každom uzle ako rovnováha rovinného zväzku síl. **Riešenie začína výpočtom reakcií**, t. j. vonkajších sekundárnych síl, ktoré spoločne s akčnými (vonkajšími primárnymi) silami predstavujú vonkajšiu všeobecnú sústavu síl, pôsobiacu na prútovú sústavu ako celok.

Vlastný výpočet osových síl v prútoch začína vždy vo dvojnom uzle (uzol len s dvoma neznámymi silami) a **potom pokračuje postupne v ďalšom novovzniknutom dvojnom uzle**.

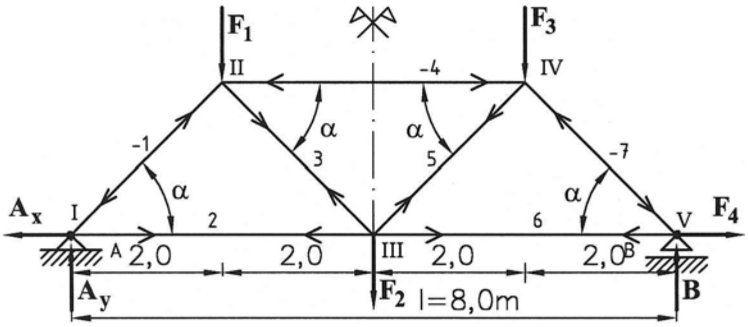
Tomu zodpovedá aj postupné očíslovanie uzlov, napr. v poradí I, II, ...

Pri analytickom riešení sa predpokladá, že všetky neznáme sily sú ťahové (+). Vo výsledkoch potom získame buď ťah (+), keď sa znamienko potvrdí, alebo tlak (-), ak sa pôvodný predpoklad ukáže ako nesprávny.

Pri grafickom spôsobe riešenia kreslíme zmysly osových síl v uzloch.

Ťah (+) alebo tlak (-) v každom prúte sa zvyčajne označuje vo východzom výpočtovom modeli (obr. 5.8a).

Príklad 5.1 V danej prútovej sústave (obr. 5.8) určite početne a graficky všetky osové sily v prútoch.



Dané: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F = 20$ kN

$\alpha = 45^o$, $\sin 45^o = \cos 45^o = 0{,}707$

$2.u = p + 2p_2 + p_1$

$2.5 = 7 + 2.1 + 1 \rightarrow$ splnené!

Obr. 5.8

a) Početný spôsob

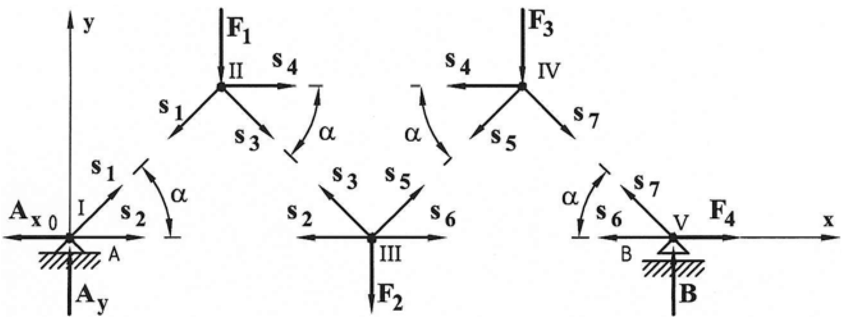
- **Výpočet reakcií**: $\sum M_B = 0$: $- A_y.8 + F\,(6 + 4 + 2)$ $\quad \rightarrow \quad$ $A_y = \dfrac{20.12}{8} = 30$ kN

$\sum F_x = 0$: $- A_x + F_4 = 0$ $\quad \rightarrow \quad$ $A_x = 20$ kN

$\sum F_y = 0$: $A_y - 3F + B = 0$ $\quad \rightarrow \quad$ $B = 30$ kN

- **Vlastný výpočet osových síl v prútoch** (tzv. zjednodušená varianta uzlovej postupnej metódy).

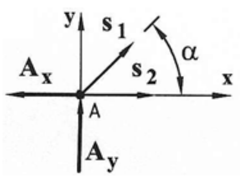
Uvoľníme v uzloch neznáme osové sily ako ťahy (obr. 5.8a):



Obr. 5.8a

V sústave sú dva dvojne uzly (I, V) riešenie začneme napr. v uzle I.

Uzol I



$\sum F_y = 0$: $A_y + S_1 \sin\alpha = 0 \rightarrow S_1 = -\dfrac{A_y}{\sin\alpha} = -\dfrac{30}{0{,}707} =$

$= -42{,}43$ kN

$\sum Fx = 0$: $-A_x + S_2 + S_1\cos\alpha = 0 \rightarrow S_2 = A_x - S_1\cos\alpha =$

$= 20{,}0 - (-42{,}43 \cdot 0{,}707) = 20 + 30 = 50$ kN

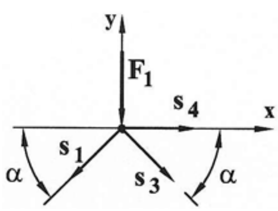
Obr. 5.8a/1

Poznáme už veľkosti a druh síl v prútoch S_1, S_2. Príslušné znamienka síl vyznačíme do obr. 5.8 ako tlak (-) v prúte S_1, resp. ťah (+) v prúte S_2 (znamienko + sa nezvykne vyznačovať).

Poznámka: Niekedy, pre väčšiu názornosť sa znamienkami plus (ťah) a mínus (tlak) označené sily v prútovej sústave (obr. 5.8) doplĺňajú ešte aj graficky zmyslami (šípkami) ich pôsobenia (zistenými, skutočnými).

Môžeme teda postúpiť do novovzniknutého dvojného uzla II, lebo v tomto uzle sú teraz už iba dve neznáme osové sily S_3, S_5 (uzol III túto podmienku nesplĺňa, pretože sú v ňom zatiaľ neznáme až tri sily $-S_3$, S_5 a S_6).

Uzol II



$\sum F_y = 0$: $- S_3.\sin\alpha - S_1.\sin\alpha - F_1 = 0$

$S_3 = -(F_1 + S_1\sin\alpha)\dfrac{1}{\sin\alpha} = -(S_1 + \dfrac{F_1}{\sin\alpha}) =$

$-(-42{,}43 + \dfrac{20}{0{,}707}) = 14{,}14$ kN

Obr. 5.8/2

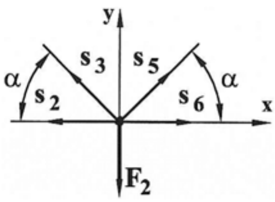
Predtým vypočítanú silu pri ďalšom uzle dosadzujeme aj so znamienkom.

$F_x = 0$: $S_4 + S_3\cos\alpha - S_1\cos\alpha = 0$

$S_4 = (S_1 - S_3)\cos\alpha = (-42{,}43 - 14{,}14) \cdot 0{,}707 = -40$ kN

Po vyznačení síl S_4 ako tlak (-), resp. S_3 ako ťah (+) znamienkami, prípadne aj graficky zmyslami ich pôsobenia v obr. 5.8 môžeme postupovať ďalej, konkrétne: v našom prípade by sme mohli pokračovať v ktoromkoľvek z uzlov III, IV i V, pretože v každom z nich sú už len dve neznáme sily. Postúpme do ďalšieho uzla, napr. III .

Uzol III



Obr. 5.8a/3

$$\sum F_y = 0:\ S_5.\sin\alpha + S_3.\ \sin\alpha - F_2 = 0$$

$$S_5 = \frac{F_2}{\sin\alpha} - S_3 = \frac{20}{0{,}707} - 14{,}14 = 14{,}14\ \text{kN}$$

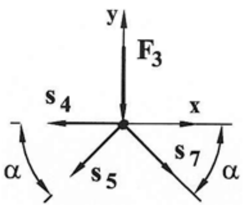
$$\sum F_x = 0:\ -S_2 - S_3\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_6 = 0$$

$$S_6 = S_2 + (S_3 - S_5)\cos\alpha = 50 + (14{,}14 - 14{,}14)\ .\ 0{,}707 = 50\ \text{kN}$$

Postupujeme ďalej, napr. do uzla IV

Uzol IV

$$\sum F_y = 0:\ -\ S_5.\sin\alpha - F_3 - S_7\sin\alpha = 0$$



$$S_7 = -(S_5\sin\alpha + F_3)\ \frac{1}{\sin\alpha} = -(S_5 + \frac{F_3}{\sin\alpha}) =$$

$$= -\ (14{,}14 + \frac{20}{0{,}707}) = -\ 42{,}43\ \text{kN}$$

Obr. 5.8/4

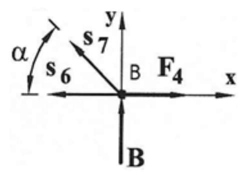
$$\sum F_x = 0:\ -S_4 - S_5\cos\alpha + S_7\cos\alpha = 0$$

$S_4 = (S_7 - S_5)\cos\alpha = (-42{,}43 - 14{,}14)\ 0{,}707 =$ -40 kN (čo je tá istá hodnota - podľa očakávania(!) -ako v uzle II).

Opäť vyznačíme znamienkami, prípadne aj graficky zmyslami zistené osové sily S_7 a S_4 do obr. 5.8.

Riešenie ukončíme v poslednom uzle V

Uzol V



Obr. 5.8/5

$\sum F_y = 0$: $B + S_7 \sin\alpha = 0$

$30 + (-42{,}43 \,.\, 0{,}707) = 0$ → splnené!

$\sum F_x = 0$: $-S_6 - S_7 \cos\alpha + F_4 = 0$

$-50 - (-42{,}43 \,.\, 0{,}707) + 20 = 0$

$-50 + 30 + 20 = 0$ → splnené!

Poznámka: **Rovnováha v posednom uzle je súčasne kontrolou správnosti celého výpočtu!**

b) Grafický spôsob

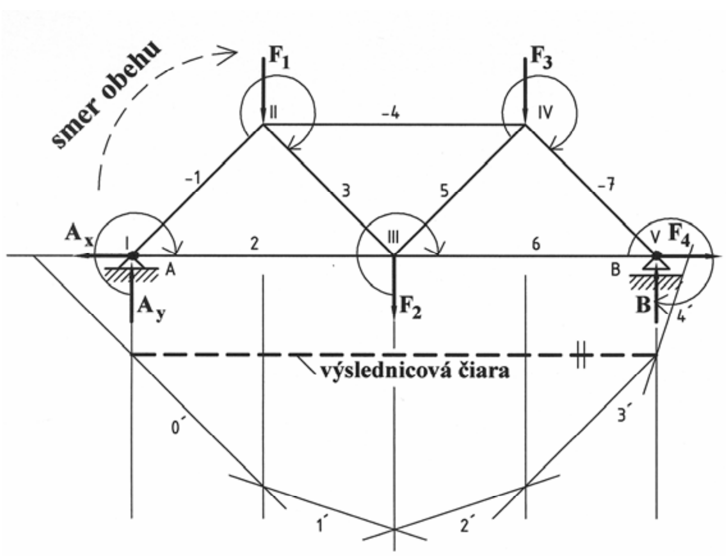
Grafický (názornejší) spôsob riešenia je zrejmý z nasledujúcich obrazcov rovnováhy v každom uzle prútovej sústavy - dve silové podmienky v analytickom spôsobe možno nahradiť pri grafickom riešení jedinou podmienkou - uzavretím silového obrazca!

Tak, ako pri analytickom spôsobe i teraz výpočet začína určením reakcií!

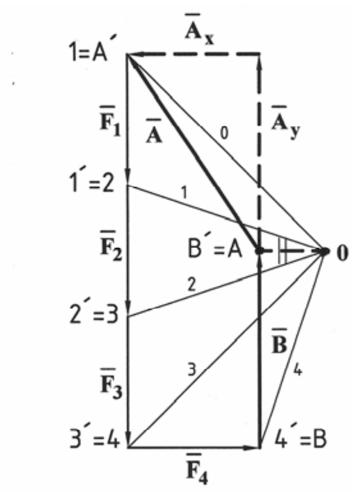
Príklad 5.2:

mierka síl 10 kN.cm^{-1}

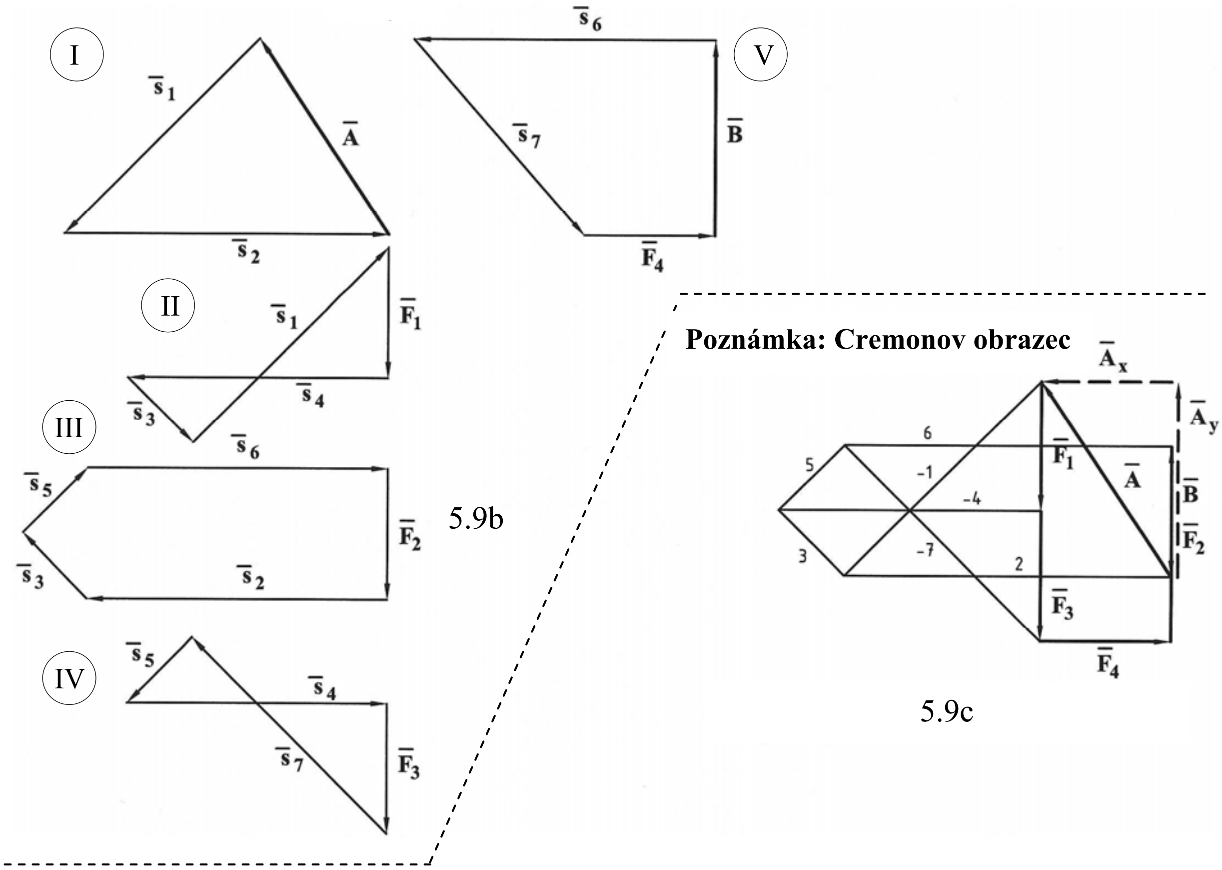
dĺžok 0,01 m.mm^{-1}



Obr. 5.9



5.9a



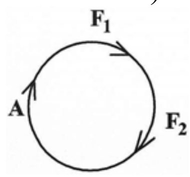
Cremonovu metódu možno charakterizovať ako „prienik“ postupne (pre každý uzol zvlášť) uzavretých silových obrazcov získaných pri postupnej uzlovej metóde v jediný obrazec, v ktorom sa úseky osových síl v prútoch vyskytujú iba jedenkrát. Spomínaný prienik sa pritom dosiahne jednoducho (porovnajme navzájom obr. 5.9.b a obr. 5.9.c!) „stotožnením“ úsekov tých istých síl (podrobnejšie ešte viď v ďalšom ods. 5.2.1.2).

5.2.1.2 Cremonova grafická metóda

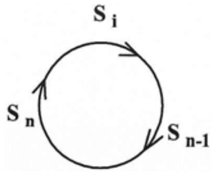
Cremonovu grafickú metódu možno použiť len na riešenie jednoduchých prútových sústav. Pri Cremonovej metóde (nemá analytický spôsob, resp. je zhodný s analytickým spôsobom uzlovej metódy) sú **osové sily nakreslené v silovom obrazci iba jedenkrát, neopakujú sa** (!). Uzavretý Cremonov obrazec je súčasne kontrolou správnosti i presnosti grafického riešenia.

Pri Cremonovej metóde je treba dodržať nasledujúci **postup**:

- Rovnovážnu sústavu vonkajších síl (prvotných i reakcií) kreslíme v poradí, v akom pôsobia po obvode prútovej sústavy, napr.:

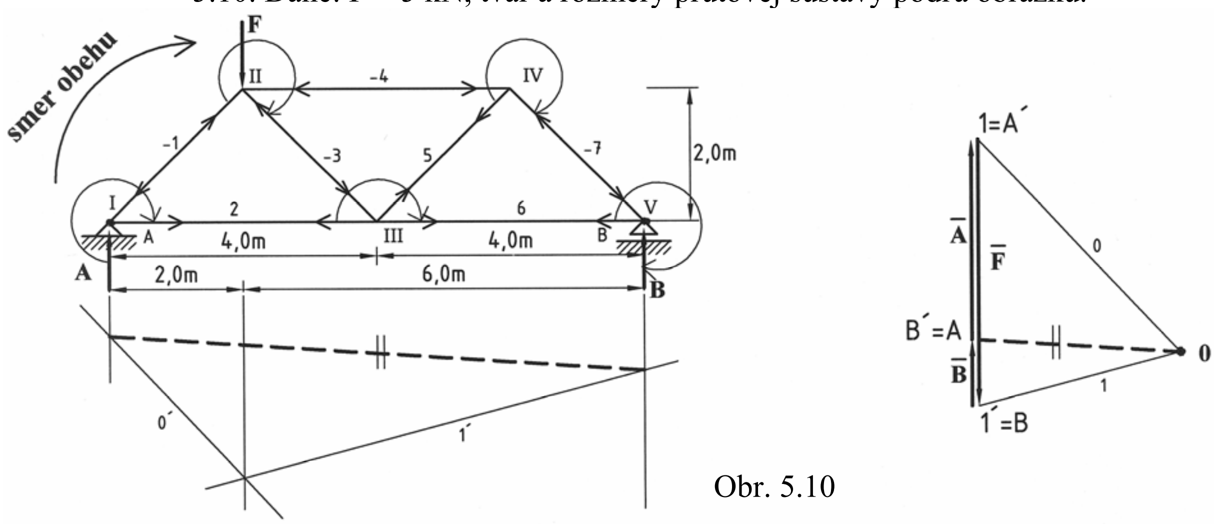


- Rovnovážny zložkový obrazec síl v každom uzle vynášame v poradí ich pôsobenia a v rovnakom zmysle ako vonkajšie sily



- Keď sa niektoré prúty krížia (zriedkavý prípad), uvažujeme v mieste kríženia myslený kĺb, ktorý rozdelí prúty na dve časti, pričom s každou pracujeme zvlášť.

Príklad 5.3: Určite Cremonovou metódou osové sily v jednoduchej prútovej sústave na obr. 5.10. Dané: F = 5 kN, tvar a rozmery prútovej sústavy podľa obrázku.



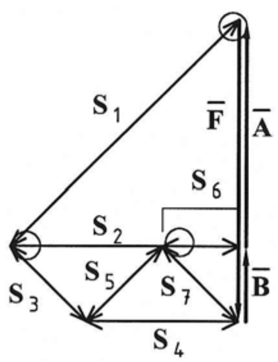
Obr. 5.10

- Výpočet osových síl

(m_{F_S} = 0,05 kN.mm^{-1})

Veľkosti reakcií **A** = $m_{F_R}\,.\,\overline{A}$

resp. **B** = $m_{F_R}\,.\,\overline{B}$



Obr. 5.10a

Veľkosti osových síl

Si = $m_{F_S}\,.\,\overline{S_i}$, i = 1,2,..7)

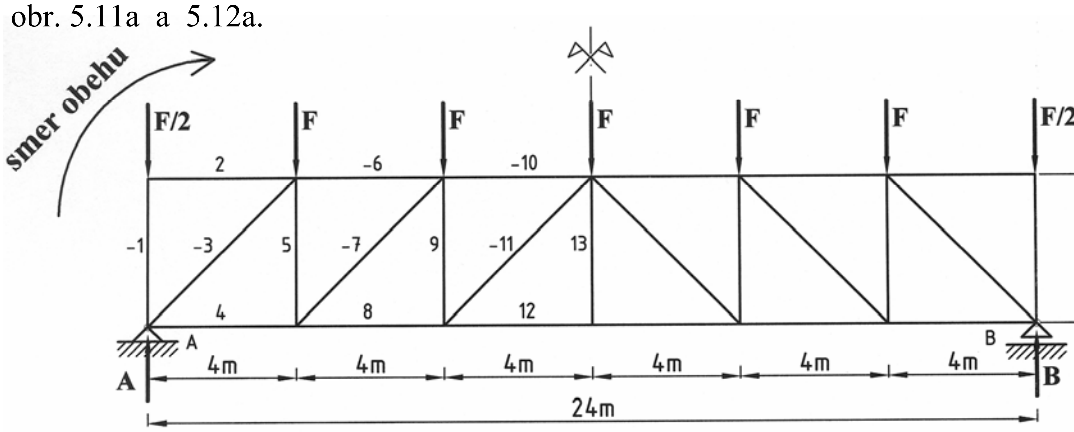
Poznámka: - Grafické riešenie začína vždy (po výpočte reakcií!) vo dvojnom uzle. Vo zvolenom smere obehu, najskôr zložením už známych síl a potom ich rozkladom do dvoch neznámych prútov.

- Niekedy je treba zmeniť mierku síl pri výpočte reakcií a osových síl, pretože ich zobrazovacie úseky sú podstatne menšie.

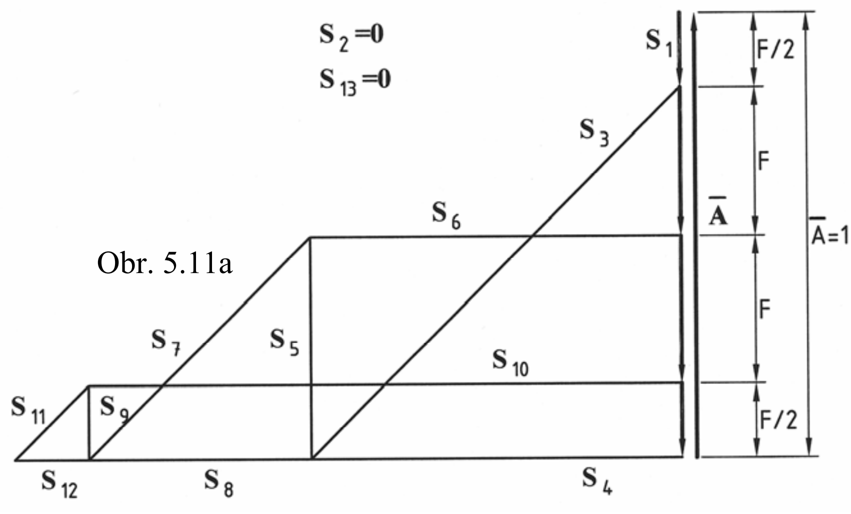
- Na začiatku, pri zoznamovaní sa s Cremonovou metódou je vhodné si označovať (obr. 5.10a) dohovoreným znamienkom (napr. →) tie sily, s ktorými začíname kresliť rovnováhu v novom (ďalšom) uzle. V novom uzle musí mať ale táto sila vždy opačný zmysel.

Príklad 5.4: Určite veľkosť osových síl v častých priamopasových trojuholníkových priehradových sústavách so stúpajúcimi (obr. 5.11) a klesajúcimi (obr. 5.12) diagonálami. Obe prútové sústavy sú symetrické ku stredu rozpätia geometricky i zaťažením v horných styčníkoch.

Postup a výsledok riešenia osových síl v Cremonovom silovom obrazci je zrejmý z obr. 5.11a a 5.12a.

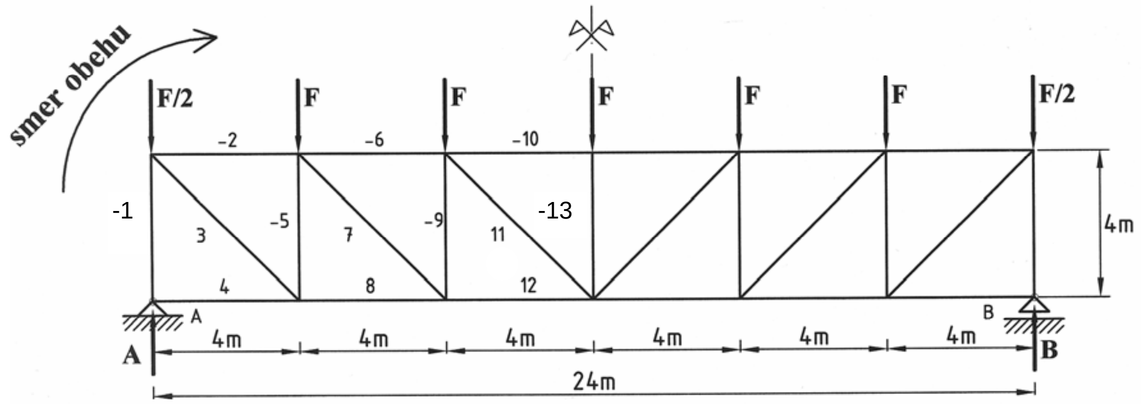


Obr. 5.11

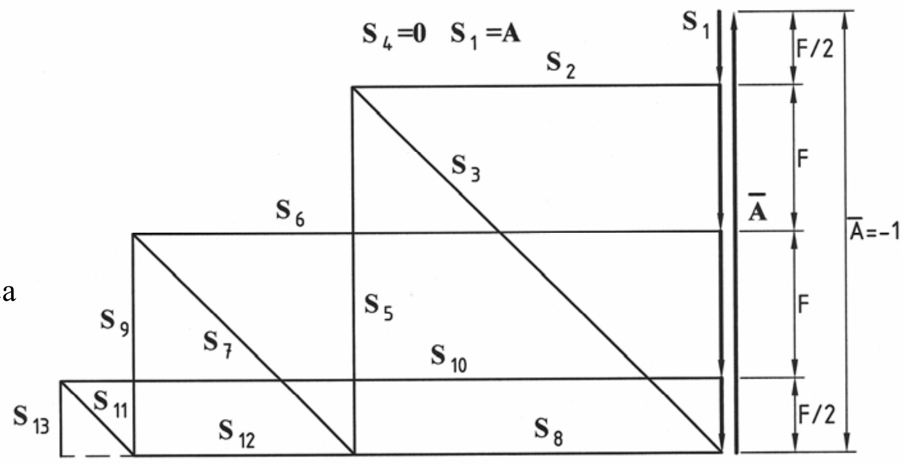


Obr. 5.11a

$m_F = 0{,}2\ \mathrm{m.mm^{-1}}$



Obr. 5.12



Obr. 5.12a

Zo symetrie priehradových sústav a zaťažení je zrejmé, že **A** = **B** = $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7} F_i$, a že skutočné veľkosti osových síl možno vypočítať zo vzťahu $\mathbf{S}_i$ = $m_F.S_i$, kde m_F = $\frac{A}{\overline{\overline{A}}}$, čo zodpovedá vhodne zvolenej dĺžke úseku $\overline{A}$ = 1.

Pozn.: V obr. 5.11a a 5.12a je už vynechané pomocné označovanie zmyslu síl, čo však predpokladá už určitú počtársku zručnosť.

Zo symetrie tiež vyplýva, že polohou symetrické prúty k stredu rozpätia v pravej časti sústavy budú namáhané rovnakými osovými silami, ako v ľavej riešenej časti (urýchlenie výpočtu).

Keď si v zodpovedajúcich uzloch predstavíme (ako v analytickom spôsobe riešenia uzlovou metódou) počiatok súradnicovej sústavy, je zrejmé, že v prútoch S_2, S_{13} v obr. 5.11, resp. S_4 v obr. 5.12 musia byť osové sily nulové.

Za povšimnutie stojí, že stúpajúce diagonály (ku stredu rozpätia) sú namáhané na tlak, klesajúce na ťah, horné pásy sú tlačené a dolné naopak ťahané.

5.2.2 Metódy riešenia zložených prútových sústav

Na riešenie zložených prútových sústav možno použiť priesečnú metódu. Metóda je známa vo dvoch podobách:

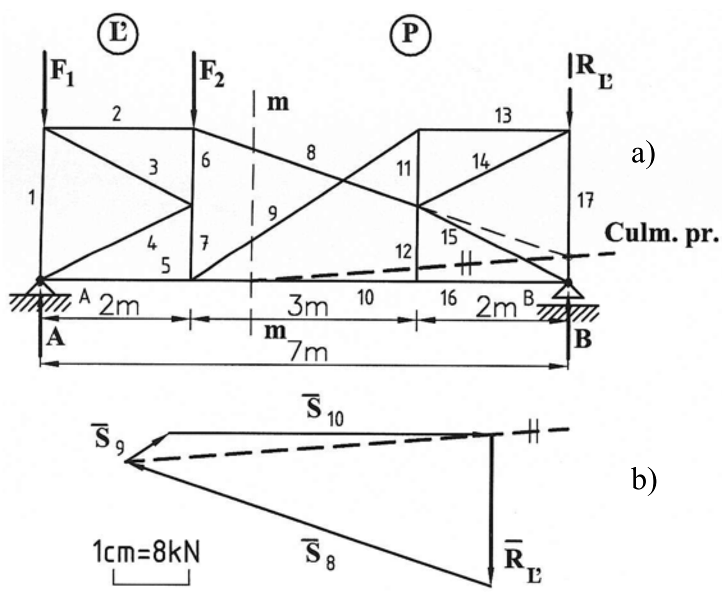
- grafická Culmannova metóda
- analytická Ritterova metóda.

V nasledujúcich úlohách uvidíme, že oboma metódami možno riešiť tiež sily vo vnútri jednoduchých prútových sústav.

5.2.2.1 Culmannova grafická metóda

Príklad 5.5: Určite osové sily v danej sústave (obr. 5.13).

Dané: $F_1 = 3$ kN, $F_2 = 6$ kN



Obr. 5.13

Reakcie:

$\sum M_A = 0 \rightarrow B = 1{,}715$ kN

$\sum M_B = 0 \rightarrow A_y = 7{,}285$ kN

Primárne sily sú len zvislé, $A_x = 0$.

Osové sily:

Daná sústava je zložená, nemá dvojný uzol. Rezom m-m rozdelíme sústavu fiktívne na Ľ a P časť. Vlastné riešenie vykonáme napr. pre ľavú časť, na ktorú pôsobia sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{A}_y$ a $\mathbf{S}_8$, $\mathbf{S}_9$, $\mathbf{S}_{10}$ pomocou Culamnnovej priamky (obr. 5.13b), pričom pre rovnováhu sústavy ako celku platí:

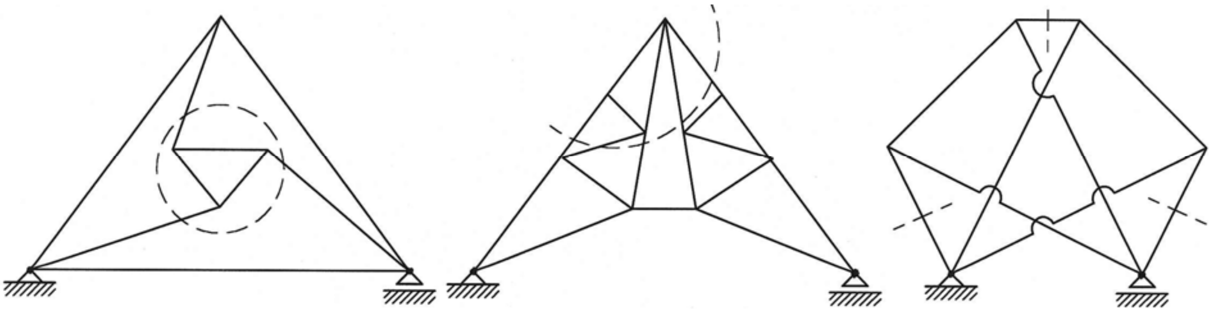
$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{A} = \mathbf{R}_L = -\mathbf{B}$

Výslednica $\mathbf{R}_Ľ$ leží na nositeľke reakcie **B**, takže $\mathbf{R}_Ľ = \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_{10} = 0$, $\mathbf{R}_Ľ = A - F_1 -$ $+ F_2 = 1{,}715$ kN.

Po vyriešení rovnice graficky pomocou Culmannovej priamky, odmeraním úseku síl v mierke m_F obdržíme hľadané sily = S_8-4,5 kN, S_9 = 0,5 kN, S_{10} = 3,53 kN.

Po určení síl v týchto troch prútoch možno pokračovať v riešení osových síl v sústave ďalej, napr. postupnou uzlovou metódou.

Fiktívny rez vedený cez tri prúty (nie viac, máme k dispozícii len 3 podmienky rovnováhy!), ktorým rozdeľujeme zloženú sústavu na dve časti nemusí byť priamy (obr. 5.14 a,b).



a) b) c)

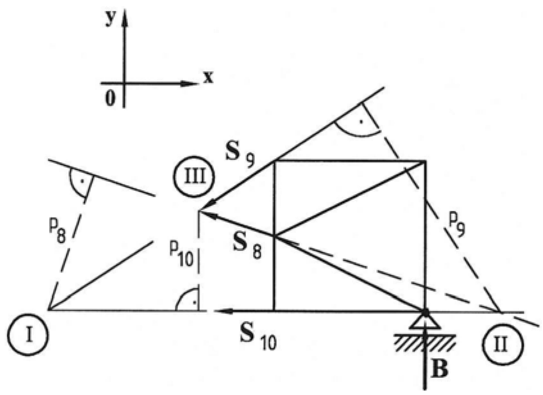
Obr. 5.14

Pozn.: Pokiaľ sa uspokojíme s určením len jednej osovej sily, môžeme prerezať i viac ako 3 prúty (obr. 5.14b), ale osi všetkých ostatných ostatných okrem toho, v ktorom osovú silu určujeme, musia tvoriť zväzok síl (smerovať do jedného bodu). Čiara rezu nemusí byť dokonca ani spojitá (obr. 5.14c).

5.2.2.2 Ritterova analytická metóda

Príklad 5.6: Pre analytické riešenie sústavy na obr. 5.13a je vhodnejšie zvoliť pravú časť P, nakoľko z vonkajších síl na nej pôsobí len jediná - reakcia **B**. Neznáme osové sily $\mathbf{S}_8$, $\mathbf{S}_9$,$\mathbf{S}_{10}$ (obr. 5.15) zvolíme ako ťahy a potrebné uhly prútov 8, 9, 10 (α, β, γ), určíme pomocou goniometrických funkcií z rozmerov danej prútovej sústavy. Podstatou Ritterovej metódy je, že každá momentová rovnica k priesečníkom vždy dvoch (z troch neznámych) síl - k momentovým stredom I , II , III, obsahuje len jednu neznámu silu:

$$\sum M_I = 0 \quad \rightarrow \quad S_8$$
$$\sum M_{II} = 0 \quad \rightarrow \quad S_9 \qquad (5.2)$$
$$\sum M_{III} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{10}$$



Obr. 5.15

Nevýhodou metódy je prácne hľadanie ramien síl (p_1, p_2, p_3) jednotlivých momentov, aj keď pri súčasnom grafickom a analytickom riešení, možno ramená odmerať s dostatočnou presnosťou priamo v pozorne nakreslenom obrázku.

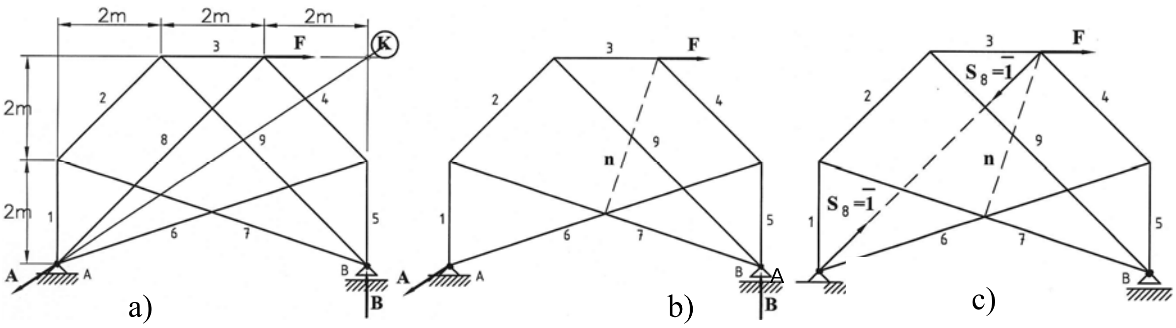
Naopak, výhodu metódy je, že ak nepotrebujeme poznať všetky osové sily v sústave, možno vypočítať len tie sily v prútoch, ktoré nás zaujímajú.

Výpočet zloženej sústavy by sa dal popísanou Ritterovou metódou rozšíriť na všetky prúty, ale podobne, ako v predchádzajúcej Culmannovej metóde, je výhodnejšie, keď po vypočítaní troch neznámych prútov sa vo výpočte pokračuje už postupnou uzlovou (alebo Cremonovou) metódou.

5.2.3 Metódy riešenia zložitých prútových sústav

5.2.3.1 Hannebergova metóda náhradného prútu (n)

Metóda náhradného prútu sa používa na riešenie zložitých sústav, ktoré nemajú dvojný uzol a neumožňujú použitie priesečníkovej metódy, alebo na riešenie sústav s vonkajšou statickou neurčitosťou. (Vonkajšia statická neurčitosť ako vieme z ods. 1.3.2, obr. 1.13 neodvoľuje vypočítať reakcie, takže nie je možné ani vyriešiť osové sily). Princíp Hannebergovej metódy je znázornený na obr. 5.16.



Obr. 5.16

Pôvodná zložitá sústava (obr. 5.16a) je nahradená dvoma jednoduchými sústavami (obr. 5.16b,c), ktoré vznikli odňatím prútu, napr. 8 a zavedením náhradného prútu na jednotkovej sile $S_8 = \bar{1}$ (na zachovanie tvarovej určitosti oboch náhradných sústav).

V oboch náhradných jednoduchých sústavách vypočítame (napr. Cremonovou metódou) osové sily v prútoch od vonkajšieho zaťaženia (obr. 5.16a) S_i', S_n' a od jednotkovej sily (obr. 5.16a) S_i'', S_n''.

Nová sústava zaťažená pôvodnou vonkajšou silou **F**, reakciami **A**, **B** a silou $\mathbf{S_8}$ v miestach odobratého prúta bude staticky ekvivalentná pôvodnej sústave vtedy, keď osová sila v náhradnom prúte n bude nulová.

Výsledné hodnoty osových síl získame superpozíciou (sčítaním) síl v zodpovedajúcich prútoch v náhradných sústavách:

$$S_i = S_i' + S_i'' \,.\, S_8 \qquad (5.3)$$

a v náhradnom prúte

$$S_n = S_n' + S_n'' \,.\, S_8$$

Z podmienky nulovej sily v náhradnom prúte $S_n = 0$(!) je

$$S_n = S_n' + S_n'' \,.\, S_8 = 0$$

a z toho

$$S_8 = -\frac{S_n'}{S_n''} \qquad (5.4)$$

Príklad 5.7: Výsledky riešenia oboch náhradných sústav, ako aj síl v celej prútovej sústave (obr. 5.16) možno usporiadať do tabuľky.

Najskôr však treba ako vždy vypočítať reakcie. V danom prípade určíme reakcie z rovnováhy síl **F**, **A**, **B** (pretínajúcich sa v spoločnom priesečníku K). Z rovinného zväzku vonkajších síl vyjde potom veľkosť reakcií pre napr. zadanú silu F = 6 kN → A = 7,2 kN, B = 4,0 kN.

Tab. 5.1

Prút (i)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**n**
S_i'	+2,00	+2,1	+2,95	-3,25	-3,10	6,45	1,55	0	-2,10	2,4
S_i''	-0,47	-0,52	-0,71	-0.25	-0,24	-0,74	0,38	1	0,50	-0,54
$S_1''.S_8$	-2,08	-2,30	-3,15	-1,11	-1,06	-3,28	1,68	4,44	2,22	
S_i	-0,08	-0,2	-0,2	-4,36	-4,16	3,17	3,23	4,44	0,12	

Z rovnice (5.4) je $S_8 = -\dfrac{2{,}4}{-0{,}54} = 4{,}44$ kN

5.2.3.2 Metóda neurčitej mierky

Metódu neurčitej mierky je vhodné použiť pri riešení zložitej prútovej sústavy, ktorá je zaťažená jednou alebo najviac dvomi silami, pretože riešenie osových síl v sústave treba opakovať **postupne pre každú zaťažujúcu vonkajšiu silu zvlášť**.

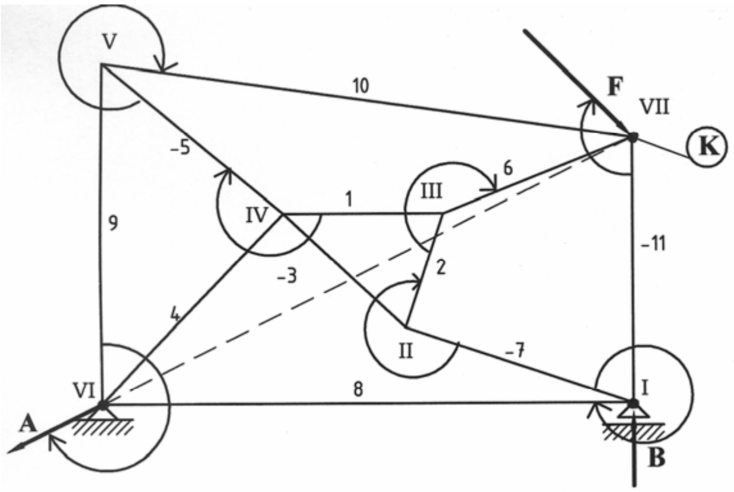
Princíp riešenia spočíva v tom, že **silový obrazec** vnútorných (osových) síl a reakcií, ktorý sa nedá zostrojiť pre danú (jedinú!) silu, **začíname kresliť od niektorej zvolenej osovej sily v prúte**. Tento prút je treba zvoliť vhodne tak, aby bolo možno **vyriešiť postupne** všetky osové sily v prútoch i reakcie v podperách.

Príklad 5.8: V danej zložitej prútovej sústave určite osové sily metódou neurčitej mierky.

Dané: F = 15 kN a rozmery sústavy podľa obr. 5.17a.

Mierka dĺžok $m_L = 0{,}1$ m.mm^{-1}

Reakcie možno určiť napr. graficky riešením rovnice **F** + **A** + **B** = 0 → K

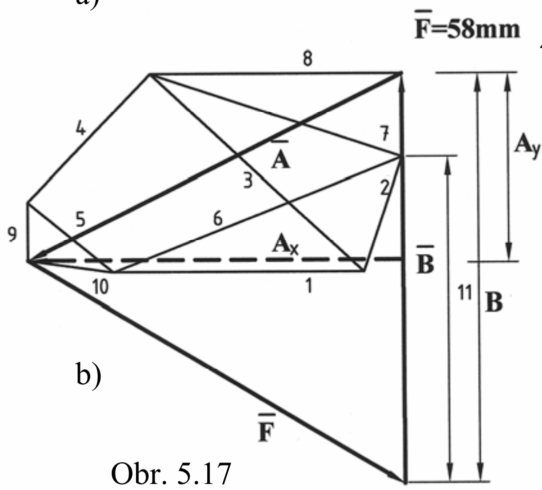


a)

Osové sily: Riešenie je vykonané Cremonovou metódou (význam použitej symboliky - viď príklad 5.10) od úseku zvolenej sily $\overline{S_7}$ v dĺžke $\overline{S_7}$ = 35 mm.

Po vyriešení ostatných osových síl v prútoch pri počiatočnej dĺžke úseku $\overline{S_7}$ = 35 mm odmeriame po uzavretí obrazca $\overline{F}$ = 58 mm.

Z dĺžky úseku zistíme mierku síl m_F = $\frac{F}{\overline{\overline{F}}} = \frac{15}{58}$ = 0,259 kN.mm^{-1}



b)

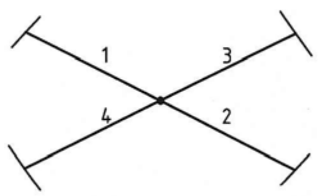
Obr. 5.17

Ostatné dĺžky osových síl ($\overline{S_i}$) a ($\overline{R}$) odčítame tiež z obrázku a určíme ich veľkosť už v známom merítku $\mathbf{S}_i$ = $\overline{S_i}$. m_F, i = 1,2, ...n, resp. $\mathbf{R}$ = m. $\overline{R_j}$, kde j = $\overline{A}$, $\overline{B}$.

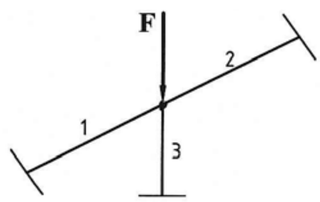
5.2.4 Niektoré dôležité poznámky o riešení prútových sústav

O možnom zjednodušení a zrýchlení riešenia základnej úlohy prútových sústav vyplývajúcom z tvarovej symetrie a zaťaženia sme sa presvedčili už v príkladoch 5.11 a 5.12.

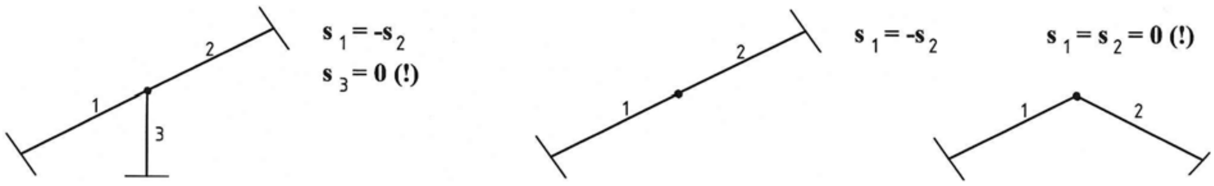
Všimnime si ešte niekoľkých ďalších zvláštne usporiadaných prútov a zaťaženia v uzloch, v ktorých je veľkosť osových síl zrejmá bez riešenia (obr. 5.18):



$s_1 = -s_2$
$s_3 = -s_4$



$s_1 = -s_2$
$s_3 = -F$



Obr. 5.18

Pozn.: Zrejmosť týchto prípadov (veľmi urýchľujúcich výpočet síl), si ľahko zapamätáme, keď si v každom uzle predstavíme súradnicovú sústavu.

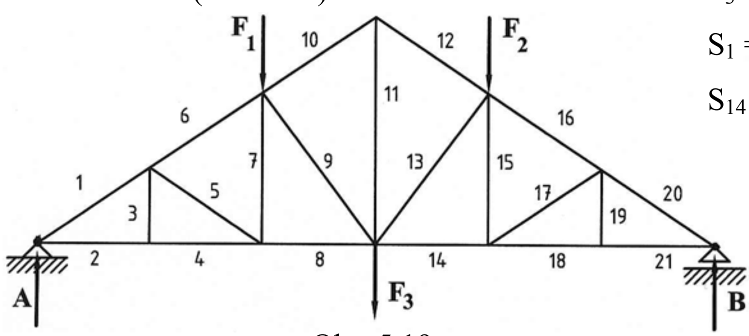
Príklad 5.9: Majme vyriešiť napr. tzv. francúzsku jednoduchú trojuholníkovú sústavu (obr. 5.19).

$S_3 = S_5 = S_7 = S_{15} = S_{17} = S_{19} = 0$

$S_1 = S_6$, $S_{16} = S_{20}$, $S_2 = S_4 = S_8$

$S_{14} = S_{18} = S_{21}$

Prúty 3, 5, 7, 15, 17, 19 sú nezaťažené, bránia iba vybočeniu zaťažených prútov.



Obr. 5.19

Podľa toho treba určiť iba osové sily v (21 - 12) = 9-tich nosných prútoch!

Na záver už stručne iba uveďme, že ľubovoľnú staticky určitú rovinnú prútovú sústavu môžeme vyriešiť zostavením 2.u lineárnych rovníc typu $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ pre každý uzol (u), ktoré v maticovom vyjadrení majú tvar:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad (5.5)$$

v ktorom **A** ... je štvorcová matica koeficientov n neznámych osových síl a reakcií typu 2.u

P ... je stĺpcová matica neznámych síl prútov a vonkajších väzbových reakcií

Q ... je stĺpcová matica vonkajších zaťažovacích účinkov v uzloch

0 ... je nulová stĺpcová matica.

Keď je matica sústavy **A** regulárna (det. /**A**/ $\neq \mathbf{0}$) je riešenie dané vzťahom

$\mathbf{P} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Q}$ čo v maticovom tvare je tzv. **všeobecná uzlová metóda.** (5.6)

Poradie uvoľnenia uzlov pri zostavaní rovníc je ľubovoľné a všetky neznáme sa vypočítajú naraz. Použitie tejto metódy na riešenie skutočných priehradových konštrukcií si vyžaduje výpočtovú techniku.

6. PASÍVNE ODPORY

Pri riešení rovnováhy skutočných telies, okrem druhotných síl v ideálnych väzbách (dokonale tuhé a ideálne hladké), treba brať do úvahy aj ďalšie pôsobiace veličiny, a to: **šmykové trenie a valivý odpor**.

Pasívne odpory sa môžu prejaviť len vtedy, keď uloženie telesa alebo sústavy je také, že sa pri danom zaťažení a ideálnych väzbách môže teleso začať pohybovať.

Pasívne odpory bránia vzájomnému pohybu dotýkajúcich sa telies a pôsobia vždy proti ich možnému alebo relatívnemu pohybu.

Možným alebo relatívnym pohybom je teda aj smer a zmysel pasívnych odporov úplne určený.

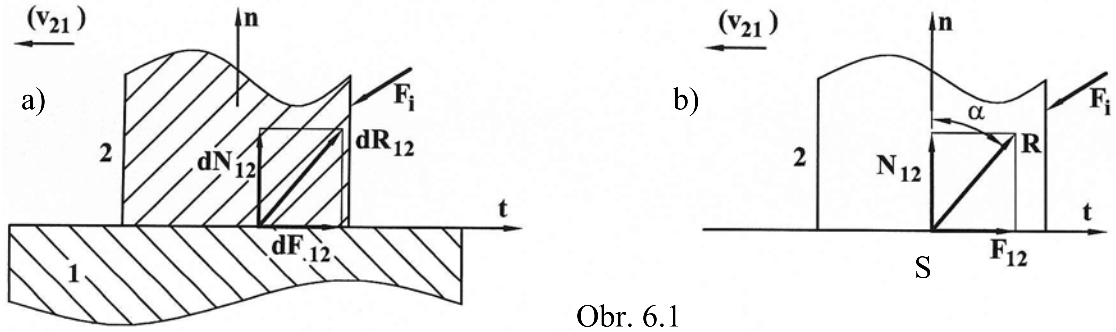
V tejto kapitole sa budeme zaoberať aj tzv. čapovým trením, valivým odporom a trením vlákien (pásov).

6.1 Šmykové trenie, súčiniteľ trenia, súčiniteľ adhézie

V dôsledku drsnosti povrchu dotýkajúcich sa telies (obr. 6.1a) pôsobí na každú elementárnu plošku dA telesa 2 všeobecne orientovaná elementárna sila d$\mathbf{R}_{12}$ proti zmyslu relatívneho pohybu telesa 2. Keď rozložíme túto silu na zložky d$\mathbf{N}_{12}$ a d$\mathbf{T}_{12}$ do normály a roviny styku, obdržíme dve sústavy elementárnych rovnobežných síl, ktoré možno nahradiť výslednými účinkami.

$$\mathbf{N}_{12} = \int_A d\,\mathbf{N}_{12} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{T}_{12} = \int_A d\,\mathbf{T}_{12} \qquad (6.1)$$

kde $N_{12} = p.dA$
(p ... tlak medzi telesami v Nm^{-2})



Obr. 6.1

Na hranici pokoja a pohybu alebo pri pohybe telesa 2 je možno uvažovať s jednoduchým výpočtovým modelom, určeným vzťahom

$$dT_{12}max = dF_{12} = \mu\, N_{12} \tag{6.2}$$

kde **μ je tzv. súčiniteľ šmykového trenia**.

$dT_{12} = dF_{12}$ je elementárna **trecia sila** medzi oboma telesami.

Ak bude μ na celej stykovej ploche konštantné, je

$$F_{12} = \int_A d\,F_{12} = \mu \int dN = \mu\, N_{12} \tag{6.3}$$

Rovnica (6.4)

$$\boxed{F_{12} = \mu\, N_{12}} \tag{6.4}$$

je najjednoduchším výpočtovým modelom pasívnych odporov dvoch dotýkajúcich sa telies pri ich vzájomnom pohybe alebo na medzi pokoja a pohybu - tzv . **Coulombov vzťah** (1736 - 1806). Geometrickým modelom je rovná styková plocha (obr. 6.1b), kde v mieste S pôsobia sily $\mathbf{N}_{12}$, $\mathbf{T}_{12}$ a ich výslednica

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{N}_{12} \tag{6.5}$$

Výsledná reakcia je odklonená proti zmyslu relatívneho pohybu a uhol φ, pre ktorý platí

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{F_{12}}{N_{12}} = \mu \tag{6.6}$$

Uhol φ je tzv. trecí uhol, ktorého tangenta je rovná súčiniteľom trenia stýkajúcich sa plôch.

Podľa toho, či ide o prípad na medzi pokoja a pohybu alebo už pri pohybe, sú hodnoty trecej sily

$F_s = \mu_s . N$ ... trecia sila z pokoja - **statické trenie**

$F_k = \mu_k . N$ ... trecia sila pri pohybe - **kinetické trenie**

kde $\mu_s = \mathrm{tg}\varphi_s$ je súčiniteľ statického trenia

$\mu_k = \mathrm{tg}\varphi_k$ je súčiniteľ kinetického trenia

Zo skúsenosti vieme, že $\mu_s > \mu_k$, ($\varphi_s > \varphi_k$). (6.7)

V nasledujúcej tabuľke 6.1 sú na porovnanie uvedené niektoré **hodnoty súčiniteľov pri suchom trení**.

Tab 6.1

Materiály telies		Súčiniteľ šmykového trenia	
		μ_s (z pokoja)	μ_k (pri pohybe)
Oceľ na oceli		0,15	0,03 - 0,09
Oceľ na bronze		0,11	0,105
Oceľ na ľade		0,027	0,014
Dub na dube	v smere vlákien	0,62	0,48
	naprieč vláknami	0,7	

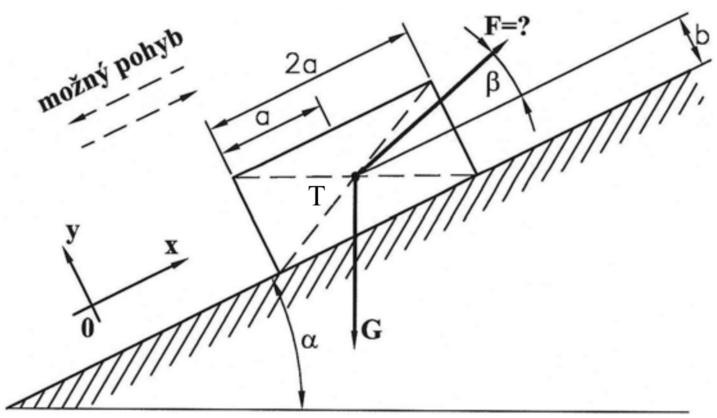
Pri rovinných úlohách vymedzuje uhol φ tzv. trecí trojuholník. Pri možnom pohybe vo všetkých smeroch vznikne tzv. trecí kužeľ.

Podľa toho, keď uhol α odklonenia výslednice $\mathbf{R}_{12}$ od normály (n) šmykovej plochy (obr. 6.1b) bude mať hodnotu:

$\alpha \leq \varphi_s$ bude teleso v pokoji pri ľubovoľne veľkej reakcii **R**

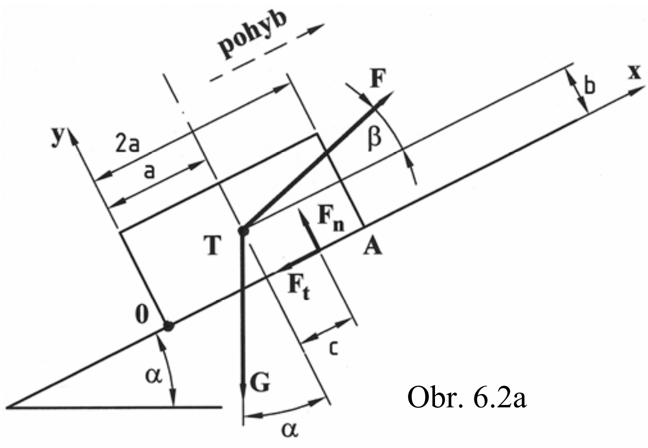
$\alpha \leq \varphi_s$ teleso sa začne pohybovať

Príklad 6.1: Medzi typické a v praxi časté úlohy patrí rovnomerný pohyb telesa tiaže **G**, na ktoré pôsobí sila $\mathbf{F}_i$ na naklonenej rovine (obr. 6.2). Dané: **G**, α, β, a, b, μ_s, μ_k. Máme určiť veľkosť sily **F** potrebnej na zdvíhanie a spúšťanie telesa (v smere osi x, obr. 6.2.a,b) po naklonenej rovine.



Obr. 6.2

1. Zdvíhanie telesa (translačný posun smerom nahor)



Obr. 6.2a

Na uvoľnené teleso pôsobí všeobecná rovinná sústava síl s neznámymi F, F_t, F_n, c (obr. 6.2a).

Pre sústavu síl môžeme okrem troch rovníc rovnováhy napísať aj rovnicu pre treciu silu

$$F_t = \mu_k \, . \, F_n$$

Zo sústavy rovníc

$\sum F_{ix} = F\cos\beta - G\sin\alpha - F_t = 0$

$\sum F_{iy} = F\sin\beta - G\cos n\alpha + F_n = 0$

$\sum M_{iT} = F_t.b - F_n.c = 0$

po úprave dostaneme (po dosadení za F_t, F_n z rovnice pre treciu silu)

$$F = G \, . \, \frac{\sin\alpha + \mu_k.\cos\alpha}{\cos\beta + \mu_k.\sin\beta} \qquad (6.8)$$

Treba však skontrolovať, či nedôjde skôr k preklopeniu telesa okolo hrany A. **Sila F vytvára destabilizujúci (sklápajúci) a sila G stabilizujúci moment** (stabilizujúci účinok). Ak nemá teda dôjsť k neželateľnému sklopeniu telesa okolo hrany A, musí platiť:

$$F\,(a\sin\beta + b\cos\beta) \le G(b\sin\alpha + a\cos\alpha) \qquad (6.9)$$

a po dosadení za F z rovnice (6.8) dostaneme

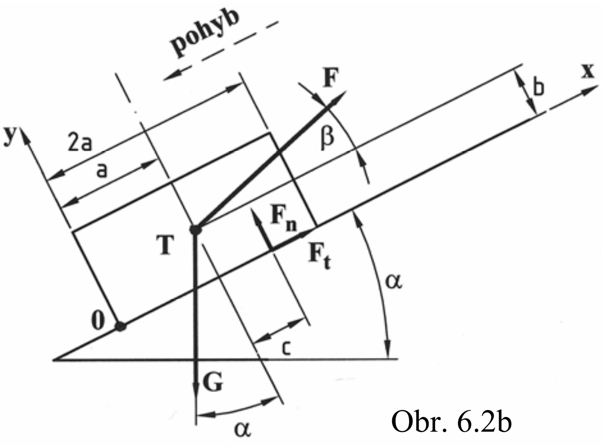
$$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \le \frac{b\sin\alpha + a\cos\alpha}{a\sin\beta + b\cos\beta}$$

odkiaľ

$$\mu \le \frac{a}{b} \qquad (\mu = \mu_s) \qquad (6.10)$$

pokiaľ bude $\mu_s \rangle \frac{a}{b}$, teleso sa okolo hrany preklopí.

2. Spúšťanie telesa



Obr. 6.2b

Pri spúšťaní telesa (obr. 6.2b) sa v rovniciach rovnováhy zmení znamienko trecej sily F_t.

Sila **F** na spúšťanie telesa má veľkosť

$$F = G\,\frac{\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha}{\cos\beta - \mu_k \sin\beta} \qquad (6.11)$$

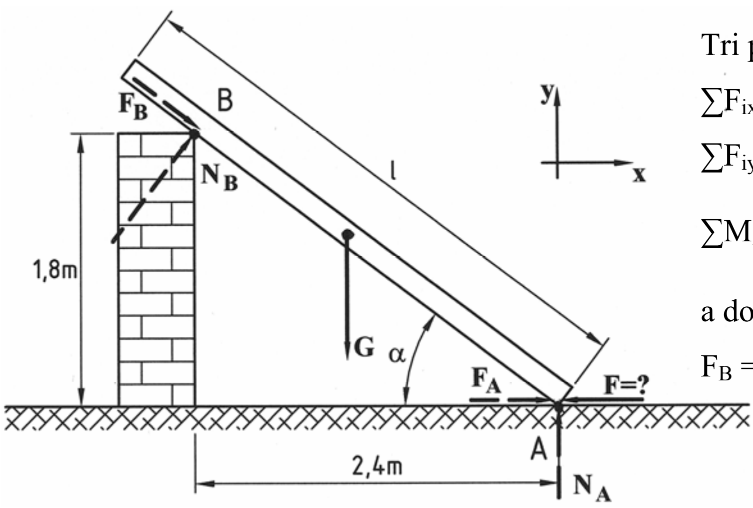
Keď vyjde hodnota F záporná, je treba pri pohybe nadol teleso tlačiť.

Pre $\alpha = \varphi_k$ je hodnota $\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha = \sin\alpha - \mathrm{tg}\alpha\cos\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$, a teda tiež sila F = 0. Teleso sa v takomto prípade bude pohybovať po naklonenej rovine rovnomerne smerom dole bez pôsobenia vonkajšej sily F.

Z tejto úvahy vyplýva **experimentálne určovanie súčiniteľa trenia**. Keď uvedieme teleso naklonením roviny do rovnomerného pohybu, potom musí zrejme platiť $\alpha = \varphi_k$, a teda súčiniteľ trenia je

$$\mu_k = \mathrm{arctg}\,\varphi_k = \mathrm{arctg}\alpha$$

Príklad 6.2: Treba vypočítať veľkosť sily **F**, potrebnej na posunutie homogénnej tyče s hmotnosťou m = 40 kg, dĺžkou l = 3,6 m opretej o stenu vysokú 1,8 m. Súčinitele trenia sú v miestach A, B rovnaké μ = 0,60 (obr. 6.3).



Obr. 6.3

Tri podmienky rovnováhy sú:

$\sum F_{ix} = 0$: $F_A - F - F_B\cos\alpha + N_B \sin\alpha = 0$

$\sum F_{iy} = 0$: $N_A - G + N_B\cos\alpha - F_B\sin\alpha = 0$

$\sum M_A = 0$: $G \,.\, \frac{l}{2}\cos\alpha - N_B \,.\, \overline{BA} = 0$

a doplňujúce väzobné rovnice $F_A = \mu N_A$, $F_B = \mu N_B$

Po dosadení hodnôt $\overline{BA} = \sqrt{1{,}8^2 + 2{,}4^2} = 3$ m; $G = m \cdot g = 40 \cdot 9{,}81 = 392{,}4$ N a

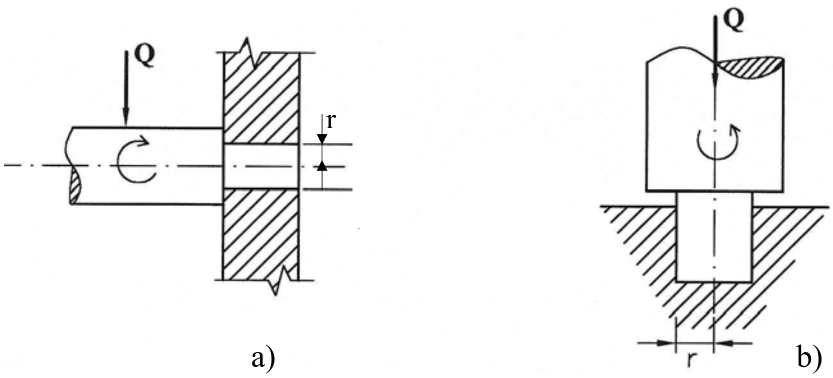
$\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1{,}8}{2{,}4} = 36{,}87^{\circ}$ dostaneme po vyriešení rovníc rovnováhy $N_B = 188$ N,

$F_B = 112{,}8$ N, $N_A = 309{,}7$ N, $F_A = 185{,}8$ N a hľadanú silu potrebnú na posunutie tyče $F = 388{,}8$ N.

6.2 Čapové trenie

Pasívne odpory pôsobiace na čapy rotujúcich telies sa rozdeľujú na dva základné druhy:

- **radiálne** (obr. 6.4a)
- **axiálne** (obr. 6.4b)



Obr. 6.4

Pasívne odpory pôsobia proti otáčaniu pohybu čapu tzv. momentom čapového trenia.

Moment čapového trenia je vyjadrený vzťahom

$$M_č = Q \cdot r \cdot \mu_č \tag{6.12}$$

kde Q ... je sila zaťažujúca čap [N]

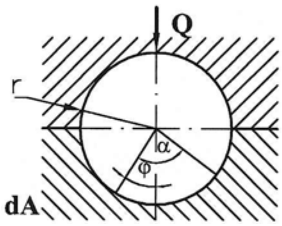
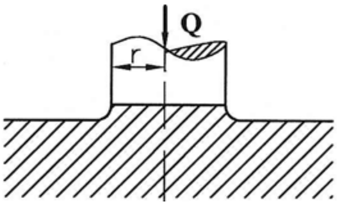
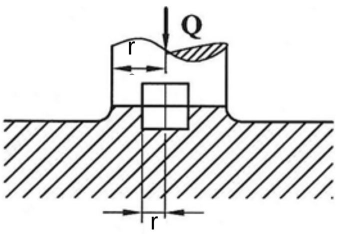
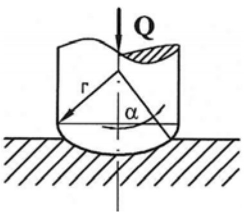
r ... polomer čapu [m]

$\mu_č$ ... **súčiniteľ čapového trenia**, závislý na druhu materiálu čapu a rozložení merného tlaku p [N.m^{-2}] v stykovej ploche.

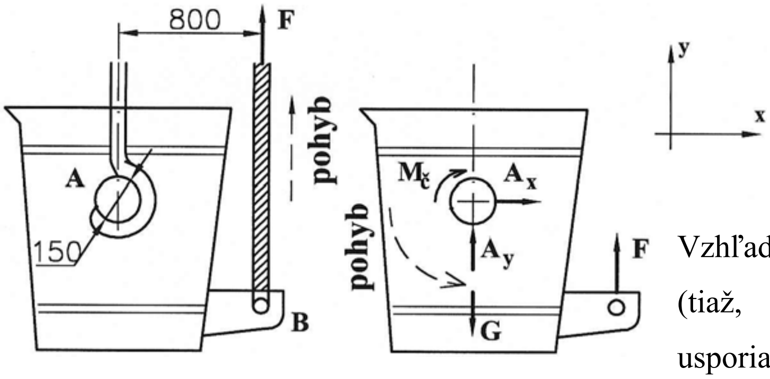
Kritérium rozdelenia na čapy radiálne a axiálne závisí, ako je to zrejmé z obr. 6.4, na smere pôsobiacej sily Q voči osi rotácie čapu.

V nasledujúcej tabuľke 6.2 sú na ilustráciu uvedené súčinitele čapového trenia pre niektoré druhy čapov a rovnomerné i premenlivé rozloženie merného tlaku pri suchom trení v stykovej ploche čapu.

Tab. 6.2

RADIÁLNE A AXIÁLNE ČAPY PODĽA TVARU STYKOVEJ PLOCHY	SÚČINITEĽ ČAPOVÉHO TRENIA PRE MERNÉ TLAKY	
	p = konšt	p . r/ cosφ = konšt p . r = konšt
Radiálny čap  	$\mu_č = \mu \dfrac{\alpha}{\sin 2\alpha}$ α = π: $\mu_č$ = 1,57 μ	p . r/ cosφ = konšt $\mu_č = \mu \dfrac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha + \sin \alpha}$ α = π: $\mu_č$ = 1,27 μ
Axiálny čap plný  	$\mu_č = \dfrac{2}{3}\ \mu$	$\mu_č = \dfrac{1}{2}\ \mu$
Axiálny čap prstencový  	$\mu_č = \dfrac{2}{3}\ \mu \dfrac{1-(\frac{r_1}{r_2})^3}{1-(\frac{r_1}{r_2})^2}$	$\mu_č = \mu \dfrac{1+\frac{r_1}{r_2}}{2}$
Axiálny čap guľový  	$\mu_č = \dfrac{1}{2}\ \mu \dfrac{2\alpha - \sin\alpha}{\sin^2 \alpha}$	$\mu_č = 2\mu \dfrac{\sin^2\alpha}{2\alpha + \sin^2\alpha}$

Príklad 6.3: Panva i s obsahom tekutého kovu má hmotnosť 8 000 kg. Určite silu **F** vo zvislom lane pri vylievaní na začiatku nakláňania panvy. Súčiniteľ šmykového trenia medzi čapom a závesnými hákmi je $\mu = 0{,}3$. Rozmery sú na obr. 6.5.



Obr. 6.5

Vzhľadom na to, že zaťaženie panvy (tiaž, lano, závesy v mieste A) sú usporiadané symetricky vo zvislej rovine, možno úlohu riešiť ako rovinnú.

Pre sily na uvoľnenej panve možno napísať rovnice rovnováhy

$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x = 0$

$\sum F_{iy} = 0: \quad -G + A_y + F = 0$

$\sum M_{iA} = 0: F \,.\, 0{,}8 - M_č = 0,$

v ktorom $M_č = \mu_č \,.\, A_y \,.\, r_A$

ak budeme uvažovať (tab. 6.2) $\mu_č = 1{,}57\ \mu$.

a dosadíme číselné hodnoty, dostávame

$$- 8000 \,.\, 9{,}81 + A_y + F = 0$$

$$F \,.\, 0{,}8 - 1{,}57 \,.\, 0{,}30 \frac{0{,}15}{2}\ A_y = 0$$

odkiaľ $A_y = 75163{,}4$ N $\qquad$ $F = 3316{,}6$ N

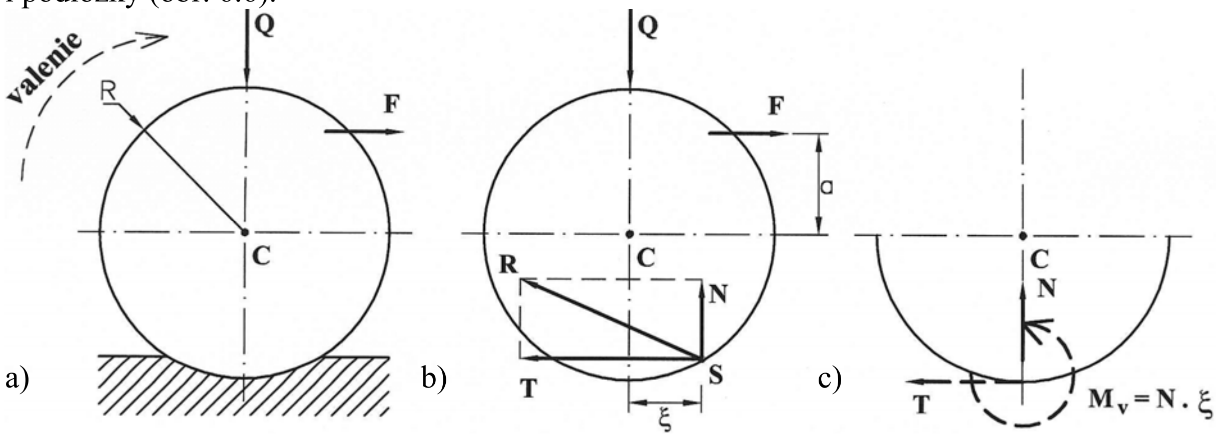
Na vyklopenie panvy treba na začiatku vyklápania vyvinúť v lane silu F = 3316,6 N.

6.3 Valivý odpor

Pasívny účinok, ktorý vzniká pri valení telies sa nazýva valivý odpor. Vzniká v dôsledku toho, že skutočné telesá nie sú dokonale tuhé a preto sa účinkom síl sa deformujú.

V riešení valivého odporu predpokladáme, že v mieste dotyku telies nedochádza ku šmyku.

Po zaťažení valca tiaže **Q** silou **F** v smere pohybu dochádza k deformácii valca i podložky (obr. 6.6).



Obr. 6.6

Moment valivého odporu M_v = N . ξ (6.13) pôsobí vždy proti smeru valenia valca. Veličina ξ- tzv. **rameno valivého odporu** (súčiniteľ valivého trenia) sa zisťuje experimentálne.

Z uvedených predpokladov je zrejmé, že musí platiť podmienka

$$T \leq N \cdot \mu_s \qquad (6.14)$$

Pri rovnomernom pohybe valca musia sily spĺňať podmienky rovnováhy

$\sum F_{ix} = 0$: $F - T = 0$

$\sum F_{iy} = 0$: $N - Q = 0$

$\sum M_{ic} = 0$: $N \cdot \xi - F \cdot a - T \cdot R = 0$

Odkiaľ sila F je

$$F = T = Q \cdot \frac{\xi}{a + R} \qquad (6.15)$$

a pri splnenej podmienke valenia $T \leq N \cdot \mu = Q \cdot \mu$ je

$$a \geq \frac{\xi}{\mu} - R \qquad (6.16)$$

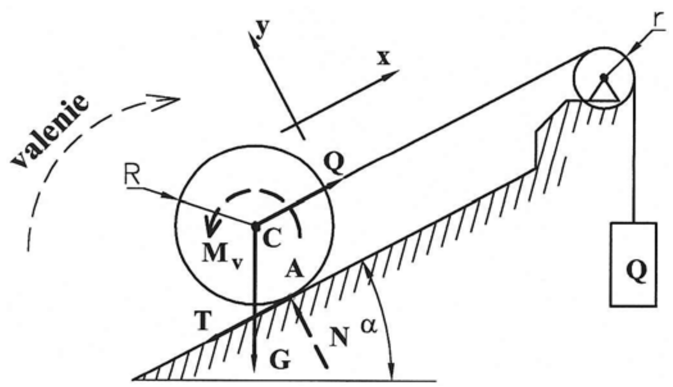
Pre $a < \dfrac{\xi}{\mu} - R$ bude sa valec kĺzať. Pre a = 0, t. j. $R > \dfrac{\xi}{\mu}$ nastane valenie.

Experimentálne zistené hodnoty súčiniteľov valivého odporu niektorých materiálov sú uvedené v tabuľke 6.3.

Tab. 6.3

MATERIÁL TELIES	ξ [mm]
liatina na liatine	0,5
oceľ na oceli	0,5
drevo na kameni	1,5

Príklad 6.4: Určite súčiniteľ valivého odporu materiálu valca a podložky, keď bremeno Q klesá stálou rýchlosťou (obr. 6.7).



Obr. 6.7

Valec sa pohybuje rovnomerne po naklonenej rovine účinkom rovnovážnej sústavy síl, pre ktorú platí

$\sum F_{ix} = 0$: $Q - G\sin\alpha - T = 0$

$\sum F_{iy} = 0$: $N - G\cos\alpha = 0$

$\sum M_c = 0$: $M_v - T \cdot R = 0$

Odtiaľ $\quad T = Q - G\sin\alpha$, $N = G \cdot \cos\alpha$

$M_v = (Q - G\sin\alpha) R$

pretože $\quad M_v = N \cdot \xi = Q \cdot \cos\alpha \cdot \xi \quad$ je $(Q - G\sin\alpha) R = G\cos\alpha \cdot \xi$

a odtiaľ súčiniteľ valivého odporu je $\quad \xi = \dfrac{Q - G\sin\alpha}{G\cos\alpha} R$

6.4 Trenie vlákien (pásov)

Pri šmýkaní vlákien (oceľových pásov, lán, remeňov, reťazí a pod.) po povrchu telies s valcovou alebo všeobecne zakrivenou plochou, vzniká špeciálny prípad šmykového trenia, ktoré nazývame trením vlákien (pásov).

Pri výpočte vláknového trenia sa predpokladá, že vlákno je dokonale ohybné, nenaťahovacie a nehmotné. Vlákno vo výpočtovom modeli (obr. 6.8a) je vedené okolo zakrivenej vypuklej plochy telesa (napr. hnacieho kolesa) a namáhané silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$.

Ak sú povrchy vlákna i telesa dokonale hladké, potom zrejme platí

$$F_1 = F_2$$

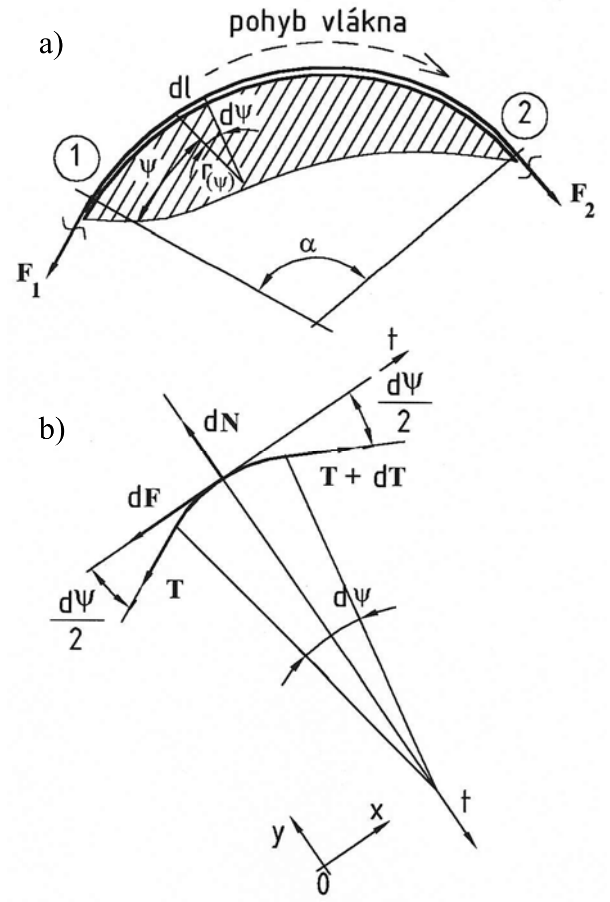
a v prierezoch 1 a 2 vymedzených *uhlom opásania* α sú tangenciálne sily

$$T_1 = T_2.$$

Pri dotyku skutočných telies a vlákien ($\mu \neq 0$) narastá vo vyznačenom smere pohybu zaťaženie od miesta 1 k miestu 2 v dôsledku trenia, takže

$$T_2 > T_1.$$

Sily, pôsobiace na vybratý element o dĺžke dl (obr. 6.8b) tvoria zväzok síl, ktorého rovnice rovnováhy sú:



Obr. 6.8

$$\Sigma F_{ix} = 0 : (T + dT).\cos\frac{d\psi}{2} - T.\cos\frac{d\psi}{2} - dF = 0, \qquad (6.17)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 : -(T + dT).\sin\frac{d\psi}{2} - T.\sin\frac{d\psi}{2} + dN = 0.$$

Pre dF = μdN a $\cos\frac{d\psi}{2} = 1$, $\sin\frac{d\psi}{2} = \frac{d\psi}{2}$ a po zanedbaní diferenciálov vyšších rádov nadobudnú rovnice (6.17) tvar

$$dT = \mu.dN$$

$$T.d\psi = dN$$

Ich riešením dostaneme $\frac{dT}{T} = \mu.d\psi$

Po integrácii, pri konštantných hodnotách μ, α dostaneme tzv. **Eulerov vzorec**

$$T_2 = T_1 \,.\, e^{\mu\alpha} \tag{6.18}$$

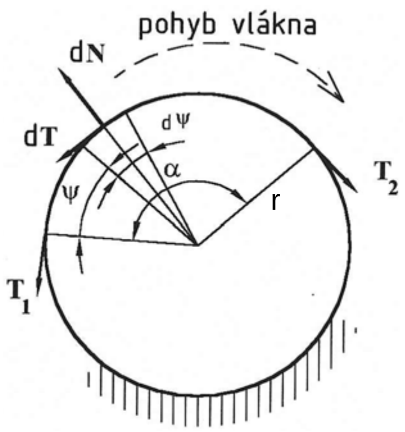
Z uvedeného vzorca na výpočet prenosu sily vláknom je zrejmé, že pomer síl T_2 / T_1 nezávisí na tvare zakrivenia plochy telesa, ale iba na veľkosti súčinu uhla opásania a súčiniteľa trenia.

Ak vlákno kĺže po valci o polomere *r* (obr. 6.9), má prenášaný moment trenia veľkosť

$$M_T = \int dT.r = \int \mu.r.dN = \int \mu.r.T.d\psi = \mu.r.\int_0^{\alpha} T_1.e^{\mu\psi}.d\psi = T_1.r.(e^{\mu\alpha} - 1),$$

odkiaľ s využitím rovnice (6.18) dostaneme

$$M_T = r.\,(T_2 - T_1) \tag{6.19}$$



Obr. 6.9

Poznámka: Pasívne odpory sa vyskytujú tiež pri navrhovaní skrutiek (samosvornosť), riešení ohybnosti (tuhosti) lán a trakčných odporov.

PREHĽAD POUŽITÝCH SYMBOLOV A JEDNOTIEK

Symbol	Názov	Jednotka
a	bod, vzdialenosť	[x,y], [m]
b	bod, vzdialenosť	[x,y], [m]
c	bod	[x,y]
d	bod, priemer	[x,y], [m]
e	nositeľka sily *, vzdialenosť	[1], [m]
f	bod	[x,y]
g	gravitačné zrýchlenie	[$m.s^{-2}$]
h	posunutie, výška	[m], [m]
k	kritérium statickej určitosti	[°V]
l	dĺžka	[m]
m	mierka, rez *, hmotnosť, počet odobraných stupňov voľnosti	[pomer], [1], [kg], [ks]
n	rez *, spojité zaťaženie	[1], [$N.m^{-1}$]
p	spojité zaťaženie pohyblivé, rameno sily, vzdialenosť, počet prútov, počet väzieb, merný tlak	[$N.m^{-1}$], [m], [m], [ks], [ks], [Pa]
q	spojité zaťaženie stále, vzdialenosť	[$N.m^{-1}$], [m]
r	polomer	[m]
s	vzdialenosť, osová sila v prútoch	[m], [N]
u	počet uzlov	[ks]
v	počet stupňov voľnosti	[°V]
x	os *, rameno	[1], [m]
y	os *, rameno	[1], [m]
A	plocha, bod, reakcia	[m^2], [x,y], [N]
B	bod, reakcia	[x,y], [N]
C	bod	[x,y]
D	bod, vložený kĺb *	[x,y], [1]
F	sila	[N]
G	tiažová sila	[N]

Q	náhradná sila, tiaž, priečna sila	[N], [kg], [N]
K	priesečník (bod)	[x,y]
M	moment	[N.m]
N	normálová sila	[N]
P	sila	[N]
R	výslednica	[N]
S	osová sila	[N]
T	ťažisko, trecia sila, nositeľka síl *	[x,y], [N]
α, ψ	uhol, uhol opásania	[°],[°]
β	uhol	[°]
μ	súčiniteľ šmykového trenia *, súčiniteľ čapového trenia *	[1], [1]
ξ	rameno valivého odporu	[m]
π	Ludolfovo číslo* (3,14)	[1]
φ	trecí uhol	[°]

- * bezrozmerné číslo,
- [x,y] súradnice bodu

POUŽITÁ LITERATÚRA

1. BALAŽOVJECH, V.: Statika v príkladoch, Bratislava 1962, SVTL

2. BUŠOVÁ, B.-CABAN, S.-ŽIARAN, S.: Mechanika I. Statika, Bratislava 1996, STU

2. CHASÁK, V.- NAVRÁTIL, O.: Technická mechanika - 1 díl, Brno 1990, VTA

3. MORAVČÍK, M.- MELCER, J.: Statika dopravných stavieb I, Žilina 1996, VŠDS

4. NOVÁK, O.- HOŘEJŠÍ, J. a kol.: Statika stavebních konstrukcí, Praha 1972, SNTL - NTL

5. SVOBODA, F.: Stavební mechanika pro konstruktéry, Praha 1970, SNTL - NTL

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor doc. Ing. Josef Reitšpís, PhD.

Autori	doc. Ing. Jozef Kovačik, CSc. Ing. Martin Beniač, PhD.
Názov	STATIKA PRE ŠPECIÁLNE INŽINIERSTVO
Vydala	Žilinská univerzita v Žiline v EDIS – vydavateľstve ŽU
Zodp. redaktor	
Vydanie	Druhé doplnené a upravené vydanie
Náklad	100 výtlačkov
AH/VH	6,28/6,72

ISBN 80-8070-077-X

Rukopis v EDIS – vydavateľstve ŽU neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.