

ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta bezpečnostného inžinierstva

doc. Ing. Bohuš LEITNER, PhD.

**MECHANIKA TELIES PRE
BEZPEČNOSTNÉ INŽINIERSTVO**

Statika

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo Žilinskej univerzity
2014



Publikácia vznikla v rámci riešenia projektu:
"Inovácia a internacionalizácia vzdelávania - nástroje zvýšenia
kvality Žilinskej univerzity v európskom vzdelávacom priestore"
ITMS: 26110230079



Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Recenzenti: prof. Ing. Milan Žmindák, PhD.
prof. Ing. Alexej Chovanec, PhD.
doc. Ing. Viliam Leždík, PhD.

Schválila edičná rada ŽU výmerom č. 16/S/2014

© B. Leitner, 2014

ISBN 978-80-554-0900-9

Predhovor

Skriptum *Mechanika telies pre bezpečnostné inžinierstvo : Statika* je určené hlavne pre študentov Fakulty bezpečnostného inžinierstva Žilinskej univerzity v Žiline (FBI ŽU), ale je vhodné aj pre študentov iných, technicky orientovaných, fakúlt. Povinný predmet „*Základy mechaniky pevných telies*“, vyučovaný v rámci denného i externého bakalárskeho štúdia na FBI ŽU v Žiline, je v študijných plánoch zaradený za účelom objasnenia najvýznamnejších oblastí mechaniky telies, so zameraním na jej základné disciplíny – *statiku* konštrukcií a *pevnosť a pružnosť* ich prvkov. Obsahová prestavba štúdia na FBI ŽU v Žiline vytvorila novú situáciu tým, že obvykle samostatne prezentované disciplíny mechaniky boli včlenené do jedného predmetu. Na objasnenie takej rozsiahlej a vzájomne previazanej problematiky je nutné voliť efektívnejšie formy vzdelávania s cieľom pochopenia podstaty primárnych príčin straty únosnosti, stability, nadmernej deformácie, vzniku medzného stavu, resp. príčin zlyhania technického systému ako celku.

Účelom skriptu je poskytnúť študentom prehľadnú, zrozumiteľnú a efektívnu študijnú podporu pri štúdiu vybraných kapitol z mechaniky tuhých telies, so zameraním na aplikácie statiky pri analýze silových pomerov na hmotných objektoch a možných následkov nerovnováhy pôsobiacich silových účinkov.

Hlavným cieľom skriptu je objasnenie základných princípov mechaniky pevného telesa, resp. sústavy telies, nabádanie študentov logicky a tvorivým spôsobom myslieť a rozvíjať ich schopnosti analyzovať a riešiť problémy rovnováhy a stability hmotných objektov. Zvolený obsah a prístup by mal študentom pomôcť pochopiť prezentovanú látku tak, aby dokázali fyzikálne a mechanické javy v technických systémoch kvalitatívne, ale aj kvantitatívne opísať a vysvetliť ich s využitím základných axiém a zákonov technickej mechaniky. Snahou autora bolo, aby študenti pochopili podstatu hlavných mechanických dejov prebiehajúcich v technických systémoch, vedeli ich analyzovať a aby získané znalosti z mechaniky telies dokázali uplatniť aj pri riešení menej komplikovaných praktických problémov.

Po obsahovej stránke skriptum vychádza z prednášok a cvičení predmetu „*Základy mechaniky pevných telies*“, ktorý je ponúkaný pre všetky bakalárske študijné programy akreditované na FBI ŽU v Žiline. Náplň skriptu tvoria základné teoretické poznatky nutné pre zvládnutie statickej analýzy dokonale tuhých hmotných objektov a vzorové príklady z oblasti statiky, ktoré dopĺňajú a dotvárajú pragmatický pohľad na hlavné technické aplikácie v oblasti bezpečnostného inžinierstva. Príklady sú koncipované tak, aby študent pri ich riešení pochopil základné zákonitosti a princípy statiky telies a zároveň ovládal spôsoby a pravidlá riešenia jednoduchších problémov v rámci statickej analýzy konštrukcií.

Prianím autora je, aby skriptum prispelo k interdisciplinárnemu chápaniu všetkých častí mechaniky a to nielen vo vzťahu k výrobným technológiám, materiálovým vedám, priemyslovému inžinierstvu a pod., ale aj ku vzťahu k otázkam bezpečnosti ako takej, spôsobom prevencie vzniku nežiaducich negatívnych javov a z nich vyplývajúcich negatívnych udalostí, najmä v oblastiach tzv. technickej bezpečnosti. Verím, že skriptum bude vhodnou študijnou pomôckou pri štúdiu a svojim obsahom a spôsobom podania poznatkov pomôže študentom k lepšiemu pochopeniu podstaty riešenia úloh a problémov v statike nosných konštrukcií už počas semestra, ale aj v čase prípravy na semestrálnu skúšku.

Považujem za milú povinnosť poďakovať prof. Ing. Milanovi Žmindákovi, CSc., prof. Ing. Alexejovi Chovancovi, PhD. a doc. Ing. Viliamovi Leždíkovi, PhD. za zodpovedné recenzné posúdenie skriptu a ich cenné pripomienky, ako aj odbornému redaktorovi prof. Ing. Zdenkovi Dvořákovi, PhD. Za morálnu podporu počas práce na učebnom texte a trpezlivosť patrí poďakovanie najmä mojej rodine a kolegom.

Autor

OBSAH

Zoznam použitých symbolov a skratiek	6
Úvod	7
1. Úvod do mechaniky tuhých telies	11
1.1. Základné zákony a princípy mechaniky tuhých telies.....	11
1.2. Základné veličiny v mechanike tuhých telies	13
1.3. Fyzikálne abstrakcie a modely telies v mechanike	14
1.3.1. Fyzikálne abstrakcie hmotných objektov v mechanike telies	15
1.3.2. Mechanické modely skutočných telies	16
1.4. Silové účinky a zaťaženie v mechanike tuhých telies	18
1.4.1. Zaťaženie konštrukcií	19
1.4.2. Klasifikácia a príklady zaťaženia	19
1.4.3. Charakteristiky zaťaženia z hľadiska spoľahlivosti	20
1.5. Väzby medzi telesami, stupne voľnosti pohybu	21
1.5.1. Pohyblivosť hmotného objektu, stupne voľnosti hmotného bodu a telesa	21
1.5.2. Väzby medzi telesami, väzbové reakcie	22
1.5.3. Uvoľňovanie telies v mechanike	25
1.5.4. Statická určitosť riešenia rovnováhy hmotných objektov	26
1.5.5. Výnimkové prípady usporiadania väzieb	28
2. Základné úlohy, princípy a axiómy statiky	31
2.1. Základné úlohy a princípy statiky	32
2.2. Sila a jej účinky na hmotný objekt	33
2.2.1. Sila a jej charakteristika	33
2.2.2. Účinok sily na dokonale tuhé teleso	34
2.2.3. Definovanie sily v rovine a priestore	35
2.2.4. Statický moment sily	37
2.2.5. Statický moment silovej dvojice	41
2.2.6. Podmienky statickej rovnováhy a ekvivalencie otáčavých účinkov sústav momentov	42
2.3. Základné axiómy statiky	45
2.3.1. Axióma o rovnováhe dvoch síl	45
2.3.2. Axióma o rovnobežníku síl (axióma o skladaní dvoch rôznobežných síl)	45
2.3.3. Axióma akcie a reakcie	54
2.3.4. Axióma o zachovaní silového účinku	54
2.3.5. Veta o posunutí sily po jej nositeľke	55
2.4. Transformácia silových účinkov na dokonale tuhom telese	56
2.4.1. Preloženie sily na telese	56
2.4.2. Skladanie sily a silovej dvojice	58
3. Sústavy síl v rovine, ťažisko hmotného objektu	59
3.1. Rozdelenie silových sústav a analýza ich účinkov na teleso	59
3.1.1. Základné pojmy v analýze silových sústav	60
3.1.2. Základné úlohy analýzy silových sústav	61
3.2. Sústava síl ležiacich na spoločnej nositeľke	62
3.2.1. Redukcia sústavy síl so spoločnou nositeľkou	62
3.2.2. Rovnováha sústavy síl so spoločnou nositeľkou	62
3.3. Sústava síl so spoločným pôsobiskom - zväzok síl	63
3.3.1. Redukcia rovinného zväzku síl	63
3.3.2. Rovnováha rovinného zväzku síl	66

3.3.3. Rovnováha a ekvivalencia dvoch RZS, statická určitost' riešenia	68
3.4. Všeobecná sústava síl v rovine	70
3.4.1. Redukcia všeobecnej rovinatej sústavy síl	70
3.4.2. Rovnováha všeobecnej rovinatej sústavy síl	75
3.4.3. Rovnováha a ekvivalencia dvoch VRSS, statická určitost' riešenia	80
3.5. Sústava rovnobežných síl v rovine	83
3.5.1. Redukcia, rovnováha a ekvivalencia sústavy rovnobežných síl	83
3.5.2. Statický stred sústavy rovnobežných síl	85
3.6. Ťažisko hmotných objektov	87
3.6.1. Ťažiská jednoduchých a zložených útvarov	88
3.6.2. Ťažiská zložitých útvarov zadaných analyticky	92
4. Priame a lomené rovinné nosníky	95
4.1. Základné typy nosníkov, zaťaženie a uloženie nosníkov	95
4.2. Rovnováha silových účinkov na nosníkoch, väzbové reakcie	101
4.3. Vnútné silové veličiny v priamych prútoch	109
4.3.1. Výpočet vnútorných silových účinkov	111
4.3.2. Závislosť medzi priečnym zaťažením, priečnou silou a ohybovým momentom	113
4.3.3. Závislosť medzi vnútornými veličinami pre vybrané typy zaťaženia	116
4.3.4. Záverečné poznámky k analýze vnútorných síl	131
5. Rovinné sústavy telies	135
5.1. Základná úloha riešenia sústav telies, statická určitost'	136
5.2. Rovinné prútové sústavy	137
5.2.1. Namáhanie prútov v prútoch sústavách	140
5.2.2. Rozdelenie staticky určitých prútoch sústav	140
5.3. Postup riešenia staticky určitých rovinných prútoch sústav	142
5.3.1. Analýza prútovej sústavy a rozbor pohyblivosti	142
5.3.2. Statická určitost' prútoch sústav	142
5.3.3. Určenie reakcií vo vonkajších väzbách	143
5.3.4. Riešenie prútoch sústav – výpočet osoých síl a interpretácia výsledkov	144
5.4. Metódy riešenia jednoduchých prútoch sústav	144
5.4.1. Postupná uzlová metóda	144
5.4.2. Všeobecná uzlová metóda	149
5.4.3. Cremonova grafická metóda	150
5.5. Metódy riešenia zložených prútoch sústav	152
5.5.1. Metóda rezu – Ritterova priesečná metóda	153
5.5.2. Culmannova grafická metóda	160
5.6. Metódy riešenia zložitých prútoch sústav	161
5.6.1. Hannebergova metóda náhradného prúta	162
5.6.2. Metóda neurčitej mierky	164
5.7. Záverečné poznámky k riešeniu prútoch sústav	165
6. Pasívne odpory	169
6.1. Šmykové trenie, súčiniteľ trenia a súčiniteľ adhézie	169
6.2. Čapové trenie	174
6.2.1. Radiálny čap	175
6.2.2. Axiálny čap	176
6.3. Valivý odpor	177
6.4. Trenie vlákien (pásov)	180
6.5. Sústavy telies s uvažovaním pasívnych odporov	183
Záver	187
Zoznam použitej a odporúčanej literatúry	188

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

SYMBOLY

Ozn.	Pomenovanie	Jednotky
A	plocha	$[m^2]$
A, B	väzbová reakcia v bodoch A a B	$[N]$
a	zrýchlenie	$[m.s^{-2}]$
B, b	hmotné body objektu	
C	statický stred sústavy rovnobežných síl	
e	rameno valivého odporu	$[m]$
F	sila	$[N]$
F_{norm}	normová hodnota zaťaženia	$[N]$
F_{dov}	výpočtová (dovolená) hodnota zaťaženia	$[N]$
F_q	náhradné bremeno za spojité priečne zaťaženie q	$[N]$
F_n	náhradné bremeno za spojité osové zaťaženie n	$[N]$
F_x, F_y	zložky sily F v rovine	$[N]$
f_F	nositeľka sily F	
f_s	súčiniteľ statického trenia	
f_k	súčiniteľ kinematického trenia	
f_c	súčiniteľ čapového trenia	
G	gravitačná sila, stále zaťaženie	$[N]$
g	gravitačné zrýchlenie	$[m.s^{-2}]$
H	vektor hybnosti hmotného bodu	
h, p, q	parametre polohy výslednice všeobecnej rovinnnej sústavy síl	$[m]$
l	dĺžka	$[m]$
M	statický moment sily, statický moment silovej dvojice	$[N.m]$
M_m	náhradné bremeno za spojité momentové zaťaženie m	$[N.m]$
M_o	vnútorný ohybový moment	$[N.m]$
m	spojité momentové zaťaženie	$Nm.m^{-1}$
m	hmotnosť	$[kg]$
M_v	moment valivého odporu	$[N.m]$
M_c	moment čapového odporu	$[N.m]$
m_F	mierka síl pri graf. riešení	$[N.mm^{-1}]$
m_L	mierka dĺžok pri graf. riešení	$[m.mm^{-1}]$
N	vnútorná normálová (osová) sila	$[N]$
n	počet °V viazaného objektu	$[°V]$
n_v	počet °V voľného objektu	$[°V]$
n_o	počet °V odobratých väzbami	$[°V]$
n	spojité osové zaťaženie	$[N.m^{-1}]$
P	výslednica vnútorných síl	$[N]$
p	rameno sily	$[m]$
p	merný tlak medzi telesami	$[N.m^{-2}]$
Q	náhodné zaťaženie	$[N]$
q	spojité priečne zaťaženie	$[N.m^{-1}]$
q^{1D}	spojité zaťaženie líniové	$[N.m^{-1}]$
q^{2D}	spojité zaťaženie plošné	$[N.m^{-2}]$
q^{3D}	spojité zaťaženie objemové	$[N.m^{-3}]$
R	výslednica dvoch alebo viac síl	$[N]$

SYMBOLY

Ozn.	Pomenovanie	Jednotky
R_x, R_y	zložky výslednice R	$[N]$
$\bar{R}, \bar{F}_1$	Zobrazovací úsek sily R a F_1	$[m]$
r, R	polomer	$[m]$
r_A	polohový vektor sily	
r_c	polomer čapu	$[m]$
S	povrch hmotného objektu	$[m^2]$
T	vnútorná tangenciálna (priečna, posúvajúca, šmyková) sila	$[N]$
T	ťažisko hmotného útvaru	
t	čas	$[s]$
V	objem hmotného objektu	$[m^3]$
$°V$	stupeň voľnosti pohybu	
w	Čebyševovo kritérium statickej určítosti sústav telies	$[°V]$
X	Mimoriadne zaťaženie	$[N]$
x, y, z	súradnicové osi	
x_p	súradnica nebezpečného prierezu	$[m]$
x_T, y_T	súradnice ťažiska rovinného hmotného objektu	$[m]$
α	smerový uhol, resp. uhol opásania	$[°]$
α_R	smerový uhol výslednice R	$[°]$
γ	objemová tiaž	$[N.m^{-3}]$
κ	gravitačná konštanta	$[N.m^2.kg^{-2}]$
λ_F	súčiniteľ neurčitosti zaťaženia	
ρ	objemová hmotnosť, hustota	$[kg.m^{-3}]$
φ	trecí uhol	$[°]$
$\sin$	sínus uhla	
$\cos$	kosínus uhla	
tg	tangens uhla	
$arctg$	arcustangens uhla	

SKRATKY

HB	hmotný bod
HO	hmotný objekt
DTT	dokonale tuhé teleso
PDT	poddajné teleso
PÚ	posuvný účinok
OÚ	otáčavý účinok
PS	prútová sústava
RZS	rovinný zväzok síl
VRSS	všeobecná rovinná sústava síl
SSSN	sústava síl so spoločnou nositeľkou
SRS	sústava rovnobežných síl
SS	silová sústava
PUM	postupná uzlová metóda
VUM	všeobecná uzlová metóda
MR	metóda rezu

ÚVOD

Mechanika telies je prírodná veda, ktorá sa vyčlenila z fyziky. Je to náuka o analýze stavu pokoja a pohybu hmotných objektov v priestore a čase. Pracuje so základnými veličinami a jednotkami sústavy SI ako dĺžka [m], čas [s], hmotnosť [kg] a niektorými odvodenými veličinami, ako sila [N], moment sily / silovej dvojice [Nm], mechanické napätie [Pa] alebo energia [U] a ďalšie.

Mechanika je vedná disciplína skúmajúca závislosti pohybu a vzájomného pôsobenia hmotných objektov v priestore a čase.

Mechaniku môžeme členiť podľa viacerých kritérií. Jedným z hlavných členení je rozdelenie mechaniky podľa uvažovanej rýchlosti, resp. veľkosti skúmaných objektov na:

- **klasickú (Newtonovu) mechaniku** ($v \ll c$) - objasňuje a skúma mechanické javy makroskopických telies, pohybujúcich sa výrazne nižšou rýchlosťou (v) v porovnaní s rýchlosťou svetla (c),
- **relativistickú (Einsteinovu) mechaniku** ($v \approx c$) – skúma a objasňuje mechanické prejavy častíc, príp. hmotných objektov, pohybujúcich sa rýchlosťou nezanedbateľnou v porovnaní s rýchlosťou svetla,
- **kvantovú (Planckovu) mechaniku** – vysvetľuje a skúma zákonitosti správania sa mikročastíc, molekúl, atómov a atómových jadier, t.j. objektov s rozmermi 10^{-6} až 10^{-13} m.

Základy všeobecnejšej tzv. **relativistickej mechaniky**, z ktorej vyplývajú aj princípy klasickej Newtonovej mechaniky ako jej zvláštny prípad, definoval v roku 1905 fyzik Albert Einstein. V bežných technických aplikáciách sú však maximálne rýchlosti (v) v porovnaní s rýchlosťou svetla (c) veľmi malé a preto sú všetky tzv. **relativistické efekty** (kontrakcia dĺžok, dilatácie času, príp. prírastok hmotnosti a pod.) úplne zanedbateľné. Z uvedeného dôvodu tvorí „**klasická (Newtonovská) mechanika**“ teoretický základ mechaniky telies a pri riešení bežných inžinierskych aplikácií v mechanike telies je aj obvykle uplatňovaná. Podľa druhu a povahy hmotných objektov klasickú mechaniku najčastejšie členíme na :

- **mechaniku pevných telies**
 - o **mechanika tuhých (nedeformovateľných) telies;**
 - o **mechanika poddajných (pružných, deformovateľných) telies a**
- **mechaniku kvapalín a plynov.**

Základ učebného textu bude tvorený vybranými oblasťami mechaniky pevných telies a preto z ďalších možných členení mechaniky, uvedieme už iba obvykle uvádzané členenie podľa Lagrangea, na základe ktorého mechaniku tuhých telies najčastejšie rozdeľujeme na:

- **statiku** – vyšetruje podmienky rovnováhy hmotných objektov a ich vzájomné silové pôsobenie (t.j. hmotný objekt je v stave pokoja),
- **kinematiku** - vyšetruje pohyb nehmotných objektov bez ohľadu na príčinu ich pohybu (pôsobenie sily), (t.j. vyšetruje pohyb telies v priestore a v čase, pričom neuvažuje s ich hmotnosťou a vzájomným účinkom),
- **dynamiku** - vyšetruje pohyb hmotných objektov ako príčinný následok pôsobenia síl, t.j. vyšetruje pohyb telies so zreteľom na ich hmotnosť a vzájomné silové pôsobenie.

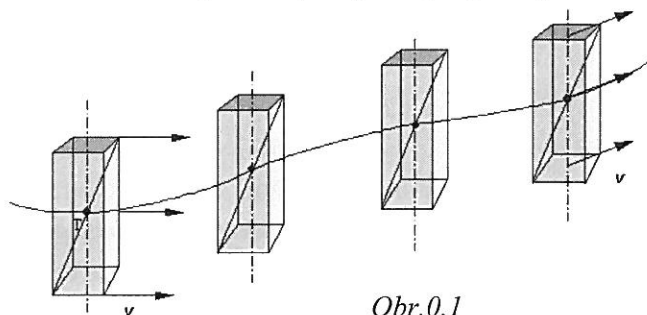
Pojmom **technická mechanika** označujeme mechaniku tuhých telies, v rámci ktorej sú všetky hmotné objekty považované za tzv. **dokonale tuhé**, tzn. neuvažujeme s ich pretvorením vplyvom zaťaženia.

V rámci mechaniky telies za základné veličiny štandardne považujeme tieto fyzikálne veličiny: **dĺžka** (značka l z angl. *length*), **čas** (značka t z angl. *time*) a **hmotnosť** (značka m z angl. *mass*).

Ďalšie veličiny využívané v mechanike telies, ako napr. plošný obsah A , povrch S , objem V , objemová hmotnosť - hustota ρ , objemová tiaž γ , sila F , moment sily M , resp. moment silovej dvojice M , merný tlak p , mechanické napätie σ , τ , energia U a ďalšie a ich jednotky sú iba z vyššie uvedených základných veličín odvodené. Medzi významnejšie odvodené veličiny, používané v mechanike tuhých telies, patrí najmä **sila** (značka $\mathbf{F}$ z angl. *force*) a **moment sily** resp. **moment silovej dvojice** (značka $\mathbf{M}$ z angl. *moment*). V oblasti mechaniky poddajných telies medzi najvýznamnejšie odvodené veličiny radíme tzv. **mechanické napätie** (značka σ v angl. *stress, strain*), ako vyjadrenie miery vnútorného tlaku vznikajúceho v objeme materiálu vplyvom deformácie telesa alebo **potenciálnu (deformačnú) energiu** (značka U v angl. *potencial energy*), ako energiu zmarenú vplyvom pretvorenia poddajného telesa, vystaveného pôsobeniu zaťaženia.

Z fyziky je známe, že teleso – hmotný objekt, na ktoré nepôsobia žiadne sily nazývame **voľné teleso**. Ak však začnú na voľné teleso pôsobiť vonkajšie sily – teleso sa začne pohybovať. Skúmaním pohybu voľných telies a jeho charakteristík sa zaoberajú ďalšie časti mechaniky telies a to kinematika a dynamika, avšak nimi sa v tomto učebnom texte nebudeme zaoberať. Vo všeobecnosti však platí, že každý, akýkoľvek všeobecne realizovaný, pohyb môžeme rozložiť na konečný počet **posuvných (translačných) pohybov** a **otáčavých (rotačných) pohybov**. To samozrejme analogicky platí aj pre pohyb hmotných objektov.

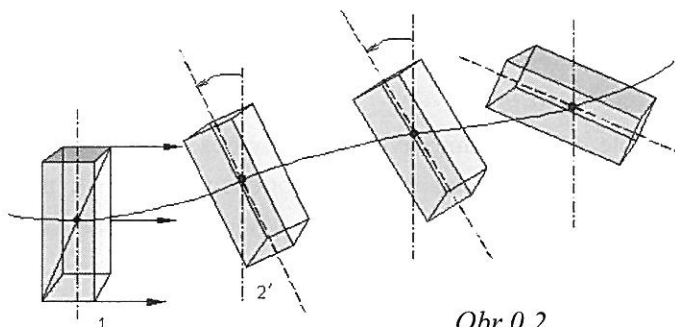
- **Translačný pohyb** koná tuhý hmotný objekt vtedy, keď ľubovoľná priamka pevne spojená s objektom si v priestore zachováva stále svoj smer. Všetky body telesa pri posuvnom pohybe opisujú rovnaké krivky a majú v tom istom okamihu rovnaké rýchlosti i zrýchlenia, čo do smeru i veľkosti. Pohyb telesa je určený pohybom jeho ľubovoľného bodu (Obr.0.1). Najčastejšie je takýmto bodom hmotný stred objektu – tzv. ťažisko telesa.



Obr.0.1

- **Rotačný pohyb** koná tuhý hmotný objekt vtedy, keď sa ľubovoľná priamka, pevne spojená s telesom, v priestore otáča okolo osi alebo určitého bodu na objekte. Pri skúmaní rotačného pohybu je preto nutné zvážiť, či teleso rotuje okolo pevnej osi alebo okolo pevného bodu.

Pri otáčaní telesa okolo pevného bodu (tzv. *bod otáčania*), každý bod telesa v istom okamihu rotuje okolo tzv. *okamžitej osi rotácie*, prechádzajúcej týmto bodom. Znamená to, že každý hmotný bod telesa opisuje krivku na guľovej ploche so stredom v bode otáčania. Rotácia telesa okolo bodu je zobrazená na obr. 0.2.



Obr.0.2

Pri otáčaní okolo pevnej osi sú body, ležiace na tzv. *osi rotácie*, počas pohybu v pokoji. Ostatné body telesa sú v pohybe. Každý bod neležiaci na pevnej osi, opisuje kružnicu, ktorá leží v rovine preloženej uvažovaným bodom kolmo na os rotácie.

V učebnom texte sa budeme zaoberať prvou a základnou oblasťou mechaniky tuhých telies – **statikou**, ktorá sa zaoberá analýzou špecifického prípadu pohybu telies – **stavom pokoja** ($v=0$).

Statika sa primárne zaoberá analýzou a riešením podmienok rovnováhy vzájomného silového pôsobenia hmotných objektov alebo ekvivalenciou ich účinku. To je však možné iba v prípadoch, keď sa hmotné objekty nachádzajú v stave pokoja – objekty sú statické, nepohybujú sa. Znamená to, že statika sa od ďalších disciplín technickej mechaniky odlišuje tým, že **neuvažuje s pohybom skúmaných hmotných objektov v priestore a čase**. Pri riešení úloh v rámci statiky vychádzame z predpokladu, že všetky prvky (telesá) skutočných sústav telies (konštrukcií) uvažujeme ako tzv. **dokonale tuhé (nedeformovateľné) hmotné objekty**, t.j. neuvažujeme s ich možným pretvorením vplyvom zaťaženia objektu silovými účinkami. Uvedený predpoklad výrazne zjednodušuje analýzu a praktické výpočty rovnováhy telies a sústav telies.

Základnou úlohou statiky je analýza a riešenie rovnováhy silových sústav pôsobiacich na hmotný objekt a preto je **statika základom všetkých ostatných častí mechaniky telies**. Statická analýza slúži k prvotnému odhadu veľkosti a charakteru silových účinkov od zaťaženia na jednotlivé prvky konštrukcie. V mechanike tuhých telies na statiku bezprostredne nadväzuje dynamika. V mechanike poddajných telies je statika potrebná pre pochopenie princípov pevnosti, pružnosti a plasticity prvkov technických systémov, ale aj podstaty vzniku a rozvoja nebezpečným medzných stavov. Uvedené disciplíny ďalej poznatky zo statiky rozvíjajú a prehľbujú. Statika naopak nadväzuje na poznatky všeobecných disciplín, hlavne matematiku a fyziku. Pred štúdiom tejto časti mechaniky telies je preto potrebné si zopakovať najmä **základy vektorovej algebry, riešenie lineárnych rovníc, základy integrálneho počtu, Newtonove pohybové zákony a pod.**

Z fyziky vieme, že všetky reálne hmotné objekty na seba navzájom pôsobia a ich vzájomné pôsobenie vyjadrujeme veličinou nazývanou **sila**. Ak na hmotný objekt – t.j. bod, teleso alebo sústavu telies – pôsobí súčasne viac síl, hovoríme o **sústave síl**.

V rámci prvej kapitoly učebného textu sú objasnené **základné pojmy, princípy a súvislosti uvažované v mechanike tuhých telies**, so zameraním na pojmy ako sila, silová dvojica, moment sily, moment silovej dvojice, vonkajšie (akčné a reakčné sily) a vnútorné sily, vhodné fyzikálne abstrakcie, mechanické modely konštrukcií a väzby medzi telesami, statická určitosť a ďalšie.

V druhej kapitole sú prezentované **základné úlohy a princípy statiky** a ich praktický význam pre možnosti realizácie statickej analýzy konštrukcií. Tretia kapitola obsahuje charakteristiku a rozdelenie sústav síl, ako aj **objasnenie analytického**, resp. vo vybraných prípadoch aj **grafického riešenia statickej rovnováhy a ekvivalencie silových sústav**. Významnou časťou kapitoly je aj definovanie pojmu staticky stred sústavy rovnobežných síl a z neho vyplývajúcej podstaty a hlavných princípov určovania ťažísk hmotných objektov. Obsah štvrtej kapitoly tvorí objasnenie statického riešenia **priamych a lomených nosníkových prvkov** nosných konštrukcií so zameraním na určovanie veľkosti a zmyslu väzbových reakcií, vnútorných síl v ľubovoľnom priereze nosníka a zakreslenie ich priebehov po celej dĺžke nosníka.

Piata kapitola je zameraná na oblasť **statickej analýzy sústav telies v rovine**, so špecifickým zameraním na priehradové nosníky a statické riešenie ich mechanického modelu - prútovej sústavy. Zameranie šiestej kapitoly je smerované na objasnenie podstaty a možností vyjadrenia pridružených javov prebiehajúcich v mechanických sústavách, súhrnne nazývaných **pasívne odpory**. Takéto odporové účinky sa v mechanických sústavách tiež vyjadrujú vo forme síl alebo silových dvojíc, pôsobiacich v mieste interakcie telies (t.j. vo väzbách medzi telesami). Objasnené budú princípy šmykového trenia, čapového trenia, valivého odporu a trenia vlákien, ako aj ich charakteristické parametre.

Na záver úvodného slova si dovoľíme uviesť niekoľko „múdrosť“ a ilustračných obrázkov zo života:

- 1. Ak je to zelené alebo sa to hýbe, patrí to do biológie. 2. Ak to smrdí, patrí to do chémie. 3. Ak to nefunguje, patrí to do mechaniky.

- V krízových situáciách, keď treba rozhodnúť medzi rovnocennými stratégiami, väčšina ľudí zvoli najhoršiu možnú z nich (Rudinov zákon).
- Ak sa môže naraz pokaziť niekoľko vecí, je isté, že sa pokazi práve tá, ktorá spôsobí najviac škody.

Majme preto vždy na pamäti jednu zo zásad rizikového manažmentu: **Ak je to možné, neriskujte, nehýbte vecami** - každá zmena technického systému v priestore a čase prináša „určitú“ mieru rizika.

Ak sa začnú telesá hýbať, vtedy keď to nechceme, môže to dopadnúť aj takto:



Zostáva preto iba dúfať, že skriptum bude vhodnou študijnou podporou pre pochopenie zásadných princípov a poznatkov zo statiky konštrukcií a jej aplikácií a bude účelnou pomôckou pre študentov nielen pri príprave na semestrálnu skúšku, ale aj pre zefektívnenie priebežného štúdia už v priebehu semestra.

1. ÚVOD DO MECHANIKY TUHÝCH TELIES

Z úvodu učebného textu, venovanému všeobecnému uvedeniu do mechaniky telies už vieme, že podľa Lagrangeovho členenia mechaniku tuhých telies rozdeľujeme na *statiku*, *kinematiku* a *dynamiku*.

Statika je charakteristická tým, že skúma rovnováhu hmotných objektov (bodov, telies, sústav telies) v pokoji, t.j. neuvažuje so žiadnym pohybom objektov v priestore a čase. Úlohou je hlavne riešenie statickej rovnováhy a statickej ekvivalencie (rovnocennosti, náhrady) vzájomného účinku hmotných objektov.

Kinematika aj dynamika sú naopak založené na skúmaní mechanického pohybu telies.

Kinematika skúma zmenu vzájomných polôh nehmotných objektov v priestore a čase. Neprihliada na príčiny pohybu, t.j. neskúma silové pôsobenie, ale iba jeho dôsledky. Uvažuje s pohybom tzv. nehmotných bodov, definovaných výhradne ich geometrickými vlastnosťami, t.j. neberieme do úvahy ich hmotnosť a z nej vyplývajúce zotrvačné účinky.

Dynamika sa zaoberá analýzou a riešením pohybu hmotných objektov v priestore a čase, t.j. aj s uvažovaním vplyvu ich zotrvačných vlastností. Tým, že dynamika rieši vplyv pôsobenia síl na hmotné telesá sa odlišuje od kinematiky, resp. uvažovaním pohybu telies sa odlišuje od riešenia rovnováhy silových účinkov pôsobiacich na telesá v rámci statiky.

1.1. Základné zákony a princípy mechaniky tuhých telies

V technickej praxi riešime úlohy v rámci mechaniky telies obvykle v medziach platnosti tzv. *klasikkej mechaniky*, základom ktorej sú tzv. Newtonove pohybové zákony:

1. Zákon zotrvačnosti: Hmotný bod sa pohybuje rovnomerne priamočiario alebo zostáva v pokoji, ak nie je nútený vonkajšou silou tento pohybový stav zmeniť.

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \text{konšt.} \quad (1.1)$$

Inak povedané, hmotný bod zotrvačuje v pokoji alebo v rovnomernom pohybe, ak nie je okolitými telesami nútený svoj pôvodný pohybový stav zmeniť. Analogicky môžeme tiež tvrdiť, že ak je teleso v pokoji alebo sa pohybuje rovnomerne priamočiario, buď naň nepôsobí žiadna sila alebo výslednica všetkých síl na teleso pôsobiacich, je nulová. Z uvedeného zákona vychádzajú aj základné predpoklady a princípy statického riešenia rovnováhy síl pôsobiacich na dokonale tuhé teleso.

2. Zákon sily: Časová zmena vektora hybnosti je rovná výslednici pôsobiacich síl.

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

kde $\mathbf{H} = m \cdot \mathbf{v}$ je vektor hybnosti hmotného bodu, $\mathbf{v}$ je vektor okamžitej rýchlosti, m je hmotnosť telesa a $\mathbf{F}$ je vektor výslednice všetkých síl pôsobiacich na hmotný bod.

V prípade, že hmotnosť hmotného objektu je konštantná (čo je v disciplínach klasikkej mechaniky telies splnené vždy) môžeme uvedený vzťah zjednodušiť na tvar

$$m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (1.3)$$

kde $\mathbf{a}$ predstavuje vektor zrýchlenia hmotného bodu.

Rovnica (1.3) predstavuje všeobecne známejší tvar 2. Newtonovho pohybového zákona - *zákona sily*, ktorého praktický dôsledok môžeme slovne vyjadriť nasledovne: **Zmena pohybu telesa (zrýchlenie) je priamo úmerná sile, ktorá na teleso pôsobí a má vždy smer pôsobiacej sily.**

3. Zákon akcie a reakcie: Sily ktorými na seba vzájomne pôsobia dva hmotné objekty sú rovnako veľké, ale opačne orientované a teda platí

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1.4)$$

Znamená to, že ak pôsobí *Teleso 1* na *Teleso 2* silou $\mathbf{F}_{12}$ (tzv. akcia, primárna sila), pôsobí *Teleso 2* na *Teleso 1* rovnako veľkou silou $\mathbf{F}_{21}$ opačného zmyslu (tzv. reakcia, sekundárna sila).

Pre úplnosť uvedieme aj posledný Newtonov pohybový zákon, tzv. **gravitačný zákon**.

4. Gravitačný zákon: Dva hmotné body o hmotnostiach m_1 a m_2 vo vzájomnej vzdialenosti R sú navzájom priťahované gravitačnou silou $\mathbf{G}$, ktorej veľkosť je priamo úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti

$$\mathbf{G} = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}, \quad (1.5)$$

kde m_1 a m_2 sú hmotnosti telies medzi ktorými silu príťažlivosti určujeme [kg], R je vzájomná vzdialenosť telies [m] a κ je tzv. gravitačná konštanta, $\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}]$.

Znamená to, že gravitačný zákon vyjadruje veľkosť príťažlivej sily medzi dvomi hmotnými bodmi s hmotnosťami m_1 a m_2 s ich vzájomnou polohou určenou buď formou polohového vektora $\mathbf{r}$ alebo častejšie v skalárnom tvare ich vzájomnou vzdialenosťou R .

Uvažujme vzťah (1.5) pre prípad vzájomného silového pôsobenia (priťahovania sa) telies, ktorých rozmery sú odlišné rádovo - napr. teleso (m) a planéta Zem (m_Z). Dosadením za $m_1 = m$ je hmotnosť telesa, $m_2 = m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnosť Zeme a $R = R_Z = 6378 \text{ km}$ ako polomer Zeme, dostaneme z fyziky známy vzťah pre silu príťažlivosti Zeme, pôsobiacu na teleso s hmotnosťou m , definovaný v tvare

$$\mathbf{G} = m \cdot \frac{\kappa \cdot m_Z}{R_Z^2} = m \cdot g, \quad (1.6)$$

v ktorom uvedený zlomok predstavuje z fyziky známe **gravitačné zrýchlenie** g [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$]. Iba pre zaujímavosť uvádzame, že gravitačné zrýchlenie pri povrchu Zeme v našich zemepisných šírkach má hodnotu približne $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (presne $9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Okrem iného však závisí aj od nadmorskej výšky, ale najmä od zemskej šírky a preto je napr. na rovníku hodnota g menšia ako na póle (rovník - $g \approx 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, póly - $g \approx 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Rozdiely sú spôsobené najmä vzdialenosťou do stredu Zeme, ako aj vplyvom odstredivej sily, vyvolanej rotáciou Zeme okolo svojej osi.

Všetky vyššie uvedené Newtonove princípy sú však platné iba za predpokladu existencie tzv. **absolútneho priestoru, rovnomerne plynúceho absolútneho času a hmotnej povahy telies**. Z filozofie, ale aj fyziky je známe, že hmota môže existovať iba v určitom priestore a čase a že neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty je pohyb, t.j. časová zmena polohy hmotného objektu v priestore. Na Zemi však neexistuje žiadny hmotný objekt, ktorý nie je v pohybe aspoň k jednému, tzv. **vzťažnému súradnicovému systému!**

Polohu akéhokoľvek objektu v priestore preto môžeme vždy určiť iba ako relatívnu, t.j. iba vzhľadom na určitý bod v rámci zvoleného systému súradníc. Z uvedeného je zrejmé, že pre popis a analýzu prebiehajúcich dejov a procesov v mechanických sústavách, musíme vopred definovať ich jednoznačné umiestnenie v priestore, t.j. zaviesť vhodný **súradnicový systém** (súradnicovú sústavu). Umiestnenie telesa v priestore potom môžeme určiť vzhľadom k takémuto, vhodne zvolenému, systému súradníc.

1.2. Základné veličiny v mechanike tuhých telies

Podľa medzinárodnej sústavy jednotiek SI sa jednotky rozdeľujú na dve základné skupiny a to na *hlavné jednotky* a *vedľajšie jednotky*. V rámci mechaniky tuhých telies budeme z hlavných fyzikálnych a technických veličín využívať nasledovné fyzikálne veličiny:

DĹŽKA - HMOTNOSŤ - ČAS

Na základe ustanovení medzinárodne kodifikovaného systému jednotiek fyzikálnych a technických veličín (sústava SI) je možné uviesť ich definície a základné jednotky nasledovne:

- 1. DĹŽKA** - fyzikálna veličina vyjadrujúca základné geometrické vlastnosti materiálneho sveta a rozloženie konkrétnych i abstraktných materiálnych objektov.

Dĺžka (značka l z angl. *length*). Vzdialenosť medzi dvoma bodmi je dĺžka priamej čiary (úsečky) vedenej medzi danými bodmi. Rozmer / dimenzia je jedna z hodnôt, ktorou sa udáva miera niečoho v rovine / priestore. Rozmer je jednou z vlastností priestoru. Základnou jednotkou dĺžky v sústave jednotiek SI je **meter** [m], ktorý je definovaný ako dĺžka dráhy, ktorú prejde svetlo vo vákuu za $1/299\,792\,458$ s. Pre technické účely je jeho veľkosť určená tzv. národným štandardom dĺžkovej miery.

- 2. HMOTNOSŤ** – fyzikálna veličina vyjadrujúca zotrvačné vlastnosti hmotných objektov a charakterizujúca ich schopnosť gravitačne silovo pôsobiť na iné objekty.

Hmotnosť (značka m z angl. *mass*). Hmotnosť je vlastnosť resp. miera vlastnosti všetkých hmotných objektov látkovej povahy. Prejavuje sa jednak tým, že objekty kladú odpor voči zmenám svojho pohybového stavu (zotrvačnosť) a tiež tak, že objekty na seba vzájomne pôsobia (gravitácia). V technických aplikáciách uvažujeme zotrvačnú a gravitačnú hmotnosť za presne rovnaké ($m = G / g$). Základnou mernou jednotkou hmotnosti je **kilogram** [kg], ktorý je definovaný hmotnosťou medzinárodne uznaného prototypu kilogramu.

- 3. ČAS** – fyzikálna veličina vyjadrujúca interval medzi dvoma udalosťami alebo dobu trvania určitého deja. Čas je rovnomerne a nezávisle plynúca veličina.

Čas (značka t z angl. *time*). Čas je definovaný ako jedna z tzv. fundamentálnych kvantít (nemožno ich definovať pomocou iných kvantít, pretože zatiaľ nepoznáme nič základnejšie). Podobne, ako v prípade iných fundamentálnych kvantít - priestor a hmota - je čas taktiež definovaný meraním. V súčasnosti je ako základný časový interval uvažovaná tzv. **konvenčná sekunda** [s], definovaná ako 9 192 631 770 oscilácií špecifikovaného prechodu v atóme Cs-133.

Ďalšie fyzikálne veličiny, využívané v mechanike telies, ako napr. plošný obsah A , objem V , povrch S , mechanická práca W , výkon P , hustota ρ , sila F , tiažová sila G , moment sily a silovej dvojice M , tlak p , mechanické napätie ρ , τ , pretvorenie u , potenciálna energia P alebo deformačná energia U atď. a ich jednotky sú z uvedených základných veličín a vzťahov medzi nimi iba odvodené. Medzi najdôležitejšie odvodené veličiny v mechanike tuhých telies zaraďujeme veličiny: **sila (F)** a **moment sily** príp. **moment silovej dvojice M**).

- 4. SILA** (značka F z angl. *force*). Sila je fyzikálna veličina, ktorá je svojim účinkom definovaná ako časová zmena hybnosti telesa a podľa Newtonovho zákona sily (1.3) platí

$$\mathbf{F} = \frac{d(m \cdot \mathbf{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \cdot \mathbf{a} . \quad (1.7)$$

Pojem sily vznikol abstrakciou a generalizáciou subjektívneho pocitu stláčania alebo natáhovania pri vyvodzovaní silového účinku človeka na telesá. Je dôležité si uvedomiť, že z fyzikálneho hľadiska silu chápeme ako **vektorovú veličinu** (ozn. $\vec{F}$, resp. $\mathbf{F}$), vyjadrujúcu mieru vzájomného pôsobenia medzi hmotnými objektmi alebo vzájomného pôsobenia hmotných objektov a silových polí.

Jej vektorový charakter vyplýva aj zo skutočnosti, že k jednoznačnému určeniu sily je potrebné zadať nielen jej veľkosť, ale aj pôsobisko a smer jej pôsobenia. Graficky znázorňujeme silu ako orientovanú úsečku, ležiacu na určitej priamke – tzv. *nositeľke sily* f .

Základnou jednotkou veľkosti sily je **Newton [N]** a v základných jednotkách SI platí: $1 \text{ N} = [1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$.

Sila s veľkosťou 1 N udelí hmotnému bodu s hmotnosťou 1 kg zrýchlenie $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ v smere a zmysle pôsobenia sily (2. Newtonov pohybový zákon: $F = m \cdot a$).

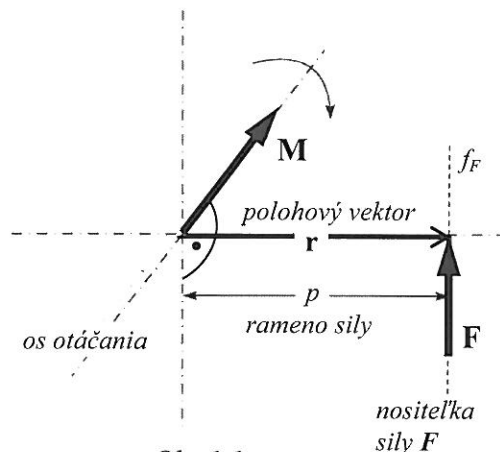
V technickej praxi, najmä s ohľadom na skutočnú veľkosť silových účinkov využívame násobky, napr. $1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N}$, $1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$, príp. $1 \text{ mN} = 10^{-3} \text{ N}$ a pod. Iba pre zaujímavosť: staršie jednotky pre vyjadrenie veľkosti sily boli napr. kp - *kilopond* ($1 \text{ kp} \approx 9,81 \text{ N}$) príp. dyn - *dyn* ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$).

5. STATICKÝ MOMENT SILY (značka M z angl. *moment*). Moment je fyzikálna veličina, vyjadrujúca mieru otáčavého účinku od pôsobenia sily alebo silovej dvojice. Vo všeobecnom prípade môže mať sila, pôsobiaca na teleso, nielen posuvný, ale aj otáčavý účinok. Veľkosť a zmysel otáčavého účinku od pôsobenia síl určujeme buď vzhľadom k určenému bodu alebo priamke (obvykle osi telesa). Vzťažný bod, ku ktorému moment určujeme nazývame **momentový bod** (**bod otáčania**). Priamku, vzhľadom ku ktorej určujeme veľkosť a zmysel otáčavého účinku nazývame **os otáčania**. Najkratšia – t.j. kolmá – vzdialenosť medzi nositeľkou f_F sily F a bodom resp. osou otáčania je nazývaná **rameno sily** p .

Veľkosť otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodu – t.j. veľkosť momentu M – určíme ako súčin veľkosti sily F a dĺžky tzv. ramena sily p a platí

$$M = F \cdot p. \quad (1.8)$$

Je zrejmé, že veľkosť otáčavého účinku od sily F je závislá iba na veľkosti tejto sily a jej kolmej vzdialenosti p od bodu / osi otáčania. Prakticky to znamená, že **čím je rameno sily p väčšie, tým bude väčší aj výsledný otáčavý účinok M** . Jednotkou momentu sily je **1 Newtonmeter [Nm]**. Statický moment sily M je rovnako ako sila F veličina vektorová (Obr.1.1). Smer vektora momentu M je na rovinu tvorenú silou F a polohovým vektorom r jej pôsobiska kolmý a určujeme ho pomocou tzv. **pravidla pravej ruky**, podľa ktorého pre smer vektora M platí:



Obr.1.1

Ak zahnuté prsty pravej ruky ukazujú smer otáčavého účinku sily (smer otáčania telesa), potom vztýčený palec ukazuje smer vektora momentu sily.

Moment sily môžeme určovať vzhľadom k ľubovoľnému bodu, a teda aj k bodu, nachádzajúcemu sa mimo analyzované teleso. V časti textu venovanej riešeniu sústav síl si objasníme a preukážeme zásadný rozdiel medzi otáčavým účinkom od pôsobenia osamelej sily vzhľadom k bodu, príp. osi a otáčavým účinkom od pôsobenia tzv. silovej dvojice.

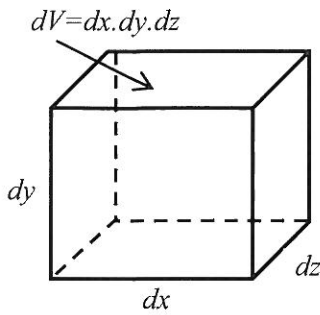
1.3. Fyzikálne abstrakcie a modely telies v mechanike

Pre všeobecný popis a zjednodušenie analýzy mechanických javov a vlastností reálnych telies bolo potrebné zaviesť niekoľko zjednodušení, uľahčujúcich vyjadrenie skutočnej fyzikálnej podstaty riešeného problému. V mechanike tuhých telies, sú ako základné fyzikálne abstrakcie – zjednodušenia ich chápania – najčastejšie využívané pojmy: **hmotný bod**, **sústava hmotných bodov**, **dokonalé tuhé teleso**, **ideálna väzba**, **dokonalé hladké teleso** a ďalšie.

1.3.1. Fyzikálne abstrakcie hmotných objektov v mechanike telies

Podľa vyžadovanej úrovne idealizácie skutočných telies v rámci technickej mechaniky uvažujeme niekoľko fyzikálnych abstrakcií hmotných objektov. Najčastejšie využívame pojmy:

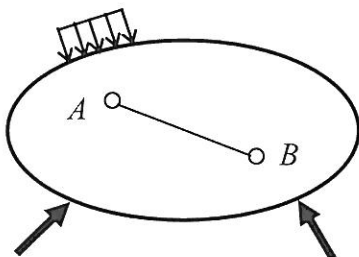
- **Hmotný bod (HB)** – je abstrakcia, pri ktorej uvažujeme hmotnosť objektu a zanedbávame jeho rozmery. Do hmotného bodu sústreďujeme hmotnosť tuhého telesa, ktorá je konečná a z hľadiska síl, ktoré na teleso pôsobia nezanedbateľná. Najčastejšie je HB predstavovaný elementárnym telieskom, umiestneným v objeme telesa. Má zanedbateľné rozmery, konečnú hmotnosť ($m \neq 0$) a nulový tzv. moment zotrvačnosti I , definovaný k tzv. centrálnej osi, prechádzajúcej hmotným stredom objektu – ťažiskom.



Obr.1.2

Hmotný bod je teda určitá časť hmotného objektu s elementárnym objemom dV [m^3], elementárnym povrchom dS [m^2] a materiálom určenou mernou špecifickou hmotnosťou (hustotou) ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$], obsahujúci veľké množstvo elementárných častíc hmoty – atómov. Geometrickou interpretáciou hmotného bodu telesa je obvykle tzv. **elementárny hranol** (Obr.1.2). Hmotné body obvykle označujeme malými alebo veľkými písmenami, napr.: a , b , A , B , ...

- **Sústava hmotných bodov - hmotný objekt (HO)** – je súbor vzájomne viazaných hmotných bodov, ktorých celková hmotnosť je rovná práve hmotnosti telesa. Hmotné teleso je teda oblasť s objemom V a povrchom S , spojitou vyplnená hmotnými bodmi. Pre vzdialenosť dvoch ľubovoľných hmotných bodov (napr. hmotné body A , B podľa Obr.1.3.) v rámci pevného telesa pred aj po jeho zaťažení môže platiť:



Obr.1.3

- $AB = \text{konšt.}$ – teleso sa nedeformuje, tzv. **dokonale tuhé teleso**,
- $AB \neq \text{konšt.}$ – zaťažením sa teleso deformuje, tzv. **poddajné teleso**.

Inak povedané, ak sa teleso účinkom zaťažujúcich síl nedeformuje – nemení tvar, rozmery ani objem – ide o idealizovaný prípad. Obvykle však teleso pod zaťažením svoje vlastnosti zmení – deformuje sa. Ak sa vzdialenosti hmotných bodov v rámci objemu zaťaženého telesa menia, hovoríme o tzv. **poddajnosti telesa** a musíme teda uvažovať s pretvorením.

- **Dokonale tuhé teleso (DTT)** – predstavuje zjednodušený fyzikálny model ideálneho telesa, ktoré pri zaťažení nemení svoj tvar. Pôsobiace sily majú na hmotný objekt iba pohybový účinok, nie deformačný.

Inak povedané, DTT je také teleso, v ktorom sa účinkom pôsobenia iných telies vzdialenosť jeho dvoch ľubovoľných bodov nemení, t.j. vzájomná poloha dvoch jeho ľubovoľných bodov zostáva pri pôsobení akéhokoľvek vonkajšieho zaťaženia nezmenená. Vo výpočtoch preto uvažujeme iba jeho hmotnosť, rozmery a parametre geometrického rozloženia v priestore. Nie je dôležité z akého je hmotný objekt materiálu a preto sa DTT využíva najmä tam, kde nie sú účinky deformácie rozhodujúce a môžeme si dovoliť ich zanedbať.

- **Ideálna väzba** - predstavuje zjednodušenie skutočnosti tým, že zanedbávame vplyv doplnkových (odporových) síl vo väzbách medzi telesami, t.j. vplyv pasívnych odporov. Ide najmä o zanedbanie javov trenia, ako sú šmykové a čapové trenie, príp. čiastočnú poddajnosť väzieb vplyvom ich zaťaženia a ďalšie faktory, ovplyvňujúce veľkosť a charakter veličín v mechanike. Takéto zjednodušenie je pre väčšinu výpočtov nosných konštrukcií prípustné, bez významného vplyvu na relevantnosť získaných výsledkov.

Je však veľmi dôležité rozlíšiť, kedy môžeme s takýmito zjednodušeniami uvažovať t.j. kedy môžeme skutočné telesá uvažovať ako dokonale tuhé. Napríklad v statike, môžeme hmotný objekt uvažovať ako dokonale tuhý iba vtedy, ak jeho pretvorenie vplyvom pôsobenia relevantných akčných síl nemá na výslednú veľkosť vznikajúcich reakčných síl významnejší vplyv (napr. robustné veľkorozmerné konštrukcie – mostné konštrukcie, piliere, stožiare, nosné prvky stavebných konštrukcií, nosné rámy a pod.).

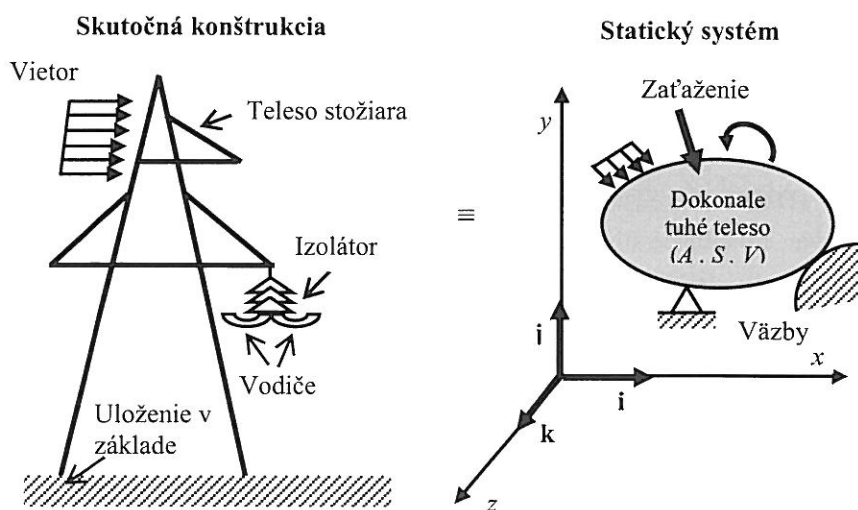
Naopak, v mechanike poddajného telesa by sme uvažovaním dokonalej tuhosti telies neboli schopní kvantifikovať pretvorenie skutočných telies a z nich vyplývajúce, často veľmi nebezpečné, stavy extrémnej napätosti, až po vznik tzv. **medzných stavov**. Do tvorivého procesu návrhu (dimenzovania) alebo kontroly (posudzovania) prvkov konštrukcií by sme takýmto zjednodušením zaviedli faktor, významne ovplyvňujúci mieru ich spoľahlivosti a bezpečnosti.

Skutočné telesá však vplyvom pôsobiacich silových účinkov podliehajú zmenám tvaru a objemu a hovoríme o pretvorení telies v dôsledku ich poddajnosti. Z tohto dôvodu je vhodné definovať aj pojem - poddajné teleso – ktorý budeme využívať ako abstrakciu reálneho telesa v mechanike poddajných telies.

- **Poddajné teleso (PDT)** – je v konečnom dôsledku tiež iba abstrakciou skutočného telesa. Hmotný objekt má definovaný svoj tvar, rozmery a objem, ktoré sa vplyvom zaťažujúcich síl, zmenou teploty okolia a pod. môžu v závislosti od vlastností použitého konštrukčného materiálu meniť. Takto definovaný (aj keď opäť čiastočne zjednodušený) model skutočného telesa umožňuje vyšetrovať zmenu tvaru – tzv. **pretvorenie** (deformácia) hmotného objektu a jemu prislúchajúci **stav napätosti** v jeho ľubovoľnom bode.

1.3.2. Mechanické modely skutočných telies

Všetky uvedené fyzikálne abstrakcie umožňujú v rámci technickej mechaniky vytvárať primerane zjednodušené **mechanické (fyzikálne) a matematické modely** skutočných technických systémov - ako telies alebo sústav telies - ktoré v technickej mechanike označujeme *mechanické sústavy*. Tvorba a analýza adekvátnych - primerane presných - modelov mechanických sústav vyžaduje znalosti z jednotlivých disciplín technickej mechaniky, ale aj z oblasti ich praktického využitia. Zo skutočnej, v statike uvažovanej ako nepohyblivej, nosnej konštrukcie – napr. stožiar vysokého napätia (Obr.1.4), uchytený v betónovom základe a zaťažený vlastnou tiažou, tiažou nesených vodičov a účinkom prúdenia vzduchu – môžeme vytvoriť jeho zjednodušený mechanický model, ktorý nazývame **statický systém**, príp. **statická mechanická sústava**.

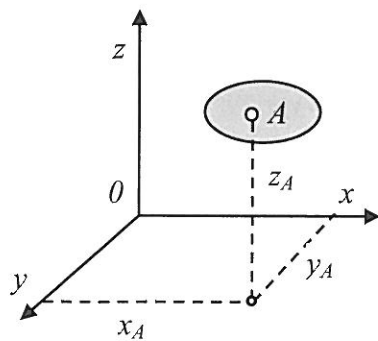


Obr.1.4

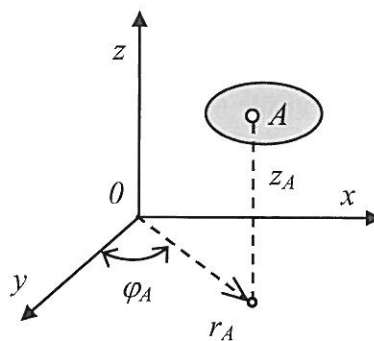
Fyzikálny model mechanickej sústavy je iba abstraktným vyjadrením podstatných vlastností reálnej konštrukcie, nachádzajúcej sa v určitom čase v tzv. **stave statickej rovnováhy** a vždy obsahuje prvky:

- **vzťažný súradnicový systém** $O(x, y, z)$, kde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, sú tzv. bázoové jednotkové vektory,
- **dokonale tuhé teleso**, ako geometrický model objektu s plochou A , príp. objemom V a povrchom S ,
- **väzby**, určené uchytením telesa o zemský povrch (tzv. **vonkajšie väzby**) alebo vzájomným spojením prvkov v rámci konštrukcie, príp. uchytením o nosný rám (tzv. **vnútorné väzby**),
- **zaťaženie**, najčastejšie vo forme silových účinkov od interakcie s inými telesami, vlastnej tiaže telies, vnútorných väzieb medzi telesami, vplyvu významných faktorov podmienok používania apod.

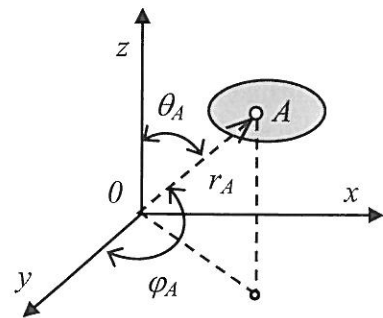
V rámci úloh mechaniky telies uvažovaných v priestore využívame súradnicové sústavy (obr.1.5):

1. Pravouhlá (ortogonálna)
2. Valcová (cylindrická)
3. Guľová (sférická)


pravouhlá sústava
(x_A, y_A, z_A)



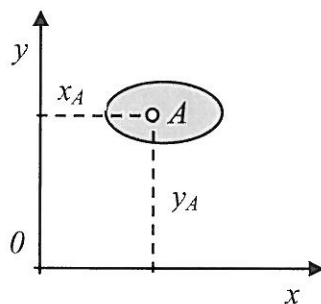
valcová sústava
(r_A, φ_A, z_A)



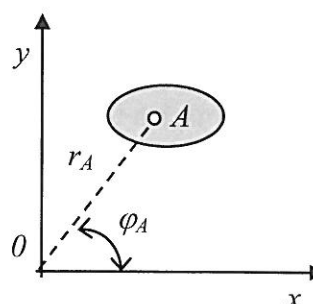
sférická sústava
(r_A, φ_A, θ_A)

Obr. 1.5

Pri riešení úloh mechaniky telies uvažovaných v rovine využívame najčastejšie sústavy (obr.1.6):

1. pravouhlá (ortogonálna) súradnicová sústava
2. polárna súradnicová sústava


pravouhlá sústava
(x_A, y_A)



polárna sústava
(r_A, φ_A)

Obr. 1.6

V rámci mechaniky telies uvažujeme najčastejšie ako vzťahný súradnicový systém **Euklidovský (pravouhlý) trojrozmerný priestor**, t.j. s navzájom kolmými súradnicovými osami x , y a z . Jedným z najdôležitejších predpokladov využiteľnosti zákonov klasickej mechaniky je uvažovanie tzv. **inerciálnosti (nehybnosti) súradnicovej sústavy**. Pri riešení bežných technických úloh ako inerciálnu (nepohyblivú, stálu) súradnicovú sústavu uvažujeme sústavu spojenú so Zemou, pričom zrýchlenia spôsobené rotáciou Zeme obvykle zanedbávame. Spojenie mechanických sústav so Zemou je zvyčajne realizované formou ich vhodného uchytenia so zemským povrchom, príp. o iné telesá v rámci mechanickej sústavy (napr. nosný rám), ktoré súhrnne nazývame **väzba** (často aj ako uloženie, uchytenie).

Primárnou úlohou väzieb je teda zabránenie pohybu hmotného objektu, prípadne umožnenie iba vopred požadovaného pohybu (tzv. mechanizmy). Väzbu preto chápeme ako technické riešenie, príp. zariadenie, ktoré pohyb objektu **znemožňuje** alebo iba **obmedzuje** (pohyb určený požadovanou funkciou). Hmotné objekty sú navzájom spojené väzbami, preto aby vzniklo funkčné technické dielo s požadovaným vlastnosťami. Realizované väzby eliminujú (rušia) možnosť pohybu voľného telesa a vzniká **teleso viazané**.

Silové účinky pôsobiace na hmotný objekt v mechanike telies rozdeľujeme na sily vonkajšie a vnútorné. Vhodnejšie je však používanie pojmu **vonkajšie** príp. **vnútorné silové veličiny**, keďže môžu byť nielen vo forme síl, ale aj vo forme momentov (silová dvojica), ktorých rozmer je [Nm]. V statike sú vonkajšie a vnútorné silové účinky v rovnováhe a vytvárajú množinu účinkov, ktoré súhrnne nazývame **zaťaženie**.

Zaťaženie hmotného objektu je súhrn vonkajších silových účinkov pôsobiacich na teleso. V statike musia byť silové účinky v rovnováhe, aby sme objektu zaistili nepohyblivosť – rovnováhu (stav pokoja).

Naopak, zaťaženie uvažované v rámci mechaniky poddajných telies je tvorené súhrnom vonkajších účinkov a vnútorných javov prebiehajúcich v telese, ktorých dôsledkom je vznik deformácie a napätosti v ňom.

Z fyzikálneho modelu následne odvodzujeme **model analytický (výpočtový)**, ktorý je spravidla určený sústavou rovníc, ktorých vyriešenie umožňuje nájsť neznáme parametre analyzovanej mechanickej sústavy. Na záver riešenia je nutné vykonať diskusiu výsledkov, resp. získané výsledky vhodne overiť a správne ich formulovať v terminológii mechaniky. Je zrejmé, že ak chceme získať spoľahlivé výsledky, musí fyzikálny (mechanický), ale najmä matematický model s dostatočnou presnosťou vystihovať významné vlastnosti objektu. Pri tvorbe modelov v mechanike musíme preto vopred rozhodnúť, napr. *ktoré prvky môžeme považovať za DTT, aké väzby budú medzi telesami uvažované, ako vhodne vyjadriť charakter a veľkosť vonkajšieho zaťaženia*, či je nutné uvažovať tzv. *disipačné zmeny* (ako je nevratná premena časti celkovej energie na iné druhy energie, napr. teplo), či je nutné *uvažovať s vplyvom pasívnych síl* vo väzbách a pod.

1.4. Silové účinky a zaťaženie v mechanike tuhých telies

Silové účinky, ako prostriedok pre vyjadrenie veľkosti a charakteru vzájomného pôsobenia telies – **zaťaženia** - môžeme členiť podľa rozličných kritérií. Niektoré vybrané členenia, odpovedajúce základným úlohám riešeným v rámci mechaniky tuhých telies, môžu byť nasledovné:

- **Podľa spôsobu kontaktu pôsobiacich telies:**
 1. *priamym stykom* - pôsobiace telesá sa vzájomne dotýkajú alebo
 2. *silovým poľom* - spolupôsobiace telesá sa vzájomne nedotýkajú, ale silové pôsobenie je prenášané účinkom silového poľa.
- **Podľa charakteru silových účinkov:**
 1. *vonkajšie* - vyjadrujú účinok okolitých telies a prostredia na vyšetrované teleso:
 - *zaťažujúce* - akčné silové účinky
 - *väzbové reakcie* – reakčné silové účinky, sú závislé od veľkosti a charakteru akčných zaťažení.
 2. *vnútorné* - vyjadrujú účinok jednej časti telesa na druhú. Vznikajú vo vnútri telesa ako odozva na pôsobenie akčných silových účinkov a predstavujú silové účinky pôsobiace medzi jednotlivými hmotnými bodmi vo vnútri (v objeme) telesa. Ak vnútorné sily prekročia istú hranicu, nastanú buď veľké deformácie alebo dôjde k porušeniu celistvosti telesa.
- **Podľa rozloženia silových účinkov:**
 1. *sústredené* - osamelá sila F [N] a moment sily M [N.m]), sú sústredené do bodu – pôsobiska,
 2. *spojito rozložené* - v mechanike tuhých telies ich obvykle nahrádzame silovým ekvivalentom a uvažujeme iba ich sústredený silový účinok, tzv. **náhradné bremeno** F_q .

Niektoré ďalšie členenia silových účinkov, využívané v mechanike telies, sú napr.:

1. **Primárne** (akčné sily) a **sekundárne** (reakčné sily, ako sily vo väzbách medzi telesami).
2. **Osamelé** (silový účinok je vzhľadom k celkovým rozmerom telesa sústredený na veľmi malej ploške; pôsobenie je uvažované v bode; účinok sa vyjadruje v [N]), alebo **spojité** (vonkajšie zaťaženie rozložené na určitej čiare [N.m⁻¹], ploche [N.m⁻²] alebo po celom objeme [N.m⁻³], tzv. **objemová tiaž** γ).
3. **Povrchové** (kontaktné, dotykové) a **objemové** (vlastná tiaž, odstredivé a magnetické sily).
4. **Trvalé** (napr. vlastná tiaž) a **dočasné** (napr. pohyb vozidla na moste, účinok vetra), atď.

Pre pochopenie fyzikálnej podstaty vzniku a pôsobenia osamelých, ako aj spojitých silových účinkov a následné zvládnutie riešenia praktických úloh mechaniky telies je vhodné uviesť aj ďalšie pojmy, ako sú:

- **Objemová hmotnosť - hustota** ρ (st. ozn. merná špecifická hmotnosť) je fyzikálna veličina, ktorá je určená podielom hmotnosti a objemu telesa. Platí

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.9)$$

kde ρ je hustota látky telesa [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$], m je celková hmotnosť [kg] a V je celkový objem telesa [m^3]. Znamená to: čím vyššiu hustotu teleso má, tým väčšiu hmotnosť má v pomere k jeho objemu, resp. hustejšie telesá (napr. železo) budú mať menší objem ako telesá rovnakej hmotnosti z menej hustej látky (napr. drevo).

- **Objemová tiaž** γ je fyzikálna veličina, vyjadrujúca veľkosť tiažovej sily pripadajúcu na objemovú jednotku látky. Vyjadruje celkovú tiaž pripadajúcu na jednotku objemu materiálu, vrátane bežného rozloženia mikro dutín, medzier a pórov. Pre jej veľkosť platí

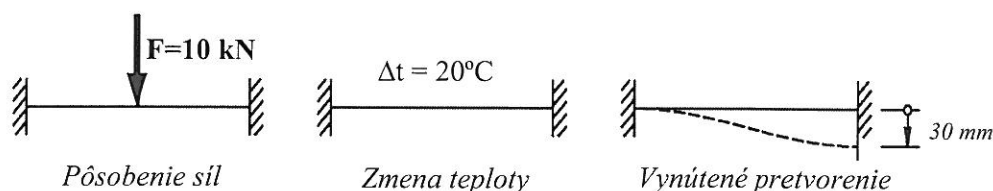
$$\gamma = \frac{G}{V} \quad \text{resp.} \quad \gamma = \rho \cdot g, \quad (1.10)$$

kde γ je objemová tiaž materiálu [$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$], $G = m \cdot g$ je tiaž telesa [N], V je objem telesa [m^3], resp. ρ je objemová hmotnosť látky [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] a g je tiažové zrýchlenie [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$].

1.4.1. Zaťaženie konštrukcií

Zaťaženie je akýkoľvek jav, ktorý vyvoláva zmenu stavu napätosti konštrukcie. V technickej praxi sa v zásade stretávame s nasledovnými druhmi (Obr.1.7) zaťažovacích javov:

- *pôsobenie silových účinkov na konštrukciu*
- *zmena teploty konštrukcie alebo jej častí*
- *vynútené pretvorenie časti konštrukcie.*



Obr.1.7

Silové účinky a vynútené pretvorenie podľa charakteru odozvy hmotného objektu rozlišujeme ako:

- **statické zaťaženie**, ktoré nevyvoláva významné zrýchlenia konštrukcie alebo
- **dynamické zaťaženie**, ktoré významné zrýchlenia konštrukcie vyvoláva a preto je potrebné počítať aj s vplyvom zotrvačných síl.

1.4.2. Klasifikácia a príklady zaťaženia

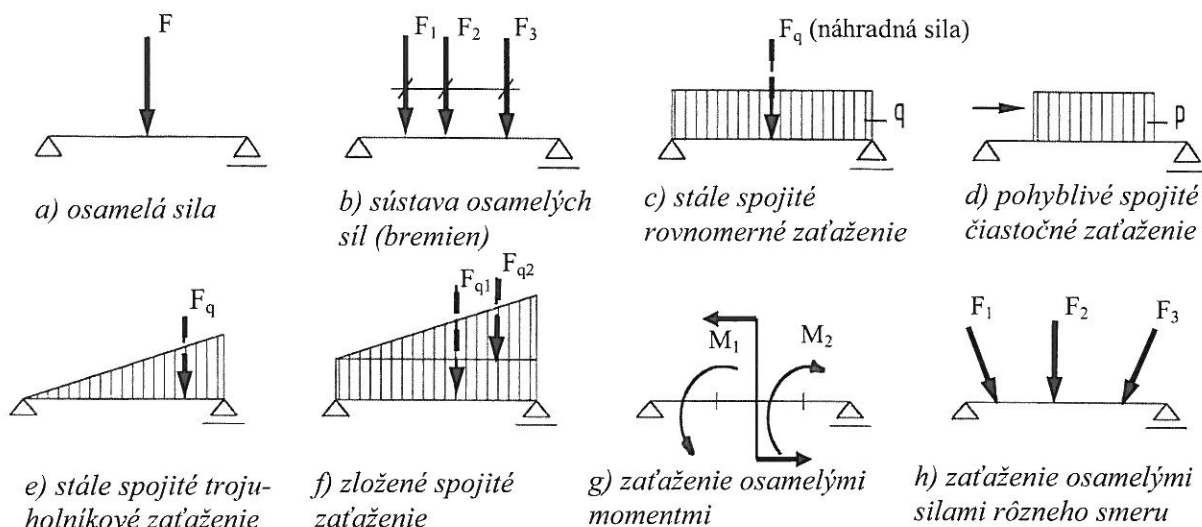
Podľa premenlivosti zaťažujúcich účinkov v čase rozoznávame zaťaženia:

- **stále (G)** - pôsobí počas celej doby technického života hmotného objektu a ich veľkosť, poloha ani smer sa v čase nemenia,
- **náhodné (Q)** - nepôsobia počas celej doby technického života konštrukcie a ich veľkosť, poloha, ako aj smer pôsobenia sa obvykle v čase menia,
- **mimoriadne (X)** - vyskytuje sa iba v špecifických prípadoch, najčastejšie ako dôsledok mimoriadnych, obvykle negatívnych, javov a udalostí.

Pre ilustráciu uvedieme príklady možného zaťaženia konštrukcií pozemných stavieb. **Stále zaťaženie** je obvykle definované vlastnou tiažou konštrukcie, zemným a horninovým tlakom, predpätím a pod.

Náhodné zaťaženie rozlišujeme *úžitkové* (prevádzkou a vybavením, strojmi a zariadením, skladovaným materiálom, vozidlami, žeriavmi a pod.), *klimatické* (snehom, vetrom, námrazou, klimatickými teplotami), *vynúteným pretvorením* (od prevádzkových teplôt, zmršťovaním a dotvarovaním betónu, poddolovaním a poklesom podpier a pod.). **Mimoriadne zaťaženie** (zemetrasením, výbuchom, havarijným pretvorením základov, havarijným narušením technologického procesu a pod.)

Príklady základných druhov zaťaženia, využívaných v mechanike telies a ich znázornenie sú na Obr.1.8.



Obr. 1.8

1.4.3. Charakteristiky zaťaženia z hľadiska spoľahlivosti

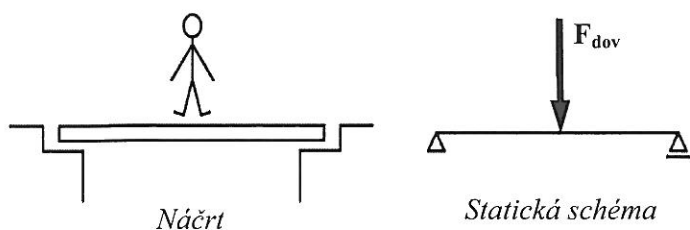
Úplný popis zaťaženia je definovaný štyrmi základnými vlastnosťami a to: **výskytom**, **intenzitou** (veľkosťou), **dobou trvania** a **opakovaním zaťaženia**. Všetky uvedené vlastnosti sú chápané ako náhodné veličiny, ktoré môžeme popísať pravdepodobnostnými charakteristikami. Znamená to, že **reálne zaťaženie konštrukcií má jednoznačne stochastický(náhodný) a v čase sa meniaci charakter**.

Pri realizácii praktických výpočtov v mechanike telies najčastejšie využívame prístup využitia tzv. **záťažových súčiniteľov**. Uvedený prístup má deterministický tvar a obsahuje nasledovné charakteristiky:

- **normová hodnota zaťaženia** (normové zaťaženie) F_{norm} – hodnota zaťaženia, ktorú môžeme v priebehu používania mechanickej sústavy skutočne očakávať,
- **súčiniteľ zaťaženia** λ_F – vyjadruje náhodné odchýlky zaťaženia od normových hodnôt,
- **výpočtová hodnota zaťaženia** (výpočtové zaťaženie) F_{dov} – maximálna (dovolená) hodnota zaťaženia, ktorá môže byť prekročená iba s definovanou minimálnou pravdepodobnosťou a je určená vzťahom

$$F_{\text{dov}} = \lambda_F \cdot F_{\text{norm}} \quad (1.11)$$

Pri výpočtoch nosných konštrukcií využívame obvykle **hodnoty dovoľeného (výpočtového) zaťaženia**.



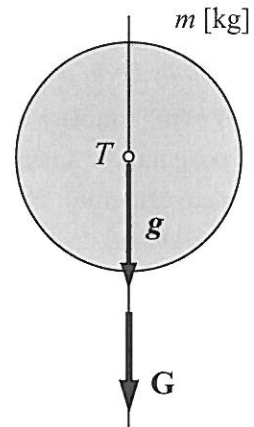
Obr.1.9

Pre ilustráciu uvádzame najjednoduchší prípad nosníka (napr. lávka), zaťaženého jednou osobou (Obr.1.9). Zaťaženie osobou je určené jeho hmotnosťou, ktorá vo všeobecnosti predstavuje náhodnú veličinu. Hmotnosť 100 kg berieme ako bežne sa vyskytujúce maximum, determinujúce práve normovú hodnotu zaťaženia, t.j. $F_{\text{norm}} = 1 \text{ kN}$.

V niektorých prípadoch sa však stretávame aj s osobami vážiacimi cez 100 kg a takéto odchýlky sú zahrnuté práve v súčiniteli zaťaženia, napr. $\lambda_F = 1,2$. Výpočtové zaťaženie má potom hodnotu

$$\mathbf{F}_{dov} = \gamma_F \cdot \mathbf{F}_{norm} = 1,2 \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{F}_{dov} = 1,2 \text{ kN}.$$

Najvýznamnejšou objemovou silou v mechanike telies je **sila G od vlastnej tiaže telesa** (Obr.1.10), ktorá je priamoúmerná hmotnosti telesa m [kg] a hodnote tiažového zrýchlenia g [m.s^{-2}]. Výsledná veľkosť tiažovej sily, pôsobiacej na hmotný objekt je všeobecne určená ako výslednica gravitačnej sily a odstredivej sily, spôsobenej rotáciou Zeme. Sila vlastnej tiaže smeruje vždy do stredu Zeme a jej pôsobiskom je ťažisko telesa. Platí: *Na 1 kg hmotnosti telesa pôsobí v gravitačnom poli Zeme tiažová sila $G = 9,81 \text{ N}$. V mechanike telies spravidla $G = 10 \text{ N}$.*



Obr.1.10

So základnými druhmi silových účinkov v mechanike sa detailnejšie zoznámime neskôr, najmä pri riešení praktických úloh najčastejších aplikácií technickej mechaniky v oblastiach bezpečnostného a stavebného, príp. strojného inžinierstva.

1.5. Väzby medzi telesami, stupne voľnosti pohybu

Silové účinky, vychádzajúce zo zaťaženia mechanických sústav, uvažované v mechanickom modeli analyzovanej konštrukcie nazývame **silovou sústavou**. Účinky zaťaženia, transformované do sústavy síl a momentov, vždy pôsobia na určitý hmotný objekt – t.j. hmotný bod alebo sústavu hmotných bodov.

Hmotný objekt môže byť v závislosti od toho aká silová sústava na neho pôsobí, uvažovaný v rovine alebo v priestore a môže byť definovaný buď ako **voľný** alebo ako **viazaný**. O voľnom hmotnom objekte hovoríme vtedy, ak nie je spojený s inými objektmi a má teda neobmedzenú možnosť pohybu. O viazanom objekte hovoríme vtedy, ak je viazaný na nepohyblivé teleso (základný rám) alebo na iné hmotné objekty a má preto určitým spôsobom možnosť pohybu obmedzenú.

1.5.1. Pohyblivosť hmotného objektu, stupne voľnosti hmotného bodu a telesa

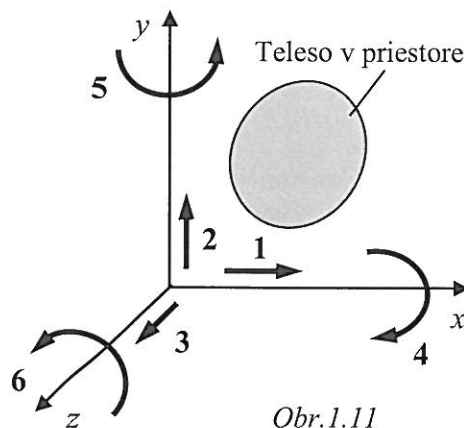
Pohyblivosť hmotného objektu vyjadruje počet nezávislých možných pohybov (posunutí alebo otočení) voľného objektu v rovine alebo v priestore. Pojem pohyblivosť súčasne vyjadruje najmenší počet nezávislých parametrov, ktorými je možné jednoznačne určiť polohu hmotného objektu v rovine alebo v priestore a v mechanike ho nazývame **počet stupňov voľnosti hmotného objektu ($^{\circ}V$)**.

Ak na hmotný objekt pôsobí nenulová sila alebo viac síl, tvoriacich tzv. sústavu síl, ktorá nie je v stave statickej rovnováhy, objekt sa vo všeobecnosti pohybuje. Aby sa pohybovať nemohol, je nutné jeho pohybu zabrániť – t.j. odobrať mu všetky jeho tzv. **stupne voľnosti pohybu**. Takéto obmedzenie pohybu obvykle realizujeme zavedením vhodných spojení – t.j. uchytenia telesa k iným telesám – ktorým v mechanike hovoríme **väzba**.

Uvažujme hmotný objekt umiestnený v rovine. Z fyziky je známe, že pre určenie polohy jeho ľubovoľného hmotného bodu stačí poznať dve veličiny – súradnice x, y bodu. Tri zvolené body na telese (t.j. aby sa teleso nemohlo pohybovať) potom môžeme jednoznačne určiť pomocou šiestich súradníc, čím sú ale zároveň definované aj tri hodnoty vzájomnej vzdialenosti medzi bodmi a sú to konštantné veličiny.

Z uvedeného dôvodu platí, že počet nezávislých premenných, určujúcich počet stupňov voľnosti pre voľný objekt uvažovaný v rovine je $6 - 3 = 3^{\circ}V$. Analogicky, pre voľný objekt v priestore je celkový počet stupňov voľnosti pohybu $9 - 3 = 6^{\circ}V$. Z vyššie uvedenej úvahy vychádzajú aj nasledovné tvrdenia:

- **Voľný hmotný bod v rovine** - má 2°V pohybu, $n_v=2^\circ$ (2 posunutia v smere súradnicových osí x, y). Hmotný bod nemá definovaný tvar – je iba abstrakciou elementárnej časti telesa, preto s jeho rotáciou neuvažujeme. Pre jednoznačné určenie polohy bodu postačujú jeho 2 súradnice.
- **Voľný hmotný bod v priestore** - má 3°V pohybu, $n_v=3^\circ$ (3 posunutia v smere súradnicových osí x, y, z ; s rotáciou opäť neuvažujeme). Pre jednoznačné určenie jeho polohy postačia 3 súradnice.
- **Voľné teleso v rovine** - má celkom 3°V , $n_v=3^\circ$ (2 posunutia v smere súradnicových osí x, y a rotácia v rovine xy , t.j. okolo osí z). Jeho poloha v rovine je jednoznačne určená 3 parametrami.
- **Voľné teleso v priestore** (Obr.1.11) - má celkom 6°V , $n_v=6^\circ$ (3 posunutia v smere súradnicových osí x, y, z a 3 rotácie okolo súradnicových osí x, y, z). Jeho poloha je jednoznačne určená 6 parametrami.



Obr.1.11

Hmotný objekt v rovine má celkom 3 stupne voľnosti pohybu - 2 posunutia v smere súradnicových osí x, y a 1 otáčanie okolo osi z . Hmotný objekt v priestore má celkom 6 stupňov voľnosti pohybu - 3 posunutia v smere súradnicových osí x, y, z a 3 otáčania okolo súradnicových osí x, y, z .

Predmetom statickej analýzy je iba špecifický prípad pohybu – a to *stav pokoja*. Takýto stav nastane iba v prípade rovnováhy všetkých silových účinkov pôsobiacich na viazané teleso, ktorého pohyb bol znemožnený / obmedzený jeho spojením s inými telesami. **Pri riešení úloh v statike je preto nutné, aby sme pohybu telesa zabránili.** Znamená to, že teleso musíme vhodne uložiť, tzn. uchytiť, naviazať na iné telesá tak, aby malo odobrané všetky $^\circ\text{V}$ pohybu. To môžeme dosiahnuť rôznymi spôsobmi usporiadania telies, voľbou uloženia a z neho vyplývajúcich väzieb medzi telesom a ostatnými objektmi mechanickej sústavy.

1.5.2. Väzby medzi telesami, väzbové reakcie

Charakter silových a momentových účinkov, prenášaných z hmotného objektu na podpory a naopak, závisí na konkrétnej podobe spojenia dvoch hmotných objektov – t.j. na type použitej väzby. Inak povedané:

Väzba v mechanike telies predstavuje geometricky definovaný dotyk objektov, prostredníctvom ktorého sa realizuje silové pôsobenie jedného hmotného objektu na iný.

Väzba predstavuje spojenie dvoch telies, umožňujúce určitý vzájomný pohyb. Rôzne typy väzieb majú rôzne vlastnosti z hľadiska prenosu silových účinkov, ako aj z hľadiska obmedzovania pohybu viazaných telies voči sebe navzájom. Tieto dve hľadiská spolu úzko súvisia a je zřejmé, že problematika väzieb je oblasť, spájajúca znalosti statiky a kinematiky.

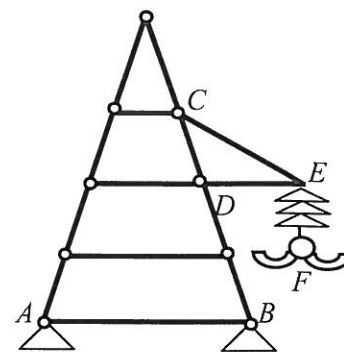
Väzba predstavuje modelové vyjadrenie technického riešenia, príp. zariadenie, ktoré pohyb objektu buď úplne *znemožňuje* alebo pohyb objektu *obmedzuje* (tzn. pohyb mechanizmov je vymedzený ich požadovanou funkciou). Znamená to, že väzby zabráňujú určitým pohybom objektu, znižujú jeho pohyblivosť a hovoríme, že *väzby rušia $^\circ\text{V}$ pohybu voľného hmotného objektu* a vzniká tak **objekt viazaný**.

Ak na viazané teleso začnú pôsobiť vonkajšie sily, z dôvodu zaistenia rovnováhy síl na telese musia vo väzbách medzi telesami vzniknúť aj prídavné silové a momentové účinky ($\mathbf{F}$ a $\mathbf{M}$), ktorým v mechanike hovoríme **väzbové reakcie**. Z hľadiska statickej analýzy nás bude hlavne zaujímať, koľkými neznámymi parametrami – t.j. *zložkami väzbových reakcií* – môžeme konkrétnu väzbu nahradiť. Platí:

Väzbová reakcia je sila alebo silová dvojica, ktorá je väzbou prenášaná.

Väzbové reakcie, ako silové účinky charakterizované svojou veľkosťou a zmyslom, vznikajú vo väzbách ako reakcia na zaťaženie viazaného hmotného objektu. V základnom statickom výpočte predstavujú hľadané neznáme veličiny.

Väzby ktorými viažeme mechanickú sústavu k nepohyblivému telesu, napr. zemskému povrchu, nazývame **vonkajšie väzby** a reakcie v nich **vonkajšie väzbové reakcie**. Napríklad, podľa Obr.1.12 sú v bodoch *A, B* väzby vonkajšie (uchytenie stožiaru o betónový základ), v bodoch *C, D, E, F* sú väzby vnútorné (*C, D* medzi prútni priehradovej konštrukcie stožiaru, *E* medzi izolátorom a ramenom stožiaru, *F* medzi vodičmi a izolátorom).



Obr.1.12

Naopak, ak mechanickú sústavu tvorí viac objektov, sú medzi nimi definované aj tzv. **vnútorné väzby** a reakcie v nich sú **vnútorné väzbové reakcie**. Platí tvrdenie:

Teleso je v stave statickej rovnováhy, ak všetky väzbové reakcie tvoria s vonkajšími zaťažujúcimi silami rovnovážnu sústavu síl, t.j. ak je výsledný pohybový účinok sústavy síl nulový.

U väzieb vo všeobecnosti rozlišujeme **väzby idealizované**, u ktorých nepočítame s procesom trenia alebo **väzby reálne**, u ktorých sa trenie prejavuje a s jeho vplyvom na pomer a rozloženie síl na telese uvažujeme. Pri bežných výpočtoch v technickej praxi obvykle kvôli zjednodušeniu riešeného problému uvažujeme s ďalšou fyzikálnou abstrakciou a pre zjednodušenie výpočtov predpokladáme medzi telesami **ideálne väzbové podmienky**. Aj v rámci učebného textu budeme uvažovať iba zjednodušený prípad, t.j. mechanické sústavy s ideálnymi väzbami, u ktorých budeme tzv. **pasívne odpory**, pôsobiace vo forme procesov trenia, mechanického tepla, lokálneho pretvorenia vo väzbách a pod., jednoducho zanedbávať. Znamená to, že pri rozbere vlastností väzieb medzi telesami z pohľadu statiky sa obmedzíme výhradne na uvažovanie väzieb, pozostávajúcich iba z dokonale hladkých plôch, bez trenia – **ideálne väzby**.

Väzby vo všeobecnosti rozdeľujeme na **rovinné** a **priestorové**. Rovinná väzba spája dve telesá, konajúce rovinný pohyb v navzájom rovnobežných rovinách. Rovinných väzieb existuje celkom šesť typov a v ďalšom texte budú podrobnejšie popísané ich vlastnosti z hľadiska statiky, ale aj kinematiky. Pri priestorovom pohybe je viac možností rôznych pohybov, a aj podstatne viac kombinácií pohybov ktoré priestorová väzba umožňuje alebo naopak znemožňuje. Priestorových väzieb poznáme veľké množstvo a je zbytočné sa snažiť ich komplexne definovať. V ďalšom texte sa zameriame iba na väzby rovinné.

Hmotný objekt uvažovaný v rovine môžeme vo všeobecnom prípade naviazať k jeho okoliu alebo iným telesám celkom 5 základnými druhmi **ideálnych rovinných väzieb** (Tab.1.1) a to väzbou:

- **všeobecnou** (odoberá 1 °V - tzv. *vyššia kinematická dvojica*),
- **rotačnou, posuvnou, valivou** (odoberajú 2 °V - tzv. *nižšie kinematické dvojice*) alebo
- **pevnou** (odoberá všetky 3 °V).

Základné druhy ideálnych rovinných väzieb

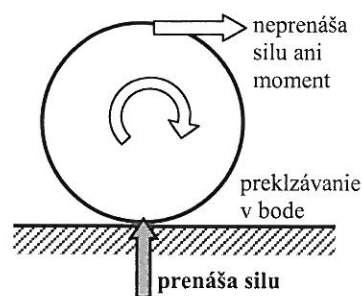
Tabuľka 1.1

P.č.	Druh väzby	Počet možných °V pohybu (n_m)	Počet odobraných °V pohybu (n_o)
1.	všeobecná	$n_m = 2$ °V (1 posun, 1 otáčanie)	$n_o = 1$ °V
2.	rotačná	$n_m = 1$ °V (1 otáčanie)	$n_o = 2$ °V
3.	posuvná	$n_m = 1$ °V (1 posun)	$n_o = 2$ °V
4.	valivá	$n_m = 1$ °V (1 otáčanie)	$n_o = 2$ °V
5.	pevná	$n_m = 0$ °V (žiadny možný pohyb)	$n_o = 3$ °V

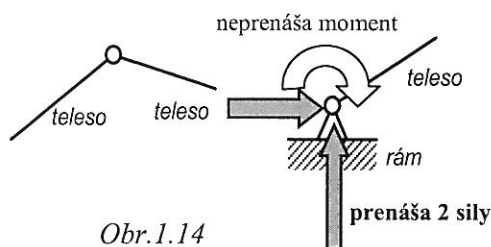
Väzbová reakcia, vznikajúca v konkrétnom druhu rovinatej väzby (Tab.1.1), je vždy určená toľkými parametrami - počet neznámych zložiek síl a momentov - koľko °V pohybu väzba odoberá (neumožňuje).

Charakteristika základných väzieb v rovine:

1. Všeobecná väzba ($n_0=1^\circ V$) – je tvorená dvomi dotýkajúcimi sa povrchmi. Väzba neumožňuje iba posuv kolmo ku spoločnej dotýčnici oboch povrchov, naopak umožňuje rotáciu a posuv v smere spoločnej dotýčnice. Znamená to (Obr.1.13), že prenáša iba silu kolmú ku spoločnej dotýčnici povrchov stýkajúcich sa telies; neprenáša moment ani silu v smere spoločnej dotýčnice. Väzba sa realizuje obvykle jednoduchým opretím / položením jedného telesa o / na teleso druhé.



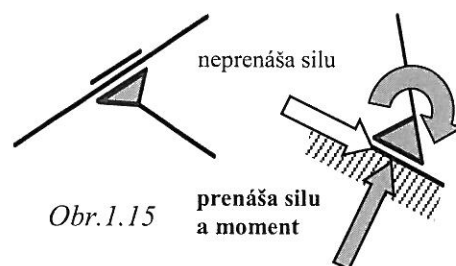
Obr.1.13



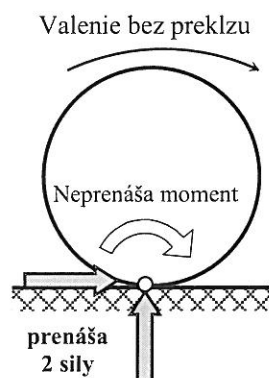
Obr.1.14

2. Rotačná väzba ($n_0=2^\circ V$), často nazývaná aj ako **pevný kĺb** - umožňuje vzájomné natáčanie telies voči sebe; neumožňuje však posuv v žiadnom smere. Znamená to (Obr.1.14), že prenáša iba sily (obvykle v dvoch na seba kolmých smeroch); neprenáša otáčavý účinok. Väzba je často realizovaná prostredníctvom čapu, ložiska, pántov apod.

3. Posuvná väzba ($n_0=2^\circ V$) - umožňuje iba 1 posuv v určitom, väzbou vymedzenom smere; neumožňuje posuv v smere kolmom na smer pohybu a neumožňuje ani rotáciu. Znamená to (Obr.1.15), že prenáša iba silu v smere kolmom na smer posuvu a prenáša otáčavý účinok; neprenáša silu v smere posuvu. Posuvná väzba môže byť realizovaná napr. vyfrézovanou drážkou (napr. sklenená tabuľa v presklenej skrinke), príp. vymedzením pohybu klzným vedením.



Obr.1.15

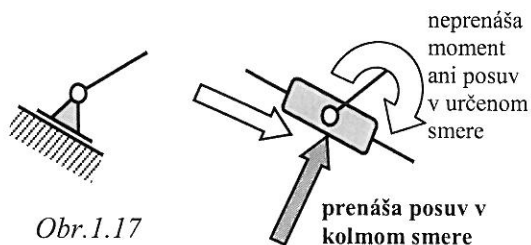


Obr.1.16

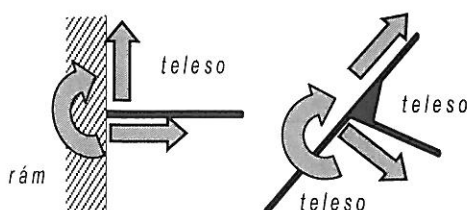
4. Valivá väzba ($n_0=2^\circ V$) - je tvorená dvomi povrchmi vo vzájomnom kontakte (Obr.1.16). Medzi povrchmi nedochádza k preklzovaniu, ale sa po sebe iba odvalujú. Dotykový bod valivej väzby je tzv. „okamžitý kĺb“.

Zásadný rozdiel medzi valením a rotáciou (otáčaním) je v tom, že okamžitý kĺb sa *pri valení mení* - v každom okamžiku je to vždy iný bod, naopak pri rotácii je okamžitý kĺb stále ten istý. Základné statické vlastnosti rotačnej aj valivej väzby sú však zhodné. Valivá väzba tiež znemožňuje dva posuvy a umožňuje iba otáčanie. Valivá väzba teda prenáša 2 navzájom kolmé sily, neprenáša žiadny otáčavý účinok.

5. Posuvný kĺb ($n_0=1^\circ V$) – je kombináciou rotačnej a posuvnej väzby. Umožňuje otáčanie okolo kĺba a jeden posuv vo vymedzenom smere. Väzba typu „posuvný kĺb“ (Obr.1.17) prenáša iba silu v smere kolmom k smeru posuvu.



Obr.1.17



Obr.1.18

prenáša sily aj moment

6. Pevná väzba - dokonalé votknutie ($n_0=3^\circ V$) - je pevné spojenie dvoch telies. Neumožňuje žiadny vzájomný pohyb. Je špecifická tým, že telesá, spojené navzájom dokonalým votknutím sa stávajú jedným telesom. Znamená to (Obr.1.18), že pevná väzba prenáša všetky sily všeobecného smeru, ako aj otáčavé účinky. Väzba je najčastejšie realizovaná zvarením, zlepením, zoskrutkovaním, príp. inými vhodnými spôsobmi.

Príklady najbežnejších jednoduchých rovinných väzieb a zložiek ich väzbových reakcií sú v Tab.1.2.

Jednoduché rovinné väzby a ich charakteristika

Tabuľka 1.2

Názov väzby	Násobnosť väzby (počet odobraných °V)	Značka väzby a neznáme zložky väzbovej reakcie
Kyvný prút	1	 $\uparrow A_y$
Posuvná väzba (tzv. posuvný kĺb)	1	 $\uparrow A_y$
Pevná väzba (tzv. neposuvný, pevný kĺb)	2	 $\uparrow A_y \rightarrow A_x$
Posuvná väzba (tzv. posuvné votknutie)	2	 $\uparrow A_y \curvearrowright M_a$
Pevná väzba (tzv. dokonalé votknutie)	3	 $\uparrow A_y \rightarrow A_x \curvearrowright M_a$

Ak porovnáme vlastnosti uvedených väzieb z hľadiska statiky (t.j. ktoré sily a momenty väzba prenáša alebo neprenáša) a z hľadiska kinematiky (t.j. ktoré pohyby umožňuje alebo znemožňuje) platí pravidlo:

Každá väzba prenáša také silové účinky (sily a momenty), akým vzájomným pohybom zabraňuje.

1.5.3. Uvoľňovanie telies v mechanike

Analytické riešenie v mechanike telies je vo všeobecnosti nutné začať transformáciou mechanického modelu hmotného objektu iba na sústavu silových účinkov (známych i zatiaľ neznámych), ktorú musíme najskôr uviesť do rovnováhy. Rovnováha síl je potrebná na to, aby sme hmotný objekt dostali do stavu pokoja - objekt nebude v pohybe, bude statický.

Nahradenie väzieb viazaných hmotných objektov väzbovými reakciami nazývame **uvoľnením hmotného objektu**, ktoré pozostáva z nasledovných krokov:

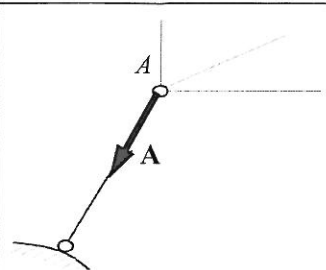
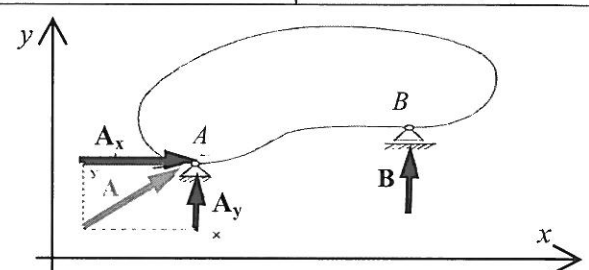
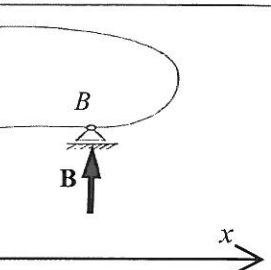
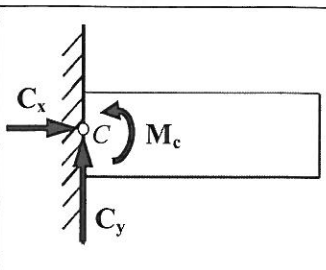
1. výber analyzovaného hmotného objektu (= bod, teleso, sústava telies, príp. určitá časť konštrukcie),
2. uvoľnenie (oddelenie) hmotného objektu od okolitých telies, tzn. odstránenie väzieb, ktorými je objekt viazaný (pripojený, uchytený) k svojmu okoliu,
3. nahradenie „odstránených“ väzieb príslušajúcimi silovými účinkami, ktoré vo väzbách zodpovedajú tomu, aký pohyb uvoľňované väzby obmedzujú, resp. neumožňujú (tzn. vtedy vzniká vo väzbe silový účinok, charakterizujúci odpor voči možnému pohybu viazaných hmotných objektov),
4. znázornenie všetkých zaťažujúcich silových účinkov, ktoré na objekt pôsobia, t.j. dostaneme sústavu síl a momentov (akčných a reakčných), ktoré na hmotný objekt pôsobia.

Znamená to, že v mieste pôsobenia konkrétnej väzby, odoberajúcej hmotnému objektu príslušnú možnosť pohybu n_o (t.j. posuv alebo natočenie), musíme pri uvoľnení objektu zaviesť príslušajúci počet zložiek väzbových reakcií (napr. v súlade s Tab.1.2) a platí:

Väzbové reakcie pôsobia vždy v smere väzbou odobranej - neumožnenej - možnosti pohybu.

Prakticky to znamená, že ak väzba neumožňuje vzájomný posuv telies v určitom smere, hovoríme, že v tomto smere väzba silu prenáša, resp. ak väzba neumožňuje vzájomnú rotáciu okolo určitej osi, hovoríme, že prenáša moment k tejto osi. Naopak, ak väzba určitý pohyb umožňuje, potom príslušnú silu alebo moment neprenáša. Je teda zrejmé, že **veľkosť a smer väzbových reakcií** (miesto ich pôsobenia je známe = miesto uloženia) **závisí iba na druhu, veľkosti, smere a mieste pôsobenia vonkajšieho zaťaženia.**

Príklady nahradenia vybraných základných typov rovinných väzieb sú uvedené na Obr.1.19.

Kyvný prút	Pevný kĺb	Posuvný kĺb	Votknutie
			
Odoberá 1 °V ($n_0=1$). Umožňuje posun a pootočeniu. Vyvodzuje jedinou zložku reakcie A , pôsobiacu v smere osi kyvného prúta.	Odoberá 2°V ($n_0=2$). Umožňuje iba pootočeniu. Vyvodzuje 2 zložky reakcie A (A_x, A_y). Pevný kĺb možno nahradit' 2 kyvnými prútmi.	Odoberá 1°V ($n_0=1$). Umožňuje iba pootočeniu a posun. Vyvodzuje iba zložku reakcie B , v smere kolmom na smer možného posunu.	Odoberá 3 °V ($n_0=3$). Neumožňuje žiadny pohyb. Ide o pevné spojenie dvoch telies. Vyvodzuje 3 zložky reakcií a to zložky: C_x, C_y a moment M_c .

Obr.1.19

Pre staticky určito uložené hmotné objekty môžeme neznáme väzbové reakcie jednoducho určiť definovaním a vyriešením tzv. *statických podmienok (rovníc) rovnováhy silových účinkov pôsobiacich na hmotný objekt*.

Pri uvoľňovaní hmotného objektu pre analytické riešenie je nutné v mechanickom modeli znázorniť aj neznáme parametre, aby sa objavili aj v rovniciach rovnováhy. Nie je dôležité, či je hmotný objekt tvorený jedným alebo viacerými telesami, ani aký má tvar. Vždy však musí byť splnená podmienka rovnováhy všetkých silových účinkov na objekt pôsobiacich, inak bude objekt v pohybe, a to je pre statickú analýzu neprípustné. Skutočnosť, či bude možné rovnováhu silových účinkov metódami statiky vyriešiť – t.j. či sa bude zaťažovaný hmotný objekt pohybovať alebo bude v pokoji – zisťujeme analýzou tzv. **statickej určitosti**.

1.5.4. Statická určitosť riešenia rovnováhy hmotných objektov

Pri riešení úloh v statike nás hlavne zaujíma, či máme k dispozícii dostatočný počet podmienok rovnováhy pre určenie všetkých neznámych parametrov – t.j. zložiek väzbových reakcií. Nutný počet podmienok rovnováhy pritom závisí od druhu silovej sústavy, ktorá na daný hmotný objekt pôsobí. Neznáme silové účinky v miestach uloženia - **väzbové reakcie**, môžeme určiť zo statických podmienok rovnováhy síl na teleso pôsobiacich. To je však možné iba vtedy, ak je hmotný objekt (teleso) uložený nepohyblivo.

V rámci statiky je preto nutnou podmienkou, aby u hmotného objektu bola vhodnými väzbami zaistená jeho nepohyblivosť. Napr. pre rovinný prípad uloženia platí:

Ak je hmotný objekt v rovine uložený tak, že nie je možný ani jeho nekonečne malý posun, ani pootočeniu (má odobrané práve 3 stupne voľnosti pohybu) – objekt je v pokoji a hovoríme, že hmotný objekt je uložený staticky určito.

Skutočnosť, či je hmotný objekt viazaný alebo nie, zistíme rozborom počtu jeho stupňov voľnosti a počtu neznámych zložiek síl vo väzbách prostredníctvom tzv. **kritéria statickej určitosti**. Základné kritérium statickej určitosti uloženia hmotného objektu má tvar

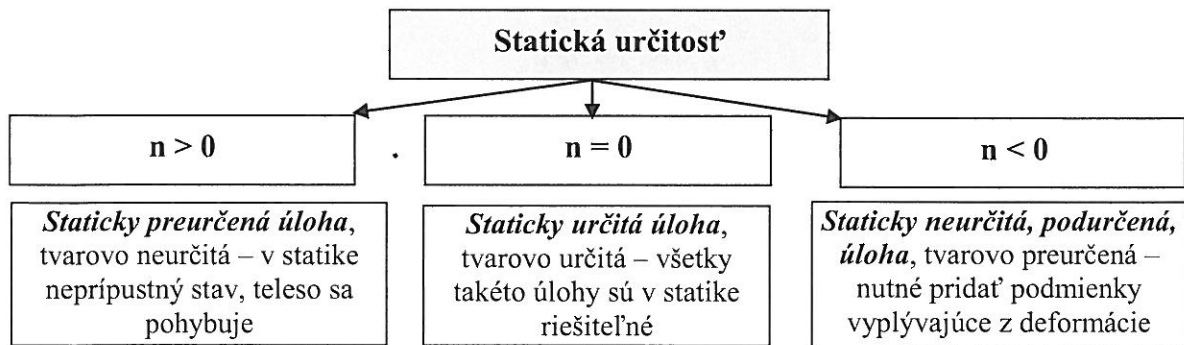
$$n = n_v - n_o \quad (1.12)$$

kde n reprezentuje počet stupňov voľnosti viazaného objektu, n_v je počet stupňov voľnosti voľného hmotného objektu (v rovine - $n_v = 3^\circ V$, resp. v priestore - $n_v = 6^\circ V$) a n_o je počet stupňov voľnosti odobratých použitými väzbami. Vzťah (1.12) charakterizuje tzv. **väzbovú závislosť hmotného objektu**.

Vo všeobecnosti môžu nastať 3 prípady uloženia hmotného objektu (telesa alebo sústavy telies):

$n = 0$	Staticky určené uloženie - teleso má väzbami odobrané všetky možné stupne voľnosti pohybu, tzn. objekt sa nemôže pohybovať.
$n < 0$	Staticky neurčité uloženie, tzv. podurčené - teleso má odobratý väčší počet stupňov voľnosti pohybu ako ich v skutočnosti má definovaných, t.j. máme menej podmienok rovnováhy ako neznámych zložiek väzbových reakcií.
$n > 0$	Staticky neurčité uloženie, tzv. preurčené - teleso nemá odobrané všetky stupne voľnosti, tzn. teleso sa môže pohybovať – a to je <i>pre statické riešenie neprípustné</i> .

Charakteristika základných prípadov statickej určítosti (Obr.1.20):



Obr.1.20

- **Staticky určená úloha, tvarovo určitá ($n=0$)** - väzby zabezpečujú stabilné (nepohyblivé) upevnenie telesa. Staticky určená úloha je jednoznačne riešiteľná ($n_v=n_o$), pretože máme k dispozícii práve toľko podmienok rovnováhy, koľko máme neznámych parametrov väzbových reakcií. Staticky určená konštrukcia je však obvykle tuhostne poddajnejšia (t.j. vykazuje väčšie mechanické deformácie).
- **Staticky neurčitá - podurčená – úloha, tvarovo preurčená ($n<0$)** - k dispozícii máme menej podmienok rovnováhy ako máme neznámych parametrov väzbových reakcií ($n_v<n_o$). Takéto úlohy metódami statiky riešiť nedokážeme. Podľa stupňa statickej neurčitosti musíme k podmienkam rovnováhy pridať aj tzv. *deformačné podmienky*, aby sme získali toľko rovníc, koľko máme neznámych parametrov väzbových reakcií. Výpočet analytickými metódami je preto náročnejší a s podstatou definovania deformačných podmienok sa zoznámime až v rámci mechaniky poddajného telesa, t.j. v náuke o pevnosti a pružnosti.
- **Staticky preurčená úloha, tvarovo neurčitá ($n>0$)** – k dispozícii máme viac podmienok rovnováhy ako neznámych parametrov väzbových reakcií ($n_v>n_o$). Teleso nemá väzbami odobrané všetky stupne voľnosti, t.j. uloženie umožňuje pohyb, čo je z hľadiska statickej analýzy telesa **neprípustné !!!** V takomto prípade musíme okrem väzbových reakcií určovať zo statických podmienok rovnováhy aj ďalšie parametre – tzv. *prídavné silové účinky* (napr. veľkosť a polohu zaťažujúcej sily, silovej dvojice a pod.), aby bol skúmaný objekt v rovnováhe.

Statickou analýzou hmotného objektu môžeme okrem jeho riešiteľnosti – t.j. statickej určítosti riešenia - posudzovať aj jeho pohyblivosť – t.j. vykonať kinematický rozbor a z neho vyplývajúcu **tvarovú určítosť**.

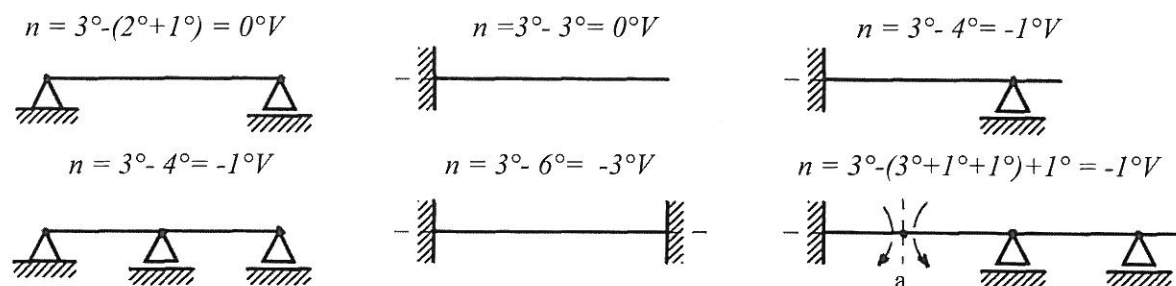
- Ak platí $n=0$, väzbami odoberáme objektu všetky možnosti pohybu, čiže mu aj presne vymedzíme jeho tvar a hovoríme, že úloha je vtedy aj **tvarovo určitá**.
- V prípade, ak $n>0$, väzbami odoberáme menej stupňov voľnosti pohybu ako voľný objekt v skutočnosti má. Hmotný objekt môže byť v danej, ale aj inej polohe a vtedy hovoríme, že úloha je **tvarovo neurčitá**. Hmotný objekt je vtedy pohyblivý, čo je v rámci statiky neprípustné a neriešiteľné.

- Prípád $n > 0$ nastane vtedy, ak hmotnému objektu väzbami odoberieme viac stupňov voľnosti pohybu ako by mal voľný objekt. Hmotný objekt bude nepohyblivý, ale jeho poloha je už tzv. preurčená a hovoríme, že úloha je **tvorovo preurčená**.

Vo všeobecnosti platí, že niektoré použité väzby alebo prvky môžu konštrukciu iba vystužovať, čím pôsobia priaznivo na jej únosnosť a stabilitu.

Príklad 1.1: Pre zadané prípady uloženia tzv. priamych nosníkov (Obr.1.21), ako základných prvkov nosných konštrukcií v technickej praxi, posúďte ich riešiteľnosť v statike – t.j. určite ich statickú určitosť.

Riešenie: $n = n_v - n_o$ (v rovine - $n_v = 3^\circ V$, resp. v priestore - $n_v = 6^\circ V$)



Obr. 1.21

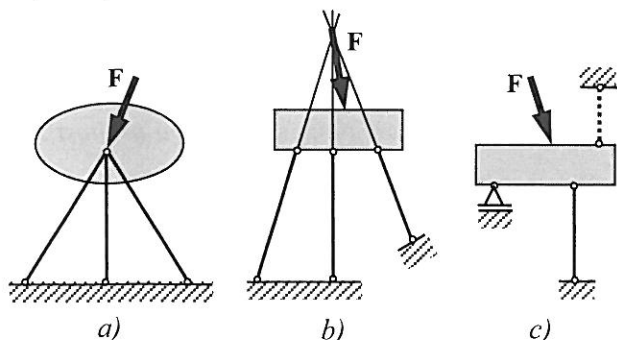
Vo všeobecnosti môžeme preto vysloviť tvrdenie:

Ak je hmotný objekt uložený staticky určito ($n=0$), pre úplné určenie silových účinkov vznikajúcich vo väzbách postačujú iba podmienky statickej rovnováhy všetkých silových účinkov na objekt pôsobiacich.

Pri staticky neurčitom (podurčenom) uložení je potrebné statické podmienky rovnováhy síl na hmotnom objekte – telese alebo sústave telies - doplniť o ďalšie rovnice, vyplývajúce z podmienok jeho pretvorenia vplyvom zaťaženia. Problém statickej neurčitosti obvykle eliminujeme aplikáciou vhodných metód (napr. Castiglianova veta) alebo numerických postupov (napr. metóda konečných prvkov – MKP). Aktuálne dostupné softvéry, ako napr. Adina, Ansys, Fluent, Abaqus, Catia, Nastran a pod. umožňujú oveľa efektívnejší výpočtový proces, ako aj experimentovanie s parametrami virtuálnych modelov, ako aj optimalizáciu štruktúrnych parametrov a ďalších špecifických vlastností mechanických sústav.

1.5.5. Výnimkové prípady usporiadania väzieb

Je možné sa stretnúť aj z tzv. **kritickými (výnimkovými) prípadmi uloženia** telesa v rovine. Pri takomto prípade usporiadania väzieb, je podľa rovnice (1.9) formálne počet stupňov voľnosti viazaného objektu nulový ($n=0$), ale použité väzby v skutočnosti nezaručujú ani statickú, ani tvarovú určitosť hmotného objektu pri akejkoľvek charaktere zaťaženia.



Obr. 1.22

Podľa Obr.1.22a,b je úloha staticky určitá, tzn. máme tri neznáme parametre väzbových reakcií, ale na teleso pôsobí tzv. centrálna rovinná sústava síl, pre ktorú vieme zostaviť iba dve rovnice rovnováhy. Úloha sa tak stáva staticky neurčitou.

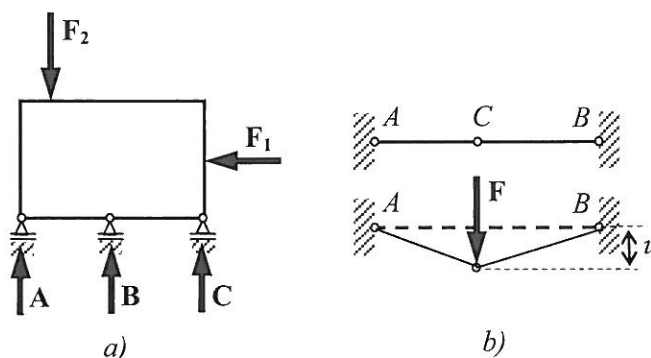
Pri istom usporiadaní akčných síl môže nastať pohyb (Obr.1.22c), pri inom môže nastať prípad statickej neurčitosti. Napr. ak by na teleso (Obr.1.23a) pôsobila iba sila F_1 , došlo by k pohybu telesa.

Ak však súčasne pôsobí aj sila F_2 , ide už o prípad statickej neurčitosti, pretože neznáme reakcie vo väzbách sú tri (A, B, C), ale zo statických podmienok rovnováhy, ich určit' nedokážeme. Formálne však $n = 3 - 3 = 0$ °V.

Rovnako na Obr.1.23b, kde väzba v bode C , zaisťuje spojenie prútov AC a BC , umožňuje tzv. virtuálny pohyb. Formálne však opäť platí $n = 2 - 2 = 0$ °V. Podľa Obr.1.23b je posunutie bodu C od pôsobenia akčnej sily F (parameter u) úplne nevyhnutné, aby bola splnená statická podmienka rovnováhy síl v tvare $\sum F_y = 0$. Pri výpočte

väzbových reakcií sa takýto špecifický prípad prejaví tým, že sústava rovníc rovnováhy bude neriešiteľná.

Demonstrujme si na jednoduchom príklade spôsob posúdenia statickej určitosti problému, uvoľnenia telesa a základný výpočet väzbových reakcií staticky určito uloženého hmotného objektu.



Obr.1.23

Príklad 1.2: Teleso hmotnosti m je zavesené kĺbovou väzbou v bode A (Obr.1.24a). V bode B je teleso podopreté všeobecnou väzbou. Vzdialenosť väzieb A a B vo vodorovnom smere je b a v zvislom smere h . Vodorovná vzdialenosť ťažiska telesa T od kĺba A je c . Teleso uvoľnite a určite väzbové reakcie v uložení.

Riešenie:

Analytické riešenie má 3 základné kroky:

1. **uvoľnenie telesa (uvoľnenie väzieb),**
2. **posúdenie riešiteľnosti (statickej určitosti) úlohy,**
3. **definovanie rovníc rovnováhy, ich riešenie a interpretácia výsledkov.**

1. **Uvoľnenie telesa:** Spôsob náhrady väzby súvisí s typom použitých väzieb. Kĺbová väzba v bode A prenáša v smere osí x, y dve, navzájom kolmé, reakcie A_x, A_y . Nie je podmienkou, aby to bol iba zvislý a vodorovný smer (niekedy môže byť vhodnejšie zvolit' si iné smery), obvykle však volíme jednu reakciu vodorovnú (v smere osi x), druhú zvislú (v smere osi y).

Všeobecná väzba v bode B prenáša iba reakciu B , pôsobiacu kolmo ku spoločnej dotýkajúcej sa povrchov pod uhlom β voči vodorovnému smeru. Smer úsečky AB nezohráva žiadnu úlohu. Orientáciu reakcií (vpravo / vľavo, hore / dole) na začiatku riešenia iba odhadujeme. Kladný výsledok výpočtu potom znamená správny odhad, záporný výsledok signalizuje opačnú orientáciu, ako bola zvolená.

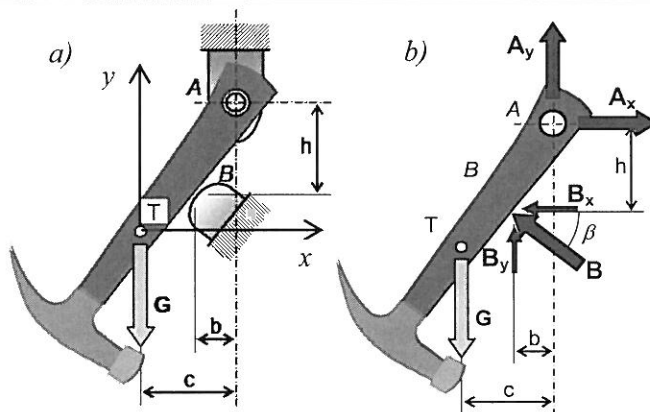
2. **Posúdenie statickej určitosti:** platí $n = n_v - n_o = 3 - 3 = 0$ °V - úloha je staticky určitá.

3. **Výpočet väzbových reakcií:** Sily G, A_x, A_y a B tvoria sústavu síl v rovine s rôznymi pôsobiskami. Ako bude neskôr preukázané rovnováhu takejto rovinnej sústavy síl vyjadrujeme tromi tzv. **rovnícami rovnováhy**, ktoré v tomto prípade (Obr.1.24b) môžu mať napríklad tvar:

$$(1) \quad \sum F_{ix} = 0: A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x - B \cdot \cos \beta = 0 \quad (+ \rightarrow)$$

$$(2) \quad \sum F_{iy} = 0: A_y + B_y - G = 0 \Rightarrow A_y + B \cdot \sin \beta - G = 0 \quad (+ \uparrow)$$

$$(3) \quad \sum M_{iA} = 0: -B_x \cdot h - B_y \cdot b + G \cdot c = 0 \Rightarrow -B \cdot \cos \beta \cdot h - B \cdot \sin \beta \cdot b + G \cdot c = 0 \quad (+ \curvearrowright)$$



Obr.1.24

Z uvedených rovníc rovnováhy sústavy síl pôsobiacej na teleso po úpravách dostaneme

$$\text{- z rovnice (3): } B = \frac{G \cdot c}{h \cdot \cos \beta + b \cdot \sin \beta}$$

$$\text{- z rovnice (1): } A_x = B \cdot \cos \beta = \frac{G \cdot c \cdot \cos \beta}{h \cdot \cos \beta + b \cdot \sin \beta}$$

$$\text{- z rovnice (2): } A_y = G - B \cdot \sin \beta = G \cdot \left(1 - \frac{c \cdot \sin \beta}{h \cdot \cos \beta + b \cdot \sin \beta} \right)$$

Výsledná sila vo väzbe A - **väzbová reakcia A** a jej tzv. **smerový uhol α** , určujúci sklon reakcie **A** voči vodorovnému smeru x , majú podľa Pythagorovej vety veľkosť $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ a $\alpha = \arctan \frac{A_y}{A_x}$.

Záverečné poznámky:

V oblasti posudzovania bezpečnosti a spoľahlivosti reálnych technických systémov je nutné neustále mať na zreteli, že ich **prevádzkové namáhanie** predstavuje najmä z pohľadu ich únosnosti a požadovanej funkčnosti významný nepriaznivý faktor. Medzi najvýznamnejšie negatívne faktory patrí stochastický charakter zaťaženia, nedokonalosť konštrukčných materiálov, procesy prevádzkového opotrebenia, vplyv vlastností pracovného prostredia – najmä extrémne vplyvy klimatických podmienok, korózia a ďalšie činitele, vyplývajúce z ich reálnych prevádzkových podmienok.

Bez preháňania môžeme tvrdiť, že najdôležitejšou časťou práce „statika“ v technickej praxi je správne definovanie a namodelovanie konštrukcie (t.j. stanovenie jej skutočného zaťaženia a prevádzkového pôsobenia, t.j. určenie najvýstižnejšej výpočtovej schémy) a správne určenie charakteru zaťaženia, nielen čo do veľkosti, ale aj čo do smeru a miesta pôsobenia.

V ďalších kapitolách budú preto objasnené teoretické a praktické znalosti z oblasti statiky hmotných objektov a budú uvedené charakteristiky základných druhov silových sústav v rovine s cieľom pochopiť princípy riešenia statickej rovnováhy a ekvivalencie silových účinkov, využiteľné najmä v oblastiach bezpečnostného inžinierstva so zameraním na stabilitu a manažment technických a technologických rizík rozličných technických konštrukcií a systémov v praxi.

Kontrolné otázky:

1. Objasnite členenie mechaniky tuhých telies a charakterizujte jej jednotlivé disciplíny.
2. Uvedte Newtonove pohybové zákony a objasnite ich fyzikálnu podstatu.
3. Charakterizujte základné druhy súradnicových sústav, popíšte nimi polohu zvoleného bodu v priestore a rovine.
4. Uvedte základné fyzikálne abstrakcie hmotných objektov a objasnite ich, uvedte rozdiel medzi DTT a PDT.
5. Objasnite z čoho pozostáva mechanický model konštrukcie a ako s ním v mechanike pracujeme.
6. Charakterizujte základné veličiny využívané v mechanike, objasnite rozdiel medzi silou a momentom sily.
7. Objasnite pojem zaťaženie, uvedte praktické príklady zaťaženia konštrukcií, objasnite pojem spojité zaťaženie.
8. Popíšte vzťah medzi väzbou a väzbovou reakciou, uvedte základné druhy rovinných väzieb a charakterizujte ich.
9. Objasnite účel a spôsob uvoľňovania telies v mechanike, uvedte príklady nahradenia základných druhov rovinných väzieb a objasnite súvis medzi počtom zavedených väzbových reakcií a počtom rovníc rovnováhy.
10. Čo predstavuje pojem statická určitosť uloženia, objasnite kritérium statickej určitosti.
11. Definujte jednotlivé prípady vyhodnotenia kritéria statickej určitosti, uvedte súvis medzi statickou a tvarovou určitosťou konštrukcie.
12. Objasnite, čo je to výnimkový prípad usporiadania väzieb a uvedte príklad nevhodného usporiadania väzieb.

2. ZÁKLADNÉ ÚLOHY, PRINCÍPY A AXIÓMY STATIKY

Statika je vo všeobecnom ponímaní náukou o výpočtoch nosných konštrukcií. V užšom slova zmysle definujeme **statiku ako náuku, zaoberajúcu sa podmienkami rovnováhy vonkajších a vnútorných síl pôsobiacich na rozličné nosné konštrukcie a ich prvky.**

Pod pojmom konštrukcia v mechanike telies chápeme hmotný objekt alebo technické zariadenie, zložené z viacerých nosných a nenosných častí, tvoriacich funkčný celok s určenou funkciou a parametrami (napr. stavebná konštrukcia – most, budova, nosná strešná konštrukcia, podporná skruž, príp. časti strojných zariadení – nosný rám, pracovné ústrojenstvá zdvíhacích a manipulačných zariadení, nosné prvky rozličných technologických celkov a pod.). Požadovaná pevnosť, tuhosť príp. stabilita nosnej konštrukcie je určovaná nielen so zreteľom na bezpečnosť jej používania, ale aj požadovanú úroveň jej prevádzkovej spoľahlivosti, životnosti a hospodárnosti prevádzky.

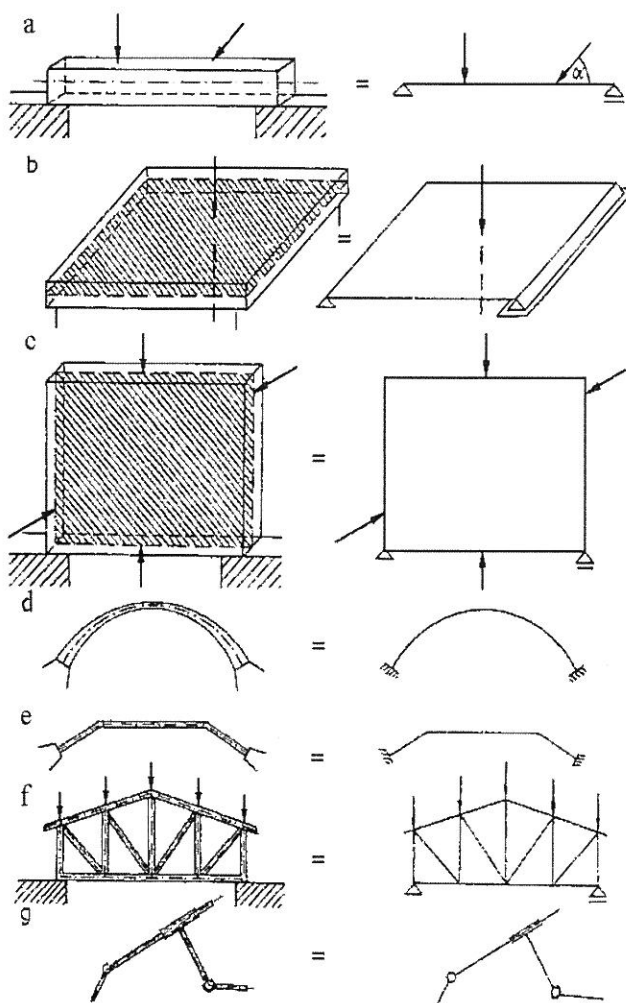
Hlavné konštrukčné prvky, takýchto obvykle veľkorozmerných technických systémov, majú podľa svojho tvaru alebo spôsobu prevádzkového zaťaženia v praxi zaužívané rôzne pomenovania, ako napr. prút, tyč, nosník, stĺp, hriadeľ, páka, doska, stena a pod. Prvky nosných konštrukcií podľa ich tvaru najčastejšie delíme na:

- **prútové prvky** (prút, trám, nosník, tyč, stĺp, páka, hriadeľ),
- **plošné prvky** (stena, doska, škrupina),
- **priestorové prvky - telesá** (idealizácia objektu prostredníctvom dokonale tuhého telesa).

Zobrazenie základných typov nosných prvkov a nosných konštrukcií a ich mechanické modely sú uvedené na Obr.2.1. *Statická analýza* akéhokoľvek hmotného objektu obsahuje vždy riešenie:

- **statickej určitosti riešeného problému a tzv. uvoľnenie objektu (telesá),**
- **rovnováhy vonkajších silových účinkov (akčných aj reakčných),**
- **rovnováhy vonkajších a vnútorných síl, určenie extrémov vnútorných síl, nebezpečné prierezy.**

V technickej praxi sa najčastejšie vyskytujú konštrukcie, kde sú základné nosné prvky tvorené prútovými prvkami s priamou alebo lomenou osou, veľmi často zaťažené a uložené v jednej rovine. Sú primárne určené na prenos silových účinkov v dôsledku ich priečneho zaťaženia a nazývame ich **nosníky**. Za nosník považujeme obvykle taký hmotný objekt, ktorého priečne rozmery sú oproti jeho dĺžke malé (prút, tyč).



Legenda: a – prút, b – doska, c – stena, d – oblúk, e – lomená (rámová) konštrukcia, f – priehradová (prútová) konštrukcia, g – mechanizmus.

Obr.2.1

Lomené nosníky, tzv. **rámy** sú konštrukcie, zložené z priamych prútov medzi sebou tuho spojených (t.j. uhol medzi osami prútov v ich spojeniach sa ani po zaťažení významne nemení). Spojnica ťažísk ich priečných prierezov tvorí lomenú, neuzatvorenú čiaru. V statike nosník ako prútový prvok znázorňujeme iba prostredníctvom zobrazenia jeho tzv. **strednice**, predstavujúcej spojnicu ťažísk jeho priečných prierezov.

2.1. Základné úlohy a princípy statiky

Statika je najstaršia časť mechaniky telies a niektoré z jej základných princíпов a poznatkov boli známe a využité už pri stavbe egyptských pyramíd. Už vieme, že pri statickej analýze návrhu zaťaženia príp. statickom posudzovaní rovnováhy síl v mechanike telies je objekt nahradený mechanickým a neskôr matematickým modelom. V nich je potrebné zaviesť všetky uvažované zaťaženia, predstavujúce silové účinky od okolitých telies a silových polí na objekt a budeme ich nazývať **silová sústava**, príp. **sústava síl**.

Základnou úlohou statiky je riešenie **statickej rovnováhy telies**, t.j. rovnováhy silových účinkov pôsobiacich na telesá, ako hmotné objekty. V súvislosti s riešením rovnováhy silových sústav je často potrebné riešiť aj otázky tzv. **statickej ekvivalencie** (rovnocennosti, náhrady) pôsobiacich silových účinkov. Význam statickej ekvivalencie pri riešení rovnováhy silových sústav je natoľko významný, že je často považovaný za ďalšiu základnú úlohu statiky. Podľa toho definujeme dve základné úlohy statiky a to:

1. Riešenie statickej rovnováhy	2. Riešenie statickej ekvivalencie
<i>Sústava síl je v stave statickej rovnováhy, ak svojim pôsobením nemení pohybový stav hmotného objektu (v statike sa teleso nachádza v stave pokoja, nepohybuje sa).</i>	<i>Dve rôzne sústavy síl sú staticky ekvivalentné, ak vyvolávajú rovnakú zmenu pohybového stavu hmotného objektu (t.j. majú na teleso rovnaký pohybový účinok)</i>

Inak povedané, úlohou statiky je riešenie rovnováhy alebo nahradenia silových účinkov pôsobiacich na prvky rozličných technických systémov. Statika sa však zaoberá iba prípadmi, keď sa teleso nachádza v stave pokoja alebo sa rovnomerne priamočiaro pohybuje. Objektívnu realitu zjednodušujeme uvažovaním tzv. **dokonalé tuhého telesa** (DTT), ktoré je však iba zjednodušením (idealizáciou) vlastností skutočného telesa, ktoré je vždy poddajné - deformovateľné.

Statika je náuka o telesách v pokoji. Je to časť technickej mechaniky, zaoberajúca sa podmienkami rovnováhy a podmienkami nahradenia silových sústav, pôsobiacich na hmotné objekty.

Úlohou statiky je posúdenie riešiteľnosti mechanického modelu, definovanie adekvátnych podmienok statickej rovnováhy a prvotné hrubé posúdenie parametrov zaťaženia, príp. únosnosti nosných prvkov.

Statickým riešením obvykle rozumieme určenie väzbových reakcií z prislúchajúceho počtu podmienok rovnováhy (napr. troch podmienok pre objekt v rovine, zaťažený všeobecne usporiadanou rovinnou sústavou síl). Analýzou vonkajších a vnútorných silových účinkov na nosníkoch s priamou alebo lomenou osou, resp. tzv. priehradových nosníkov sa budeme detailnejšie zaoberať v kapitolách 4 a 5.

Pri riešení statickej rovnováhy a ekvivalencie silových sústav využívame dva základné princípy a to:

1. Princíp proporcionality

Veľkosti sekundárnych síl (väzbových reakcií) sú lineárne funkcie veľkosti primárnych (akčných) zaťažujúcich síl.

Napríklad, ak na teleso pôsobí sila F_1 , potom v dotykovom mieste telesa s iným telesom vzniká reakcia (sekundárna sila) A , pre veľkosť ktorej platí $A = f(F_1)$. Znamená to, že ak by sa veľkosť akčnej sily F_1 zmenila na $F_1 = k \cdot F_1$, zmenila by sa aj veľkosť reakcie na $A = f(k \cdot F_1)$.

2. Princíp superpozície

Väzbové reakcie pri zaťažení telesa viacerými silami je možné určiť superpozíciou (t.j. zložením účinkov) čiastkových reakcií pri zaťažení telesa jednotlivými silami.

Predpokladajme napríklad, že pri pôsobení sily F_1 na teleso vo väzbách telesa vzniknú reakcie A_1, B_1 a pri pôsobení sily F_2 na teleso vo väzbách telesa vzniknú reakcie A_2, B_2 . Pri súčasnom pôsobení síl F_1 a F_2 na teleso vzniknú vo väzbách telesa reakcie $A = A_1 + A_2$ a $B = B_1 + B_2$.

Pri riešení úloh v statike (rovnako ako aj v celej mechanike telies) môžeme vo všeobecnosti využiť metódy *analytické (výpočtové), grafické, kombinované (graficko-výpočtové)* alebo v poslednej dobe preferované a softvérovými riešeniami podporované metódy *numerické*. V učebnom texte budeme hlavnú pozornosť sústrediť najmä na princípy a aplikáciu analytických metód. Postupy grafické alebo numerické budú uvedené iba v minimálne nutnom rozsahu.

2.2. Sila a jej účinky na hmotný objekt

Sila (*angl. force*) je mierou vzájomného mechanického pôsobenia telies. Je to vektorová veličina, ktorá je definovaná svojou veľkosťou, smerom (zmyslom) a miestom pôsobenia. Obvykle ju označujeme veľkými tučnými písmenami: F, G, Q alebo označením v tvare $\vec{F}, \vec{G}, \vec{Q}, \dots$

2.2.1. Sila a jej charakteristika

Sila vzniká vzájomným pôsobením hmotných objektov (telies). Je prejavom hmoty, príčinou zmeny pohybového stavu, čo do jej veľkosti a smeru, ale je aj primárnou príčinou pretvorenia telies. Veľkosť sily, ako fyzikálneho účinku vyvolávajúceho pohyb telesa, je určená už známym vzťahom (1.3) v tvare

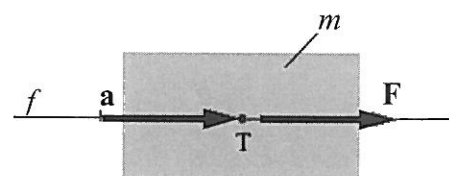
$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad [\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]. \quad (2.1)$$

Podľa uvedeného Newtonovho zákona sily platí, že teleso hmotnosti m sa pôsobením sily F pohybuje zrýchlením a . Vektorové veličiny - sila F [N] a zrýchlenie a [$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$] sú rovnobežné (Obr.2.2) a ležia na spoločnej vektorovej priamke f , tzv. **nositeľke sily**. Hovoríme, že obidva vektory sú **kolineárne**.

Sila ako vektorová veličina je viazaná k svojej nositeľke f_F . Ako bude neskôr preukázané, pôsobisko sily môžeme v statike po jej nositeľke ľubovoľne posunúť, pričom sa jej výsledný pohybový účinok na hmotný objekt nezmení.

Typickým príkladom silového pôsobenia je napr. tiaž telesa G , t.j. sila, ktorou je teleso priťahované k Zemi. Jej veľkosť je daná súčinom hmotnosti telesa m a gravitačného zrýchlenia g a platí

$$G = m \cdot g \quad [\text{N}]. \quad (2.2)$$



Obr.2.2

Veľkosť sily je veličina skalárna, t.j. nie je závislá na zmene vzťažného súradnicového systému a je rovná absolútnej hodnote vektora sily. Platí

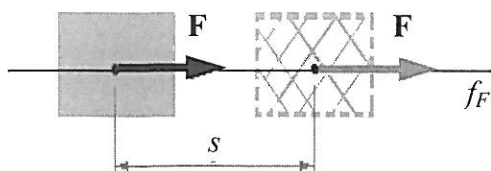
$$F = |\mathbf{F}| = m \cdot |a| = m \cdot a \quad [\text{N}]. \quad (2.3)$$

Ako sme už uviedli, základnou jednotkou veľkosti sily je **Newton** ($1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). V praxi pre vyjadrenie skutočnej veľkosti sily často využívame násobné jednotky, napr. $1\text{kN} = 10^3\text{N}$, $1\text{MN} = 10^6\text{N}$.

- **Mechanická práca W** (*angl. work*) **vykonaná silou F** je podľa Obr.2.3 definovaná vzťahom v tvare

$$W = F \cdot s. \quad [J = \text{N} \cdot \text{m}] \quad (2.4)$$

Jednotkou mechanickej práce je **1 Joule** [J]. Prácu o veľkosti 1 J vykoná sila s veľkosťou 1 N na dráhe 1 m .



Obr.2.3

- **Výkon P** (angl. power) **od sily F** je definovaný ako mechanická práca W vykonaná silou F za určitý čas t

$$P = W / t \quad [W = J \cdot s^{-1}]. \quad (2.5)$$

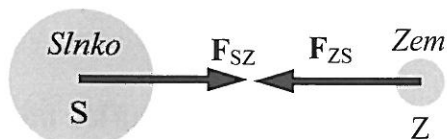
Jednotkou výkonu je **1 Watt [W]** a predstavuje prácu o veľkosti 1 Joule [J] vykonanú za 1 sekundu [s].

2.2.2. Účinok sily na dokonale tuhé teleso

Silový (pohybový) účinok, vyvolaný pôsobením jednej alebo viacerých síl, môže byť realizovaný buď bez vzájomného styku telies alebo prostredníctvom vzájomného styku telies.

- **Bez vzájomného styku telies** (Obr.2.4)

Príkladom interaktívneho pôsobenia telies bez vzájomného styku je napr. interakcia silového pôsobenia *Slnka S* (sila F_{SZ}) a *Zeme Z* (sila F_{ZS}).

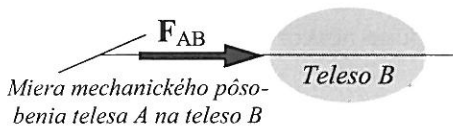
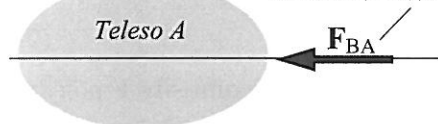


Obr.2.4

Na základe zákona akcie a reakcie sú interakčné sily vyplývajúce zo vzájomného pôsobenia rovnako veľké a platí $F_{SZ} = -F_{ZS}$. Akcia leží s reakciou na jednej nositeľke, je rovnako veľká, ale opačne orientovaná.



Miera mechanického pôsobenia
teleso B na teleso A



Miera mechanického pôso-
benia telesa A na teleso B

Obr.2.5

- **Vzájomným stykom telies (bod / plocha)** (Obr.2.5)

Príkladom vzájomného pôsobenia telies na základe ich styku je napr. interaktívne mechanické pôsobenie *Telesa A* (sila F_{AB}) a *Telesa B* (sila F_{BA}). Miera mechanického pôsobenia *Telesa B* na *Teleso A* je vyjadrená silou F_{BA} , analogicky miera mechanického pôsobenia *Telesa A* na *Teleso B* je vyjadrená vo forme sily F_{AB} . Aby boli obidve telesá v stave statickej rovnováhy musí platiť rovnosť v tvare $F_{BA} = F_{AB}$.

Vo všeobecnosti môže byť účinok sily:

- **statický** – sily sa navzájom rušia, nevzniká pohyb, ale vzniká pretvorenie telesa. Hovoríme o **deformačnom účinku sily**,
- **dynamický** – sily uvedú hmotný objekt do pohybu a ich účinok sa prejaví iba premiestnením, t.j. pohybom objektu v priestore. Hovoríme o **posuvnom alebo otáčavom účinku sily**.

Sila môže mať na hmotný objekt iba posuvný (translačný) účinok (PÚ) alebo otáčavý (rotačný) účinok (OÚ).

- **Posuvný účinok sily** je charakterizovaný veľkosťou osamelej sily F , resp. výslednice R sústavy síl a je ku každému bodu telesa rovnaký. Výsledkom je posunutie telesa v smere pôsobiacej sily.

Znamienková dohoda:

$\oplus$ posuvný účinok sily je uvažovaný v **smere kladných poloosí** vzťažného súradnicového systému;

$\ominus$ posuvný účinok sily je v **smere záporných poloosí** zvoleného súradnicového systému.

- **Otáčavý účinok sily** je charakterizovaný buď momentom M od pôsobenia osamelej sily F vzhľadom k zvolenému bodu príp. osi alebo momentom M od vplyvu silovej dvojice $F, -F$ a platí:

Veľkosť otáčavého účinku od osamelej sily F je k rôznym bodom telesa rôzna, naopak veľkosť otáčavého účinku od silovej dvojice je ku všetkým bodom telesa rovnaká.

Znamienková dohoda:

$\oplus$ moment je **ľavotočivý** $\curvearrowright$ (t.j. $+M$ = otáčanie proti smeru pohybu ručičiek hodín),

$\ominus$ moment je **pravotočivý** $\curvearrowleft$ (t.j. $-M$ = otáčanie v smere pohybu ručičiek hodín).

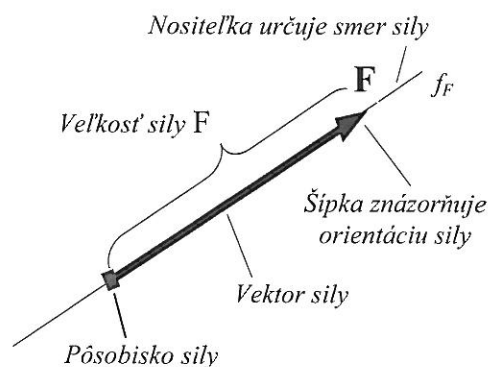
Z uvedeného vyplýva, že sila má vzhľadom na všetky body jej nositeľky iba posuvný účinok, ale vzhľadom ku ostatným bodom v rovine jej pôsobenia (t.j. na hmotnom objekte, ako aj mimo neho) môže mať nielen posuvný, ale aj otáčavý účinok.

2.2.3. Definovanie sily v rovine a v priestore

Sila je fyzikálna veličina charakteru vektora. Je preto úplne zadaná iba vtedy, ak sú známe informácie nielen o jej veľkosti, ale aj mieste (pôsobisko), smere (smerový uhol), príp. zmysle jej pôsobenia (Obr.2.6).

- **Veľkosť sily** – množstvo (intenzita) pôsobiacich silových jednotiek; definovaná ako skalárna veličina.
- **Smer sily** – priamka, po ktorej sa môže sila pohybovať; obvykle určený tzv. *smerovým uhlom*.
- **Zmysel sily** – orientácia sily na nositeľke (znamienko, príp. šípka); zrejmy aj zo smerového uhla.
- **Pôsobisko sily** – miesto na hmotnom objekte, v ktorom sila bezprostredne na objekt pôsobí.

Silu, ako vektorovú veličinu, môžeme uvažovať ako vektor umiestnený v rovine alebo v priestore.



Obr.2.6

- **Silu v rovine** (Obr.2.7) rozkladáme do dvoch vektorových zložiek F_x a F_y (najčastejšie v smere osí zvoleného súradnicového systému) pričom platí:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j} \quad (2.6)$$

kde F_x, F_y sú veľkosti priemetov sily $\mathbf{F}$ do smerov súradnicových osí x, y a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ sú tzv. *bázové jednotkové vektory*.

Zložky F_x a F_y volíme najčastejšie navzájom kolmé a môžu byť orientované v smere kladných, resp. záporných poloosí x alebo y . Ich veľkosť (môže byť aj nulová!!) určíme podľa Obr.2.7 a platí

$$\begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \alpha \\ F_y &= F \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \beta \end{aligned} \quad (2.7)$$

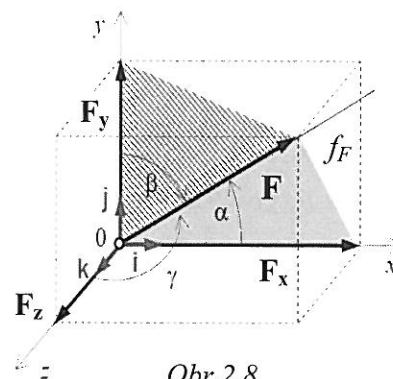
kde α je tzv. **smerový uhol**, ktorý zvierajú nositeľka sily f_F s kladným smerom osí x , β je uhol medzi nositeľkou f_F a osou y . Veľkosť sily $\mathbf{F}$ môžeme určiť zo zložiek F_x a F_y napr. z Pythagorovej vety a platí

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.8)$$

- **Silu v priestore** (Obr.2.8) rozkladáme do troch, obvykle navzájom kolmých, vektorových zložiek F_x, F_y, F_z a analogicky s rovinným prípadom platí

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j} + F_z \cdot \mathbf{k} \quad (2.9)$$

kde F_x, F_y, F_z sú skalárne zložky, ako veľkosti priemetov sily $\mathbf{F}$ do smeru osí x, y, z a vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sú bázové jednotkové vektory.



Obr.2.8

Pre veľkosť zložiek sily $\mathbf{F}$ uvažovanej v priestore platí

$$F_x = F \cdot \cos \alpha ; F_y = F \cdot \cos \beta ; F_z = F \cdot \cos \gamma , \quad (2.10)$$

kde uhly α, β, γ sú smerové uhly nositeľky sily f_F vzhľadom k príslušným súradnicovým osiam x, y, z .

Veľkosť sily, analogicky s rovinným prípadom, môžeme určiť prostredníctvom vzťahu

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} . \quad (2.11)$$

Zo vzťahu 2.10 pre kosínusy smerových uhlov platí

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}, \quad (2.12)$$

pričom pre uhly α, β, γ musí vždy platiť - tzv. goniometrická jednotka, definovaná v tvare

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Je teda zrejmé, že smerové uhly α, β, γ nemôžu mať ľubovoľnú veľkosť. Platí, že dvoma z nich je vždy určený uhol tretí a pre súčet smerových uhlov musí vždy platiť $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

V prípade, ak na teleso pôsobí dve a viac síl, zložky ich náhradnej sily – tzv. **výslednice (resultanty) $\mathbf{R}$** , získame vektorovým súčtom príslušných zložiek všetkých síl. Napr. pre sústavu „ n “ síl v rovine dostaneme

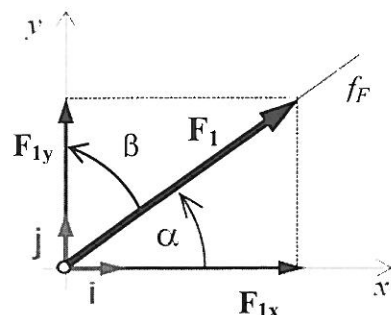
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y = R_x \cdot \mathbf{i} + R_y \cdot \mathbf{j} \quad (2.13)$$

a pre veľkosti zložiek výslednej sily $\mathbf{R}$ platí $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$, $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$, pre všetky $i=1, 2, \dots, n$. (2.14)

Pre sústavu síl v priestore platí postup určenia výslednice analogicky (t.j. skladáme 3 zložky sily $\mathbf{R}$).

Pri grafickom vyjadrení - silu $\mathbf{F}$ ako vektorovú veličinu - znázorňujeme vo forme orientovanej úsečky, zakreslenej vo vhodne zvolenej mierke s ohľadom na zadanú veľkosť sily. Takto znázornenú silu nazývame **zobrazovací úsek sily** a označuje sa $\bar{\mathbf{F}}$. Objasneniu základných operácií so silami – ako je *skladanie*, *rozkladanie*, *preloženie* alebo *nahradenie sily* – budeme venovať pozornosť neskôr.

Príklad 2.1: Zakreslite sily $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ a pomocou goniometrických funkcií určite veľkosť ich zložiek F_{ix}, F_{iy} , pôsobiacich v smere súradnicových osí x, y . Zadané: $\mathbf{F}_1(30, 20; 40^\circ; 500 \text{ N})$, $\mathbf{F}_2(0; 0; 0; 50^\circ; 60^\circ; 70^\circ; 500 \text{ N})$.



Obr.2.9 a

Riešenie:

Zložky sily $\mathbf{F}_1$:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 40^\circ = 500 \cdot 0,766 \approx 383 \text{ N} \quad (= F_1 \cdot \sin \beta)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 500 \cdot \sin 40^\circ = 500 \cdot 0,643 \approx 321,4 \text{ N} \quad (= F_1 \cdot \cos \beta)$$

Výsledok: $F_{1x}(30, 20; 0^\circ; 383 \text{ N})$,
 $F_{1y}(30, 20; 90^\circ; 321,4 \text{ N})$

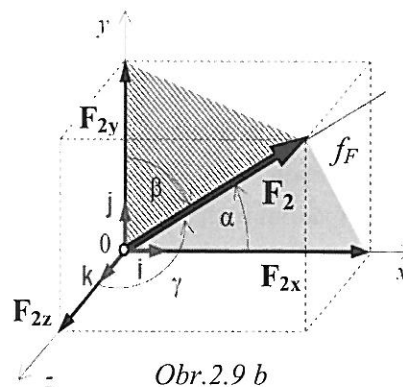
Zložky sily $\mathbf{F}_2$:

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 50^\circ = 500 \cdot 0,642 \approx 321,4 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta = 500 \cdot \cos 60^\circ = 500 \cdot 0,5 = 250 \text{ N}$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma = 500 \cdot \cos 70^\circ = 500 \cdot 0,342 \approx 171 \text{ N}$$

Výsledok: $F_{2x}(0, 0, 0; 0^\circ; 321,4 \text{ N})$, $F_{2y}(30, 20; 90^\circ; 250 \text{ N})$,
 $F_{2z}(30, 20; 0^\circ; 171 \text{ N})$



Obr.2.9 b

2.2.4. Statický moment sily

Už vieme, že sila môže vyvolať nielen posuvný účinok, ale aj účinok otáčavý (rotačný). Otáčavý účinok sily vzniká vzhľadom na ľubovoľný bod telesa v rovine / priestore iba vtedy, ak neleží na nositeľke f_F pôsobiacej sily F . Podľa obr.2.10 pôsobí sila F na hmotný objekt v bode A , ktorý sa môže okolo bodu O otáčať. Bolo preukázané, že výsledný otáčavý účinok od pôsobenia sily F bude tým väčší, čím väčšie budú sila F , ako aj najkratšia – kolmá – vzdialenosť p jej nositeľky f_F od bodu O .

• Veľkosť momentu sily

V mechanike pevných telies vyjadrujeme otáčavý účinok sily F obvykle vo forme tzv. **statického momentu sily** M . Ten môže byť definovaný vzhľadom k bodu alebo k osi. Statický moment sily M je vektorová veličina a môže mať kladný alebo záporný zmysel (podľa znamienkovej dohody).

Výsledný otáčavý účinok od sily F vzhľadom k zvolenému bodu otáčania môžeme vyjadriť vektorovým súčinom v tvare

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

kde $\mathbf{r}$ je tzv. polohový vektor pôsobiska sily F vzhľadom k bodu otáčania (napr. bod O podľa Obr.2.10).

Veľkosť momentu M od sily F potom získame ako výsledok vektorového súčinu (2.15) a dostaneme

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot p, \quad (2.16)$$

kde α je uhol, ktorý zvierajú nositeľky vektorov $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$, vychádzajúcich z jedného bodu a p je najkratšia, kolmá vzdialenosť nositeľky sily f_F od určeného bodu otáčania O - tzv. **rameno sily**. Základný vzťah pre určenie veľkosti statického momentu sily má potom tvar

$$M = F \cdot p \quad [\text{N.m}] \quad (2.17)$$

kde p predstavuje už uvedené rameno sily a bod O reprezentuje tzv. **momentový bod** (často aj **bod otáčania**). Základnou jednotkou momentu sily je **1 N.m (Newtonmeter)**. Platí $\text{N.m} = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$.

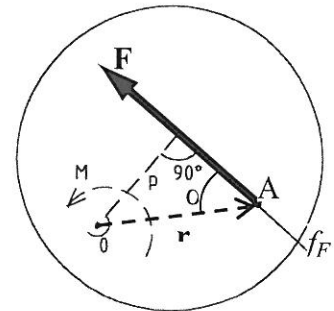
Na základe doteraz uvedených skutočností môžeme vysloviť nasledovné tvrdenia:

- **Mierou otáčavého účinku sily F okolo zvoleného bodu otáčania O je statický moment sily M , definovaný práve k tomuto bodu.**
- **Statický moment M od sily F je rovný súčinu veľkosti pôsobiacej sily F a najkratšej (kolmej) vzdialenosti p medzi momentovým bodom otáčania a nositeľkou sily f_F .**
- **Moment sily M vzhľadom na bod je tzv. viazaný vektor, čo znamená, že tá istá sila má k rôznym bodom v rovine / priestore iný otáčavý účinok.**

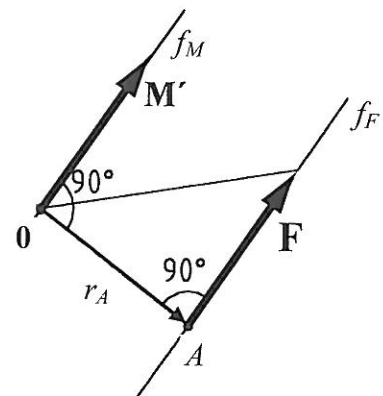
• Zmysel momentu sily

Už vieme, že aj moment sily M (rovnako ako sila F) je vektorová veličina, ktorej nositeľka f_M je kolmá na rovinu tvorenú nositeľkou sily F (f_F) a polohovým vektorom $\mathbf{r}_A$ pôsobiska sily (bod A). Podľa Obr.2.11 môžeme vysloviť tvrdenie, že **statickému momentu M od sily F vzhľadom k bodu O je možné priradiť vektor M' pôsobiaci v bode otáčania O , ktorého smer je kolmý na rovinu tvorenú nositeľkou sily f_F a polohovým vektorom $\mathbf{r}_A$ pôsobiska sily (bod A).**

Podľa pravidla pravej ruky platí: zmysel momentu M považujeme za kladný, ak polohový vektor $\mathbf{r}_A$ a sila F tvoria ľavotočivý systém (t.j. proti pohybu hodinových ručičiek), inak je zmysel momentu M záporný.



Obr. 2.10



Obr. 2.11

Grafické vyjadrenie dohody pre zmysel momentov:

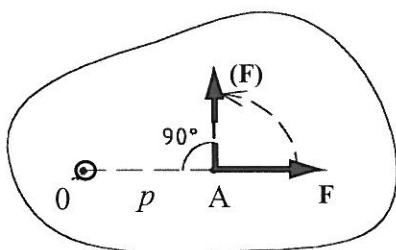
$M \curvearrowright +$
(proti smeru chodu hodín)

$M \curvearrowleft -$
(v smere chodu hodín)

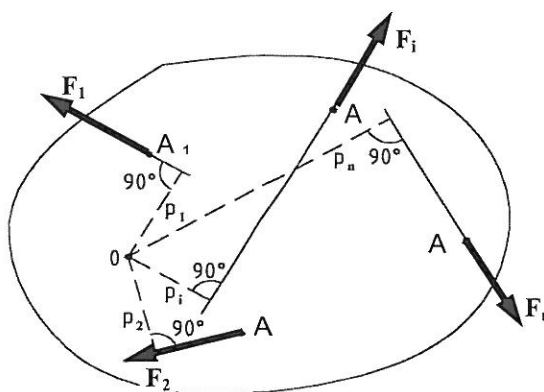
Neskôr preukážeme (Príklad 2.4), že otáčavý účinok od osamelej sily F k ľubovoľnému bodu, ležiacemu na jej nositeľke (tam leží aj pôsobisko sily), je nulový. Vtedy sila nemá na teleso žiadny otáčavý účinok, ale vzhľadom k bodu na nositeľke sily má iba posuvný účinok, závislý iba od veľkosti a smeru sily.

Z doteraz uvedených poznatkov a definície statického momentu sily vyplývajú nasledovné tvrdenia:

- Sila F má na teleso nulový otáčavý účinok práve vtedy, keď jej nositeľka f_F prechádza zvoleným momentovým bodom (obr.2.12). V tomto prípade: $p = 0 \Rightarrow M_{\min} = F \cdot p = 0$.
- Maximálny moment od sily F vzniká vtedy, keď je sila F kolmá na spojnicu $\overline{OA}$, t.j. keď je rameno sily p najväčšie možné (obr.2.12). Vtedy platí: $p = (\max) \Rightarrow M_{\max} = F \cdot \overline{OA} = F \cdot p_{\max}$.



Obr. 2.12



Obr. 2.13

V prípade, keď na hmotný objekt pôsobí viac síl – tzv. *sústava síl* (obr.2.13) je výsledný otáčavý účinok okolo bodu O určený algebrickým súčtom otáčavých účinkov M_i od pôsobenia jednotlivých síl F_i a platí

$$M = F_1 \cdot p_1 - F_2 \cdot p_2 + \dots - F_n \cdot p_n = \sum_1^n F_i \cdot p_i = \sum_1^n M_i. \quad (2.18)$$

Podmienka rovnováhy otáčavých účinkov pôsobiacich na otočne uložené teleso má potom tvar

$$M = \sum M_i = \sum F_i p_i = 0. \quad (2.19)$$

Doteraz, v snahe čo najjednoduchšie objasniť otáčavý účinok sily, sme predpokladali, že pre výpočet veľkosti a zmyslu otáčavého účinku, vyjadreného statickým momentom sily M , bola vždy známa nielen veľkosť sily F , ale aj veľkosť ramena sily p . **Výpočet veľkosti ramena sily p je však v praktických aplikáciách často teoreticky náročný a problematický.**

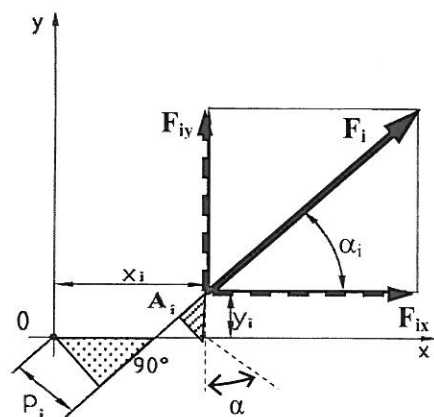
V praktických aplikáciách sú úlohy často zadané všeobecnejšie. Poznáme napr. iba F_i , α_i , $A_i(x_i, y_i)$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Na základe obr.2.14 je nižšie dokázané, že pre rameno p_i sily F_i platí

$$p_i = x_i \cdot \sin \alpha_i - y_i \cdot \cos \alpha_i. \quad (2.20)$$

Dosadením (2.20) do (2.18) dostaneme

$$M_i = F_i \cdot p_i = F_i \cdot (x_i \cdot \sin \alpha_i - y_i \cdot \cos \alpha_i) \Rightarrow M_i = x_i \cdot F_i \cdot \sin \alpha_i - y_i \cdot F_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$M_i = x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}. \quad (2.21)$$



Obr. 2.14

Dosadením do (2.21) za hodnoty súradníc x_{Ai} a y_{Ai} pôsobiska sily (bod A) a zložiek sily F_{ix} a F_{iy} s ohľadom na ich znamienka (+, -) dostaneme výslednú veľkosť a zmysel otáčavého účinku od sily F podľa prijatej znamienkovej dohody (+ ↺) resp. (- ↻).

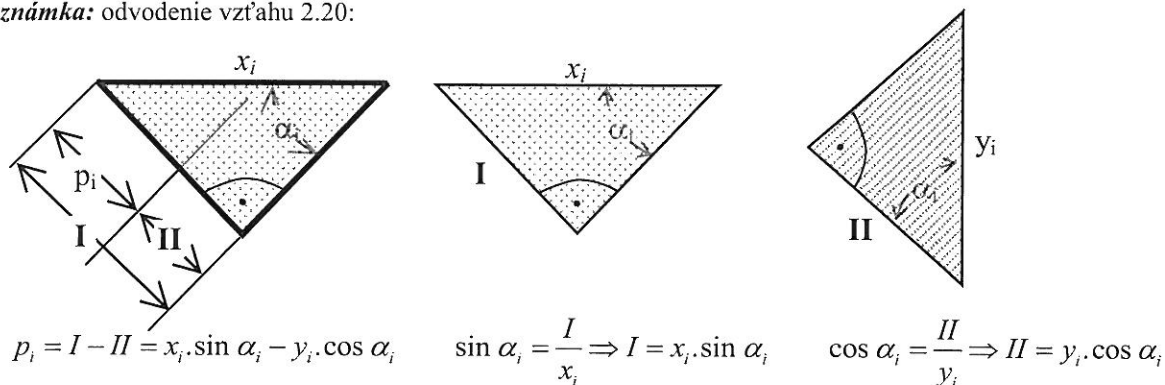
Výsledný otáčavý účinok od všetkých síl pôsobiacich na hmotný objekt, určený vzhľadom k ľubovoľne zvolenému bodu otáčania, môžeme potom definovať rovnicou v tvare

$$M = \sum M_i = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}), \quad (2.22)$$

ktorá je v statike známa ako **Varignonova momentová veta**. Jej slovná formulácia znie nasledovne:

Statický moment výslednice sústavy síl k ľubovoľnému bodu je rovný algebrickému súčtu statických momentov od zložiek všetkých síl sústavy, určených k tomu istému momentovému bodu (bodu otáčania).

Poznámka: odvodenie vzťahu 2.20:



Príklad 2.2: Určite veľkosť a zmysel otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodu O . Zadané: $F=500 \text{ N}$, $\alpha=30^\circ$, $|r_A| = 2 \text{ m}$ (Obr.2.15).

Riešenie:

Pre statický moment sily F vzhľadom k bodu O platí vektorová rovnica (2.15), príp. jej skalárny zápis (2.16) v tvare

$$M = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot r_A \cdot \sin \alpha \Rightarrow M = F \cdot p \text{ [Nm]}.$$

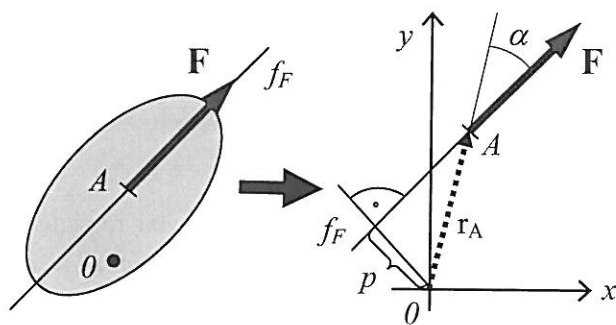
kde r_A je polohový vektor pôsobiska sily (bod A), vyjadrujúci polohu bodu A od počiatku súradnicového systému, stotožneného s bodom O (tzv. *stred otáčania*) a p je *rameno sily* v [m].

Zatiaľ však nepoznáme hodnotu p , pre ktorú podľa Obr.2.15 platí

$$\sin \alpha = \frac{p}{r_A} \Rightarrow p = r_A \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow p = 1 \text{ m}$$

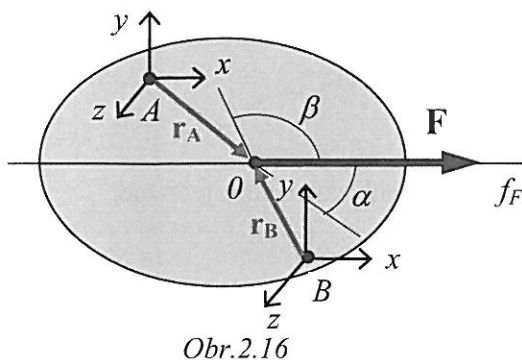
Veľkosť výsledného otáčavého účinku (momentu M) sily F vzhľadom k bodu O je určená súčinom veľkosti sily F a ramena sily p , ako kolmej vzdialenosti medzi nositeľkou sily f_F a bodom otáčania O . Po dosadení dostávame:

- veľkosť otáčavého účinku: $M = |M| = F \cdot p = 500 \cdot 1 \Rightarrow |M| = 500 \text{ Nm}$,
- zmysel otáčavého účinku: sila F otáča telesom v smere pohybu hodinových ručičiek, t.j. podľa dohody má znamienko mínus $\Rightarrow M = -500 \text{ Nm}$.



Obr.2.15

Príklad 2.3: Na hmotnom objekte určite veľkosť a zmysel otáčavého účinku od sily F vzhľadom k bodom A a B (Obr.2.16). Zadané: $F=500\text{ N}$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=110^\circ$, $|r_A|=0,2\text{ m}$, $|r_B|=0,3\text{ m}$.



Obr.2.16

Riešenie:

• **Moment sily k bodu A:** smer polohového vektora r_A a smer vektora sily F , usporiadané vektorovo za sebou, vytvárajú ľavotočivý systém (t.j. proti smeru pohybu ručičiek hodín). Na základe pravidla „palca pravej ruky“ uvažujeme tzv. jednotkový vektor e_A , určujúci zmysel otáčavého účinku, v tomto prípade za kladný (palec nahor $\Rightarrow e_A = +1$).

Zmysel otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodu A preto uvažujeme ako **kladný (+)** a platí $M_A = r_A \times F = e_A \cdot M_A = +1 \cdot M_A$

Pre veľkosť otáčavého účinku od sily F vzhľadom k bodu A potom platí

$$M_A = e_A \cdot M_A = +1 \cdot F \cdot |r_A| \cdot \sin \alpha = +F \cdot |r_A| \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow \text{zmysel } \curvearrowright$$

a po dosadení dostaneme $M_A = F \cdot |r_A| \cdot \sin \alpha = 500 \cdot 0,2 \cdot 0,866 \Rightarrow M_A \cong +86,6\text{ Nm}$

• **Moment sily k bodu B:** usporiadanie vektora r_B a vektora F vytvára pravotočivý systém dvoch vektorov (v smere pohybu hodinových ručičiek). Moment sily F k bodu B má podľa znamienkovej dohody preto zmysel **záporný (-)** a analogicky platí $M_B = r_B \times F = e_B \cdot M_B$

Nakoľko $e_B = -1$ (palec smeruje nedol) pre veľkosť otáčavého účinku sily F k bodu B platí

$$M_B = e_B \cdot M_B = -1 \cdot F \cdot |r_B| \cdot \sin \beta = -F \cdot |r_B| \cdot \sin \beta \quad \Rightarrow \text{zmysel } \curvearrowleft$$

a po dosadení dostaneme $M_B = -F \cdot |r_B| \cdot \sin \beta = -500 \cdot 0,3 \cdot 0,9396 \Rightarrow M_B \cong -140,6\text{ Nm}$.

Záver: Zmysel momentu M považujeme za kladný, ak polohový vektor r_A a sila F tvoria ľavotočivý systém (t.j. proti pohybu ručičiek hodín), inak je zmysel momentu M záporný (t.j. v smere pohybu ručičiek hodín).

Príklad 2.4: Definujte vzťahy pre určenie veľkosti a zmyslu otáčavých účinkov sily F k bodom A , B a C . Podľa Obr.2.17 ležia body aj sila F v jednej rovine, pričom bod C leží na nositeľke sily F .

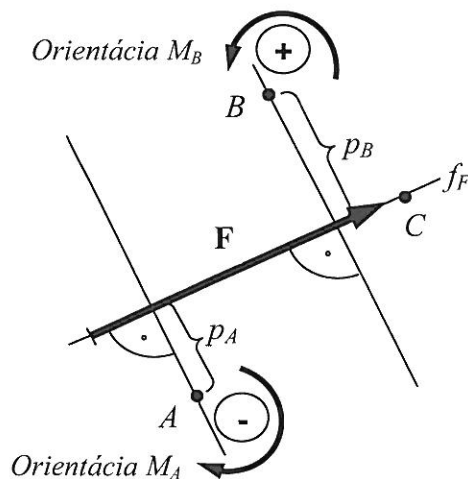
Riešenie:

• **Moment sily F k bodu A :** otáča na ramene sily p_A v smere pohybu hodinových ručičiek. Má teda zmysel pohybu záporný a platí $M_A = -p_A \cdot F$.

• **Moment sily F k bodu B :** otáča na ramene sily p_B proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Má preto zmysel pohybu kladný a platí $M_B = p_B \cdot F$.

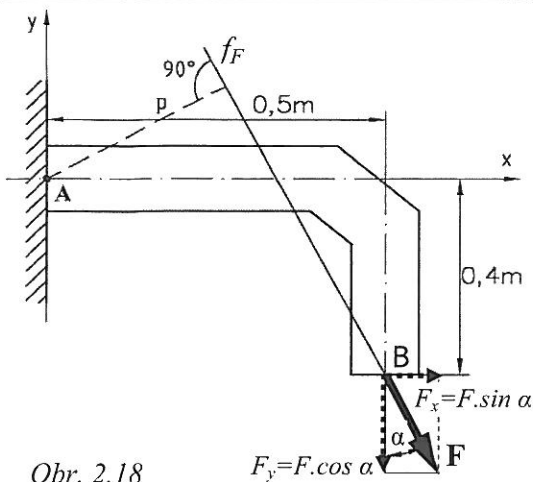
• **Moment sily F k bodu C :** bod C leží na nositeľke sily F a preto nie je medzi nositeľkou f_F a bodom C žiadne rameno sily. Keďže $p_C = 0$, bude výsledný momentový účinok sily F vzhľadom k bodu C nulový. Platí $M_C = p_C \cdot F = 0$, pretože $p_C = 0$.

Záver: Moment sily k ľubovoľnému bodu ležiacemu na jej nositeľke (tu leží aj pôsobisko sily) je rovný nule, t.j. sila má nulový otáčavý účinok. Sila má vzhľadom k tomuto bodu len posuvný účinok, závislý iba od veľkosti a smeru pôsobiacej sily.



Obr.2.17

Príklad 2.5: Na konzolovom nosníku určite moment sily F vzhľadom k bodu A . Zadané: $F=250\text{ N}$, $\alpha=30^\circ$, rozmery nosníka podľa obr.2.18.



Obr. 2.18

Riešenie:

a) Výpočet prostredníctvom určenia ramena sily p (2.20):

$$p_i = x_i \cdot \sin \alpha'_i - y_i \cdot \cos \alpha'_i \Rightarrow$$

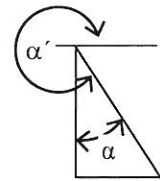
$$p = x_B \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) - y_B \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$$

Pre $\alpha = 30^\circ$ dostaneme

$$p = 0,5 \cdot \sin 300^\circ - (-0,4) \cdot \cos 300^\circ$$

$$p = 0,5 \cdot (-0,866) + 0,4 \cdot 0,5 \Rightarrow p = -0,633\text{ m}$$

$$M_A = F \cdot p = 250 \cdot -0,633 \Rightarrow M_A \cong -158,25\text{ Nm}$$



b) Výpočet prostredníctvom Varignonovej momentovej vety (2.22):

$$M_A = \sum M_{iA} = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \Rightarrow M_A = \sum (x_B \cdot F_y - y_B \cdot F_x)$$

$$M_A = x_B \cdot F_y - y_B \cdot F_x = 0,5 \cdot (-F \cdot \cos \alpha) - (-0,4) \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot (-0,5 \cdot \cos \alpha + 0,4 \cdot \sin \alpha)$$

$$M_A = 250 \cdot (-0,5 \cdot \cos 30^\circ + 0,4 \cdot \sin 30^\circ) \Rightarrow M_A \cong -158,25\text{ Nm} \quad (\text{tzn. v zmysle } \curvearrowright)$$

Poznámka: $-(F \cdot \cos \alpha) = F \cdot \sin \alpha' \Rightarrow -250 \cdot \cos 30^\circ = 250 \cdot \sin 300^\circ \Rightarrow -216,506 = -216,506$.

2.2.5. Statický moment silovej dvojice

Dve rovnobežné, nekolineárne (neležiace na tej istej nositeľke) a rovnako veľké sily opačného zmyslu tvoria tzv. silovú dvojicu.

Na obr.2.19 je znázornená silová dvojica, tvorená silami F_1 a F_2 , pre ktoré platí

$$F_2 = -F_1 \Rightarrow F_1 = F_2 = F, \quad \text{takže platí aj} \quad \sum F_i = F_1 + F_2 = F_1 + (-F_1) = 0 \quad (2.23)$$

Zo vzťahu (2.23) vyplýva, že **silová dvojica má výslednicu vždy rovnú nule**, t.j. nemá na teleso žiadny posuvný účinok, iba telesom otáča.

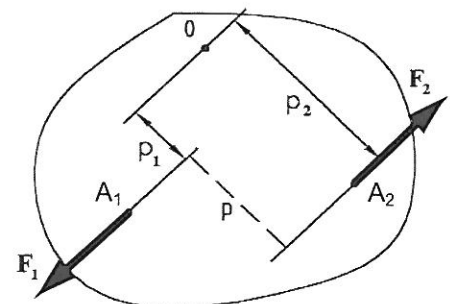
Statický momentový (otáčavý) účinok M od silovej dvojice vzhľadom k ľubovoľnému bodu (napr. bod O) však nulový nie je a pre jeho veľkosť platí

$$M = \sum M_i = \sum (F_i \cdot p_i) = -F_1 \cdot p_1 + F_2 \cdot p_2$$

$$M = F \cdot (p_2 - p_1) = F \cdot p$$

Pre veľkosť momentu silovej dvojice platí

$$M = F \cdot p \quad (2.24)$$



Obr. 2.19

kde p predstavuje v tomto prípade tzv. **rameno silovej dvojice**, určené najkratšou (kolmou) vzdialenosťou nositeľiek síl v silovej dvojici.

Vzťahy (2.24) a (2.17) sú totožné. Rozdiel je iba v uvažovaní hodnoty p (rameno sily resp. rameno silovej dvojice). Je nutné zdôrazniť, že **silová dvojica má na teleso iba otáčavý účinok**, a to rovnaký vzhľadom ku každému jednému bodu roviny - vyjadrený veličinou M – **momentom silovej dvojice**.

Zo vzťahu (2.24) vyplýva tvrdenie:

Moment silovej dvojice nezávisí na polohe momentového bodu, čo prakticky znamená, že je ku všetkým bodom rovnaký.

Účinok silovej dvojice obvykle znázorňujeme graficky, a to buď orientovaným oblúčikom s označením $\mathbf{M}$ alebo dvojicou síl, so spojením ich začiatkov (obr.2.20).

Ak na teleso pôsobí viac silových dvojíc súčasne – tzv. *sústava momentov* $\mathbf{M}_i$, ich výsledný otáčavý účinok je určený výsledným momentom $\mathbf{M}$, definovaným ako algebraický súčet jednotlivých otáčavých účinkov. Platí

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = \sum (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{p}_i). \quad (2.25)$$

Pre rovnováhu otáčavých účinkov sústavy silových dvojíc vzhľadom k ľubovoľnému bodu telesa (napr. pre bod O podľa obr.2.19) platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{p}_i) = 0, \quad (2.26)$$

ktorý môžeme slovne vyjadriť nasledovne:

Sústava silových dvojíc je v rovnováhe iba vtedy, keď je algebraický súčet momentov všetkých silových dvojíc k ľubovoľnému bodu telesa nulový.

Z definície a fyzikálnej podstaty silovej dvojice vyplývajú tvrdenia, priamo súvisiace s riešením statickej rovnováhy a ekvivalencie silových dvojíc. Platí:

- Silovú dvojicu možno v rovine ľubovoľne posunúť a natočiť.
- Silová dvojica môže byť v rovnováhe iba s inou silovou dvojicou. Rovnováha nastáva vtedy, keď jeden otáčavý účinok ($\overline{M}$) je možné zrušiť rovnako veľkým otáčavým účinkom opačného zmyslu ($-\overline{M}$).
- Silovú dvojicu nemožno nahradiť jedinou silou, tzn. sila a silová dvojica nemôžu byť ekvivalentné, pretože moment sily k rozličným bodom roviny je rôzny, ale moment od pôsobenia silovej dvojice je ku všetkým bodom roviny rovnaký.
- Silovú dvojicu ($\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{p}_i$) je možné nahradiť ľubovoľnou inou dvojicou ($\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{p}_j$), keď je splnená podmienka v tvare $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{p}_j$ a zmysel ich otáčavého účinku je rovnaký.

2.2.6. Podmienky statickej rovnováhy / ekvivalencie otáčavých účinkov sústav momentov

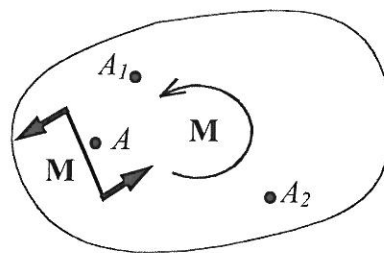
Z uvedených tvrdení vyplývajú aj podmienky statickej rovnováhy alebo ekvivalencie otáčavých účinkov dvoch sústav momentov. Pre sústavy momentov $\mathbf{M}_i$ a $\mathbf{M}_j$ (pre $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$) musí byť splnená rovnica statickej rovnováhy / ekvivalencie v tvare

$$\sum \mathbf{M}_i \pm \sum \mathbf{M}_j = 0, \quad (2.27)$$

kde znamienka v rovnici predstavujú: (-) pre ekvivalenciu, (+) pre rovnováhu oboch sústav síl.

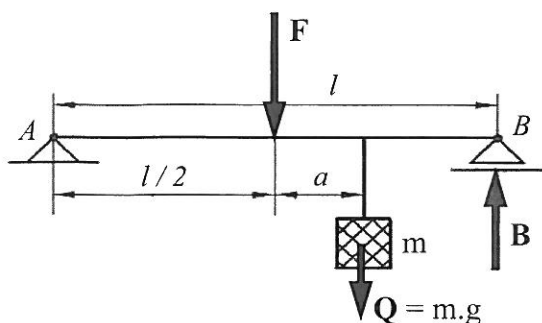
Z rovnice (2.27) vyplýva aj slovná interpretácia podmienky rovnováhy otáčavých účinkov v tvare:

Dve sústavy silových dvojíc sú v rovnováhe vtedy, keď algebraický súčet otáčavých účinkov od týchto silových dvojíc je rovný nule.



Obr. 2.20

Príklad 2.6: Určite veľkosť sily B , vznikajúcej v bode B nosníka s dĺžkou l , zaťaženého silou F a bremenom hmotnosti m (Obr.2.21). Zadané: $F=1 \text{ kN}$, $m=50 \text{ kg}$, $l=5 \text{ m}$, $a=1 \text{ m}$, $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$.



Obr. 2.21

Riešenie:

Pre nosník, otočne uložený v bode A (t.j. pevný kĺb) môžeme napísať tzv. rovnicu rovnováhy otáčavých účinkov od síl F , Q , B vzhľadom k bodu A v tvare

$$M_A = -F \cdot \frac{l}{2} - Q \cdot \left(\frac{l}{2} + a \right) + B \cdot l = 0.$$

Z rovnice rovnováhy otáčavých účinkov pre hľadajú veľkosť reakčnej sily B , vznikajúcej v bode B dostaneme

$$B \cdot l = \frac{1}{2} \left[F \cdot l + 2Q \left(\frac{l}{2} + a \right) \right] = 0 \Rightarrow B \cdot l = \frac{1}{2} [F \cdot l + Q(l + 2a)] = 0 \quad / \cdot \frac{1}{l}$$

$$B = \frac{F}{2} + Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l} \right) \approx \frac{F}{2} + Q \cdot \left(1 + \frac{2a}{l} \right).$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme $Q = m \cdot g = 50 \cdot 9,81 \Rightarrow Q = 490,5 \text{ N}$

$$B = \frac{F}{2} + Q \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{l} \right) = \frac{1000}{2} + 490,5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 500 + 343,35 \Rightarrow B = 843,35 \text{ N}$$

Záver: Sila B v podstate bráni pohybu (otáčaniu) uvoľneného nosníka, vznikajúceho od pôsobenia síl F a Q . Inak povedané, ak podperu nosníka (bod B) odoberieme – t.j. teleso uvoľníme – a odobranú pevnú väzbu nahradíme silovým účinkom B , nosník zostane v pokoji – a teda sa nebude okolo bodu A otáčať.

Príklad 2.7: Určite posuvný a otáčavý účinok dvoch rovnako veľkých, opačne orientovaných, síl F_1 a F_2 vzhľadom k bodom A , B , C . Sily ležia na paralelných nositeľkách f_{F_1} a f_{F_2} (Obr.2.22), ktorých kolmá vzdialenosť je p . Zadané: $F_1=F_2=10 \text{ kN}$, $p_{1A}=2 \text{ m}$, $p_{2A}=4 \text{ m}$

Riešenie:

• Posuvný účinok: $F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow$ žiadny posuvný účinok.

• Otáčavý účinok: $F_1 = F_2 = F = 10 \text{ kN}$

$$p = p_{2A} - p_{1A} = 4 - 2 \Rightarrow p = 2 \text{ m}$$

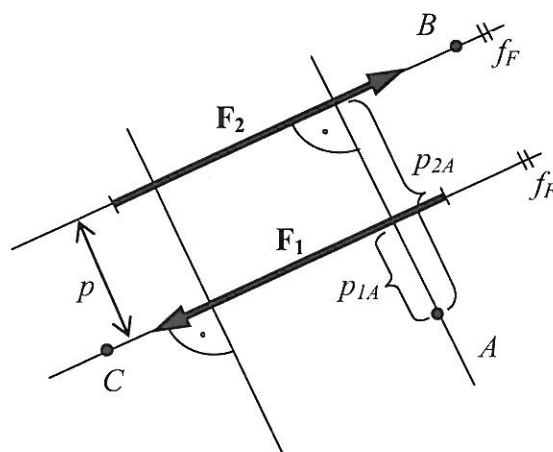
$$M_A = F_1 \cdot p_{1A} - F_2 \cdot p_{2A} = F \cdot (p_{1A} - p_{2A}) = F \cdot p \Rightarrow$$

$$M_A = F \cdot (p_{1A} - p_{2A}) = 10000 \cdot (2 - 4) = -20\,000 \text{ Nm}$$

$$M_B = -F_1 \cdot p = -F \cdot p = -10\,000 \cdot 2 = -20\,000 \text{ Nm}$$

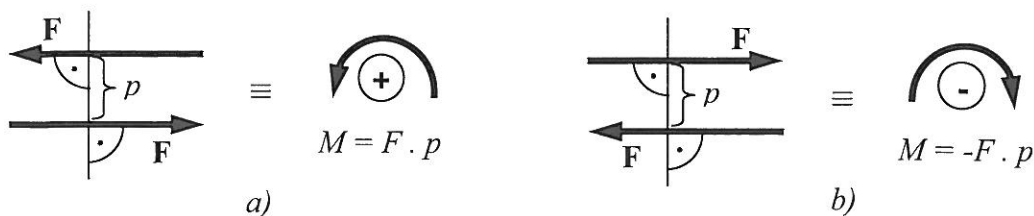
$$M_C = -F_2 \cdot p = -F \cdot p = -10\,000 \cdot 2 = -20\,000 \text{ Nm}$$

U silovej dvojice vždy platí $F_1 = F_2$, preto aj pre ľubovoľné body roviny musí platiť $M_A = M_B = M_C$.



Obr.2.22

Záver: Posuvný účinok silovej dvojice je nulový. Je potrebné zdôrazniť skutočnosť, že **silová dvojica má na teleso iba otáčavý účinok** a vyjadrujeme ho veličinou – **momentom silovej dvojice** M . Otáčavý účinok silovej dvojice je ku všetkým bodom telesa rovnaký. Jeho veľkosť je rovná súčinu veľkosti sily tvoriacej silovú dvojicu a kolmej vzdialenosti medzi nositeľkami dvojice síl. Orientácia momentu – zmysel otáčavého účinku – je závislá iba na orientácii silovej dvojice (Obr.2.22 a,b).



Obr.2.22 a,b

Príklad 2.8: Nahradte dvojicu síl $F_1, -F_1$ pôsobiacu v bodoch A, B inou dvojicou síl $F_2, -F_2$, pôsobiacou v bodoch C, D, ktoré majú smer podľa zadania. Zadané: $F_1 = 500 \text{ N}$, rozmery podľa obr.2.23.

Riešenie:

Otáčavý účinok dvojice síl $F_1, -F_1$ má veľkosť

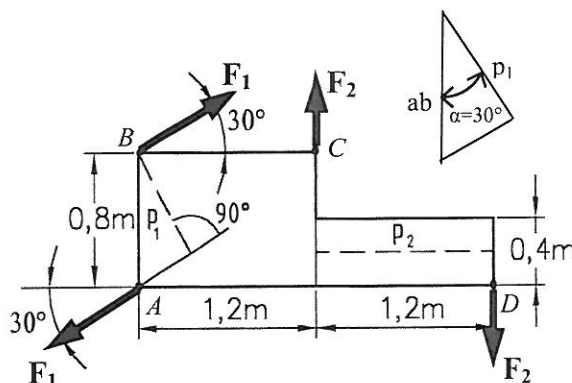
$$M_1 = F_1 \cdot p_1 = F_1 \cdot (\overline{AB} \cdot \cos \alpha) = 500 \cdot (0,8 \cdot \cos 30^\circ)$$

$$M_1 = 346,4 \text{ Nm}.$$

Staticky ekvivalentná dvojica síl $F_2, -F_2$, t.j. silová dvojica s rovnakým otáčavým účinkom ako má dvojica $F_1, -F_1$, čo do veľkosti i zmyslu, ale pôsobiaci v bodoch C, D v zadanom smere je potom určená jedinou možnou veľkosťou sily F_2 . Pre veľkosť otáčavých účinkov platí

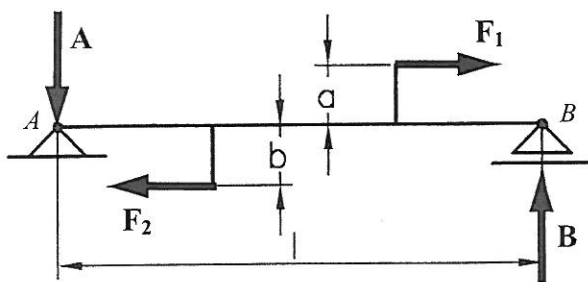
$$M_2 = F_2 \cdot p_2 = M_1 \Rightarrow F_2 \cdot 1,2 = 346,4,$$

z ktorej pre veľkosť neznámej sily F_2 dostaneme $F_2 = \frac{M_1}{p_2} = \frac{346,4}{1,2} = 288,67 \text{ N}$.



Obr. 2.23

Príklad 2.9: Určite veľkosť síl A, B tak, aby boli v rovnováhe s pôsobením dvojice síl F_1, F_2 podľa obr.2.24. Výpočet vykonajte všeobecne a tiež pre zadané hodnoty. Zadané: $F = 50 \text{ kN}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,7 \text{ m}$, $l = 5 \text{ m}$.



Obr. 2.24

Riešenie:

Zaťažujúce sily F_1, F_2 (uvažujeme $F_1 = F_2 = F$) tvoria tzv. silovú dvojicu s otáčavým účinkom

$$M_1 = -F \cdot (a + b). \quad (\text{zmysel } \curvearrowright)$$

Hľadané sily A aj B musia pri rovnováhe silových účinkov tvoriť taktiež silovú dvojicu. Musí preto platiť $A = B$ a pri známom smere sily B (vyplýva z vlastností použitej posuvnej väzby), musí byť smer $A \parallel B$.

Pri rovnováhe oboch silových dvojíc musí platiť $\sum M_i = M_1 + M_2 = 0$, kde $M_1 = -F \cdot (a + b)$ je otáčavý účinok od síl F_1, F_2 a $M_2 = A \cdot l = B \cdot l$ je otáčavý účinok od síl A, B. Rovnica rovnováhy otáčavých účinkov je $\sum M = -F \cdot (a + b) + A \cdot l = 0$, odkiaľ $A = F(a + b)/l = B$.

Výpočet pre zadané hodnoty: $M_1 = -F \cdot (a + b) = -50 \cdot (0,5 + 0,7) = -60 \text{ kNm}$.

Platí $M_2 = -M_1 \Rightarrow -M_1 = A \cdot l \Rightarrow A = -M_1 / l = 12 \text{ kN}$, resp. $-M_1 = B \cdot l \Rightarrow B = -M_1 / l = 12 \text{ kN}$.

Poznámka: Z výsledkov vyplýva, že predpokladaný – zvolený – smer síl A a B sme „odhadli“ správne, pretože hodnoty síl A aj B vychádzajú všeobecne kladné. Moment $M_2 = A \cdot l = B \cdot l = 12 \cdot 5 = 60 \text{ kNm}$ je rovnako veľký ako moment M_1 , ale je opačne orientovaný (kvôli rovnováhe otáčavého účinku).

2.3. Základné axiomy statiky

Všetky základné vety a vzťahy, využívané v technickej mechanike, vychádzajú vo všeobecnosti z Newtonových pohybových zákonov a ďalších preukázaných princíпов, tzv. **axióm**.

Axióma je jednoduché, jednoznačné tvrdenie, ktoré nemožno jednoznačne matematicky dokázať. Axiómy tvoria základnú sústavu viet a všeobecne akceptovaných tvrdení, vychádzajúcich z dlhodobých pozorovaní. Ich vhodnou kombináciou je možné logickým postupom odvodiť aj všetky dôležité tvrdenia o vlastnostiach silových účinkov pôsobiacich na hmotný objekt. Všetky princípy a postupy statickej analýzy hmotných objektov sú založené na nasledovných, v praxi sa neustále potvrdzujúcich, tvrdeniach:

- *axióme o rovnováhe dvoch síl*
- *axióme o rovnobežníku síl*
- *axióme akcie a reakcie*
- *axióme o zachovaní silového účinku.*

2.3.1. Axióma o rovnováhe dvoch síl

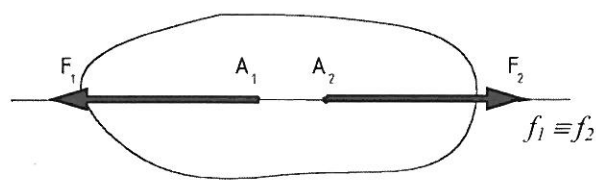
Axióma o rovnováhe dvoch síl úzko súvisí so zákonom akcie a reakcie (1.4). Za predpokladu rovnakej veľkosti síl F_1 a F_2 (Obr.2.25) platí

$$F_2 = -F_1 \Rightarrow F_1 + F_2 = 0.$$

Podmienku rovnováhy dvoch síl F_1 a F_2 , platnú pre DTT môžeme zapísať v tvare

$$F_1 + F_2 = 0 \quad (2.28)$$

tzn. sily F_1 a F_2 musia byť rovnako veľké a ležať na spoločnej nositeľke, sú tzv. **kolineárne**. Platí tvrdenie:



Obr. 2.25

Dve sily sú v rovnováhe vtedy, a len vtedy, keď ležia na spoločnej nositeľke (sú kolineárne), majú rovnakú veľkosť a sú opačne orientované, t.j. majú opačný zmysel (obr.2.25).

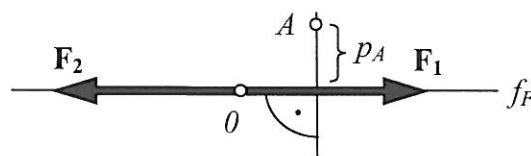
Praktický význam axiomy využívame pri riešení rovnováhy silových účinkov u viazaných telies, kde účinky väzieb na tzv. uvoľnenom telese nahrádzame iným silovým účinkom - **väzbovými reakciami**.

Príklad 2.10: Určite posuvný a otáčavý účinok dvoch rovnako veľkých, ale opačne orientovaných síl F_1 a F_2 , ležiacich na spoločnej nositeľke - tzv. nulová dvojica síl (Obr.2.26.). Zadané: $F=200$ N, $p_A=0,5$ m.

Riešenie:

- Posuvný účinok (PÚ): $F_1 + (-F_2) = 200 - 200 = 0$ N.
- Otáčavý účinok (OÚ): vzhľadom k ľubovoľne zvolenému momentovému bodu (napr. bod A) a dostaneme

$$F_1 \cdot p_A - F_2 \cdot p_A = 200 \cdot 0,5 - 200 \cdot 0,5 = 0$$



Obr. 2.26

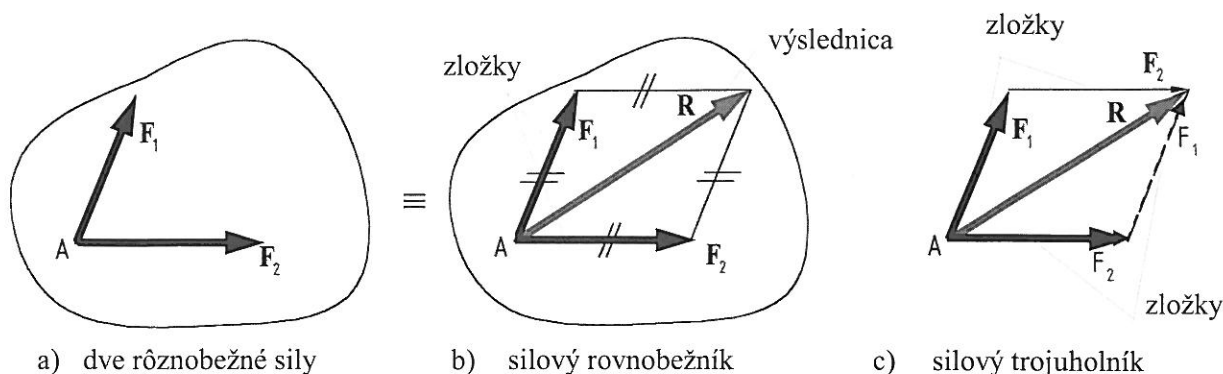
Záver: Dve rovnako veľké, opačne orientované sily, ležiace na jednej nositeľke majú na teleso nulový silový a teda aj pohybový účinok. Analogicky platí: Dve sily môžu byť v rovnováhe iba vtedy, ak sú rovnako veľké, opačného zmyslu a pôsobia na spoločnej nositeľke sily f_F .

2.3.2. Axióma o rovnobežníku síl (axióma o skladaní dvoch rôznobežných síl)

V mechanike tuhých telies si môžeme dovoliť uvažovať, že účinok dvoch rôznobežných síl F_1 , F_2 so spoločným pôsobiskom, napr. bod A podľa Obr.2.27a je rovnaký ako účinok jedinej sily R , ktorej vektor je tvorený uhlopriečkou tzv. **rovnobežníka síl** F_1 a F_2 (Obr.2.27b).

Ak sily F_1 , F_2 aj R ležia v jednej rovine, potom hovoríme, že účinok od pôsobenia sily R je statickým ekvivalentom (ekvivalencia = rovnocenná náhrada) účinku od pôsobenia síl F_1 a F_2 . Platí:

Dve rôznobežné sily F_1 , F_2 , pôsobiace v spoločnom bode tuhého telesa, majú rovnaký účinok ako jediná sila R , pôsobiaca v tom istom bode. Veľkosť, smer a zmysel sily R určuje uhlopriečka silového rovnobežníka, ktorého strany predstavujú veľkosti síl F_1 a F_2 .



Obr.2.27

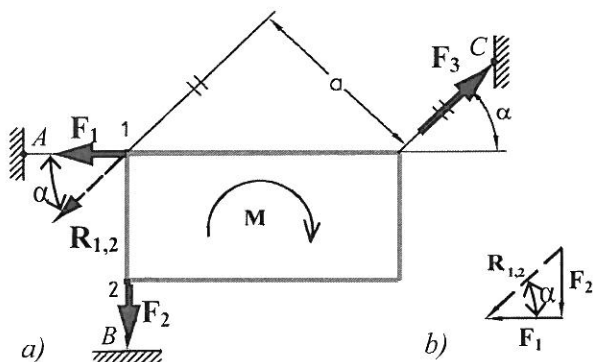
Silu R nazývame **výslednica (resultanta)** a hovoríme, že je staticky ekvivalentná silám F_1 , F_2 . Pri nahradení síl F_1 , F_2 ich výslednicou hovoríme o **redukcii** (náhrade, zjednodušení) **sústavy síl**.

Sily F_1 , F_2 v rovnobežníku síl nazývame **zložky výslednice R** (obr.2.27b). Z obr.2.27c je zrejmé, že výslednicu R môžeme získať aj analyticky a to vektorovým sčítaním vektorov F_1 a F_2 a dostaneme

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1. \quad (2.29)$$

Uvedený vektorový súčet sa skladá z dvoch tzv. **silových trojuholníkov** (obr.2.27c) a má **charakter komutatívnosti** sčítania vektorov, t.j. nezáleží na poradí sčítania síl.

Príklad 2.11: Určite osové sily F_1 , F_2 , F_3 vznikajúce v prútoch nesúcich dosku zaťaženú otáčavým účinkom M (Obr.2.28). Vlastnú tiaž dosky zanedbajte. Zadané: $M = 20 \text{ kNm}$, $\alpha = 45^\circ$, $a = 2 \text{ m}$



Obr. 2.28

Riešenie:

Pri zaťažení telesa otáčavým účinkom M musia pre zaistenie rovnováhy telesa všetky hľadané osové sily F_i (F_1 , F_2 , F_3) v prútoch tvoriť tiež silovú dvojicu.

Napr. sily F_1 a F_2 majú výslednicu $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$.

Sila $\mathbf{R}_{12}$ preto musí so silou $\mathbf{F}_3$ tvoriť silovú dvojicu, aby mohla nastať rovnováha silových účinkov na konštrukcii. Pre určenie veľkosti a zmyslu otáčavého účinku k vhodne zvolenému bodu (napr. bod 1) platí

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow F_3 \cdot a - M = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{M}{a} \Rightarrow F_3 = R_{12} = \frac{20}{2} = 10 \text{ kN}.$$

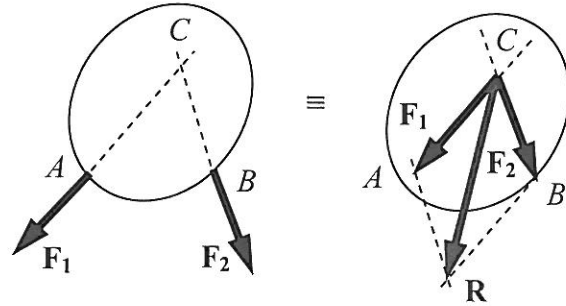
Pri znalosti výslednice $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_3$ môžeme určiť aj veľkosť síl F_1 a F_2 (ako jej zložiek - obr.2.28b) a dostaneme

$$F_1 = R_{12} \cdot \cos \alpha = 10,0,707 = 7,07 \text{ kN}$$

$$F_2 = R_{12} \cdot \sin \alpha = 10,0,707 = 7,07 \text{ kN}.$$

2.3.2.1. Skladanie dvoch síl

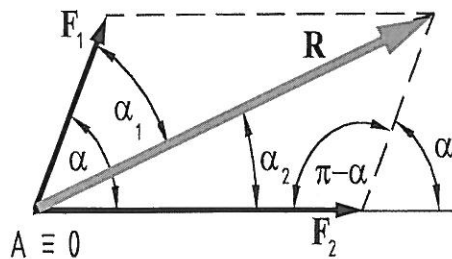
Princíp skladania dvoch rôznobežných síl F_1 a F_2 s rôznymi pôsobiskami (body A , B) je zrejmý z obr.2.29. Ako neskôr preukážeme, v statike je možné každú silu ľubovoľne po jej nositeľke posúvať. Aj sily F_1 a F_2 môžeme preto posunúť do priesečníka ich nositeliek (bod C) a nahradiť ich silou R .



Obr.2.29

- **Výpočtové (analytické) riešenie:**

Majme zadané veľkosti síl F_1 , F_2 a uhol α , ktorý sily zvierajú (Obr.2.30). Pre určenie veľkosti ich výslednice R a jej smeru (α_1 , α_2) s výhodou využívame kosínusovú a sínusovú vetu, známe z matematiky. Analytické riešenie vychádza z viet o všeobecnom trojuholníku. Z kosínusovej a sínusovej vety a toho, že $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ dostaneme:



Obr. 2.30

- **Cosínusová veta:**

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2.30)$$

- **Sínusová veta:**

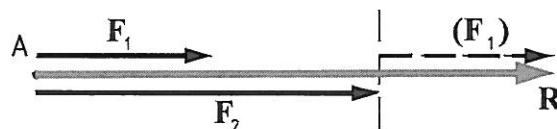
$$\frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{F_2}{R} \sin \alpha, \text{ resp.}$$

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} \Rightarrow \sin \alpha_2 = \frac{F_1}{R} \sin \alpha \quad (2.31)$$

Pre vybrané uhly (obr.2.31) platí:

$$\alpha = 0 \rightarrow (\pi - \alpha) = \pi$$

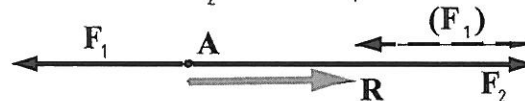
$$R = F_1 + F_2$$



$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$$\alpha = \pi \rightarrow (\pi - \alpha) = 0$$

$$R = F_1 - F_2 = F_2 - F_1$$

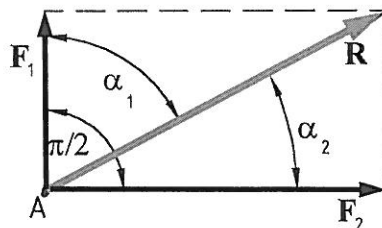


$$\alpha_1 = \pi; \alpha_2 = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow (\pi - \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$



$$\sin \alpha_1 = \frac{F_2}{R} \cdot 1$$

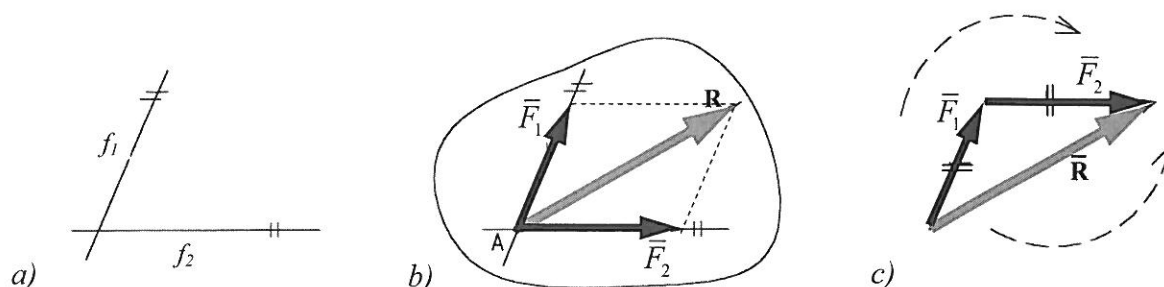
$$\sin \alpha_2 = \frac{F_1}{R} \cdot 1$$

Obr. 2.31

- **Grafické riešenie:** Ak sú známe veľkosti a zmysel síl F_1 , F_2 a smery ich nositeliek f_1 , f_2 (obr.2.32a), najskôr zvolíme vhodnú mierku síl m_F [N.mm⁻¹]. Výpočtom určíme veľkosti tzv. **zobrazovacích úsečiek** $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ [mm] pre grafické znázornenie vektorovej rovnice $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ a dostaneme

$$\bar{F}_1 = \frac{F_1}{m_F} \quad [\text{mm}], \quad \bar{F}_2 = \frac{F_2}{m_F} \quad [\text{mm}]. \quad (2.32)$$

Výslednica $\bar{R}$ v rámci vytvoreného tzv. **silového (zložkového) obrazca** (obr.2.32c) smeruje vždy proti zmyslu obehu zložiek $\bar{F}_1$ a $\bar{F}_2$ (čiarkované oblúky).



Obr. 2.32

V silovom trojuholníku (Obr.2.32c) odmeriame veľkosť úseku $\bar{R}$ [mm] a skutočnú veľkosť výslednice R v [N] určíme pomocou transformačného vzťahu v tvare

$$R = \bar{R} \cdot m_F \quad [\text{N}]. \quad (2.33)$$

V praktických výpočtoch obvykle využívame analytické (výpočtové) metódy, metódy grafické postupy slúžia najmä na objasnenie a lepšie pochopenie fyzikálnej podstaty vektorového skladania síl.

Príklad 2.12: Určite výslednicu dvoch rôznobežných síl F_1 , F_2 a veľkosti zložiek ich výslednice v smere súradnicových osí x , y (Obr.2.33a). Zadané: $F_1=100 \text{ N}$, $F_2=100 \text{ N}$, $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=60^\circ$.

Riešenie:

• *Analyticky:*

Veľkosť výslednice: aplikácia kosínusovej vety (Obr.2.33a)

$$\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow \alpha = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$$

$$R = \sqrt{100^2 + 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot \cos(30^\circ)} \Rightarrow R = 193 \text{ N}$$

Smernosť výslednice: aplikácia sínusovej vety (Obr.2.33a)

$$\frac{F_2}{\sin \alpha'_R} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} \Rightarrow \sin \alpha'_R = \frac{F_2}{R} \cdot \sin(\pi - \alpha)$$

$$\sin \alpha'_R = 100 / 193 \cdot \sin 150^\circ = 0,259 \Rightarrow \alpha'_R = 15^\circ$$

$$\text{Smerný uhol } \alpha_R (= \text{uhol medzi } R \text{ a kladnou poloosou } x) : \alpha_R = \alpha_1 + \alpha'_R = 30^\circ + 15^\circ \Rightarrow \alpha_R = 45^\circ.$$

Veľkosti zložiek výslednice R :

$$R_x = R \cdot \cos \alpha_R = 193 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow R_x = 136 \text{ N}$$

$$R_y = R \cdot \sin \alpha_R = 193 \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow R_y = 136 \text{ N}$$

• *Graficky:*

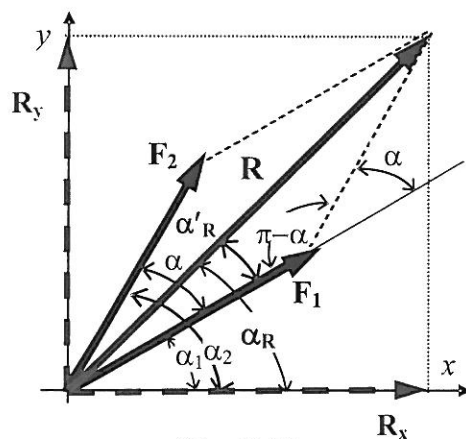
Zvolená mierka síl: $m_F = 2 \text{ N/mm}$. Výsledky získame zo silového obrazca, zakresleného v mierke (Obr.2.33b). Odmeraním zistíme $\bar{R} = 97 \text{ mm}$, $\bar{R}_x = 68 \text{ mm}$, $\bar{R}_y = 68 \text{ mm}$ a dostaneme:

$$R = \bar{R} \cdot m_F = 97 \cdot 2 = 194 \text{ N}; \quad \alpha'_R \cong 15^\circ,$$

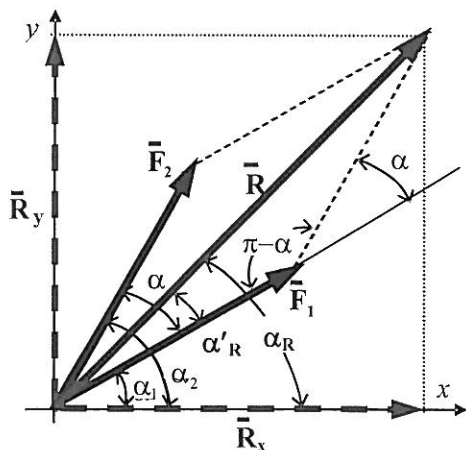
$$R_x = \bar{R}_x \cdot m_F = 68 \cdot 2 = 136 \text{ N}$$

$$R_y = \bar{R}_y \cdot m_F = 68 \cdot 2 = 136 \text{ N}.$$

Uhol medzi výslednicou R a kladnou poloosou x zistíme odmeraním v Obr.2.33b a platí $\alpha_R \cong 45^\circ$.

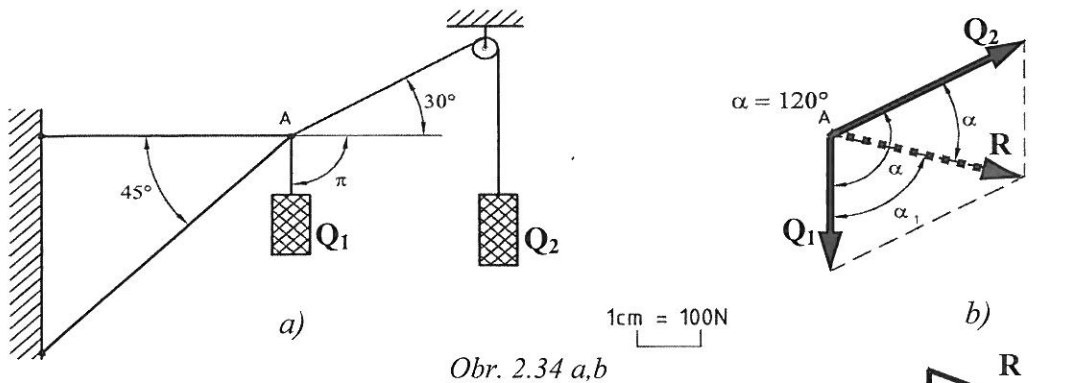


Obr. 2.33a



Obr. 2.33b

Príklad 2.13: Určite veľkosť a smer sily pôsobiacej v bode A konzolového nosníka so zavesenými bremenami Q_1 , Q_2 podľa obr. 2.34a. Zadané: $Q_1 = 250 \text{ N}$, $Q_2 = 350 \text{ N}$, uhly podľa obrázka.



Obr. 2.34 a,b

Riešenie:

- Analyticky:**

Podľa obr. 2.34b je výsledné zaťaženie konzoly v tvare:

$$R = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 \cos \alpha}$$

$$R = \sqrt{250^2 + 350^2 + 2 \cdot 250 \cdot 350 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{97500} = 312,24 \text{ N}.$$

Smer sily R , t.j. uhol α_1 získame zo sínusovej vety

$$\frac{Q_2}{R} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\pi - \alpha)} \Rightarrow \sin \alpha_1 = \frac{Q_2}{R} \sin(\pi - \alpha) = \frac{350}{312,24} \cdot \sin 60^\circ = 0,9707 \Rightarrow \alpha_1 = 76^\circ 07'.$$

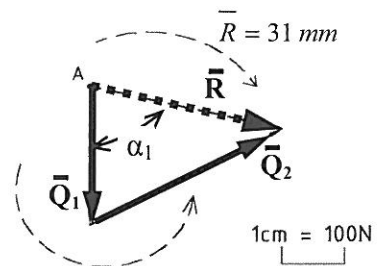
$$\text{Uhol } \alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 120^\circ - 76^\circ 07' = 43^\circ 53'.$$

- Graficky:**

Zvolíme vhodnú mierku síl, napr. $m_F = 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$ a určíme veľkosť zobrazovacích úsečiek zložiek síl. Dostaneme

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{m_F} = \frac{250}{10} = 25 \text{ mm}, \quad \bar{Q}_2 = \frac{Q_2}{m_F} = \frac{350}{10} = 35 \text{ mm}.$$

Zo silového obrazca $\bar{R} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$ (obr.2.34c) odmeriame výslednicu $\bar{R} = 31 \text{ mm}$ a jej vynásobením mierkou síl určíme veľkosť R v [N]. Platí $R = \bar{R} \cdot m_F = 31 \cdot 10 \cong 310 \text{ N}$, odmeraním zistíme $\alpha_1 \cong 75^\circ$.



Obr. 2.34c

2.3.2.2. Rozklad sily na dve navzájom kolmé zložky

Obrátenou, ale rovnako dôležitou, úlohou ako skladanie síl je **rozklad zadanej sily na dve zložky**. V mechanike telies využívame najčastejšie rozklad sily **do dvoch navzájom kolmých smerov** – obvykle do smeru osí zvolenej, najčastejšie pravouhlej, súradnicovej sústavy. Uvažujme silu F , pôsobiacu v rovine x - y . Podľa axiomy o rovnobežníku síl ju môžeme nahradiť silami F_x a F_y a platí vektorový zápis

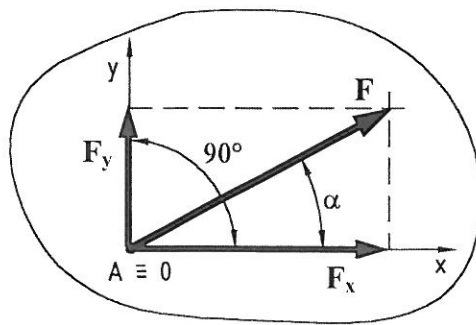
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.34)$$

kde sily F_x a F_y nazývame vektorové zložky sily F , F_x a F_y sú skalárne zložky sily F a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sú tzv. bázičné jednotkové vektory, určujúce zmysel pôsobenia zložiek vektora sily F .

Prakticky to znamená, že skalárne zložky sú určené iba ich veľkosťou a znamienkom, tzn. neplatí $|\mathbf{F}_x| \neq F_x$. Ak je zadaná sila $\mathbf{F}$ a jej smerový uhol α (obr.2.35), pre veľkosť jej skalárnych zložiek F_x, F_y v smeroch súradnicových osí x, y platí

$$F_x = F \cdot \cos \alpha \quad ; \quad F_y = F \cdot \sin \alpha \quad (2.35)$$

a pre veľkosť sily $\mathbf{F}$ platí $F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$. (2.36)



Obr. 2.35

Príklad 2.14: Rozložte analyticky aj graficky sily $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ do dvoch navzájom kolmých zložiek (Obr.2.36). Zadané: $\mathbf{F}_1(15; -10; 135^\circ; 500\text{N})$, $\mathbf{F}_2(0; 0; 300^\circ; 8000\text{N})$.

Riešenie:

• Analyticky:

$$\mathbf{F}_1(15; -10; 135^\circ; 500\text{N})$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 500\text{ N} \cdot \cos 135^\circ = -353,6\text{ N} \quad (= -F_1 \cdot \cos \beta)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 500\text{ N} \cdot \sin 135^\circ = 353,6\text{ N} \quad (= F_1 \cdot \sin \beta)$$

$$\mathbf{F}_{1x} = [15; -10; 180^\circ; 353,6\text{N}], \mathbf{F}_{1y} = [15; -10; 90^\circ; 353,6\text{N}]$$

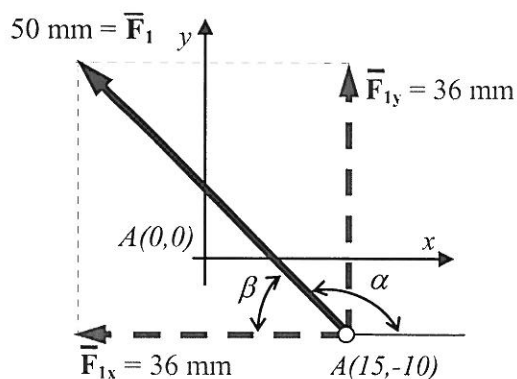
• Graficky (Obr.2.36a):

$$m_{F_1} = 10\text{ N} / 1\text{ mm} = 10\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \Rightarrow 1\text{ mm} = 10\text{ N}$$

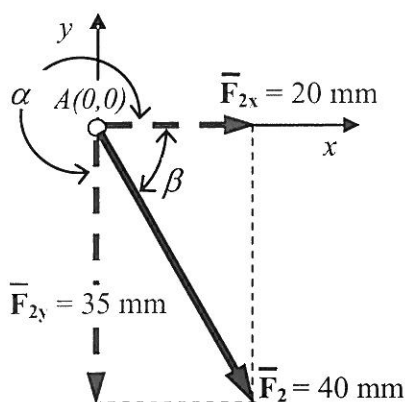
$$F_{1x} = m_F \cdot \bar{F}_{1x} = 10\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 36\text{ mm} = 360\text{ N}$$

$$F_{1y} = m_F \cdot \bar{F}_{1y} = 10\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 36\text{ mm} = 360\text{ N}$$

$$\mathbf{F}_{1x} = [15; -10; 180^\circ; 360\text{N}], \mathbf{F}_{1y} = [15; -10; 90^\circ; 360\text{N}]$$



Obr. 2.36a



Obr. 2.36b

• Analyticky:

$$\mathbf{F}_2(0; 0; 300^\circ; 8000\text{N})$$

$$\beta = 360^\circ - \alpha = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha = 8000\text{ N} \cdot \cos 60^\circ = 4000\text{ N} \quad (= F_2 \cdot \cos \beta)$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha = 8000\text{ N} \cdot \sin 300^\circ = -6928\text{ N} \quad (= F_2 \cdot \sin \beta)$$

$$\mathbf{F}_{2x} = [0; 0; 0^\circ; 4000\text{N}], \mathbf{F}_{2y} = [0; 0; 270^\circ; 6928\text{N}]$$

• Graficky (Obr.2.36b):

$$m_{F_2} = 200\text{ N} / 1\text{ mm} = 200\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \Rightarrow 1\text{ mm} = 200\text{ N}$$

$$F_{2y} = m_F \cdot \bar{F}_{2y} = 200\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 35\text{ mm} = 7000\text{ N}$$

$$F_{2x} = m_F \cdot \bar{F}_{2x} = 200\text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot 20\text{ mm} = 4000\text{ N}$$

$$\mathbf{F}_{2x} = [0; 0; 0^\circ; 4000\text{N}], \mathbf{F}_{2y} = [0; 0; 270^\circ; 7000\text{N}]$$

Poznámka: Obrázky 2.36 a, b sú nakreslené v zvolenej mierke.

2.3.2.3. Všeobecný prípad rozkladu síl - rozklad na dve nekolmé zložky

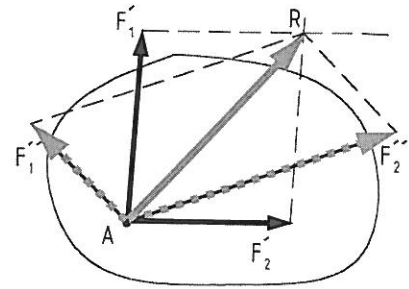
Všeobecne definovaná úloha rozkladu sily nie je jednoznačná. Zadanú silu (napr. $\mathbf{R}$) môžeme vždy rozložiť na dve ľubovoľné zložky, pričom podľa Obr.2.37 platí

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}''_1 + \mathbf{F}''_2 = \dots\dots\dots$$

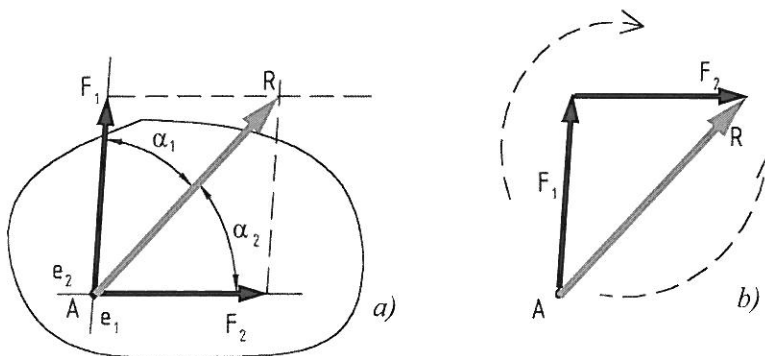
Úloha bude jednoznačná iba vtedy, keď poznáme aj smery nositeliek f_1, f_2 oboch síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, ako zložiek rozkladanej sily $\mathbf{R}$. Smery nositeliek môžu byť určené napr. smerovými uhlami. Podľa sínusovej vety, kde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ a $\sin \alpha_2 = \sin(\pi - \alpha_2)$ platí

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha_2)} \Rightarrow F_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha} \cdot R,$$

$$\frac{F_2}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha_1)} \Rightarrow F_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \cdot R. \quad (2.37)$$



Obr. 2.37



Obr. 2.38

Pri grafickom riešení opäť najskôr zvolíme vhodnú mierku síl $m_F [\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}]$. Určíme a zakreslíme zobrazovací úsek zadanej sily $\bar{R} = R / m_F [\text{mm}]$.

Zo **silového obrazca** (obr.2.38b), vyjadrujúceho geometrickú interpretáciu vektorovej rovnice $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2$, odmeriame dĺžku zobrazovacích úsekov zložiek $\bar{F}_1, \bar{F}_2$ v [mm].

Ich transformáciou určíme veľkosť zložiek F_1 a F_2 v [N] a dostaneme

$$F_1 = \bar{F}_1 \cdot m_F [\text{N}] \quad \text{resp.} \quad F_2 = \bar{F}_2 \cdot m_F [\text{N}]. \quad (2.38)$$

Príklad 2.15: Uvažujme teleso s hmotnosťou m , zavesené na dvoch lanách 1,2 (Obr.2.39a). Odvodte vzťahy pre určenie veľkosti síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, ktoré v lanách vzniknú od vplyvu vlastnej tiaže telesa.

Riešenie:

• *Analyticky:*

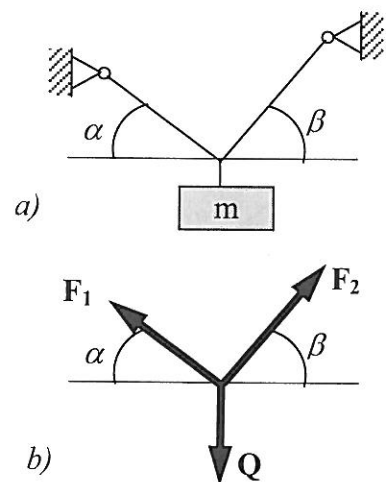
Teleso uvoľníme (t.j. väzby nahradíme vo forme silových účinkov) a zavedieme sily $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$, vznikajúce v lanách (obr.2.39b). Pre rovnováhu síl musí platiť vektorová rovnica rovnováhy, ktorá má tvar

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}.$$

Po priemeti síl do pravouhlých zložiek v smere osí x, y dostaneme skalárne rovnice v tvare

$$\sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 \Rightarrow -F_{1x} + F_{2x} = -F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 F_{iy} = 0 \Rightarrow -Q + F_{1y} + F_{2y} = -Q + F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \sin \beta = 0$$



Obr.2.39 a,b

Máme k dispozícii dve rovnice s 2 neznámymi. Ich riešením dokážeme určiť neznáme veľkosti síl F_1 a F_2 . Jednou z možností matematického riešenia je vyjadrenie oboch neznámych z rovníc, napr. v tvare

$$-F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{F_2 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$-Q + F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{Q - F_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

a dosadenie zvolenej neznámej (vyjadrenej z jednej rovnice) do rovnice druhej. Napríklad, ak za F_1 dosadíme do vzťahu pre F_2 a za $Q = m \cdot g$ dostaneme všeobecný výraz pre určenie sily F_2 v tvare

$$F_2 = \frac{Q - F_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{Q - \frac{F_2 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{Q - F_2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{Q}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} - F_2 \cdot \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \right)$$

$$F_2 - F_2 \cdot \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \right) = \frac{Q}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \Rightarrow F_2 \cdot \left(1 - \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \right) = \frac{Q}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \Rightarrow$$

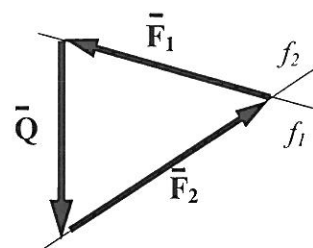
$$F_2 = \frac{\frac{Q}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}}{\left(1 - \frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \right)}$$

K dispozícii sú však aj ďalšie známe spôsoby riešenia sústav rovníc.

- *Graficky:*

Zvolíme vhodnú mierku síl m_F , zakreslíme v mierke známu silu Q , nakreslíme rovnobežky s nositeľkami f_1 , f_2 síl F_1 a F_2 a umiestnime ich do počiatku a konca sily Q . Získame tak zobrazovacie úseky $\bar{F}_1$ a $\bar{F}_2$ (Obr.2.39c).

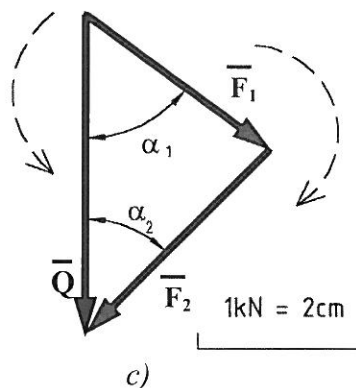
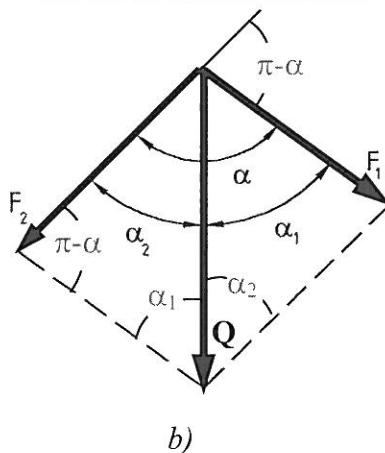
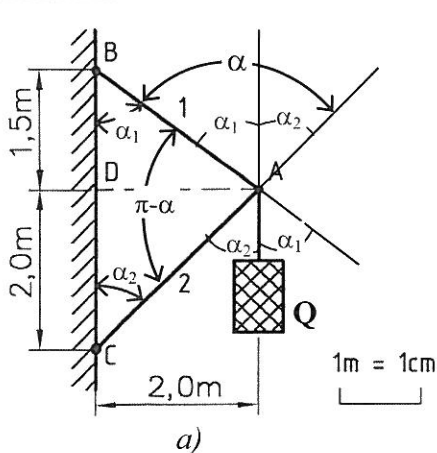
Ich veľkosť odmeriame zo silového obrazca a ich prenasobením mierkou síl m_F dostaneme ($F_1 = \bar{F}_1 \cdot m_F$, $F_2 = \bar{F}_2 \cdot m_F$) a takto určíme ich skutočnú veľkosť v [N].



Obr. 2.39c

? *Vypočítajte veľkosť síl v lanách, ak je zadané: $m = 200 \text{ kg}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 25^\circ$.*

Príklad 2.16: Konzola je zaťažená silou Q . Analyticky aj graficky vyriešte zaťaženie prútov 1 a 2 konzoly. Zadané: $Q=2 \text{ kN}$, usporiadanie a rozmery podľa obr. 2.40.



Obr. 2.40

Riešenie:

• *Analyticky:*

Prúty sú namáhané zložkami sily Q od bremena m v smere prútov 1 a 2. Podľa obr.2.40b platí

$$\frac{Q}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \alpha_2} \Rightarrow F_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot Q, \Rightarrow F_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha} \cdot Q$$

$$\frac{Q}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{F_2}{\sin \alpha_1} \Rightarrow F_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot Q \Rightarrow F_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \cdot Q.$$

Z obr.2.40b určíme zatiaľ neznáme uhly. Platí: $\sin \alpha_1 = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}}$ a $\sin \alpha_2 = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}}$, ak vieme, že $\overline{DA} = 2 \text{ m}$,

prip. použijeme funkciu tg . Podľa Pythagorovej vety určíme rozmery

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{AD}^2} = 2,5 \text{ m}, \quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2} = 2,828 \text{ m}.$$

Hľadané uhly: $\sin \alpha_1 = \frac{2}{2,5} = 0,8 \Rightarrow \alpha_1 = 53,13^\circ$; $\sin \alpha_2 = \frac{2}{2,828} = 0,707 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 98,131^\circ \Rightarrow \sin \alpha = 0,989.$$

Dosadením do vyššie uvedených rovníc pre neznáme sily v prútoch dostaneme

$$F_1 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha} \cdot Q = \frac{0,707}{0,989} \cdot 2 = 1,428 \text{ kN}, \quad F_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} \cdot Q = \frac{0,8}{0,989} \cdot 2 = 1,618 \text{ kN}.$$

• *Graficky:*

Zvolíme vhodnú mierku síl, napr. $m_F = 0,05 \text{ kN/mm}$. Platí $\overline{Q} = Q / m_F = 2 / 0,05 = 40 \text{ mm}$. Vynesieme silu Q a rovnobežky s nositeľkami f_1, f_2 hľadaných síl F_1 a F_2 . Zo získaného zložkového obrazca (obr.2.40c) odmeriame ich zobrazovacie úseky $\overline{F}_1 \cong 29 \text{ mm}$, $\overline{F}_2 \cong 34 \text{ mm}$ a určíme veľkosť a zmysel hľadaných síl v prútoch v [N]. Dostaneme $F_1 = \overline{F}_1 \cdot m_F = 29 \cdot 0,05 \cong 1,45 \text{ kN}$ a $F_2 = \overline{F}_2 \cdot m_F = 34 \cdot 0,05 \cong 1,7 \text{ kN}$.

2.3.2.4. Rozklad sily v priestore – sila neleží v žiadnej zo súradnicových rovín

V prípade, ak sila F nie je rovnobežná so žiadnou z rovín súradnicového systému – je všeobecne umiestnená v priestore – rozkladáme ju na tri zložky F_x , F_y a F_z , pôsobiace v smeroch osí x , y , z (Obr.2.41). Silu F najskôr rozložíme napr. na zložky F_y a F_{xz} , následne silu F_{xz} , ležiacu v rovine x - z , rozložíme na zložky F_x a F_z . Rozklad podľa Obr.2.41 môžeme zapísať vektorovo v tvare

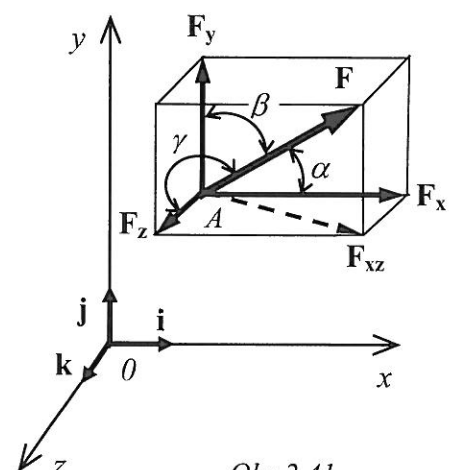
$$\mathbf{F}_{xz} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_z, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{xz} + \mathbf{F}_y = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \cdot \mathbf{i} + F_y \cdot \mathbf{j} + F_z \cdot \mathbf{k}$$

alebo praktickejšie ako rovnice skalárne v tvare

$$F_x = F \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F \cdot \cos \beta, \quad F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (2.39)$$

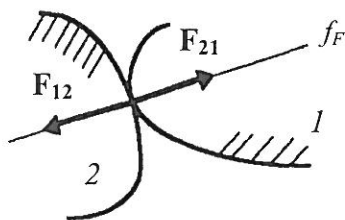
Pre veľkosť sily F , analogicky s rovinným prípadom, platí

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.40)$$



Obr.2.41

Dosadením z (2.39) do (2.40) za F_x , F_y , F_z dostaneme $F = F \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}$, pričom vieme, že musí platiť $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Je teda zrejmé, že smerové uhly α , β , γ nemôžu mať ľubovoľnú veľkosť a platí, že dvoma z nich je vždy určený uhol tretí. Pre ich súčet platí $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.



Obr. 2.42

2.3.3. Axióma akcie a reakcie

Vychádza z podstaty 3. Newtonovho pohybového zákona. Pri silovom pôsobení jedného hmotného objektu na druhý je silový účinok ich vzájomného pôsobenia opačný. Platí:

Sily vzájomného pôsobenia telies ležia na spoločnej nositeľke, majú rovnakú veľkosť, ale opačný zmysel (smer).

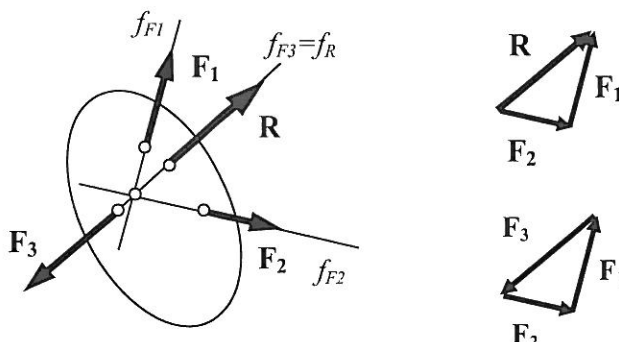
Znamená to, že ak *Teleso 2* pôsobí na *Teleso 1* silou F_{21} , potom *Teleso 1* pôsobí na *Teleso 2* silou F_{12} a platí $F_{12} + F_{21} = 0$ (Obr.2.42). Z uvedeného vyplýva, že pri vzájomnom pôsobení dvoch hmotných objektov s ideálne hladkými povrchmi je nositeľkou vzájomných (akčných a reakčných) síl ich spoločná normála f_F v bode ich dotyku.

Výslednica dvoch síl $R = F_1 + F_2$ prechádza ich spoločným bodom a leží s nimi v jednej rovine (Obr. 2.43). Ak sila F_3 má byť v rovnováhe so silami F_1 a F_2 musí ležať na spoločnej nositeľke s ich výslednicou R , musí byť rovnako veľká, ale opačne orientovaná ako sila R . Musí teda platiť

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0, \quad R + F_3 = 0, \quad F_3 = -R. \quad (2.41)$$

Na základe uvedeného môžeme formulovať tzv. **vetu o rovnováhe troch síl**, formulovanú v tvare:

Tri sily sú v rovnováhe vtedy a len vtedy, ak ležia v jednej rovine, ich nositeľky prechádzajú spoločným bodom a tvoria uzavretý silový obrazec (Obr.2.43).



Obr. 2.43

Uzavretý silový obrazec znamená, že sily sú v rovnováhe, t.j. nemajú na teleso žiadny pohybový účinok.

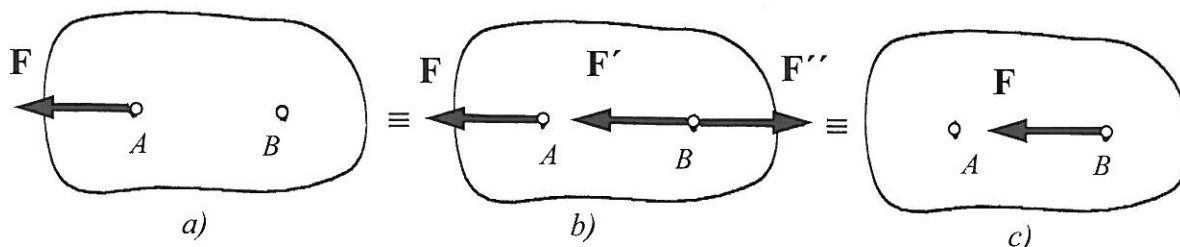
2.3.4. Axióma o zachovaní silového účinku

Jedným z najvýznamnejších dôsledkov axiomy o rovnováhe dvoch síl je veta o *pridaní / odobratí* tzv. *rovnovážnej sústavy síl*, ktorá je často považovaná za ďalšiu axiómu statiky. Často sa v literatúre objavuje aj ako **axióma o zachovaní silového účinku**, resp. ako **axióma o nulovom systéme síl**.

Axióma o rovnováhe dvoch síl hovorí o tom, že dve sily môžu byť v rovnováhe vtedy a len vtedy, ak pôsobia na spoločnej nositeľke (sily sú kolineárne), majú rovnakú veľkosť a sú opačne orientované. Z uvedenej formulácie vyplýva aj dôležité tvrdenie, známe ako axióma zachovania silového účinku, v tvare:

Účinok Pubovoľnej silovej sústavy sa nezmení, ak k nej pridáme alebo od nej odoberieme inú silovú sústavu, ktorá je v stave statickej rovnováhy, tzv. nulový systém síl ($R=0, M=0$).

Pripojenie alebo odobratie „nulovej silovej sústavy“ nenaruša pôvodný pohybový účinok, ani rovnováhu pôvodnej silovej sústavy. Majme napr. silu F , pôsobiacu na hmotný objekt v bode A (Obr.2.44a).



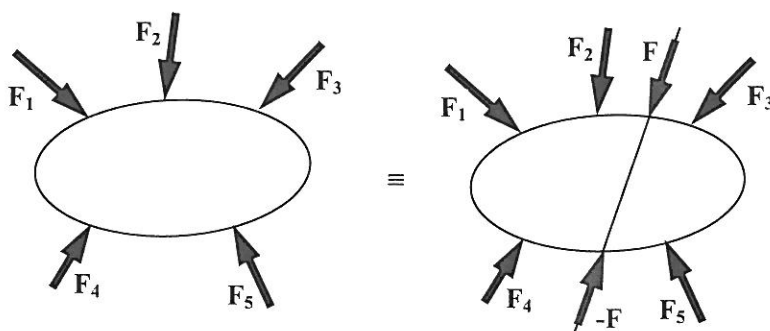
Obr. 2.44

Na hmotný objekt môžeme pridať dve rovnako veľké, opačne orientované, sily $+F$ a $-F$, ležiace na tej istej nositeľke, ale pôsobiace v pôsobisku B (tzv. rovnovážna dvojica síl resp. nulová sústava síl) a účinok pôvodnej sily F sa týmto nijako nezmení.

Axióma platí analogicky aj pre sústavu síl. Nech sily F_1 až F_5 (Obr.2.45) tvoria rovnovážnu sústavu síl. Ak na teleso pridáme nulovú sústavu síl $+F, -F$, nová sústava bude stále v stave statickej rovnováhy, tzn. pôvodná aj nová silová sústava sú **staticky ekvivalentné** ($\equiv$).

Analogicky, ak rovnovážnu sústavu síl zo

silovej sústavy odoberieme, účinok sústavy sa nezmení. Z axiómy o zachovaní silového účinku vyplýva:



Obr.2.45

- **Pridaním /odoberatím rovnovážnej sústavy síl (nulového systému síl) sa pohybový stav dokonale tuhého telesa nezmení.**
- **Silové sústavy, ktoré sa navzájom odlišujú iba o rovnovážnu sústavu síl sú staticky rovnocenné, hovoríme že sú staticky ekvivalentné.**

Je dôležité si však uvedomiť, že o takto chápanom zachovaní silového účinku môžeme hovoriť iba v prípade analýzy dokonale tuhého telesa. Účinok dvoch rôznych, aj keď staticky ekvivalentných, silových sústav na poddajné hmotné objekty je vo všeobecnom prípade rozdielny a platí tvrdenie: **Rozdielne, aj keď staticky ekvivalentné, sústavy síl spôsobia odlišné pretvorenie (deformáciu) hmotného objektu.**

Na základe axiómy o zachovaní silového účinku je možné tiež dokázať, že účinok sily na dokonale tuhé teleso sa nijako nezmení, ak jej pôsobisko ľubovoľne posunieme v smere jej pôsobenia (t.j. po jej nositeľke). Toto tvrdenie v statike poznáme ako **vetu o posunutí sily po jej nositeľke**. Rovnako, ako axióma o nulovom systéme síl, je využiteľná iba v prípade riešenia silových účinkov pôsobiacich na dokonale tuhé teleso.

2.3.5. Veta o posunutí sily po jej nositeľke

Podľa axiómy o nulovom systéme síl môžeme k zadanej sile F , pôsobiacej na dokonale tuhé teleso v bode A , pripojiť dve rovnako veľké sily $+F'$ a $-F''$, pôsobiace na rovnakej nositeľke, ale v bode B (Obr.2.44). Už vieme, že pohybový účinok sily F na dokonale tuhé teleso sa tým vôbec nezmení.

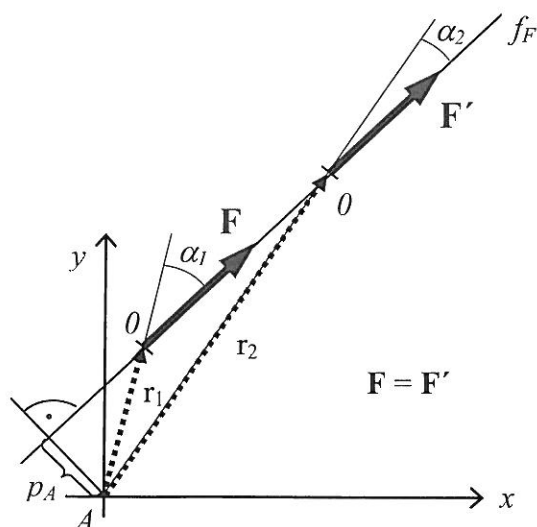
Sila F , pôsobiaca v bode A (obr.2.44a) je podľa uvedenej axiómy staticky ekvivalentná so sústavou troch síl F, F', F'' , pôsobiacich v bodoch A a B , (obr.2.44b). Platí $F' + F'' = 0 \rightarrow$ **rovnovážna sústava síl** (resp. **nulový systém síl**). Ak uvažujeme, že $F' = -F'' = F$ (obr.2.44b) potom platí aj $F + F'' = 0$. Po odobratí takejto dvojice síl, na telese zostáva iba sila $F' = F$, pôsobiaca v bode B . Znamená to, že sila F má rovnaký posuvný účinok v bode A aj v bode B , čiže ju môžeme po jej nositeľke ľubovoľne posúvať. Hovoríme, že sila je **vektor viazaný k priamke** – ku svojej nositeľke f .

Zjednodušene povedané: Ak ku sile F , pôsobiacej v bode A , pridáme do bodu B nulový systém síl, tvorený silami F' a F'' a ak inú rovnovážnu sústavu, tvorenú silou F v bode A a silou F'' v bode B odoberieme, bude na teleso – bez zmeny výsledného statického účinku – pôsobiť iba sila $F' = F$, pôsobiaca v bode B . Je teda zrejmé, že $(F \rightarrow A) \equiv (F \rightarrow B)$ (obr.2.44c) a preto platí:

Silu pôsobiacu na dokonale tuhé teleso môžeme po jej nositeľke ľubovoľne posúvať, pričom jej výsledný statický účinok na teleso sa nezmení.

Príklad 2.17: Dokážte, že posunutím sily F po jej nositeľke f_F sa jej výsledný účinok na dokonale tuhé teleso, napr. vzhľadom k bodu A , nezmení (obr.2.46).

Riešenie:



Obr.2.46

Posunutie sily po jej nositeľke predstavuje špeciálnu transformáciu sily. Platí, že posunutím sily F po jej nositeľke f_F sa jej silové účinky vzhľadom k ľubovoľnému bodu na hmotnom objekte, ale i v celej rovine nezmenia. Dôkaz:

- Posuvný účinok: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$

$\Rightarrow$ posuvný účinok od oboch síl F aj F' je rovnaký.

- Otáčavý účinok: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} \Rightarrow M_1 = r_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot F = p_A \cdot F,$$

$$\text{pričom } \sin \alpha_1 = \frac{p_A}{r_1} \Rightarrow p_A = r_1 \cdot \sin \alpha_1.$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}' \Rightarrow M_2 = r_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot F' = p_A \cdot F' = p_A \cdot F,$$

$$\text{pričom } \sin \alpha_2 = \frac{p_A}{r_2} \Rightarrow p_A = r_2 \cdot \sin \alpha_2.$$

Platí $M_1 = M_2$. Otáčavý účinok na DTT od síl ležiacich na spoločnej nositeľke je staticky ekvivalentný.

Záver: Posunutím sily po jej nositeľke sa jej statické účinky na dokonale tuhé teleso nezmenia.

? Určite posuvný a otáčavý účinok od síl na spoločnej nositeľke. Zadané: $F = F' = 2 \text{ kN}$, $\alpha_1 = 40^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $r_1 = 0,389 \text{ m}$, $r_2 = 0,5 \text{ m}$.

Poznámka: Vetu o posunutí sily po jej nositeľke s výhodou využívame napr. pri grafickom určovaní výslednice dvoch síl, kedy spoločný priesečník ich nositeľiek neleží na nákrese. Veta platí za predpokladu dokonalej tuhosti hmotného objektu, pretože na skutočnom telese by premiestnenie sily na iné miesto spôsobilo aj zmenu jeho pretvorenia. Posúvanie sily po nositeľke u poddajných telies je preto neprípustné.

2.4. Transformácia silových účinkov na dokonale tuhom telese

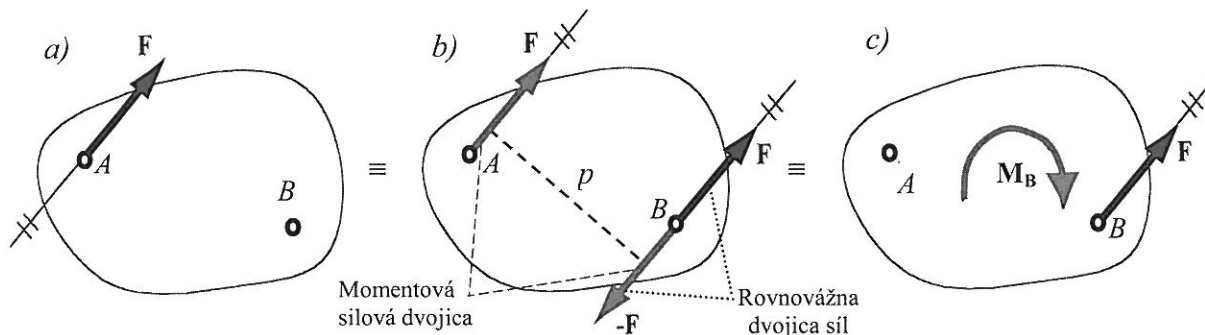
Pojmom transformácia sily obvykle nazývame nahradenie jednej silovej veličiny inou. Najčastejšie sa jedná o **preloženie sily na iné miesto na telese** alebo **skladanie osamelej sily a silovej dvojice**. Ak má novo získaná (transformovaná) sila alebo silová sústava rovnaké účinky na teleso ako pôvodná, takúto náhradu považujeme za ekvivalentnú transformáciu silovej veličiny a hovoríme o tzv. **ekvivalencii silových účinkov**.

2.4.1. Preloženie sily na telese

Silu, pôsobiacu na dokonale tuhé teleso môžeme preložiť do iného, ľubovoľného bodu telesa. Ak v rovine určenej nositeľkou sily a týmto bodom, pridáme nulový (rovnovážny) systém síl, jeho účinok spolu so silou pôvodnou vyvolá okrem posuvného účinku aj účinok otáčavý. Veľkosť a zmysel prídavného otáčavého účinku je rovný veľkosti a zmyslu statického momentu sily v pôvodnej polohe vzhľadom k zvolenému bodu prekladu. Platí

Silu F môžeme premiestniť do iného pôsobiska na telese tak, že do nového pôsobiska vložíme rovnakú silu F a pridáme prislúchajúci otáčavý účinok veľkosti $M = F \cdot p$ (od sily F vzhľadom k novému pôsobisku sily), kde p je kolmá vzdialenosť medzi nositeľkou sily F a novým pôsobiskom sily.

Dôkaz uvedeného tvrdenia, platného pre oblasť mechaniky tuhého telesa, je zrejmý z obr.2.47.



Obr. 2.47

Na základe axiomy o zachovaní silového účinku (t.j. pridanie rovnovážnej sústavy síl k inej silovej sústave) platí: Pridaním rovnovážnej dvojice síl $F, -F$, pôsobiacej v bode B telesa ($F, -F \rightarrow B$) podľa obr. 2.47b je takáto sústava síl ekvivalentná ($\equiv$) so sústavou pôvodnou (obr.2.47a), ako aj so sústavou tvorenou silovými účinkami F a M_B (obr. 2.47c). Vetu o preložení sily na telese môžeme symbolicky zapísať v tvare

$$(F \rightarrow A) \equiv (F \rightarrow B), M_B = F \cdot p, \quad (2.42)$$

pričom výsledný zmysel otáčavého účinku oboch sústav (obr.2.46a,c) musí byť rovnaký.

Znamená to, že silu F môžeme na DTT preložiť do iného pôsobiska tak, že v novom pôsobisku vložíme rovnakú silu F a pridáme otáčavý účinok M – t.j. moment od sily F vzhľadom k novému pôsobisku sily.

Príklad 2.18: Vykonajte ekvivalentnú transformáciu sily F s pôsobiskom v bode O tak, aby jej nové pôsobisko bolo v bode A (Obr.2.48). Zadané: $F=10 \text{ kN}$, $|r_A|=1 \text{ m}$, $\alpha=30^\circ$.

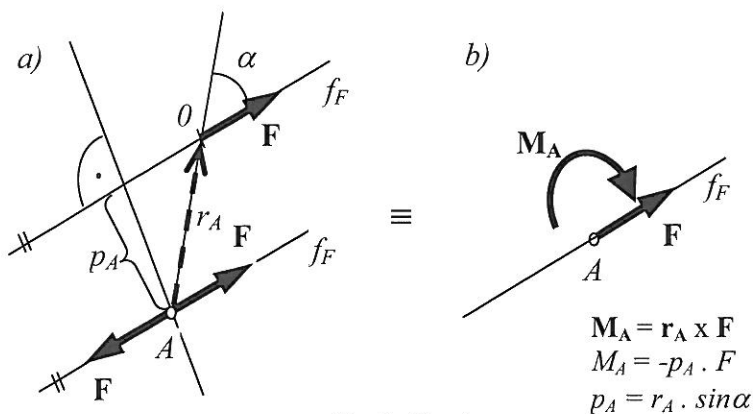
Riešenie:

- Účinky sily pred transformáciou:

Posuvný účinok (PÚ): $F = 10 \text{ kN}$

Otáčavý účinok (OÚ): $M_A = -p_A \cdot F = -r_A \cdot \sin \alpha \cdot F$
 $M_A = -1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 10 = -5 \text{ kNm}$

Transformáciu môžeme vykonať pripojením tzv. „nulového systému síl“ $F, -F$ (Obr.2.48b) do bodu A . Nulový systém síl má na hmotné objekty nulový pohybový účinok, tzn. $PÚ = 0$, $OÚ = 0$. Ak má byť transformácia staticky ekvivalentná, PÚ aj OÚ musia byť zachované aj po nej.



Obr.2.48 a,b

- Účinky sily po transformácii:

Posuvný účinok všetkých 3 síl :

(PÚ) $\equiv F = 10 \text{ kN}$

Otáčavý účinok všetkých 3 síl :

(OÚ) $\equiv M_A = -p_A \cdot F = -5 \text{ kNm}$, kde $p_A = r_A \cdot \sin \alpha = 1,0,5 = 0,5 \text{ m}$.

Záver: Silu F môžeme na DTT preložiť do iného pôsobiska tak, že do zvoleného bodu prekladu vložíme rovnakú silu F a pridáme otáčavý účinok (Obr.2.48b) okolo bodu prekladu o veľkosti $M_A = p_A \cdot F$.

2.4.2. Skladanie sily a silovej dvojice

Ak postupujeme v obr.2.47 obrátene – môžeme vykonať aj redukciu všeobecnej sústavy síl – t.j. *silu F a moment M nahradiť jedinou silou F'* , posunutou od pôsobiska sily F o vzdialenosť

$$p = \frac{M}{F} . \quad (2.43)$$

Z uvedeného postupu pre redukciu sústavy síl vyplýva dôležitý poznatok, platný iba pre DTT a platí:

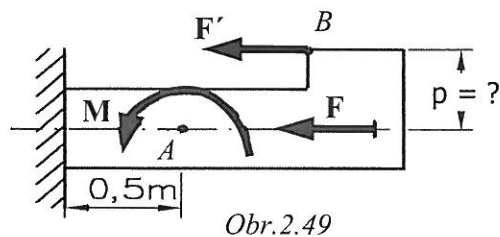
Silu F a moment M , môžeme v ľubovoľnom bode tuhého hmotného objektu nahradiť jedinou ekvivalentnou silou F' , posunutou od pôsobiska sily F o vzdialenosť $p = M / F$ v takom smere, ktorý zaistí rovnaký otáčavý účinok sily F' ako mal pôvodný moment M .

Príklad 2.19: Nahradiť silu F pôsobiacu v bode A a momentom M staticky ekvivalentným účinkom vo forme sily F' , pôsobiacou v bode B . Zadané: $F=600$ N, $M=150$ Nm, rozmery podľa obr.2.49.

Riešenie:

Ekvivalentná sústava silových účinkov, pôsobiacich v bode B , bude tvorená (Obr.2.49):

- silou $F' = 600$ N ,
- pôsobisko sily F' : $p = M / F = 150 / 600 \Rightarrow p = 0,25$ m



Obr. 2.49

Záver: Silu F a moment M je možné v statike (DTT) nahradiť rovnako veľkou silou F' , ktorá je posunutá od nositeľky sily F o vzdialenosť $p = M / F$.

Všetky uvedené princípy - zachovania silového účinku, posunutia sily po jej nositeľke, preloženia sily na teleso, ako aj skladania síl a silových dvojíc platia iba v prípade, ak *môžeme hmotný objekt uvažovať ako dokonale tuhý*. Platí, že účinok dvoch rôznych, aj keď ekvivalentných sústav síl na poddajné teleso, je v skutočnosti rozdielny, pretože odlišné usporiadanie silových sústav vyvolá odlišné pretvorenie telesa.

Kontrolné otázky:

1. Objasnite, aké základné úlohy riešime v statike a aké princípy pritom využívame, uveďte príklad.
2. Definujte pojem sila, charakterizujte ju a uveďte príklady silového pôsobenia medzi telesami v praxi.
3. Uveďte, ako vzniká silové pôsobenie medzi hmotnými objektmi, objasnite účinky sily na hmotné objekty, uveďte praktické príklady na statický a dynamický účinok sily, resp. príklady posuvného a otáčavého účinku objektov.
4. Objasnite možnosti definovania sily v rovine a priestore, uveďte vzťahy pre rozklad a rozdiely medzi nimi.
5. Definujte statický moment sily, veľkosť a zmysel momentu, rameno sily, Varignonova momentová veta.
6. Definujte statický moment silovej dvojice, veľkosť a zmysel jej otáčavého účinku, vlastnosti silovej dvojice.
7. Uveďte základné axiómy statiky a stručne charakterizujte o čom hovoria.
8. Objasnite podstatu axiómy o rovnováhe dvoch síl, vzťahy, dôsledky a jej praktické využitie.
9. Charakterizujte axiómu o rovnobežníku síl, základný princíp, praktické využitie v statike.
10. Objasnite vzťahy a súvislosti pri skladaní dvoch síl – analytické aj grafické riešenie.
11. Definujte princíp a vzťahy pri rozklade sily do dvoch zadaných – navzájom kolmých - smerov.
12. Uveďte matematický princíp a vzťahy pri rozklade sily do dvoch zadaných – navzájom nekolmých - smerov.
13. Objasnite podstatu axiómy akcie a reakcie, uveďte rozdiel príp. spoločné črty s axiómou o rovnováhe dvoch síl.
14. Charakterizujte axiómu o zachovaní silového účinku a uveďte jej praktické využitie a dôsledky.
15. Objasnite podstatu vety o posunutí sily po jej nositeľke, uveďte prečo je platná iba v oblasti statiky.
16. Objasnite podstatu prekladania sily na hmotnom objekte, uveďte jej praktické dôsledky a možnosti využitia.
17. Možnosti využitia skladania sily a silovej dvojice v statike, princíp skladania, praktický príklad využitia.

3. SÚSTAVY SÍL V ROVINE, ŤAŽISKO HMOTNÉHO OBJEKTU

Silové účinky uvažované vo fyzikálnom modeli analyzovanej konštrukcie nazývame **silová sústava** (SS), ktorá je v konečnom dôsledku vždy tvorená iba osamelými silami a silovými dvojicami (momentmi).

3.1. Rozdelenie silových sústav a analýza ich účinkov na teleso

Dve a viac síl pôsobiacich na hmotný objekt nazývame všeobecným pojmom **silová sústava**, príp. **sústava síl**. Z hľadiska využitia v mechanike telies sústavy síl najčastejšie členíme podľa :

- **rozmiestnenia silových účinkov v priestore:**
 - **rovinné** - nositeľky všetkých síl ležia v jednej rovine,
 - **priestorové** - nositeľky síl sú rozložené v priestore.
- **rozloženia silových účinkov:**
 - **centrálne** - nositeľky všetkých síl sa pretínajú v jednom spoločnom bode,
 - **všeobecné (rozptýlené)** - nositeľky síl sa pretínajú v rôznych bodoch.

Jedným z najlepšie predstaviteľných členení sústav síl uvažovaných v rovine je ich kategorizácia podľa usporiadania nositeľiek síl. Silovú sústavu v ktorej sú sily ľubovoľne rozložené v priestore nazývame **všeobecná priestorová sústava síl**. Ak existuje rovina, v ktorej ležia nositeľky všetkých síl danej silovej sústavy, hovoríme o **všeobecnej rovinnej sústave síl**. V oboch prípadoch môžu nastať zvláštne prípady, a to keď nositeľky všetkých síl sa navzájom pretínajú v jednom bode - **centrálna silová sústava** (zväzok síl) alebo sú všetky sily navzájom rovnobežné a hovoríme o **sústave rovnobežných síl**. Špecifický prípad usporiadania síl je, keď nositeľky všetkých síl ležia na jednej priamke, tzn. spoločnej nositeľke a hovoríme o **sústave síl pôsobiacich na spoločnej nositeľke**. Vo všeobecnosti teda môže byť sústava síl usporiadaná ako:

- **sústava síl pôsobiacich na spoločnej nositeľke**
- **sústava síl so spoločným pôsobiskom - zväzok síl**
- **sústava rovnobežných síl**
- **všeobecná sústava síl** – ako najvšeobecnejší prípad usporiadania silových účinkov.

Pre zjednodušenie pochopenia princípov rovnováhy a ekvivalencie sústav síl sa budeme ďalej zaoberať iba analýzou tzv. **rovinných silových sústav**. Všeobecne však platí, že riešenie sústav síl v priestore je založené na rovnakých princípoch, iba je primerane zložitejšie a náročnejšie na predstavivosť. Sústavu síl v priestore môžeme transformovať na 3 sústavy rovinné, ležiace v troch rovinách zvoleného pravouhlého systému súradníc. Sústava viac síl pôsobiacich v rovine – **rovinná sústava síl** (RSS) – je tvorená teda silami, ktorých nositeľky ležia v jednej rovine. Je tiež zrejmé, že ak RSS pôsobí na viazané teleso, aj väzby, ktorými je teleso viazané ku svojmu okoliu, musia umožniť vznik väzbových reakcií v tej istej rovine.

Riešenie sústav síl – **nahradenie alebo rovnováhu** - realizujeme obvykle pomocou postupov ako:

- **skladanie síl** - nahradenie sústavy síl jedinou silou, tzv. **výslednicou R** alebo výpočet jedinej sily, ktorá uvedie sústavu síl do statickej rovnováhy – tzv. **rovnovážna sila F_R** ,
- **rozkladanie síl** - nahradenie osamelej sily sústavou síl alebo náhrada príp. eliminácia jednej sústavy síl inou silovou sústavou,
- **ďalšie axiómy a vety statiky** – o rovnováhe dvoch síl, preložení sily, posunutí sily po nositeľke a pod.

3.1.1. Základné pojmy v analýze silových sústav

Charakteristika základných pojmov z oblasti analýzy sústav síl:

- **Rovnováha** = *uvedenie sústavy síl do rovnováhy*. Zjednodušene rovnováhu vyjadrujeme ako tvrdenie: „Súčet všetkých pohybových účinkov od pôsobenia sústavy síl na hmotný objekt je nulový“. Znamená to, že ak je náhradou sústavy síl výslednica $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ a moment $\mathbf{M}=\mathbf{0}$, sústava síl sa nachádza v stave statickej rovnováhy a hovoríme o tzv. **rovnovážnej sústave síl**.
- **Redukcia** = *nahradenie jednej sústavy síl čo najjednoduchšou náhradou tak, aby jej pôvodný účinok na hmotný objekt zostal rovnaký*. Najčastejšie ide o nájdenie najjednoduchšej možnej náhrady, ktorej pohybový (posuvný aj otáčavý) účinok je rovnaký, ako u silovej sústavy pôvodnej. Sústavu síl môžeme nahradiť jednou silou $\mathbf{R}$ - *výslednicou* a jedným momentom $\mathbf{M}$ príp. jedinou silou $\mathbf{R}'$, posunutou od sily $\mathbf{R}$ o určitú vzdialenosť v prislúchajúcom smere.
- **Ekvivalencia** = *nahradenie jednej SS inou silovou sústavou tak, aby mali obidve sústavy na hmotný objekt rovnaký pohybový (posuvný aj otáčavý) účinok*. V takomto prípade hovoríme o **staticky ekvivalentných sústavách síl**. Redukcia je teda iba špecifickým prípadom ekvivalencie.

Sústava síl, rovnako ako osamelá sila alebo silová dvojica, môže mať na teleso iba **posuvný, otáčavý** alebo všeobecný - **posuvno-otáčavý účinok**. Pre zadanú sústavu všeobecne usporiadaných síl $\mathbf{F}_i$, ležiacich v jednej rovine (Obr.3.1) platí:

- **Posuvný účinok (PÚ)** – je určený algebrickým súčtom (sumou) posuvných účinkov od jednotlivých síl

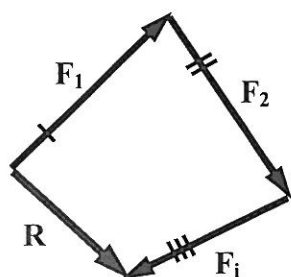
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (3.1)$$

Pre veľkosť **výslednej sily** $\mathbf{R}$ zadanej sústavy síl a veľkosť jej zložiek pri analytickom riešení (Obr.3.1) platí:

$$\text{- zložky výslednice } R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} ; R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (3.2)$$

$$\text{- výslednica síl } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3.3)$$

Pri grafickom riešení výslednica $\mathbf{R}$ takejto sústavy síl uzatvára tzv. **silový (vektorový, zložkový) obrazec** (Obr.3.2).



Obr. 3.2

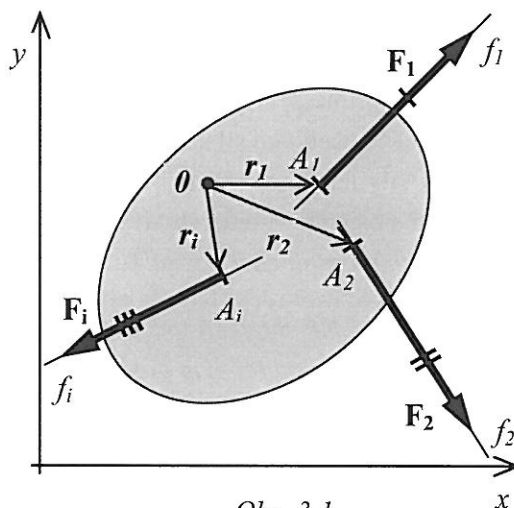
- **Otáčavý účinok (OÚ)** zadanej sústavy síl, definovaný k ľubovoľne zvolenému bodu roviny je určený algebrickým súčtom všetkých otáčavých účinkov - momentov - od jednotlivých silových účinkov SS a platí

$$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_{iA} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \Rightarrow |\mathbf{M}| = M. \quad (3.4)$$

Z výkladu o sile a jej účinkoch na telesá už vieme, že veľkosť výsledného momentu, ako miery otáčavého účinku sústavy síl, je vzhľadom k rôznym bodom roviny rôzna a jeho výsledná orientácia (t.j. smer otáčavého účinku) je závislá iba na zmysle a veľkosti otáčavých účinkov jednotlivých silových veličín v sústave.

Znamienková dohoda pre kladné smery pôsobenia osamelých síl, ako aj ich otáčavých účinkov je rovnaká ako pri objasňovaní účinku osamelej sily na DTT (kap. 2.2.2.) a platí:

Za kladné (+) sú považované sily pôsobiace v smere doprava a nahor a pokiaľ vyvolávajú ľavotočivý otáčavý účinok (proti smeru pohybu hodinových ručičiek).



Obr. 3.1

Príklad 3.1: Určite veľkosť a zmysel posuvného a otáčavého účinku síl F_1 a F_2 vzhľadom k bodu A (Obr.3.3).
Zadané: $F_1=500\text{ N}$, $F_2=1500\text{ N}$, $\alpha=45^\circ$, $a=1\text{ m}$, $b=2\text{ m}$.

Riešenie:

- **Posuvný účinok ($PÚ$):** ku všetkým bodom telesa je rovnaký.

Platí: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; $R = |\mathbf{R}|$

$$R_x = \sum F_{ix} = F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha$$

$$R_x = 500 \cdot 0,707 = 353,5\text{ N}$$

$$R_y = \sum F_{iy} = -F_{1y} - F_2 = -F_1 \cdot \sin \alpha - F_2$$

$$R_y = -500 \cdot 0,707 - 1500 = -1853,5\text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{353,5^2 + (-1853,5)^2} \Rightarrow R = 1919,74\text{ N.}$$

$$\tan \alpha'_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-1853,5}{353,5} = -5,2433 \Rightarrow \alpha'_R = \tan^{-1}(-5,2433) = \arctg(-5,2433) = -79,2^\circ.$$

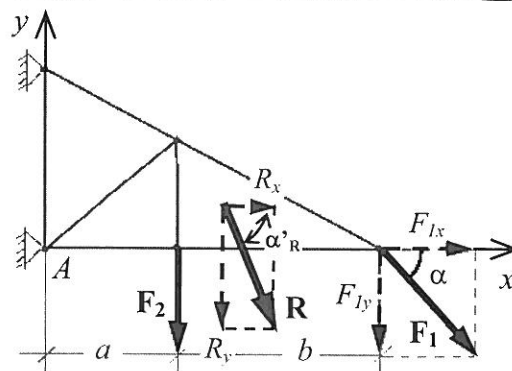
Pre uhol výslednice $\mathbf{R}$ uvažovaný od kladnej poloosi x dostaneme $\alpha_R = 360^\circ - \alpha'_R = 280,8^\circ$

- **Otáčavý účinok ($OÚ$):** otáčavý účinok napr. vzhľadom k bodu A bude

$$M_A = F_{1x} \cdot 0 - F_{1y} \cdot (a+b) - F_2 \cdot a = -F_{1y} \cdot (a+b) - F_2 \cdot a = -F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+b) - F_2 \cdot a$$

$$M_A = -500 \cdot \sin 45^\circ \cdot (1+2) - 1500 \cdot 1 = -1060,5 - 1500 \Rightarrow M_A = -2560,5\text{ Nm.}$$

Záver: Hodnota momentu M_A má záporné znamienko – tzn. zadaná sústava síl má tendenciu stožiarom otáčať v smere pohybu hodinových ručičiek, čo je zrejmé aj z nakresleného mechanického modelu.



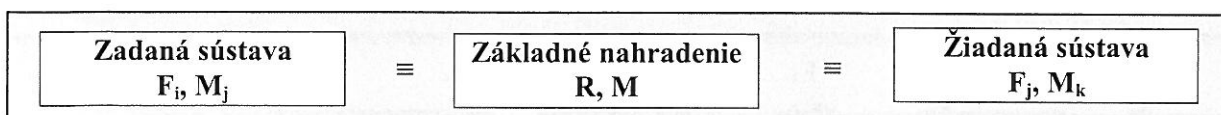
Obr. 3.3

3.1.2. Základné úlohy analýzy silových sústav

Základné úlohy v rámci riešenia rovinných sústav síl sú:

1. Riešenie statickej ekvivalencie – základ tvorí **redukcia síl**, t.j. nájdenie čo najjednoduchšej ekvivalentnej sústavy síl. Napríklad, ako bude uvedené neskôr, výslednicou zväzku síl je vždy jediná sila $\mathbf{R}$, prechádzajúca ich spoločným priesečníkom (ako dôsledok axiómy o rovnobežníku síl).

Pri skúmaní účinkov silových sústav na hmotný objekt je často nevyhnutné transformovať zadanú silovú sústavu na silovú sústavu požadovanú. V takomto prípade najskôr nahradíme zadanú silovú sústavu $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{M}_j$ jednou výslednou silou – výslednicou $\mathbf{R}$ a výslednou silovou dvojicou – momentom $\mathbf{M}$. Toto nahradenie ďalej transformujeme na požadovanú sústavu $\mathbf{F}_j$, príp. aj $\mathbf{M}_k$ a hovoríme, že zadaná sústava síl a žiadaná sústava síl sú navzájom ekvivalentné (Obr.3.4).



Obr.3.4

Platí, že dve sústavy síl sú staticky ekvivalentné, ak majú k tomu istému (ľubovoľne zvolenému) bodu rovnaké základné nahradenie. Pôsobenie obidvoch sústav spôsobuje rovnaký – staticky ekvivalentný – pohybový stav telesa alebo ponecháva teleso v pokoji.

2. Riešenie statickej rovnováhy – základ tvorí správne definovanie a riešenie statických podmienok (rovníc) rovnováhy sústavy síl. Rovnováha síl nastane iba vtedy, keď bude výslednica silových účinkov SS nulová – tzn. výsledkom redukcie bude sila $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, príp. pre všeobecnú sústavu síl $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ aj $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

Znamená to, že sústava síl je v rovnováhe, ak jej základné nahradenie k ľubovoľne zvolenému bodu je nulové, t.j. nevyvoláva žiadne zmeny pohybového stavu hmotného objektu. Voláme ju **rovnovážna sústava síl**. Pre rovnováhu síl pôsobiacich na DTT platia podmienky rovnováhy vo vektorovom tvare

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad , \quad \sum \mathbf{M}_{iA} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.5)$$

Pre analytické riešenie je podľa druhu riešenej silovej sústavy vhodné uvedené vektorové rovnice rozpísať na prislúchajúci počet podmienok rovnováhy (t.j. silové a momentové rovnice)) v ich skalárnom tvare. Skalárny tvar rovníc rovnováhy bude uvedený u jednotlivých typov analyzovaných sústav síl.

3.2. Sústava síl ležiacich na spoločnej nositeľke

Sústava síl pôsobiacich na jednej priamke je tvorená silami, ktoré ležia na jedinej, spoločnej, nositeľke. Hovoríme, že takto usporiadané sily sú **kolineárne**. Sily môžu mať rôznu veľkosť, ale aj orientáciu (obr.3.5).

3.2.1. Redukcia a ekvivalencia sústavy síl so spoločnou nositeľkou

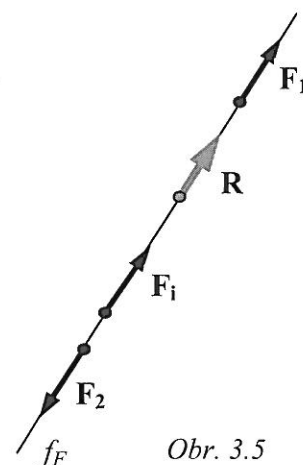
Sústavu síl na jednej spoločnej nositeľke (SSSN) môžeme vždy nahradiť jedinou silou – **výslednicou R**. Sila **R**, ako ekvivalent takejto sústavy je veľkosťou a orientáciou určená počiatkom prvej sily a koncom poslednej sily SSSN po ich vektorovom sčítaní. Pre veľkosť výslednice **R** platí

$$R = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (3.6)$$

pričom jej smer je zrejмый, nakoľko musí ležať na spoločnej nositeľke SSSN.

Podmienka ekvivalencie dvoch SSSN je definovaná v tvare

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{j=1}^m F_j. \quad (3.7)$$



Obr. 3.5

3.2.2. Rovnováha sústavy síl so spoločnou nositeľkou

Rovnovážna sila je veľkosťou a orientáciou daná koncom poslednej sily a začiatkom prvej sily zadanej SSSN pri ich vektorovom sčítaní. Podmienka rovnováhy takto definovanej sústavy síl má tvar

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (3.8)$$

Grafická podmienka rovnováhy síl je splnená, ak je **silový (zložkový) obrazec SSSN uzavretý**.

Príklad 3.2: Výpočtom aj graficky určite veľkosť výslednice piatich síl, pôsobiacich na spoločnej nositeľke (Obr.3.6). Zadané: $F_1=150 \text{ N}$, $F_2=200 \text{ N}$, $F_3=100 \text{ N}$, $F_4=250 \text{ N}$, $F_5=300 \text{ N}$.



Obr. 3.6

Riešenie:

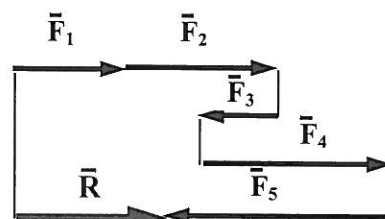
• Analyticky:

$$R = \sum_{i=1}^5 F_i = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - F_5$$

$$R = 150 + 200 - 100 + 250 - 300 = \mathbf{200 \text{ N}}$$

• Graficky:

Zvolená mierka síl :
 $m_F = 10 \text{ N/mm}$.



Obr. 3.6 a

Z Obr.3.6a jednoducho odmeraním zistíme veľkosť *zobrazovacieho úseku výslednice* $\bar{R}$. Pre veľkosť výslednice R potom platí $R \approx \bar{R} \cdot m_F = 20 \cdot 10 = 200$ N. Rovnováhu sústav síl pochopíme úplne vtedy ak si uvedomíme, že ak by sme k zadanej SSSN pridali ďalšiu silu s veľkosťou $F_6 = -R$, zadaná sústava síl by sa dostala do stavu statickej rovnováhy, t.j. platilo by $R = 0$.

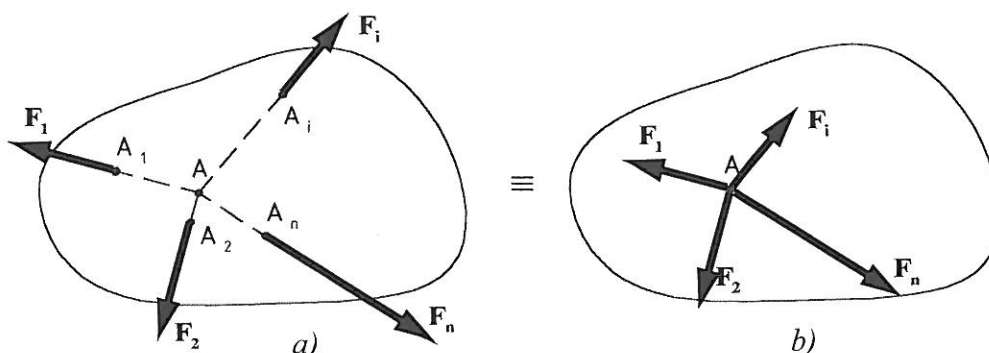
Poznámka: Silový obrazec SSSN pri grafickom riešení tvorí priamku, ale pre prehľadnosť sme skladané sily nakreslili s odsadením (neležia na jednej nositeľke).

3.3. Sústava síl so spoločným pôsobiskom - zväzok síl

Sústava síl so spoločným pôsobiskom (často **zväzok síl** alebo **centrálny silový systém**) je tvorená silami, ktorých nositeľky sa pretínajú v jedinom spoločnom bode (obr.3.7a). Náhradou takejto sústavy síl je vždy jediná sila R , ktorej nositeľka prechádza spoločným pôsobiskom síl, tvoriacich redukovaný zväzok síl.

Sily tvoria rovinný zväzok síl keď ich nositeľky ležia v jednej rovine a majú spoločný priesečník

Vzhľadom na vetu o posunutí sily po jej nositeľke je zrejmé, že zaťaženie hmotného objektu silami F_1 až F_n (obr. 3.7b) je staticky ekvivalentné so zaťažením na obr.3.7a.

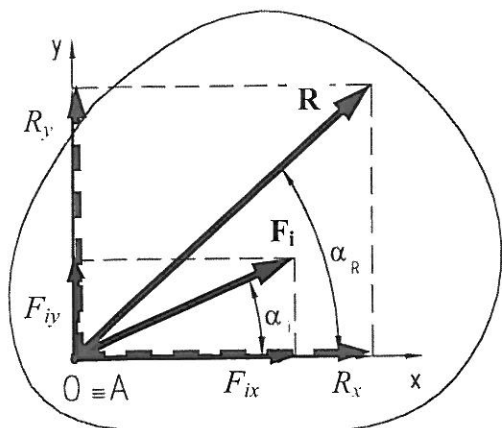


Obr. 3.7

3.3.1. Redukcia rovinného zväzku síl

V statike redukujeme rovinný zväzok síl (RZS) prostredníctvom rozkladu jednotlivých síl zväzku do dvoch zložiek (t.j. ako priemet sily do osí zvoleného súradnicového systému, napr. osí x, y). Rozkladom síl na zložky v podstate RZS transformujeme na dve sústavy síl pôsobiacich na spoločnej nositeľke (SSSN), kde nositeľkami zložiek síl tvoriacich RZS sú súradnicové osi x, y .

Rovinný zväzok síl môžeme nahradiť jedinou silou R , ležiacou na nositeľke, prechádzajúcej spoločným priesečníkom nositeľiek jednotlivých síl sústavy.



Obr. 3.8

3.3.1.1. Analytické riešenie

Najskôr zvolíme vhodný súradnicový systém Oxy , najlepšie s počiatkom v spoločnom priesečníku nositeľiek síl tvoriacich RZS. Najčastejšie bývajú zadané veľkosti síl F_i a ich smerové uhly α_i (obr.3.8), príp. súradnice ich pôsobísk A_i (pre $i=1, 2, \dots, n$).

Najskôr sily F_i nahradíme ich zložkami v smere osí x a y , ktorých veľkosť určíme z rozkladu sily

$$F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha \quad , \quad F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha \quad (3.9)$$

Výslednice zložiek jednotlivých síl v smere oboch osí získame ako

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos \alpha_i, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin \alpha_i \quad (3.10)$$

a hľadaná výslednica $\mathbf{R}$ zadaného zväzku síl má podľa Pythagorovej vety veľkosť

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (3.11)$$

Smer výslednice $\mathbf{R}$ je určený uhlom α_R , pre ktorý z goniometrie platí

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}. \quad (3.12)$$

Ak vyjadríme zložky výslednice pomocou uhla α_R bude platiť

$$R_x = R \cdot \cos \alpha_R \quad \text{a} \quad R_y = R \cdot \sin \alpha_R, \quad (3.13)$$

čo umožňuje napr. podľa (3.10) napísať rovnicu v tvare

$$R \cdot \cos \alpha_R = \sum_{i=1}^n F_{ix} \Rightarrow R \cdot \cos \alpha_R = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos \alpha_i. \quad (3.14)$$

Vzťah (3.14) vyjadruje tzv. **vetu o priemete výslednice**, slovne formulovanú nasledovne:

Priemet výslednice zväzku síl do ľubovoľného smeru sa rovná algebrickému súčtu priemetov jednotlivých síl tvoriacich zväzok do toho istého smeru.

V špecifickom prípade, ak je smerový uhol všetkých síl rovnaký ($\alpha_i = \alpha$), t.j. všetky sily nutne ležia na jednej nositeľke (SSSN) bude ich výslednica $R = \sum_{i=1}^n F_i$, pričom nutne musí platiť aj $\alpha_R = \alpha$.

3.3.1.2. Grafické riešenie

Pre grafické riešenie sú obvykle zadané veľkosti síl $\mathbf{F}_i$ a smery ich nositeľiek f_i . Zvolíme vhodnú mierku síl m_F [N/mm] a určíme veľkosti **zobrazovacích úsekov zadaných síl**

$$\overline{F_i} = \frac{F_i}{m_F} \text{ [mm]}. \quad (3.15)$$

Redukciu rovinného zväzku síl môžeme potom vykonať buď postupným uplatnením axiomy o rovnobežníku síl alebo rozšírením vektorového sčítania na viac ako dve sily, napr.

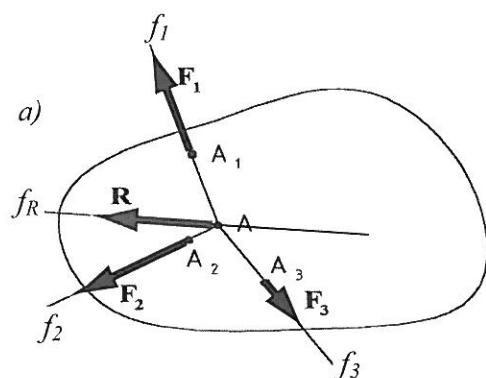
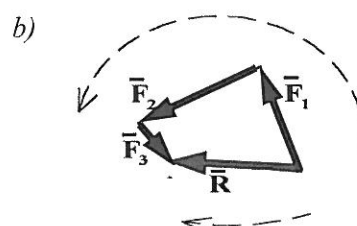
$$\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}_{\mathbf{R}_{1,2}} + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n \quad \text{atď.}, \quad (3.16)$$

čo môžeme zapísať aj vo forme vektorového súčtu síl, v tvare

$$\mathbf{R} = \sum_i^n \mathbf{F}_i. \quad (3.17)$$

Na obr.3.9a je jedno z možných riešení redukcie sústavy troch síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, tvoriacich RZS. Vo vytvorenom zložkovom (silovom) obraze podľa obr.3.9b odmeriame dĺžku $\overline{R}$ [mm] a určíme veľkosť výslednice R v [N] s využitím transformačného vzťahu v tvare $R = \overline{R} \cdot m_F$ [N].

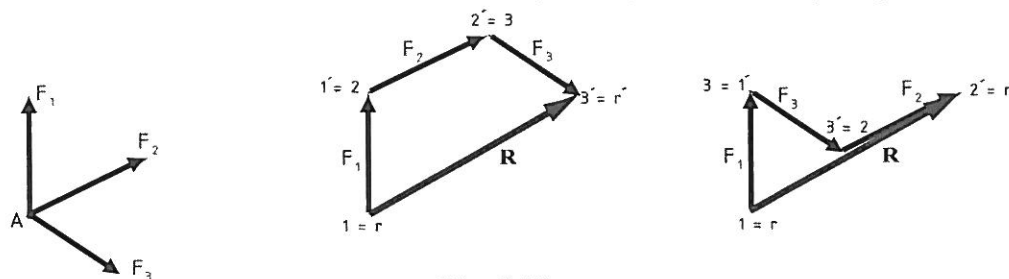
Výslednica RZS pôsobí vždy v spoločnom priesečníku síl a jej zmysel v zložkovom obraze je vždy proti zmyslu obehu jeho zložiek (vyznačené čiarkovane).

zvolíme $m_F = \dots$ 

zložkový (silový) obrazec
 $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$

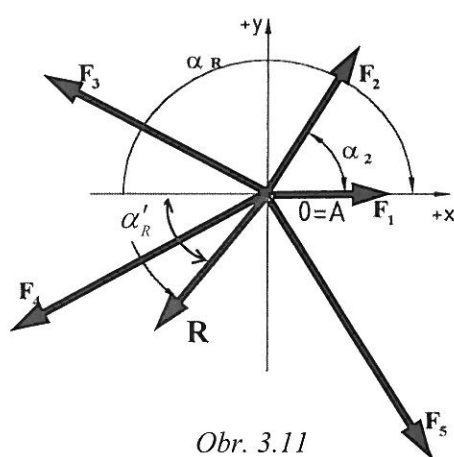
Obr.3.9

Komutatívnosť sčítania síl, t.j. možnosť rôzneho poradia pri skladaní síl, je zrejماً z obr. 3.10.



Obr. 3.10

Príklad 3.3: Určite analyticky aj graficky veľkosť, smer a zmysel výslednice zväzku síl (obr.3.11). Zadané: $F_1=150 \text{ kN}$, $F_2=250 \text{ kN}$, $F_3=350 \text{ kN}$, $F_4=400 \text{ kN}$, $F_5=450 \text{ kN}$, $\alpha_1=0^\circ$, $\alpha_2=60^\circ$, $\alpha_3=150^\circ$, $\alpha_4=210^\circ$, $\alpha_5=300^\circ$.



Obr. 3.11

Riešenie:

- Analyticky:

Výpočtové riešenie, realizované podľa vzťahov 3.9 až 3.12 je výhodné spracovať do tabuľky.

Pravidlo: uhly zvyčajne meriame od kladnej časti osi x v smere proti zmyslu pohybu hodinových ručičiek.

Pomocné výpočty pre redukciu rovinného zväzku síl

Tabuľka 3.1

i	F_i [N]	α_i [°]	$\cos \alpha_i$ [-]	$\sin \alpha_i$ [-]	$F_x = F_i \cos \alpha_i$ [N]	$F_y = F_i \sin \alpha_i$ [N]
1	150	0	1,000	0,000	150,0	0,0
2	250	60	0,500	0,866	125,0	216,5
3	350	150	-0,866	0,500	-303,1	175,0
4	400	210	0,866	-0,500	-346,4	-200,0
5	450	300	0,500	-0,866	225,0	-389,7
$\sum_{i=1}^5$					$R_x = -149,5$	$R_y = -198,2$

Výslednica $\mathbf{R}$, s využitím výsledkov z tab. 3.1, má podľa vzťahu (3.11) veľkosť

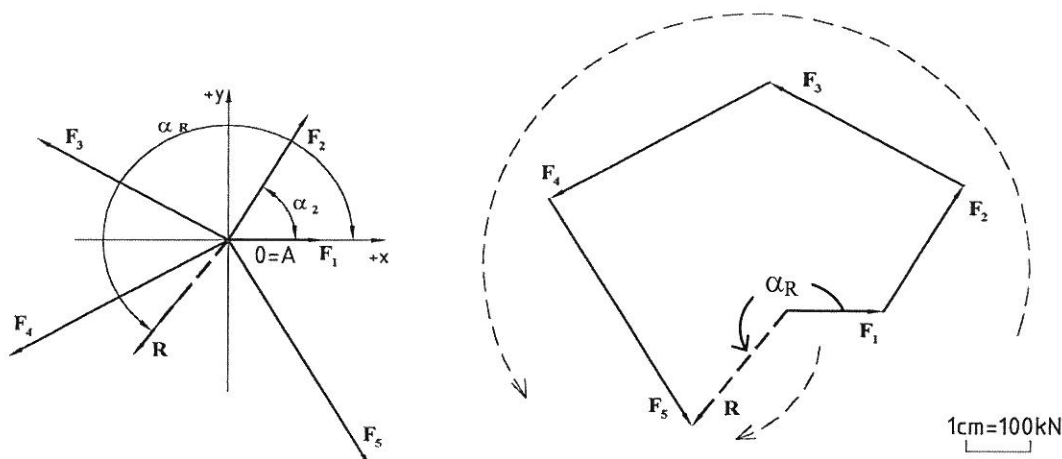
$$R = \sqrt{(-149,5)^2 + (-198,2)^2} = 248,26 \text{ kN}.$$

Výslednica $\mathbf{R}$ zvierá s osou x uhol α'_R , pre ktorý podľa (3.11) platí

$$\operatorname{tg} \alpha'_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-198,2}{-149,5} = 1,3257 \Rightarrow \alpha'_R = \operatorname{arctg} 1,3257 = 52,97^\circ.$$

Uhol α_R vynesný od kladnej poloosi x má potom veľkosť $\alpha_R = 180^\circ + 52,97^\circ = 232,97^\circ$.

- *Graficky:* zvolená mierka síl: $m_F = 10 \text{ kN} \cdot \text{mm}^{-1}$ (Obr.3.11a)



Obr. 3.11 a

Odmeraním zistíme $\bar{R} = 25 \text{ mm}$ a pre veľkosť hľadanej výslednice $\mathbf{R}$ v [N] dostaneme

$$R = \bar{R} \cdot m_F = 25 \cdot 10 \Rightarrow R = 250 \text{ kN}.$$

Smerový uhol výslednice od kladnej poloosi x zistíme priamo odmeraním a platí $\alpha_R \approx 230^\circ$.

Poznámky: 1. Usporiadanie výpočtu do tabuľky umožňuje pri „ručnom výpočte“ jeho zrýchlenie, zníženie rizika chýb a pohotovejšie reakcie na prípadné zmeny v zadani. 2. Pre výpočet α_R je možné využiť aj ďalšie goniometrické vzťahy, napr. $\sin \alpha_R = R_y / R$, resp. $\cos \alpha_R = R_x / R$. 3. Grafické riešenie závisí na precízności kreslenia zložkového obrazca.

3.3.2. Rovnováha rovinného zväzku síl

Rovinný zväzok síl je v rovnováhe, keď jeho pohybový účinok na hmotný objekt je nulový. Stav rovnováhy nastane iba vtedy, ak je výslednica zväzku síl nulová, t.j. $R=0$.

Znamená to, že pri rovnováhe platí $\mathbf{R} = \mathbf{0} \Rightarrow R_x = 0, R_y = 0$. (3.18)

3.3.2.1. Analytické riešenie

Z rovnice (3.9) pre určenie veľkosti výslednice RZS v tvare $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, kde $R_x = \sum F_{ix}$ a $R_y = \sum F_{iy}$ vyplýva, že pri rovnováhe RZS (3.18) musia byť splnené *dve skalárne rovnice* v tvare

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = 0 \\ R_y &= \sum F_{iy} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

vyjadrujúce tzv. **podmienky (rovnice) rovnováhy zväzku síl v rovine**.

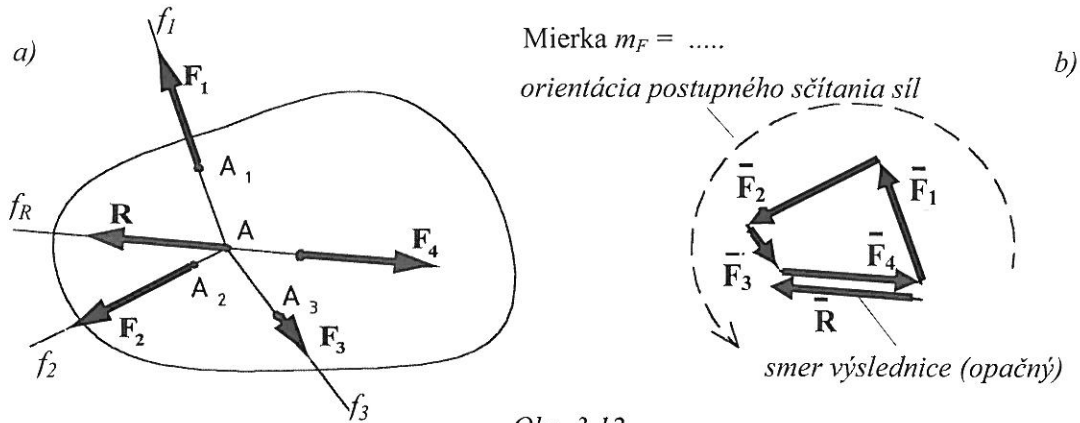
Pri rovnováhe rovinného zväzku síl je algebrický súčet priemetov všetkých síl do smerov súradnicových osí rovný nule v smere každej z osí zvolenej súradnicovej sústavy.

Smery osí systému súradníc môžeme zvoliť ľubovoľne. Sú na smeroch nositeľiek síl úplne nezávislé a pre písanie podmienok rovnováhy akejkoľvek sústavy síl môžeme využiť ľubovoľné, aj nerovnoběžné osi.

V mechanike telies však obvykle volíme navzájom kolmé osi x, y a to v rámci najčastejšie využívanej Kartézskej pravouhlej sústavy súradníc. Je tiež jasné, že zložky síl v smere osí súradnicového systému (t.j. sily ležiace na rovnakej nositeľke) budú v rovnováhe iba vtedy, ak platí vzťah (3.6).

3.3.2.2. Grafické riešenie

Uvažujme rovinný zväzok síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, pôsobiacich v bodoch A_1, A_2, A_3 , pričom ich nositeľky f_1, f_2, f_3 sa pretínajú v spoločnom bode A (obr.3.12a).



Obr. 3.12

Zvolíme vhodnú mierku síl m_F a zakreslíme silový obrazec (obr.3.12b), z ktorého môžeme odmeraním a transformáciou získať veľkosť a smer výslednice $\mathbf{R}$ zadaného RZS (Obr.3.12a na nositeľke f_R). Uvedomme si, že ak by sme k zadanej sústave síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ pridali ďalšiu silu, tzv. **rovnovážnu silu**, ležiacu na nositeľke výslednice f_R , pre ktorú platí

$$-\mathbf{F}_4 = \mathbf{R}, \quad (3.20)$$

pre $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ môžeme potom napísať

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + (\mathbf{F}_4) = \mathbf{R} + (-\mathbf{R}) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

a splniť tak **podmienku rovnováhy RZS** (3.18), definovanú vo vektorovom tvare

$$\sum_1^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

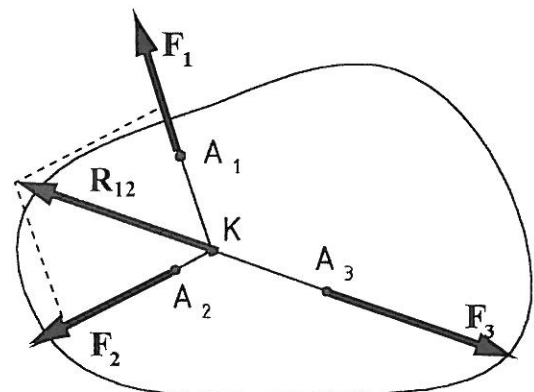
V silovom obrazci (obr.3.12b) sa rovnováha síl prejaví v jednom zmysle uzavretým obrazcom síl. Podmienku rovnováhy RZS pri grafickom riešení môžeme preto slovne vyjadriť v tvare:

Rovinný zväzok síl je v rovnováhe vtedy, ak sú všetky jeho zložky sú orientované v tom istom zmysle a jeho zložkový obrazec je uzavretý.

Je možné preto tvrdiť, že rovinná sústava síl pôsobiacich na DTT je v rovnováhe iba vtedy, keď sily tvoria rovinný zväzok síl a spĺňajú podmienky rovnováhy zväzku síl.

Dôkaz, platný všeobecne (nielen pre 3 sily tvoriace RZS) je zrejmý z obr.3.13. Sily $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ majú výslednicu $\mathbf{R}_{1,2}$, ktorá prechádza ich priesečníkom K . Tretia sila $\mathbf{F}_3$ musí byť pri rovnováhe s výslednicou $\mathbf{R}_{1,2}$ kolineárna (t.j. musia ležať na spoločnej nositeľke) $\Rightarrow$ nositeľky síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ sa musia pretínať v jednom bode K . Zároveň musia byť splnené aj rovnice rovnováhy RZS a musí teda platiť:

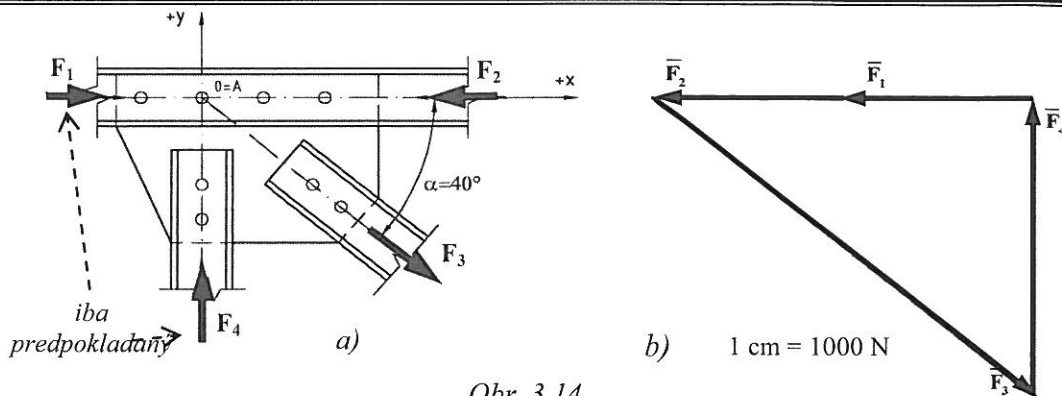
- pri analytickom riešení – rovnice (3.19),
- pri grafickom riešení – rovnica (3.22).



Obr. 3.13

Príklad 3.4: Nitovaný styk (obr.3.14a) je zaťažený silami F_2 a F_3 . Určite výpočtom aj graficky veľkosť síl F_1 a F_4 , aby bol uzol priehradovej konštrukcie v rovnováhe. Zadané: $F_2 = 3 \text{ kN}$, $F_3 = 8 \text{ kN}$.

Riešenie:



Obr. 3.14

- Analyticky:**

Všetky osové sily v prútoch tvoria rovinný zväzok síl (majú spoločný priesečník - bod A), pre ktorý pri rovnováhe po dosadení do (3.19) dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0: F_1 - F_2 + F_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_4 - F_3 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (\text{sústava 2 rovníc o dvoch neznámých } F_1, F_4)$$

Po dosadení hodnôt

$$F_1 = F_2 - F_3 \cdot \cos \alpha = 3000 - 8000 \cdot \cos 40^\circ = -3128 \text{ N}$$

$$F_4 = F_3 \cdot \sin \alpha = 8000 \cdot \sin 40^\circ = 5142 \text{ N}.$$

Hľadané sily sú $F_1 = -3,128 \text{ kN}$ a $F_4 = 5,142 \text{ N}$. Je potrebné si však všimnúť, že sila F_1 má opačný zmysel, ako sme pôvodne (v obr. 3.14a) predpokladali.

- Graficky:**

Obr.3.14b obsahuje grafické riešenie rovnováhy pre mierku $m_F = 100 \text{ N.mm}^{-1} = 1 \text{ kN.cm}^{-1}$. V súlade s podmienkami rovnováhy RZS (3.22) platí $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$. Odmeraním v obr.3.14b zistíme (avšak iba s obmedzenou presnosťou), že $\vec{F}_1 \cong 3,1 \text{ cm}$, $\vec{F}_4 \cong 5,2 \text{ cm}$ a dostaneme

$$F_1 \cong \vec{F}_1 \cdot m_F = 3,1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ kN.cm}^{-1} \cong 3,1 \text{ kN}, \quad F_4 \cong \vec{F}_4 \cdot m_F = 5,2 \text{ cm} \cdot 1 \text{ kN.cm}^{-1} \cong 5,2 \text{ kN}.$$

3.3.3. Rovnováha a ekvivalencia dvoch RZS, statická určitosť riešenia

Statickú rovnováhu resp. ekvivalenciu dvoch zväzkov síl F_i a F_j môžeme zapísať

- vektorovo** $\sum F_i \pm \sum F_j = 0$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ (3.23)

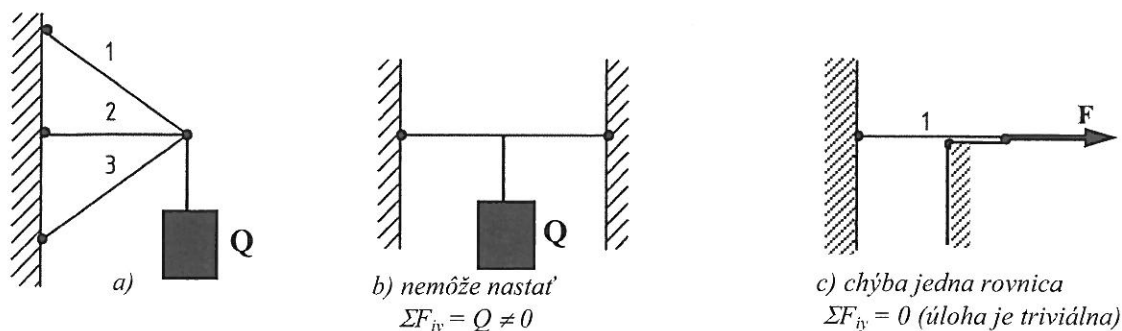
- skalárne** $\sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} = 0$
 $\sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} = 0$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, (3.24)

pričom znamienko $\ominus$ platí pre statickú ekvivalenciu (dva RZS majú rovnaký účinok), $\oplus$ platí pre statickú rovnováhu (teleso, na ktoré pôsobia dva RZS v rovnováhe sa nepohybuje, t.j. je v stave pokoja).

Rovnice pre analytické riešenie ekvivalencie / rovnováhy RZS sú dve, z čoho vyplýva aj tzv. **nutná podmienka statickej určítosti riešenia**, slovnou vyjadrená nasledovne:

Úloha riešenia rovnováhy / ekvivalencie dvoch RZS je staticky určitá, ak neobsahuje viac neznámych ako dve a je riešiteľná (tzn. nie je výnimkovým prípadom).

Pri väčšom počte neznámych (obr.3.15a) je úloha tzv. **staticky neurčitá**. Nevieime jednoznačne - **určite** - vypočítať, aké sily budú pri rovnováhe pripadať od jednej sily **Q** na tri smery v prútoch 1, 2, 3 (obr.3.15a). Pri nevhodnom usporiadaní síl môže vzniknúť aj tzv. **výnimkový prípad** (obr.3.15b, 3.15c).



Obr. 3.15

Úlohy statickej ekvivalencie resp. rovnováhy sústav síl majú obvykle charakter **k o n t r o l y** – tzn. sily sú zadané úplne a je nutné ich rovnováhu resp. ekvivalenciu iba skontrolovať alebo charakter **r i e š e n i a** – t.j. sily sú zadané neúplne a pre zaistenie ich rovnováhy resp. ekvivalencie je nutné niektoré parametre (veľkosť alebo smer sily) dourčiť.

Príklad 3.5: V bode A pôsobia tri známe sily F_1, F_2, F_3 , ktoré majú byť nahradené zväzkom síl P', P'' a Q , pôsobiacimi tiež v bode A, avšak v určených smeroch podľa Obr.3.16. Požadujeme pritom, aby sily P' a P'' mali rovnakú veľkosť. Zadané: $F_1=500\text{ N}, F_2=1000\text{ N}, F_3=1500\text{ N}, \alpha_1=60^\circ, \alpha_2=30^\circ, \alpha_3=30^\circ$,

Riešenie:

Ide o riešenie úlohy na statickú ekvivalenciu RZS.

Pre vyriešenie statickej ekvivalencie sústav síl F_1, F_2, F_3 (sústava síl F_i) a sústavy síl P', P'', Q (sústava síl F_j) využijeme rovnice (3.24) pre ekvivalenciu dvoch RZS v tvare

$$\sum F_{ix} - \sum F_{jx} = 0$$

$$\sum F_{iy} - \sum F_{jy} = 0.$$

Podľa zadania a pre umožnenie výpočtu uvažujeme $P'=P''=P$.

Podľa obr.3.16 pre neznáme hodnoty síl P a Q dostaneme

$$\sum F_{ix} - \sum F_{jx} = 0: F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3 - (P + P \cdot \cos \beta) = 0$$

$$\sum F_{iy} - \sum F_{jy} = 0: F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3 \cdot \cos \alpha_3 - (Q - P \cdot \sin \beta) = 0, \text{ odkiaľ dostaneme}$$

$$P = \frac{1}{1 + \cos \beta} \cdot (F_1 \cdot \cos \alpha_1 - F_2 \cdot \cos \alpha_2 + F_3 \cdot \sin \alpha_3) = P' = P''$$

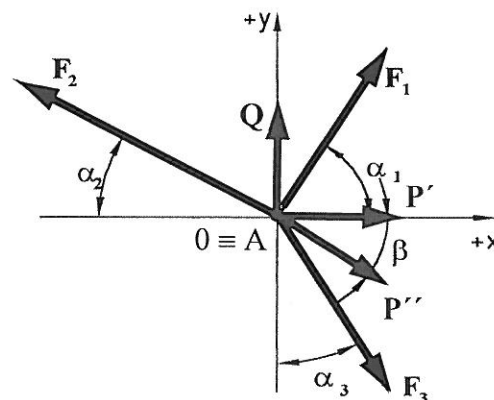
$$P' = P'' = \frac{1}{1 + \cos 45^\circ} \cdot (500 \cdot \cos 60^\circ - 1000 \cdot \cos 30^\circ + 1500 \cdot \sin 30^\circ) = \frac{1}{1,707} \cdot (250 - 866,6 + 750)$$

$$P' = P'' = -78,11\text{ N}.$$

$$Q = F_1 \cdot \sin \alpha_1 + F_2 \cdot \sin \alpha_2 - F_3 \cdot \cos \alpha_3 + P \cdot \sin \beta$$

$$Q = 500 \cdot \sin 60^\circ + 1000 \cdot \sin 30^\circ - 1500 \cdot \cos 30^\circ + (-78,11) \cdot \sin 45 = 433 + 500 - 1299 - 55,22$$

$$Q = -421,22\text{ N}.$$



Obr. 3.16

3.4. Všeobecná sústava síl v rovine

Všeobecná rovinná sústava síl (VRSS) je také usporiadanie síl, kedy nositeľky síl ležia v jednej rovine a majú v nej všeobecnú polohu (t.j. nositeľky sa nepretínajú v spoločnom priesečníku).

Základnou myšlienkou riešenia VRSS je, rovnako ako u RZS, rozklad všetkých síl sústavy na x -ové a y -ové zložky. Získané zložky vytvoria 2 sústavy navzájom rovnobežných síl a po ich preložení do spoločného pôsobiska v podstate získame dve sústavy síl na spoločnej nositeľke. V ľubovoľnom bode hmotného objektu, najčastejšie v počiatku súradnicového systému, môžeme preto VRSS staticky ekvivalentne nahradiť **silou $\mathbf{R}$ a momentom $\mathbf{M}$** alebo dokonca iba jedinou silou $\mathbf{R}'$ posunutou vzhľadom k bodu 0 o vzdialenosť h .

Pre VRSS môžeme napísať **tri podmienky náhrady** (buď rovnováhy alebo ekvivalencie), ktoré sú formulované v tvare rovníc – tzv. **silových (zložkových) a momentových podmienok** - v tvare:

Silová (zložková) podmienka

1. *Algebraický súčet x -ových (vodorovných) zložiek všetkých síl sústavy je rovný nule. Platí:*

$$\sum F_{ix} = R_x = 0 \quad (3.25)$$

2. *Algebraický súčet y -ových (zvislých) zložiek všetkých síl sústavy je rovný nule. Platí:*

$$\sum F_{iy} = R_y = 0 \quad (3.26)$$

Momentová podmienka (napr. vzhľadom k bodu A)

3. *Algebraický súčet statických momentov všetkých síl sústavy (resp. statických momentov všetkých ich x -ových a y -ových zložiek) k ľubovoľnému bodu roviny je rovný nule. Platí:*

$$M_A = \sum M_{iA} = 0 \quad \text{príp.} \quad M_A = \sum (F_{ix} \cdot p_{ix} + F_{iy} \cdot p_{iy}) = 0. \quad (3.27)$$

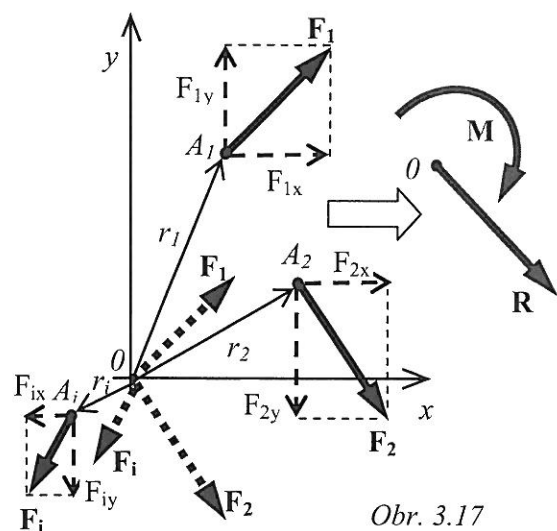
Pred detailnejším štúdiom spôsobov riešenia rovnováhy príp. ekvivalencie VRSS je odporúčané zopakovať si základné princípy a vzťahy, najmä pre veličiny ako statický moment sily, silová dvojica a jej účinok, princíp preloženia pôsobiska sily na telesa a skladanie sily a silovej dvojice.

Už vieme, že moment $\mathbf{M}$ (statický moment sily resp. moment silovej dvojice), spolu s osamelou silou $\mathbf{F}$ tvoria **základné druhy silového pôsobenia na hmotné objekty**. Je nutné si však uvedomiť, že medzi zaťažieniami, pôsobiacimi na skutočné telesá v reálnych podmienkach používania - sa vyskytujú nielen uvedené hlavné druhy zaťaženia, ale aj ďalšie prípady stáleho, príp. aj premenlivého **spojitého silového** alebo **momentového zaťaženia**. Pri riešení DTT takéto druhy zaťaženia nahradzame tzv. **náhradným bremenom** $\mathbf{F}_q$, $\mathbf{F}_n$ resp. $\mathbf{M}_m$, ktoré vyjadruje ich staticky ekvivalentný účinok vo forme osamelej sily, resp. momentu.

3.4.1. Redukcia všeobecnej rovinnnej sústavy síl

Základný princíp redukcie VRSS je založený na transformácii všetkých síl sústavy do spoločného bodu. Napr. pre sústavu síl podľa Obr.3.17 je pre redukciu zásadnou úlohou tzv. **ekvivalentná transformácia** sústavy síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i$, do jedného bodu, napr. do bodu 0.

Výslednicu $\mathbf{R}$ získame ekvivalentnou transformáciou všetkých síl sústavy do bodu 0, ku ktorému má transformovaná VRSS nulový otáčavý účinok. Preložením silových účinkov VRSS do bodu 0 a ich vektorovým sčítaním dostaneme výslednicu $\mathbf{R}$ a výsledný moment $\mathbf{M}$.



Obr. 3.17

(PÚ) - posuvný účinok VRSS:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i ; \quad R = |\mathbf{R}|$$

$$R_x = \sum_i F_{ix} ; \quad R_y = \sum_i F_{iy} ; \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

(OÚ) - otáčavý účinok VRSS:

$$\mathbf{M}_A = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

$$M_A = \sum M_{iA} = 0$$

Prakticky to znamená, že VRSS môžeme – rovnako ako RZS - nahradiť jedinou silou, **výslednicou $\mathbf{R}$** (určenou jej veľkosťou, smerom a zmyslom – ako u RZS, ale navyše aj **miestom jej pôsobenia** v rovine) a jedným **momentom $\mathbf{M}$** - určeným veľkosťou a zmyslom jeho pôsobenia - otáčania.

K tomu využívame už zmienené rovnice náhrady sústav síl, ktoré môžeme slovne vyjadriť nasledovne:

Posuvný a otáčavý účinok jednotlivých síl VRSS k ľubovoľnému bodu telesa musí byť rovnaký ako posuvný a otáčavý účinok výslednice $\mathbf{R}$ a momentu $\mathbf{M}$ zadanej sústavy síl vzhľadom k tomu istému bodu.

- Vektorový tvar rovníc náhrady (Obr.3.18):

$$\text{Posuvný účinok: } \mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i \quad (3.28)$$

$$\text{Otáčavý účinok: } \mathbf{M}_A = \sum \mathbf{M}_{iA} \Rightarrow \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$$

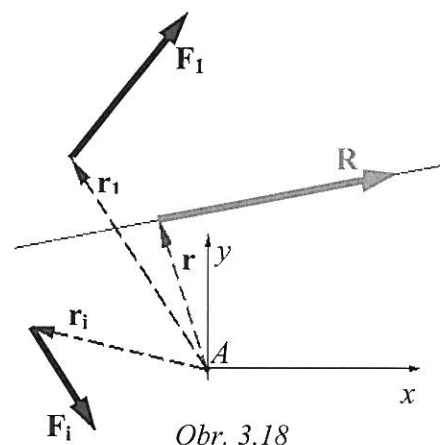
- Skalárny tvar rovníc náhrady:

Pre rovinnú sústavu síl :

$$R_x = \sum_i F_{ix} \rightarrow R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \rightarrow \text{veľkosť } R \quad (3.29)$$

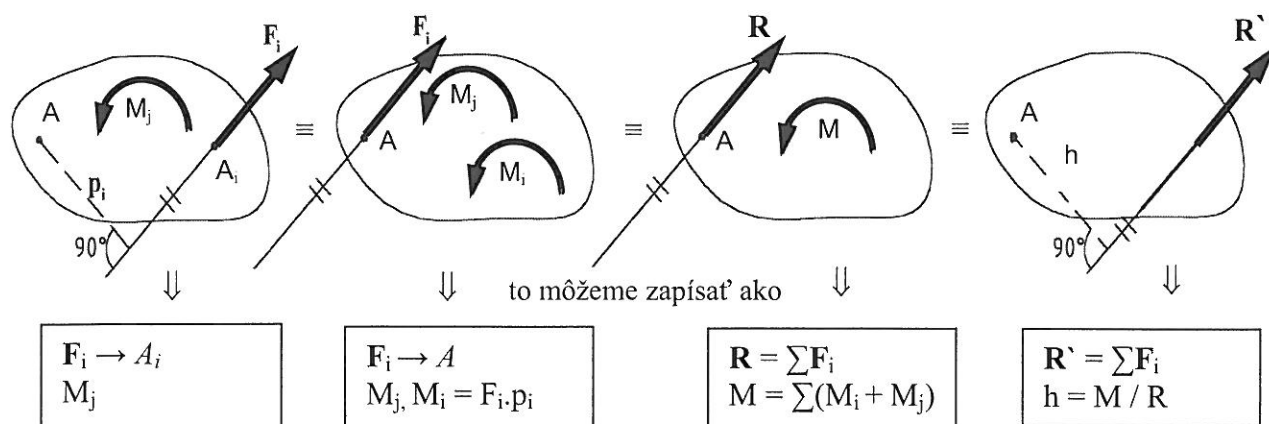
$$R_y = \sum_i F_{iy}$$

$$M_A = \sum M_{iA} \rightarrow \text{poloha } R$$



Obr. 3.18

Na základe uvedených poznatkov môžeme definovať všeobecne platnú schému redukcie (obr.3.19) systému síl a momentov, tvoriacich **všeobecnú rovinnú sústavu síl**. Platí:

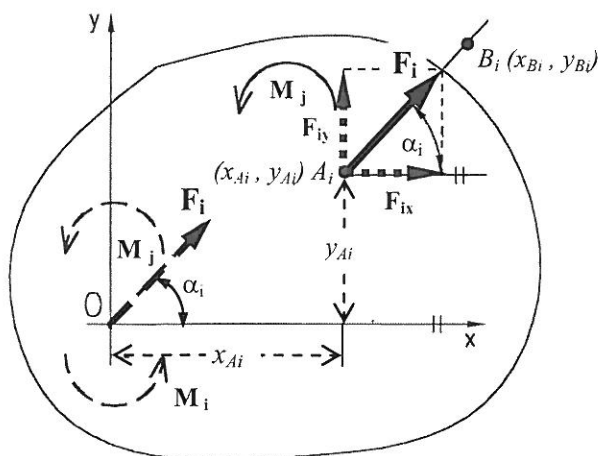


Obr. 3.19

3.4.1.1. Analytické riešenie

Postupujme v súlade s naznačenou redukciou podľa obr.3.19. V technických výpočtoch obvykle býva zadané $\mathbf{F}_i$, $A_i(x_i, y_i)$, α_i a M_j (pre $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$), uvažované v Kartézskej pravouhlej súradnicovej sústave. Niekedy môžu byť však smery síl zadané aj napr. pomocou súradníc dvoch bodov $\overline{A_i B_i}$, určujúcich smer nositeľky sily $\mathbf{F}_i$ (obr.3.20) a vtedy platí

$$\cos \alpha_i = \frac{(x_B - x_A)_i}{\overline{A_i B_i}} , \quad \text{resp.} \quad \sin \alpha_i = \frac{(y_B - y_A)_i}{\overline{A_i B_i}} . \quad (3.30)$$



Obr. 3.20

Z obr.3.20 taktiež vyplýva, že

$$\overline{A_i B_i} = \sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2}. \quad (3.31)$$

Pre lepšiu prehľadnosť na obr.3.20 uvádzame, zo všetkých síl a momentov tvoriacich VRSS, iba jediná silu F_i a jediný moment M_i .

Výpočtový postup redukcie VRSS môžeme v súlade s obr.3.19 usporiadať do štyroch krokov:

1. Sily F_i preložíme do zvoleného bodu na telese (napr. počiatok súradnicového systému – bod 0), čím v tomto bode vznikne zväzok síl F_i a sústava momentov M_i , definovaných vzhľadom k bodu 0

$$M_i = x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}. \quad (3.32a)$$

2. Vykonáme redukciu síl F_i a určíme veľkosť a smer ich výslednice R

$$R_x = \sum_1^n F_{ix} = \sum_1^n F_i \cdot \cos \alpha_i, \quad R_y = \sum_1^n F_{iy} = \sum_1^n F_i \cdot \sin \alpha_i, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (3.32b)$$

$$\text{a pre smer výslednice } R \text{ platí, napr. } \operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R = \operatorname{tg}^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \operatorname{arctg} \frac{R_y}{R_x}. \quad (3.32c)$$

3. Vykonáme redukciu otáčavých účinkov (od pôvodných momentov VRSS - M_j a momentov od preloženia síl F_i do spoločného pôsobiska - M_i a určíme výsledný otáčavý účinok silovej sústavy v tvare

$$M = \sum_1^n M_i + \sum_1^m M_j = \sum_1^n (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) + \sum_1^m M_j. \quad (3.32d)$$

4. Vzniknutú redukovanú sústavu síl (t.j. výslednú silu R a výsledný moment M) môžeme v prípade potreby nahradiť jedinou silou $R' = R$, ktorá však bude posunutá od nositeľky f_R výslednej sily R o vzdialenosť h (obr.3.19). Pre hodnotu posunutia h , staticky ekvivalentnej sily R' , od nositeľky f_R výslednice R platí

$$M = R \cdot h \Rightarrow h = \frac{M}{R}. \quad (3.32e)$$

Pozor! Zmysel pohybových účinkov M aj $R \cdot h$ musia byť rovnaké, t.j. majú mať rovnaký zmysel otáčania.

Nakoľko platí $M = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) + M_j$, na základe (3.32e) môžeme rovnicu zapísať v tvare

$$R \cdot h = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) + M_j, \quad (3.33)$$

vyjadrujúcu už známu **Varignonovu momentovú vetu** (2.22), tentoraz vzťahnutú na prípad všeobecnej sústavy síl v rovine. Slovné ju môžeme vyjadriť nasledovne:

Moment výslednice VRSS vzhľadom k ľubovoľnému bodu roviny je rovný algebrickému súčtu momentových účinkov od síl a silových dvojíc tvoriacich VRSS, určených k zvolenému bodu roviny.

Okrem veľkosti a smeru R môžeme určiť aj súradnice miesta jej pôsobenia a to prostredníctvom jej zložiek R_x a R_y . Podľa momentovej vety (3.33) a obr.3.21 pre ktorýkoľvek bod $R[x_R, y_R]$, ležiaci na nositeľke f_R výslednice R platí

$$R \cdot h = x_R \cdot R_y - y_R \cdot R_x = M, \quad (3.34)$$

odkiaľ pre ľubovoľne zvolenú súradnicu x_R môžeme určiť súradnicu y_R a dostaneme

$$y_R = \frac{x_R \cdot R_y - M}{R_x}. \quad (3.35)$$

Pri výpočte dĺžky úsekov, určujúcich polohu $\mathbf{R}$ vo vzťažnej rovine je výhodné uvažovať buď y_R alebo x_R v počiatku, t.j. prípady $y_R = 0$, resp. $x_R = 0$. Po ich dosadení do rovnice (3.35) získame hľadané súradnice bodov (obr.3.21), v ktorých výslednica $\mathbf{R}'$ pretína os x (úsek p), resp. os y (úsek q). Na základe rovnice (3.35) dostaneme

$$\bullet x_R = 0 \Rightarrow y_R = q = \frac{x_R \cdot R_y - M}{R_x} = \frac{0 - M}{R_x} \Rightarrow q = -\frac{M}{R_x} \quad (3.36a)$$

resp.

$$\bullet y_R = 0 \Rightarrow x_R = p = \frac{M + y_R \cdot R_x}{R_y} = \frac{M + 0}{R_y} \Rightarrow p = \frac{M}{R_y} \quad (3.36b)$$

Z rovníc (3.33 až 3.36) a na základe obr.3.21 môžeme získať vzťahy v tvare:

$$R \cdot h = M \Rightarrow h = \frac{M}{R}, \text{ resp. } M = p \cdot R_y \Rightarrow p = \frac{M}{R_y}, \text{ resp. } M = -q \cdot R_x \Rightarrow q = -\frac{M}{R_x}. \quad (3.37)$$

Z výsledku redukcie (obr.3.19) vyplýva, že vo všeobecnom prípade môžeme VRSS nahradiť (redukovať) jedinou silou $\mathbf{R}$ a momentom $\mathbf{M}$ (príp. jedinou silou $\mathbf{R}'$). Nastať môžu štyri prípady:

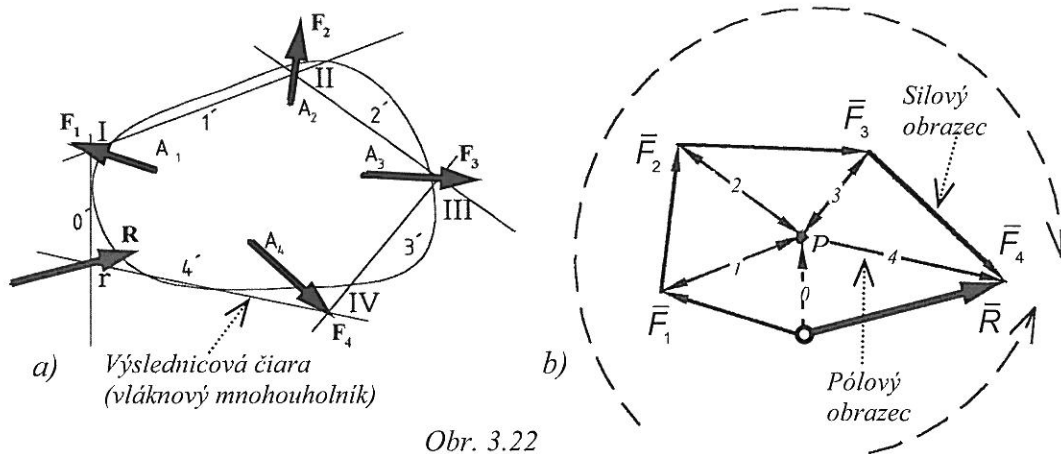
1. $R \neq 0; M \neq 0 \rightarrow$ sústavu síl redukujeme buď na jedinú silu $\mathbf{R}'$, neprechádzajúcu počiatkom vzťažnej súradnicovej sústavy alebo na jedinú silu $\mathbf{R}$ a jediný moment $\mathbf{M}$.
2. $R \neq 0; M = 0 \rightarrow$ nositeľka výslednice $\mathbf{R}$ prechádza počiatkom vzťažnej súradnicovej sústavy.
3. $R = 0; M \neq 0 \rightarrow$ sústavu síl je možné redukovať len na výsledný moment $\mathbf{M}$ (dvojicu síl).
4. $R = 0; M = 0 \rightarrow$ sústava síl je v rovnováhe.

V oblasti statiky využívame práve 4. prípad, vyjadrujúci stav rovnováhy všeobecne rozloženej sústavy síl a hmotný objekt, vystavený účinkom takejto sústavy síl, sa nachádza v stave pokoja, t.j. nepohybuje sa.

3.4.1.2. Grafické riešenie

Vychádzajme z predpokladu, že každú VRSS (obvykle je tvorená osamelými silami a momentmi, príp. aj spojitým zaťažením) môžeme na DTT nahradiť iba sústavou osamelých síl (momenty $\mathbf{M}$ vyjadríme vo forme silových dvojíc, spojité zaťaženia q uvažujeme vo forme náhradného bremena $\mathbf{F}_q$). Grafické riešenie rovnováhy / ekvivalencie VRSS je preto teoreticky možné, ale uvedieme si iba jeho základný princíp.

Majme VRSS, tvorenú silami $\mathbf{F}_i$ ($i=1,2,\dots,4$), ktorej výslednica podľa Obr.3.22a je $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$.

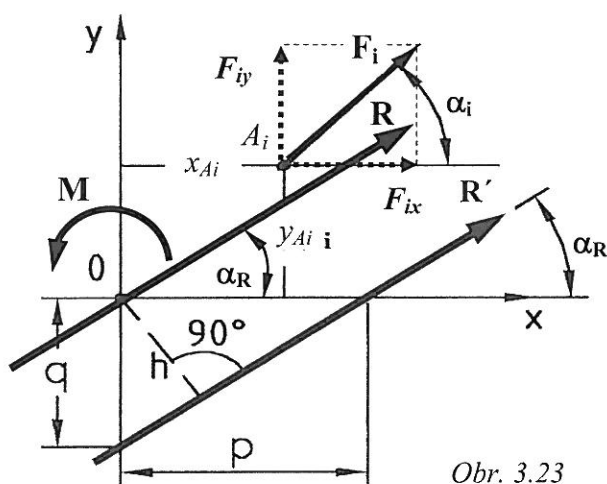


Obr. 3.22

Pri grafickom riešení je výslednica VRSS (rovnako ako u RZS), **určená uzatváracou stranou** $\bar{R}$ v silovom mnohoúhľovníku síl $\bar{F}_i$ (obr.3.22b) a **vždy smeruje proti zmyslu obehu** zložiek. Po odmeraní $\bar{R}$ v [mm] zo silového obrazca (obr.3.22b) môžeme veľkosť výslednice všeobecnej sústavy síl určiť jednoducho pomocou vzťahu $R = \bar{R} \cdot m_F$ [N], kde m_F je zvolená mierka síl, napr. v [N.mm⁻¹].

Pre určenie miesta pôsobenia výslednice **R** zadanej VRSS je však potrebné vytvoriť tzv. **pólový obrazec** (Obr.3.22b), prostredníctvom ktorého vytvárame tzv. **vláknový mnohoúhľovník** (Obr.3.22a), v ktorom dokážeme jednoznačne určiť polohu (umiestnenie) výslednice **R** redukovanej VRSS.

Príklad 3.6: Výpočtom určite výslednicu sústavy štyroch síl F_i , zvierajúcich s kladnou osou x uhly α_i . Sú známe aj súradnice ich pôsobísk A_i (obr.3.23). Zadané: $F_1 = 1200$ N, $F_2 = 1500$ N, $F_3 = 800$ N, $F_4 = 2000$ N, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = 250^\circ$, $\alpha_4 = 330^\circ$, $A_1 (2; 3)$, $A_2 (-3; 2)$, $A_3 (-4; 1)$, $A_4 (3; -4)$.



Obr. 3.23

Riešenie:

Zadané vstupné hodnoty je pri ručnom výpočte redukcie vhodné (ako už bolo ukázané u RZS), usporiadať do tabuľky (Tab.3.2). Postupne získavané čiastkové výsledky umožňujú pôsobenie síl v sústave modifikovať, resp. výsledok redukcie ľahšie prepočítat', ak by v zadanej sústave síl nastali neskôr zmeny.

Pri redukcii VRSS je potrebné nájsť nielen veľkosť výslednice síl **R** a jej smer (α_R), ale aj polohu jej nositeľky v rovine a preto je nutné definovať a vyriešiť aj momentové podmienky, z ktorých môžeme získať tzv. **polohové parametre** - **p**, **q** resp. **h**.

1. Spracujeme tabuľku, kde vykonáme čiastkové výpočty podľa vzťahov (3.32b) a (3.33).

Pomocné výpočty pre redukcii všeobecnej sústavy síl v rovine

Tabuľka 3.2

i	F_i [N]	α_i [°]	$\cos \alpha_i$	$\sin \alpha_i$	Súradnice pôsobísk síl		Priemety síl do súradnicových osí		Momenty zložiek k bodu 0	
					x_i [m]	y_i [m]	$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$ [N]	$F_{iy} = F_i \sin \alpha_i$ [N]	$-F_{ix} \cdot y_i$ [Nm]	$F_{iy} \cdot x_i$ [Nm]
1	1200	45	0,707	0,707	2	3	849	849	-2547	1698
2	1500	120	-0,500	0,866	-3	2	-750	1299	1500	-3897
3	800	250	-0,342	-0,940	-4	-1	-274	-752	-274	3008
4	2000	330	0,866	-0,500	3	-4	1732	-1000	6928	-300
$\sum_{i=1}^4$							$R_x=1557$	$R_y=396$	5607	-2191
									$M_{(0)}=3416$	

2. Veľkosť zložiek výslednice: $R_x = \sum (F_i \cdot \cos \alpha_i) = 1557$ N, $R_y = \sum (F_i \cdot \sin \alpha_i) = 396$ N.

3. Veľkosť a smer výslednice $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1557^2 + 396^2} = 1607$ N,

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha_R = \operatorname{arctg} \frac{396}{1557} = 14^\circ 16'.$$

4. Poloha nositeľky výslednice **R'** pretína os x vo vzdialenosti $p = \frac{M_{(0)}}{R_y} = \frac{3416}{396} = 8,626$ m.

5. Poloha nositeľky výslednice $\mathbf{R}'$ pretína os y vo vzdialenosti $q = \frac{-M_{(0)}}{R_x} = -\frac{3416}{1557} = -2,194 \text{ m}$.
6. Vzdialenosť nositeľky výslednice $\mathbf{R}'$ od počiatku súradnicovej sústavy : $h = \frac{M_{(0)}}{R} = \frac{3416}{1607} = 2,125 \text{ m}$.

Příklad 3.7: Na stožiar trolejového vedenia (obr.3.24) pôsobia sily F , G , Q . Určite výslednicu R a jej priesečník s osou y stožiaru. Zadané: $F=5 \text{ kN}$, $G=10 \text{ kN}$, $Q=1 \text{ kN}$, $\alpha=30^\circ$, $a=3 \text{ m}$, $b=5 \text{ m}$, $h=6 \text{ m}$, $e=1 \text{ m}$.

Riešenie:

$$R_x = \sum F_{ix} = -F_x = -F \cdot \sin \alpha$$

$$R_x = -5,0,5 = -2,5 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum F_{iy} = -F_y - G - Q = -F \cdot \cos \alpha - G - Q$$

$$R_y = -5,0,866 - 10 - 1 = -15,33 \text{ kN}$$

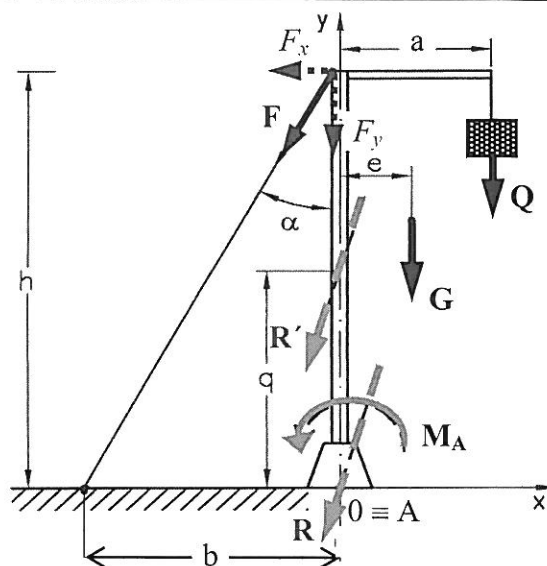
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-2,5)^2 + (-15,33)^2} = 15,53 \text{ kN}$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_R = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha'_R = \operatorname{arctg} \frac{-15,33}{-2,5} = \operatorname{arctg} 6,132 = 80,74^\circ$$

$$\alpha_R = 180^\circ + \alpha'_R = 180^\circ + 80,74^\circ = 260,74^\circ$$

$$M_A = F_x \cdot h - G \cdot e - Q \cdot a = F \cdot \sin \alpha \cdot h - G \cdot e - Q \cdot a$$

$$M_A = 5,0,5 \cdot 6 - 10 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 2 \text{ kNm}$$



Obr. 3.24

Z momentovej vety (2.36a) môžeme určiť súradnicu (q) priesečníka s osou y stožiaru a dostaneme

$$q = -\frac{M_A}{R_x} = -\frac{2}{-2,5} = 0,8 \text{ m}.$$

Výsledok: $\mathbf{R}' = \mathbf{R} = 15,53 \text{ kN}$, $\alpha_R = 260,74^\circ$, $q = 0,8 \text{ m}$.

3.4.2. Rovnováha všeobecnej rovinnej sústavy síl

Silová sústava je rovnováhe vtedy, ak jej posuvný aj otáčavý účinok na teleso je nulový. Takúto sústavu síl nazývame **rovnovážna sústava síl**. V prípade, ak takáto rovnovážna (nulová) sústava síl pôsobí na hmotný objekt, ten sa nepohybuje a hovoríme, že sa nachádza v stave **statickej rovnováhy**.

Stav statickej rovnováhy popisujeme podmienkami rovnováhy, ktoré sú akýmsi vyjadrením „nulovosti“ posuvného a otáčavého účinku sústavy síl na teleso. Podmienky rovnováhy, rovnako ako podmienky ekvivalencie, platné pre VRSS, môžeme zapísať buď v tvare vektorovom alebo skalárnom. Platí:

1. Vektorový zápis rovníc rovnováhy všeobecnej sústavy síl

Silová rovnica rovnováhy: $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ výslednica $\mathbf{R}$ sústavy síl je rovná nule.

Momentová rovnica rovnováhy: $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ otáčavý účinok silových veličín $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$ je nulový.

Z uvedeného je zjavné, že rovnováha VRSS nastane iba vtedy, keď sú splnené statické podmienky nulového účinku síl celej sústavy síl, t.j. ak platí vektorový zápis

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (3.38)$$

2. Skalárny (zložkový) zápis rovníc rovnováhy všeobecnej sústavy síl

VRSS v rovnováhe musí spĺňať 3 statické podmienky rovnováhy (obvykle 2 silové a 1 momentová). V silových rovniciach rovnováhy sa sčítavajú zložky síl $\mathbf{F}_i$ v smere súradnicovej osi x , resp. y , v momentovej rovnici sa sčítavajú zložky momentov od síl M_{iz} , otáčajúce telesom okolo súradnicovej osi z . Platí:

Silové rovnice rovnováhy	$\sum F_{ix} = 0 ; \sum F_{iy} = 0$	(3.39)
Momentová rovnica rovnováhy	$\sum M_{iz} = 0$	

Iba pre doplnenie a porovnanie rovníc rovnováhy uvedieme, že **rovnovážna priestorová silová sústava** musí spĺňať súčasne 3 silové a 3 momentové podmienky rovnováhy vzhľadom k zvolenému systému súradníc. V silových rovniciach sčítavame zložky síl $\mathbf{F}_i$ v smere súradnicových osí x, y, z . V momentových rovniciach sčítavame zložky momentov účinkov otáčajúcich okolo súradnicových osí x, y, z . Platí:

Silové rovnice rovnováhy	$\sum F_{ix} = 0 ; \sum F_{iy} = 0 ; \sum F_{iz} = 0$	(3.40)
Momentové rovnice rovnováhy	$\sum M_{ix} = 0 ; \sum M_{iy} = 0 ; \sum M_{iz} = 0$	

Všeobecne platí, že ak silová sústava spĺňa statické podmienky rovnováhy k ľubovoľne zvolenému súradnicovému systému, sú podmienky rovnováhy splnené aj vzhľadom ku ostatným súradnicovým systémom. Pri analytickom riešení rovnovážnych stavov hmotných objektov budeme využívať výlučne podmienky statickej rovnováhy definované v skalárnom tvare (3.39).

3.4.2.1. Analytické riešenie rovnováhy

Pre analytické riešenie prepíšeme uvedené podmienky rovnováhy vo vektorovom vyjadrení (3.38) na rovnice skalárneho typu (3.39) v tvare (1)

$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= R_x = 0 \\ \sum F_{iy} &= R_y = 0 \\ \sum M_{iA} &= 0 \end{aligned}$	,	(3.41a)
--	---	---------

ktorý predstavuje **základný tvar podmienok rovnováhy** všeobecnej sústavy síl v rovine. Slovné platí:

Pri rovnováhe VRSS je algebrický priemet všetkých síl v dvoch smeroch (obvykle navzájom kolmých), ako aj algebrický súčet momentov všetkých síl a silových dvojíc k ľubovoľnému bodu roviny nulový.

Okrem základného tvaru môžeme bez problémov využiť aj ďalšie tvary rovnovážnych rovníc:

(2)	$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0 \\ \sum M_{iB} &= 0 \\ \sum F_{ix} &= 0 \end{aligned}$	(3.41b)	(3)	$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0 \\ \sum M_{iB} &= 0 \\ \sum M_{iC} &= 0 \end{aligned}$	(3.41c)
-----	--	---------	-----	--	---------

kde $C \notin \overline{AB}$

v ktorých sú silové rovnice rovnováhy čiastočne (typ 2) alebo úplne (typ 3) nahradené rovnovážnymi rovnicami momentovými.

Vo všetkých troch tvaroch statických rovníc rovnováhy je však vždy obsiahnutá momentová rovnica, pretože iba rovnica rovnováhy otáčavých účinkov obsahuje aj informáciu o polohe pôsobiaceho silového účinku (t.j. pôsobisko sily, ako miesto jej pôsobenia). Musíme preto vždy dodržať pravidlo:

Momentovú podmienku $\sum M_i = 0$, ktorá ako jediná obsahuje polohové parametre, nie je možné zo žiadneho tvaru podmienok rovnováhy vypustiť!

Pri analytickom riešení je vhodné a odporúčané k zvolenému typu rovníc rovnováhy pripojiť ešte ďalšiu rovnicu – tzv. **kontrolnú podmienku**, vyjadrenú podľa zvoleného typu podmienok rovnováhy v tvare:

$$(1) \rightarrow \sum M_{iA} = 0, \quad (2) \rightarrow \sum F_{iy} = 0, \quad (3) \rightarrow \sum F_{ix} = 0. \quad (3.42)$$

Prostredníctvom kontrolných podmienok overujeme správnosť nájdeného riešenia a jednoznačne tak môžeme potvrdiť splnenie nutných podmienok rovnováhy riešenej sústavy síl.

3.4.2.2. Grafické riešenie rovnováhy

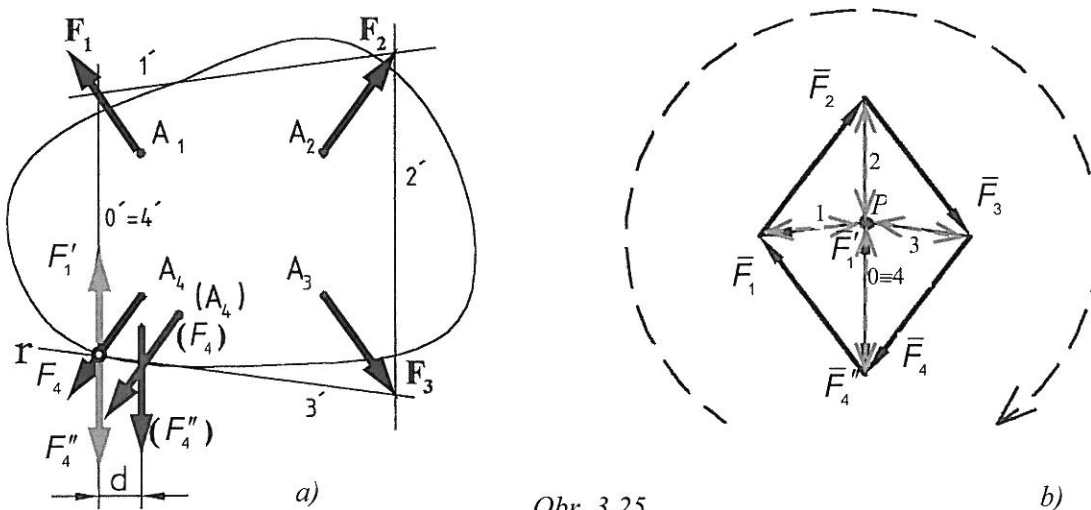
Ak má byť všeobecná sústava síl $\mathbf{F}_i$ v rovnováhe, musí byť splnená podmienka v tvare

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

kedy zrejme aj pre zložky $\mathbf{F}_i'$ a $\mathbf{F}_i''$ z pólového obrazca (obr.3.25b) platí rovnica

$$\mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_n'' = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Prakticky to znamená, že pólové lúče 0 a n sa stotožnia (obr.3.25b) a vlákna $0'$ a n' (obr.3.25a) sú kolinéárne. Napríklad, pre $n = 4$ potom platí: $0 \equiv 4$ a $0' \equiv 4'$ (obr.3.25a,b).



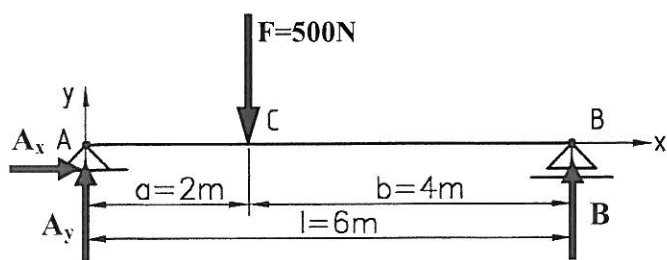
Obr. 3.25

Podmienku rovnováhy VRSS pri grafickom riešení môžeme vyjadriť slovne v tvare:

Všeobecná rovinná sústava síl je v rovnováhe vtedy, keď jej silový obrazec (obr.3.25b) opísaný v jednom zmysle je uzavretý a zároveň je uzavretý aj vytvorený vláknový obrazec (obr.3.25a).

V prípade, ak by sila ($\mathbf{F}_4$) pôsobila napr. v bode (A_4), sily $\mathbf{F}_1'$ a $\mathbf{F}_4''$ by vytvorili silovú dvojicu s momentovým účinkom o veľkosti $\mathbf{M} = \mathbf{F}_1' \cdot \mathbf{d}$ (obr.3.25a) a už by sa nejednalo o rovnovážny stav.

Príklad 3.8: Na jednoducho uloženom nosníku (obr.3.26) zaťaženom osamelou silou F vypočítajte veľkosť väzbových reakcií v miestach podpier A, B. Zadané: $F = 500 \text{ N}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $l = 6 \text{ m}$.



Obr. 3.26

Riešenie:

Po overení statickej určitosti a uvoľnení nosníka zisťujeme, že sily F , A_x , A_y , B tvoria VRSS. Pre riešenie rovnováhy síl preto využijeme napr. podmienky rovnováhy VRSS, typ 2 (3.41b), t.j. zadefinujeme dve podmienky momentové a jednu podmienku silovú a platí

$$\sum M_{iA} = 0 : B.l - F.a = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0 : -A_y.l + F.b = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0 : A_x = 0$$

Z podmienok rovnováhy (sústava 3 lineárnych algebrických rovníc) môžeme pomocou matematických úprav vyjadriť veľkosť väzbových reakcií **A**, **B** a platí

$$B = \frac{F.a}{l} = \frac{500.2}{6} = 166,7 \text{ N}, \quad A_y = \frac{F.b}{l} = \frac{500.4}{6} = 333,3 \text{ N}.$$

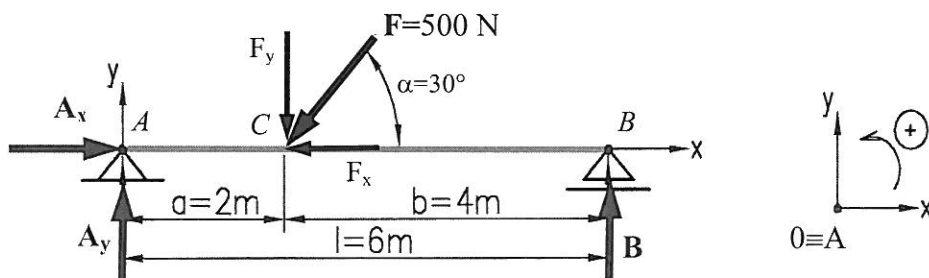
$\sum F_{ix} = 0$... podmienka je splnená, pretože v smere osi *x* nepôsobia na nosník žiadne akčné silové účinky.

Kontrolná rovnica: použijeme napr. rovnicu v tvare $\sum F_{iy} = 0$ a platí

$$A_y + B - F = 166,7 + 333,3 - 500 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{splnené (riešenie je správne)!}$$

Poznámky: 1. Pri riešení tzv. jednoducho uložených nosníkov použitím podmienok rovnováhy – typ (2) bude obsahovať každá rovnica iba jednu neznámu. Znamená to, že pre takto uložené nosníky je typ (2) najvhodnejší. 2. Ako kontrolnú rovnicu bolo možné využiť aj ďalšiu, momentovú rovnicu, napr. v tvare $\sum M_{ic} = 0 : A_y.a - B.b = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Príklad 3.9: Na nosníku (obr.3.27) zaťaženom osamelou silou **F**, pôsobiacou šikmo na nosník pod uhlom α určite väzbové reakcie **A_x**, **A_y**, **B**. Zadané: $F = 500 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $l = 6 \text{ m}$.



Obr. 3.27

Riešenie:

Overíme statickú určitosť úlohy, nosník uvoľníme a zavedieme zložky väzbových reakcií. Využime napr. ten istý typ rovníc rovnováhy (typ 2) a pre ilustráciu využime aj ďalší typ rovníc (typ 1). Dostaneme

$$\begin{array}{llll} \sum M_{iA} = 0 : B.l - F.\sin \alpha.a = 0 & \Rightarrow B & \sum F_{ix} = 0 : A_x - F.\cos \alpha = 0 & \Rightarrow A_x \\ \sum M_{iB} = 0 : -A_y.l + F.\sin \alpha.b = 0 & \Rightarrow A_y & \sum F_{iy} = 0 : A_y - F.\sin \alpha + B = 0 & \Rightarrow A_y, B \\ \sum F_{ix} = 0 : A_x - F.\cos \alpha = 0 & \Rightarrow A_x & \sum M_{iA} = 0 : B.l - F.\sin \alpha.a = 0 & \Rightarrow B \end{array}$$

Ako vidíme, z rovníc typ (1) je možné tiež určiť neznáme väzbové parametre, ale najskôr je potrebné riešiť aj tak momentovú rovnicu. Z rovníc rovnováhy - typ (2) dostaneme

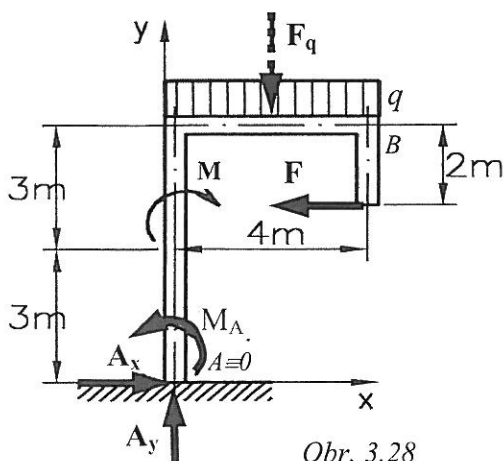
$$B = \frac{F.\sin \alpha.a}{l} = \frac{500.0,5.2}{6} = 83,33 \text{ kN}, \quad A_y = \frac{F.\sin \alpha.b}{l} = \frac{500.0,5.4}{6} = 166,67 \text{ kN},$$

$$A_x = F.\cos \alpha = 500.\cos 30^\circ = 500.0,866 = 433 \text{ N}.$$

Kontrolná rovnica: $\sum F_{iy} = 0 : A_y + B - F_y = 166,7 + 83,3 - 500 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{splnené!}$

Poznámky: 1. Reakcia **B** v podpore B s ohľadom na charakter uloženia (tab. 1.1 – posuvný kĺb), môže mať iba zvislý smer! 2. Sila **A_x** vyšla kladná, tzn. predpoklad (úvodný odhad) zmyslu jej pôsobenia v obr.3.27 bol správny. Ak by vyšlo znamienko záporné - zmýlili sme sa – väzbová sila má v skutočnosti opačný zmysel.

Príklad 3.10: Určite väzbové reakcie vo votknutí (bod A) pre rovinný rám. Rozmery i zaťaženia sú zrejmé z obr. 3.28. Zadané: $F=20 \text{ kN}$, $q=10 \text{ kN/m}$, $M=30 \text{ kNm}$.



Riešenie:

Pre určenie väzbových reakcií A_x , A_y a M_A (t.j. moment vo votknutí = moment od akčných síl vzhľadom k bodu $A \equiv 0$) použijeme napr. podmienky rovnováhy (typ 1) podľa (3.41a) a dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0 : A_x - F = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 : A_y - F_q = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0 : -M - F_q \cdot 2 + F \cdot 4 + M_A = 0$$

Po dosadení hodnôt zo zadania dostaneme

$$F_q = q \cdot 4 = 40 \text{ kN}, A_x = 20 \text{ kN}, A_y = 40 \text{ kN}, M_A = 30 \text{ kNm}.$$

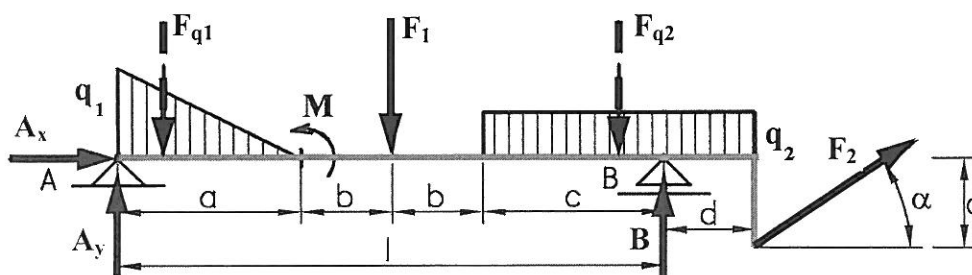
Kontrolná rovnica: zvolíme napr. tvar $\sum M_B = 0$ a dostaneme

$$\sum M_{iB} = 0 \Rightarrow M_A - M - A_y \cdot 4 + A_x \cdot 6 + F_q \cdot 2 - F \cdot 2 = 0$$

$$30 - 30 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 40 \cdot 2 - 20 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{splnené - riešenie je správne.}$$

Poznámky: 1. Spojité zaťaženie s intenzitou q (N/m) je v mechanike telies nutné pretransformovať na tzv. náhradné bremeno F_q . 2. Druhy a priebehy spojitých zaťažení môžu byť rôzne, až po najvšeobecnejší priebeh zaťaženia vo forme náhodnej funkcie. V úlohách technickej praxe sa najčastejšie objavujú zaťaženia vo forme rovnomerného spojitého zaťaženia priečneho alebo ako nerovnomerné (obvykle trojuholníkové) spojité priečne zaťaženie.

Príklad 3.11: Na nosníku zaťaženom osamelými silami F_1 , F_2 , momentom M a spojitými zaťažienami q_1 , q_2 určite väzbové reakcie A_x , A_y , B (obr.3.29). Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kNm}$, $q_1 = 1 \text{ kNm}^{-1}$, $q_2 = 0,5 \text{ kNm}^{-1}$, $\alpha = 30^\circ$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 2,5 \text{ m}$, $d = 1,5 \text{ m}$.



Obr. 3.29

Riešenie:

Spojité priečne zaťaženia s intenzitami q_1 , q_2 [N/mm] nahradíme náhradnými bremenami F_{q1} a F_{q2} (t.j. transformovanými osamelými silami pôsobiacimi v ťažisku trojuholníka resp. obdĺžnika) a potom platí:

$$F_{q1} = \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot a \quad \dots \text{pôsobí v jednej tretine dĺžky } a \text{ základne trojuholníka} \quad = a/3$$

$$F_{q2} = q_2 \cdot (c + d) \quad \dots \text{pôsobí uprostred dĺžky } (c + d) \quad = (c + d)/2.$$

Na riešenie použijeme napr. podmienky rovnováhy typ (2), tzn. dve podmienky momentové

$$\sum M_{iA} = 0 : -F_{q1} \cdot \frac{a}{3} + M - F_1 \cdot (a + b) - F_{q2} \cdot \left(l - \frac{c + d}{2}\right) + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l + d) + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot d + B \cdot l = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0 \quad : -A_y \cdot l + F_{q1} \cdot \left(l - \frac{a}{3}\right) + M + F_1 \cdot (b+c) + F_{q2} \cdot \frac{c-d}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot d + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot d = 0$$

a jednu podmienku silovú v tvare $\sum F_{ix} = 0 \quad : A_x + F_2 \cdot \cos \alpha = 0$.

Každá z uvedených podmienok rovnováhy síl pôsobiach na nosník obsahuje iba jednu neznámu. Po vyjadrení neznámych parametrov (A_x , A_y , B) z rovníc rovnováhy pre zadané hodnoty dostaneme:

$$F_{q1} = 1,5 \text{ kN}, \quad F_{q2} = 2 \text{ kN}, \quad A_x = -3,464 \text{ kN}, \quad A_y = 3,726 \text{ kN}, \quad B = -0,226 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka : $\sum F_{iy} = 0 \quad : A_y - F_{q1} - F_1 - F_{q2} + B + F_2 \cdot \sin \alpha = 0$

$$3,726 - 1,5 - 2 - 2 - 0,226 + 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad - \text{splnené.}$$

3.4.3. Rovnováha a ekvivalencia dvoch VRSS, statická určitost' riešenia

Statickú ekvivalenciu alebo rovnováhu viacerých všeobecne definovaných rovinných sústav síl – napr. sústavy F_i a F_j (pričom F_j obvykle reprezentuje väzbové reakcie) môžeme zapísať tromi rovnicami v tvare

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} &= 0 \\ \sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} &= 0 \\ \sum M_{iA} \pm \sum M_{jA} &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

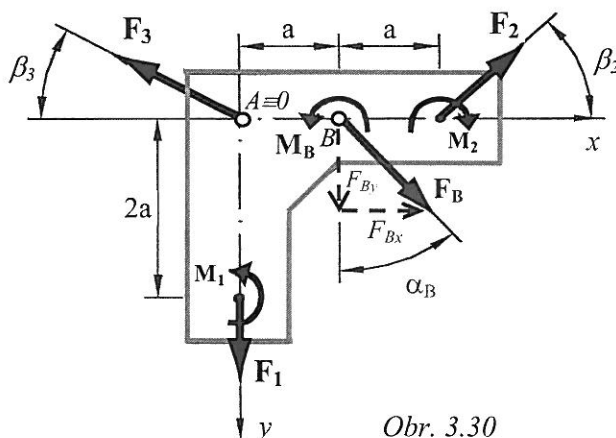
kde znamienko (-) platí pre statickú ekvivalenciu, znamienko (+) pre statickú rovnováhu VRSS.

Príklad 3.12: V rovine dosky (obr.3.30) pôsobia sily F_1 , F_2 , F_3 a momenty M_1 , M_2 . Nahradte účinok tejto sústavy síl ekvivalentným účinkom inej sústavy – tvorenej silou F_B , pôsobiacou v bode B a momentom M_B . Zadané: $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $F_3 = 150 \text{ N}$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$, $M_1 = 30 \text{ Nm}$, $M_2 = 60 \text{ Nm}$, $a = 0,1 \text{ m}$.

Riešenie:

Z úlohy riešenia *statickej ekvivalencie* oboch silových sústav vyplýva znamienko $\ominus$ v rovniciach rovnováhy (3.45) a platí:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} - \sum F_{jx} &= 0 \quad : F_{2x} - F_{3x} - F_{Bx} = 0 \\ \sum F_{iy} - \sum F_{jy} &= 0 \quad : -F_1 + F_{2y} + F_{3y} - (-F_{By}) = 0 \\ \sum M_{iA} - \sum M_{jA} &= 0 \quad : F_{2y} \cdot (2a) + M_1 - M_2 - \\ &\quad (-F_{By} \cdot a + M_B) = 0 \end{aligned}$$



Obr. 3.30

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} - \sum F_{jx} &= 0 \quad : (F_2 \cdot \cos \beta_2 - F_3 \cdot \cos \beta_3) - (F_B \cdot \sin \alpha_B) = 0 & \Rightarrow F_B \cdot \sin \alpha \\ \sum F_{iy} - \sum F_{jy} &= 0 \quad : (-F_1 + F_2 \cdot \sin \beta_2 + F_3 \cdot \sin \beta_3) - (-F_B \cdot \cos \alpha_B) = 0 & \Rightarrow F_B \cdot \cos \alpha \\ \sum M_{iA} - \sum M_{jA} &= 0 \quad : (F_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot 2a + M_1 - M_2) - (-F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot a + M_B) = 0 & \Rightarrow M_B \end{aligned}$$

$$F_B \cdot \sin \alpha_B = F_2 \cdot \cos \beta_2 - F_3 \cdot \cos \beta_3 = 100 \cdot \cos 45 - 150 \cdot \cos 30 = -59,2 \text{ N} = F_{Bx}$$

$$F_B \cdot \cos \alpha_B = F_1 - F_2 \cdot \sin \beta_2 - F_3 \cdot \sin \beta_3 = 100 - 100 \cdot \sin 45 - 150 \cdot \sin 30 = -45,7 \text{ N} = F_{By}$$

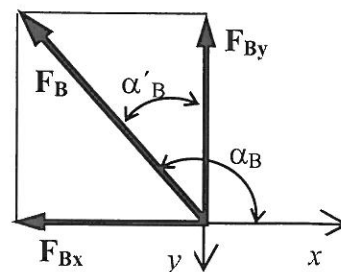
$$M_B = F_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot 2a + M_1 - M_2 + F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot a = 100 \cdot \sin 45 \cdot 0,2 + 30 - 60 - 45,7 \cdot 0,1 = -20,43 \text{ Nm} = M_B$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{5593,13} = 74,78 \text{ N}.$$

$$\cos \alpha'_B = \frac{F_{By}}{F_B} = \frac{45,71}{74,78} = 0,61126 \Rightarrow \alpha'_B = \arccos(0,61126) = 52,32^\circ$$

$$\text{resp. } \tan \alpha'_B = \frac{F_{Bx}}{F_{By}} = \frac{-59,2}{-45,7} = 1,295 \Rightarrow \alpha'_B = \arctan(1,295) = 52,32^\circ$$

$$\alpha_B = \pi + \alpha'_B = 180^\circ + 52,32^\circ = 232,32^\circ$$



Obr. 3.30 a

Interpretácia výsledkov:

$$\mathbf{F}_B = 74,78 \text{ N}, \quad \mathbf{M}_B = -20,43 \text{ Nm}, \quad \alpha'_B = 52,32^\circ, \quad \alpha_B = 232,32^\circ$$

Poznámka: Úloha môže byť zadaná aj opačne – úlohou je nájsť inú silovú sústavu, ktorá bude so zadanou silovou sústavou v rovnováhe. Je zrejmé, že výsledkom riešenia by boli rovnako veľké hodnoty $\mathbf{F}_B$ a $\mathbf{M}_B$, ale opačného zmyslu.

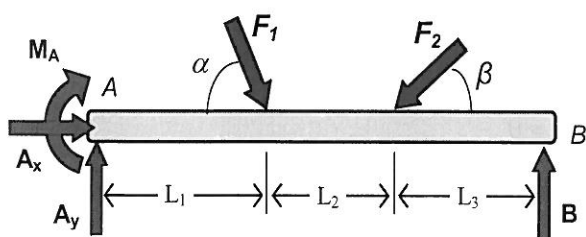
Rovnice pre analytické riešenie rovnováhy resp. ekvivalencie VRSS sú tri, čo zodpovedá nižšie uvedenej definícii statickej určitosti, t.j. riešiteľnosti v statike. Pri väčšom alebo menšom počte neznámych by bola úloha tzv. **staticky neurčitá a metódami statiky by sme ju nedokázali vyriešiť**. Najmä z časových dôvodov sa nebudeme riešením staticky neurčitých úloh v učebnom texte ďalej zaoberať. Iba pre ilustráciu postupu uvedieme jednoduchý príklad na riešenie väzbových reakcií staticky neurčito uloženého nosníka.

Príklad 3.13: Teleso je zaťažené dvomi silami $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ (Obr.3.31). V bode A je dokonale votknuté, v bode B podopreté všeobecnou väzbou. Uveďte spôsob riešenia rovnováhy síl takejto – staticky neurčitej – úlohy.

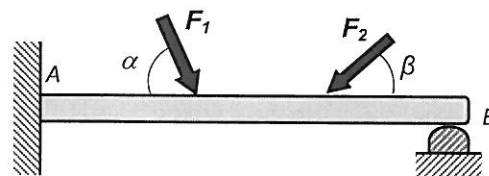
Riešenie:

Dokonalé votknutie v bode A samo o sebe predstavuje staticky určité uloženie a preto ďalšie podoprenie v bode B prináša ďalšiu neznámu reakciu $\mathbf{B}$ a je zrejmé, že teleso je uložené staticky neurčito. Platí:

$$n = n_v - n_o = 3 - (3+1) = -1 \text{ } ^\circ\text{V} \quad - 1 \times \text{staticky neurčité}$$



Obr.3.31a



Obr.3.31

Uvoľnenie telesa (Obr.3.31a) neprináša žiadny problém. V bode A zavádzame reakcie A_x a A_y a reakčný moment M_A vo votknutí. V bode B, kde je len všeobecná väzba, zavádzame iba normálovú reakciu $\mathbf{B}$. Je nutné však zdôrazniť, že aj v tomto prípade (ide stále iba o rovinný problém) máme k dispozícii len tri rovnice rovnováhy!

Sily $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y$ a $\mathbf{B}$ tvoria rovinnú sústavu síl s rôznym pôsobiskom, t.j. všeobecnú rovinnú sústavu síl – ktorej statickú rovnováhu ktorej môžeme vyjadriť tromi podmienkami rovnováhy, napr. typu 1 v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: A_x + F_1 \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow A_x$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \sin \beta + B = 0 \quad \Rightarrow A_y, B$$

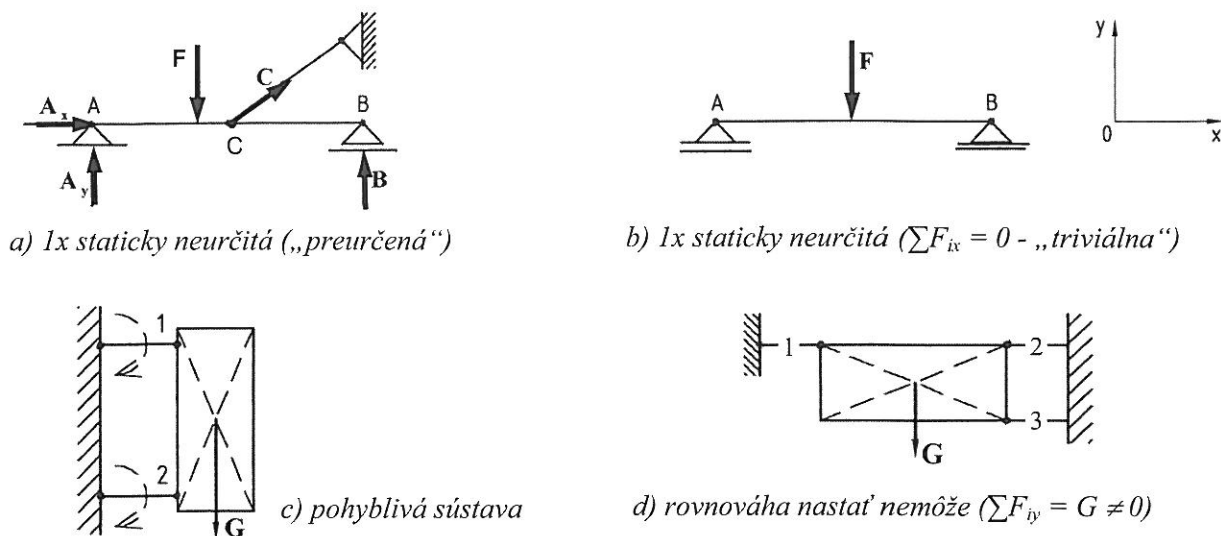
$$\sum M_A = 0: -M_A - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot L_1 - F_2 \cdot \sin \beta \cdot (L_1 + L_2) + B \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0 \quad \Rightarrow B, M_A$$

Chýbajúcu štvrtú rovnicu (nakolko máme štyri neznáme A_x, A_y, B, M_A) by sme už museli hľadať v oblasti deformácie telesa. Platí napríklad, že nosník sa v bode B nemôže prehnúť, pretože je podopretý. Platí teda tzv. podmienka nulovej deformácie, definovaná v tvare $\Delta y_B = \dots = 0$.

Záver riešenia: Riešenie staticky neurčitých úloh nie je možné bez riešenia problému deformácie telies a preto takéto – staticky podurčené úlohy – iba na základe princípov statiky vyriešiť nedokážeme.

Úloha riešenia všeobecnej rovinnnej sústavy síl je staticky určitá, keď neobsahuje viac neznámych ako tri a je riešiteľná (tzn. ak nie je výnimkovým prípadom).

Na obr.3.32a je uvedený prípad staticky neurčitej úlohy a na obr.3.32b,c,d sú prezentované možné prípady nevhodne usporiadaných väzieb, kedy vznikli tzv. *výnimkové prípady usporiadania väzieb*.



Obr. 3.32

Záverečné zhrnutie pre riešenie rovnováhy RZS a VRSS:

Rovnice (podmienky) rovnováhy silových sústav zostavujeme zásadne na základe charakteru riešenej silovej sústavy, pôsobiacej na skúmaný hmotný objekt. Pre riešenie rovnováhy dvoch základných druhov silových sústav – RZS a VRSS – platia rovnovážne podmienky uvedené v Tab.3.3

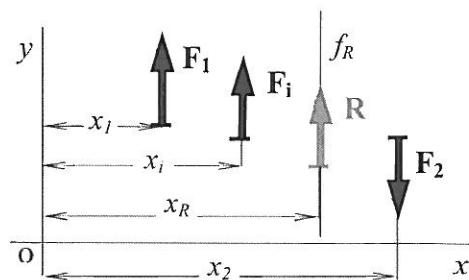
Rovnice rovnováhy základných druhov rovinných sústav síl (RZS a VRSS)

Tabuľka 3.3

Hmotný objekt	Počet °V voľného objektu	Centrálna silová sústava	Všeobecná silová sústava
Bod v rovine	2	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$	_____
Bod v priestore	3	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum F_{iz} = 0$	_____
Teleso v rovine	3	Ako hmotný bod v rovine $\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$	$\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum M_{iz} = 0$
Teleso v priestore	6	Ako hmotný bod v priestore $\sum F_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0$ $\sum F_{iz} = 0$	$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum M_{ix} = 0$ $\sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_{iy} = 0$ $\sum F_{iz} = 0 \quad \sum M_{iz} = 0$

3.5. Sústava rovnobežných síl v rovine

Jedným z najdôležitejších špecifických prípadov VRSS je usporiadanie síl ako **sústavy rovnobežných síl (SRS)**. Takáto sústava je tvorená silami ležiacimi v jednej rovine, ktoré sú rovnobežné so zadaným smerom, napr. s osou y príp. so smerom určeným ľubovoľným smerovým uhlom α_F . Náhradou SRS je jediná sila $\mathbf{R}$, ležiaca na nositeľke f_R rovnobežnej so smerom síl v sústave. Stačí preto určiť iba veľkosť výslednice $\mathbf{R}$ a jej polohu v rovine, určenú napr. súradnicou x_R (Obr.3.33).



Obr. 3.33

3.5.1. Redukcia, rovnováha a ekvivalencia sústavy rovnobežných síl

Podmienky náhrady, t.j. rovnice pre redukciu sústavy síl, rovnice rovnováhy, aj rovnice ekvivalencie SRS, vychádzajú z rovníc pre VRSS a pre prípad sústavy síl podľa Obr.3.33 platí:

- **Podmienky náhrady (redukcie):**

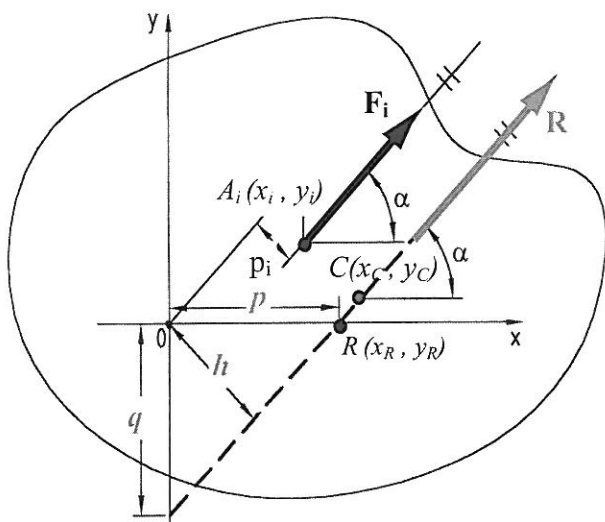
$$\text{Silové účinky: } \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad \text{otáčavé účinky: } \mathbf{R} \cdot x_R = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot x_i). \quad (3.46)$$

- **Podmienky rovnováhy:**

$$\text{Silové účinky: } \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0, \quad \text{otáčavé účinky: } \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot x_i) = 0. \quad (3.47)$$

- **Podmienky ekvivalencie dvoch sústav:**

$$\text{Silové účinky: } \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j, \quad \text{otáčavé účinky: } \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot x_i) = \sum_{j=1}^m (\mathbf{F}_j \cdot x_j). \quad (3.48)$$



Obr. 3.34

Majme sústavu rovnobežných síl $\mathbf{F}_i$ (obr.3.34), kde je pre názornosť uvedená iba jediná sila $\mathbf{F}_i$.

Výslednica $\mathbf{R}$ je so silami SRS rovnobežná a jej veľkosť je určená algebrickým súčtom veľkosti všetkých síl sústavy s ohľadom na ich zmysel, t.j. podľa (3.45) platí $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$.

Polohu sily $\mathbf{R}$ vzhľadom k vhodne zvolenému bodu (napr. počiatku zvolenej súradnicovej sústavy) môžeme určiť pomocou výslednice $\mathbf{M}$ otáčavých účinkov SRS k ľubovoľnému bodu. Dostaneme

$$M = R \cdot h$$

$$h = \frac{M}{R} = \frac{\sum F_i p_i}{R} \quad (3.49)$$

Príklad 3.14: Určite výpočtom aj graficky veľkosť a polohu výslednice dvoch rovnobežných síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, ktoré majú opačný zmysel (obr.3.35). Zadané: $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $p = 4 \text{ m}$ (vzdialenosť síl).

Riešenie:

- *Analyticky:* $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = -F_1 + F_2 = -500 + 100 \Rightarrow \mathbf{R} = -400 \text{ N}$

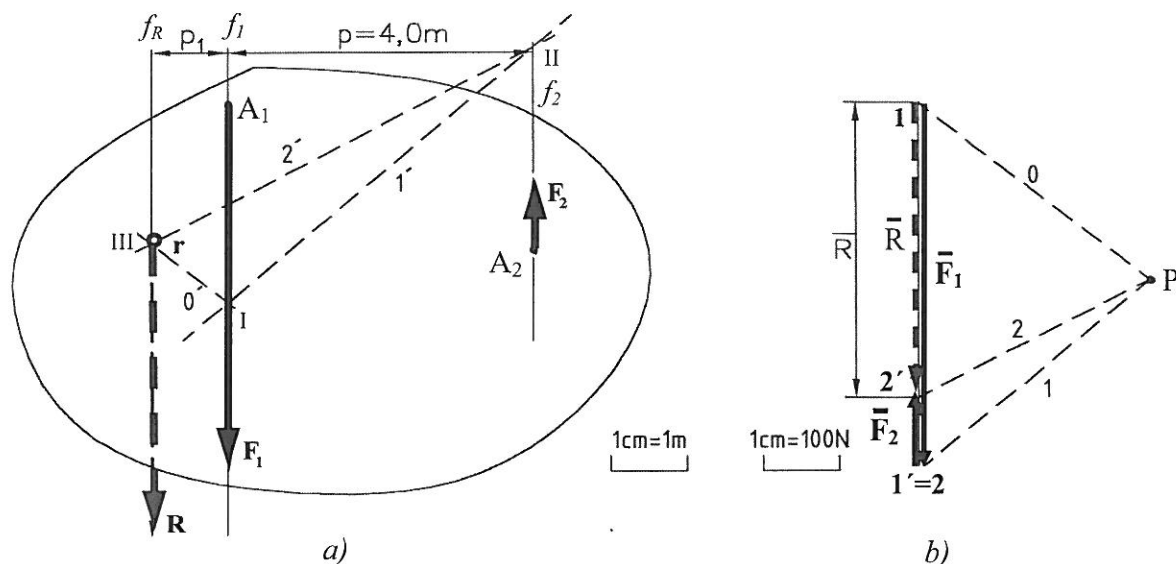
Z momentovej rovnice v tvare $M = R \cdot h$ pre momentový účinok vzhľadom k bodu r vyplýva

$$R \cdot h = M \Rightarrow R \cdot h = \sum (F_i \cdot p_i) = F_1 \cdot p_1 - F_2 \cdot (p_1 + p)$$

$$R \cdot 0 = -500 \cdot p_1 + 100 \cdot (p_1 + 4) = -500p_1 + 100p_1 + 400 \Rightarrow 0 = -400 \cdot p_1 + 400 \Rightarrow p_1 = \frac{-400}{-400} = 1,0 \text{ m}$$

• *Graficky:*

Zobrazovacie úseky síl $\bar{F}_1 = \frac{F_1}{m_F} = \frac{500 \text{ N}}{10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}} = 50 \text{ mm}$, $\bar{F}_2 = \frac{F_2}{m_F} = \frac{100 \text{ N}}{10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}} = 10 \text{ mm}$.



Obr. 3.35

Do silového obrazca (obr.3.35b) vynesieme v príslušných zmysloch sily $\bar{F}_1$ ($11'$), $\bar{F}_2$ ($22'$). Vo vytvorenom silovom obrazci má výslednica $\bar{R}$ zobrazovací úsek ($12'$) a smeruje dolu. Odmeraním zistíme

$$\bar{R} \cong 40 \text{ mm} \Rightarrow R \cong \bar{R} \cdot m_F = 40 \text{ mm} \cdot 10 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} \Rightarrow R \cong 400 \text{ N}.$$

Polohu výslednice zistíme z vláknového obrazca 3.35a. Stačí určiť jedinou súradnicu p_1 bodu r , pretože výslednica R sústavy rovnobežných síl je so silami v SRS rovnobežná. Odmeraním vzdialenosti medzi nositeľkami f_1 a f_R zistíme, že $\bar{p}_1 \cong 1 \text{ cm}$ a pri definovanej $m_L = 1 \text{ m} \cdot \text{cm}^{-1}$ (Obr.3.35) dostaneme $p_1 \cong 1 \text{ m}$.

Príklad 3.15: Výpočtom aj graficky rozložte zadanú silu R (obr.3.36) na dve rovnobežné sily, ktorých nositeľky (smer i vzájomná vzdialenosť) poznáme. Zadané: $R = 4 \text{ kN}$, $p_1 = 1 \text{ m}$, $p_2 = 3 \text{ m}$.

Riešenie:

• *Analyticky:*

Zvolíme bod otáčania na jednej z nositeliek neznámych síl (urýchľuje to výpočet), napr. na nositeľke f_2 sily F_2 je to bod A_2 (obr. 3.36 a). Podľa momentovej vety k bodu A platí

$$R \cdot p_2 = F_1 \cdot (p_1 + p_2) + F_2 \cdot 0 \Rightarrow F_1 = \frac{R \cdot p_2}{p_1 + p_2} \Rightarrow F_1 = \frac{4.3}{1+3} = \frac{12}{4} = 3 \text{ kN}$$

resp. ak zvolíme bod otáčania na nositeľke f_1 sily F_1 (napr. bod A_1) dostaneme

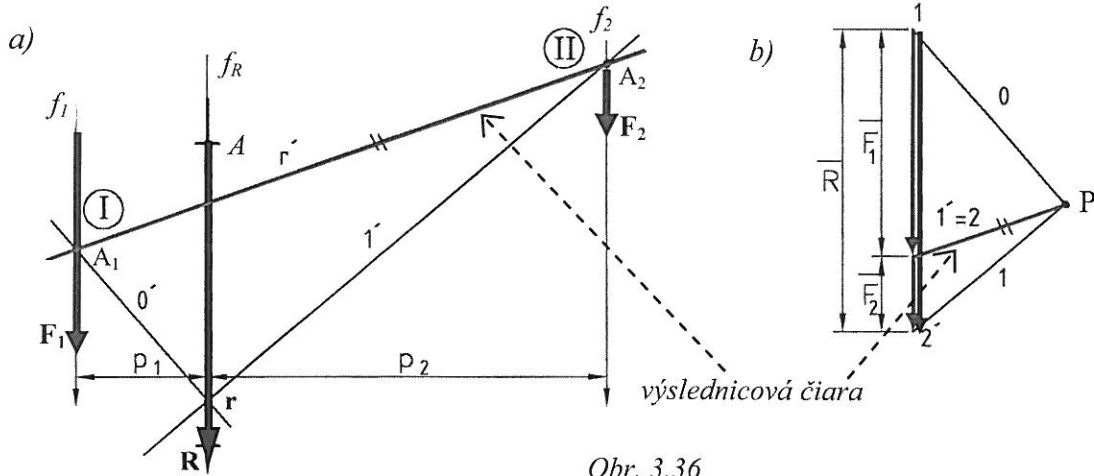
$$R \cdot p_1 = F_2 \cdot (p_1 + p_2) + F_1 \cdot 0 \Rightarrow F_2 = \frac{R \cdot p_1}{p_1 + p_2} \Rightarrow F_2 = \frac{4.1}{1+3} = \frac{4}{4} = 1 \text{ kN}.$$

- *Graficky: (Obr.3.36 a,b)*

Na ľubovoľnej priamke $\overline{12'} \parallel \mathbf{R}$, f_1, f_2 (obr.3.36b) vynesieme zobrazovací úsek sily $\mathbf{R}$, zakreslený v zvolenej mierke síl, napr. $m_F = 1 \text{ kN.cm}^{-1}$

$$\overline{R} = \frac{R}{m_F} = \overline{12}.$$

Vhodne zvolíme bod P (tzv. pól) a v silovom obrazci (obr.3.36b) nakreslíme pólové lúče 0,1. Vhodne umiestnené vlákna 0'a 1'vo vláknovom obrazci (obr.3.36a) rovnobežné s lúčmi 0,1 v silovom obrazci pretínajú nositeľky síl f_1, f_2 v bodoch I, II. Lomená čiara $\overline{0'1'}, r'$ je tzv. **výslednicová čiara**.



Obr. 3.36

Čiara $\overline{P1'}$ v silovom obrazci (obr.3.36b) je rovnobežná s čiarou r' a rozdelí úsečku $\overline{12'}$ (zobrazovací úsek sily $\mathbf{R}$) na dve časti $\overline{F_1} = \overline{11'}$ a $\overline{F_2} = \overline{22'}$, ktoré prináležia hľadaným silám $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$. Odmeraním zistíme $\overline{F_1} \cong 3 \text{ cm}$ a $\overline{F_2} \cong 1 \text{ cm}$. Pre veľkosť síl $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ v [N] dostaneme

$$F_1 = m_F \cdot \overline{F_1} = 1 \text{ kN/cm} \cdot 3 \text{ cm} = 3 \text{ kN}, \quad F_2 = m_F \cdot \overline{F_2} = 1 \text{ kN/cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ kN}.$$

3.5.2. Statický stred sústavy rovnobežných síl

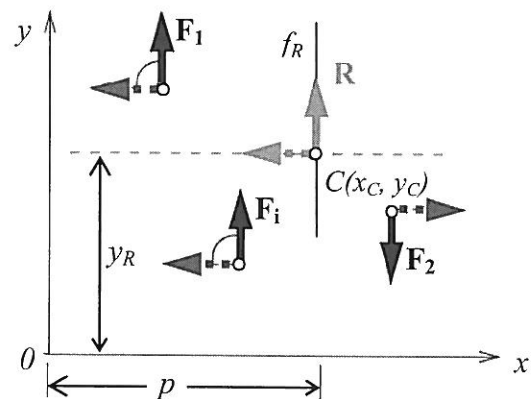
Momentovú rovnicu (3.46) môžeme rozpísať do tvaru

$$x_R \cdot \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \cdot x_i) \Rightarrow x_R \cdot R_y - y_R \cdot R_x = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}), \quad (3.50)$$

z ktorej po voľbe hodnoty x_R , môžeme určiť súradnicu y_R ľubovoľného bodu, ležiaceho na výslednici $\mathbf{R}$ zadanej sústavy rovnobežných síl. Obvykle volíme $y_R = 0$, čím zabezpečíme možnosť určenia súradnice p , ako priesečníka nositeľky f_R výslednice $\mathbf{R}$ s osou x (obr. 3.37). Analogicky pre $x_R = 0$ získame súradnicu q priesečníka sily $\mathbf{R}$ s osou y .

Keď priemety síl do osí x a y vyjadríme pomocou smerového uhla α , bude rovnica (3.50) definovaná v tvare

$$\begin{aligned} x_R \cdot R_y - y_R \cdot R_x &= \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \Rightarrow \\ x_R \cdot R \cdot \sin \alpha - y_R \cdot R \cdot \cos \alpha &= \\ \sum x_i \cdot F_i \cdot \sin \alpha - \sum y_i \cdot F_i \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.51)$$



Obr. 3.37

Jedným z možných riešení rovnice (3.51) sú aj súradnice takého *špecifického bodu* $C(x_C, y_C)$, ležiaceho na nositeľke výslednice $\mathbf{R}$ (Obr.3.37), ktorý vyhovuje podmienkam v tvare

$$\begin{aligned} x_C \cdot R &= \sum x_i \cdot F_i \\ y_C \cdot R &= \sum y_i \cdot F_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

Z rovníc (3.52) je zrejmé, že súradnice bodu C závisia iba na súradniciach pôsobísk síl A_i a na veľkosti síl F_i , tvoriacich SRS a že vôbec nezávisia na uhle (α) natočenia síl v sústave. Takémuto jedinečnému bodu C hovoríme *statický stred sústavy rovnobežných síl* (často sa používa aj pomenovanie *stredisko sústavy rovnobežných síl*).

Majme sústavu rovnobežných síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_i$ (napr. $\parallel$ s osou y), pôsobiacich v bodoch $A_i(x_i, y_i)$ podľa Obr.3.37. Výslednicu $\mathbf{R}$ a polohu jej nositeľky (x_R) určíme jednoducho pomocou vzťahov (3.46) a (3.50). Ak všetky sily SRS pootočíme v rovnakom smere (napr. proti smeru hodinových ručičiek) o rovnaký uhol, napr. o $\pi/2$, dostaneme sústavu síl rovnobežnú s osou x (Obr.3.37). Výslednica takto pootočenej SRS bude mať rovnakú veľkosť ako výslednica pôvodnej SRS, budú však navzájom pootočené o uhol $\pi/2$ a bude ležať na nositeľke vzdialenej od osi x vo vzdialenosti y_R . Platí

$$R \cdot y_R = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i) \Rightarrow y_R = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_i)}{R} = \frac{M_z}{R}. \quad (3.53)$$

Statickým stredom ľubovoľnej SRS je potom priesečník nositeľiek výsledníc oboch sústav, t.j. bod $C(x_R, y_R)$. Bolo preukázané, že platí tvrdenie:

Nositeľka výslednice $\mathbf{R}$ sústavy rovnobežných síl vždy prechádza statickým stredom tejto sústavy síl (bod C) a to pri akomkoľvek uhle natočenia SRS.

Určenie polohy statického stredu môžeme vykonať analyticky alebo graficky. Súradnice statického stredu SRS môžeme analyticky určiť pomocou vzťahov

$$x_C = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{\sum F_i}. \quad (3.54)$$

a pre sústavu rovnobežných síl je možné vysloviť vetu:

Ak sa sily, tvoriace sústavu rovnobežných síl, otáčajú okolo svojich pôsobísk, potom sa otáča aj výslednica sústavy okolo jediného bodu – tzv. statického stredu SRS.

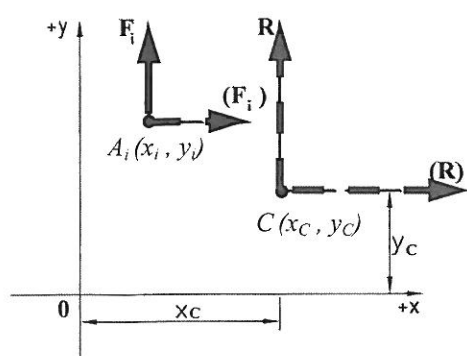
Grafické určovanie statického stredu SRS je založené na určení výslednice pôvodnej a pootočenej SRS vhodným grafickým postupom. Je nutné opäť definovať mierky síl, mierky vzdialeností, vytvoriť silový obrazec, zostrojiť pólový obrazec a z neho vychádzajúci vláknový mnohouholník (napr. obr.3.35) a určiť súradnice ich priesečníka (bod C). Znamená to, že **polohu statického stredu SRS môžeme graficky určiť ako priesečník výsledníc pre dva smery pootočenej sústavy**. Obvykle volíme smery na seba kolmé.

Príklad 3.16: Určite výpočtom aj graficky polohu statického stredu sústavy rovnobežných síl (obr.3.38). Zadané: $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = -100 \text{ N}$, $F_3 = 400 \text{ N}$, $A_1(1; 2,5)$, $A_2(2,5; 1,5)$, $A_3(4; -0,5)$ v [m].

Riešenie:

- *Analyticky:*

Dosadením zadaných parametrov SRS so zreteľom na ich znamienka do rovníc (3.54) zistíme súradnice statického stredu C zadanej sústavy rovnobežných síl a dostaneme



Obr. 3.38

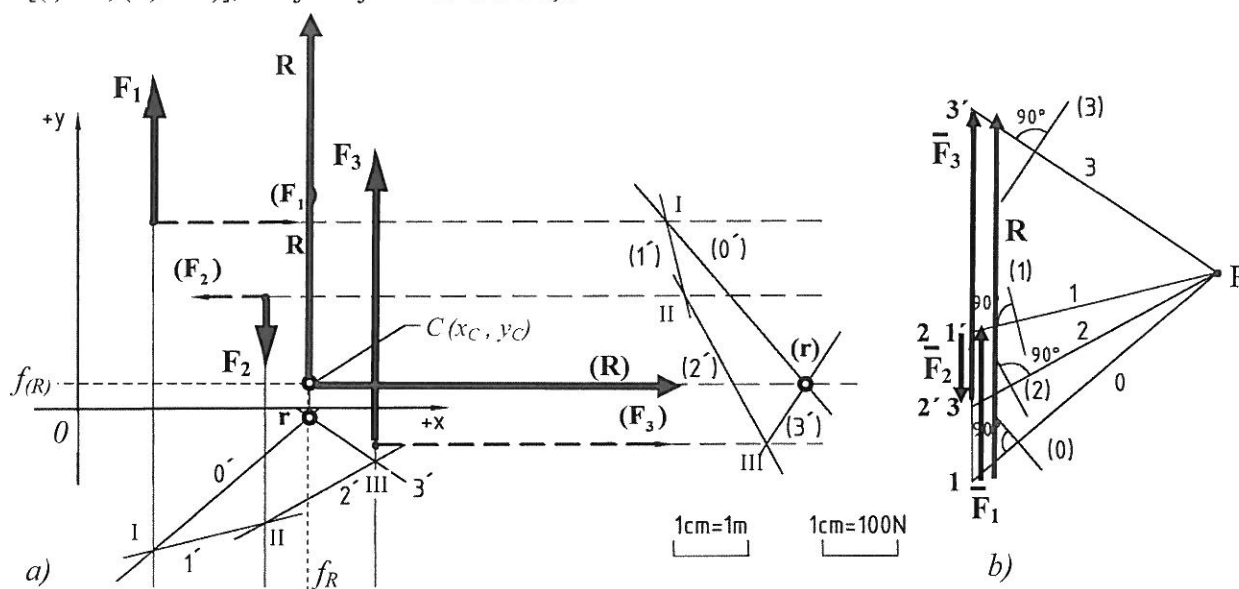
$$x_C = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i} = \frac{200 \cdot 1 + (-100) \cdot 2,5 + 400 \cdot 4}{200 + (-100) + 400} = 3,01 \text{ m}$$

$$y_C = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i} = \frac{200 \cdot 2,5 + (-100) \cdot 1,5 + 400 \cdot (-0,5)}{200 + (-100) + 400} = 0,3 \text{ m}$$

- *Graficky:*

Zvolíme mierky: $m_L = 0,1 \text{ m/mm}$, $m_F = 10 \text{ N/mm}$. Silový obrazec (obr.3.38b) nakreslíme iba raz, napr. pre zvislé sily. Pre určenie statického stredu sústavy rovnobežných síl je potrebné

poznať výslednicu síl aspoň v dvoch smeroch natočenia sústavy síl a preto môžeme pre zjednodušenie využiť ten istý silový obrazec z obr. 3.38a dole, akurát myslene pootočený o $\pi/2$ (Obr. 3.38a vpravo). Platí teda: $[(i) \perp i; (i') \perp i']$, ako je zrejmé z obr.3.38 b,a.



Obr. 3.38 a,b

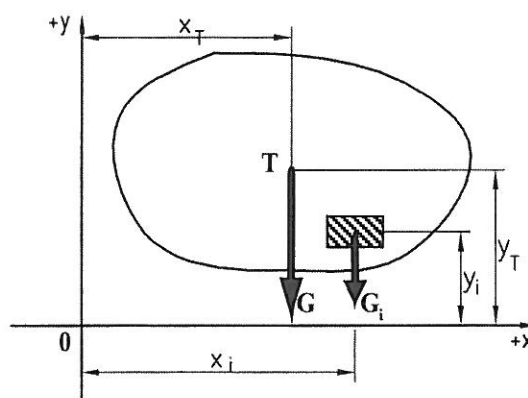
Odmeraním zistíme: $x_C \cong 30 \text{ mm} \cdot 0,1 \text{ m/mm} \Rightarrow \mathbf{x_C \cong 3 \text{ m}}$, $y_C \cong 3 \text{ mm} \cdot 0,1 \text{ m/mm} \Rightarrow \mathbf{y_C \cong 0,3 \text{ m}}$.

Doteraz uvedené poznatky o statickom strede SRS využívame aj pri určovaní tzv. **hmotného stredu objektu** (t.j. čiary, plochy alebo telesa), ktorý vo fyzike a mechanike telies nazývame **ťažisko**.

3.6. Ťažisko hmotných objektov

Z fyziky je známe, že na hmotný objekt v gravitačnom poli Zeme nepretržite pôsobí sústava elementárnych objemových síl G_i , ktoré vzhľadom na veľmi vzdialený stred gravitácie môžeme bez výraznej straty presnosti považovať za **sústavu rovnobežných síl** (obr. 3.39).

Pre prípad tiažových síl $G_i = m_i \cdot g$, pôsobiach na jednotlivé hmotné body telesa, t.j. pre sústavu elementárnych tiažových síl G_i od jednotlivých hmotných bodov telesa v tiažovom (gravitačnom) poli Zeme, nazývame statický stred takejto sústavy obvykle nazývame **ťažiskom T**.



Obr. 3.39

V praktických úlohách mechaniky zmenu polohy statického stredu, vyvolanú rotáciou Zeme okolo svojej osi, obvykle zanedbávame a pracujeme iba s hmotným stredom – ťažiskom - objektu.

Ťažisko objektu je hmotný bod so sústredenou hmotnosťou objektu, resp. bod, v ktorom musíme objekt podoprieť, aby účinkom vlastnej tiaže nenastalo jeho pootočenie.

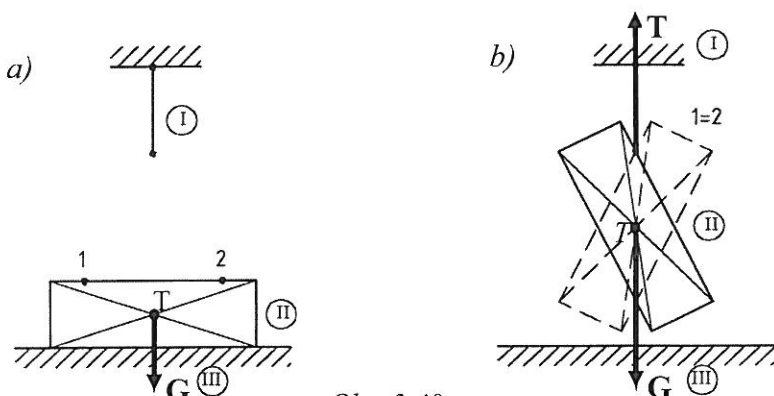
Vzťahy pre určenie súradníc polohy ťažiska T hmotného útvaru (jedno, dvoj alebo trojrozmerného) môžeme potom jednoducho určiť napr. z momentovej podmienky v tvare

$$M = \sum (G_i \cdot x_i) = \sum G_i \cdot x_T \Rightarrow x_T = \frac{\sum (G_i \cdot x_i)}{\sum G_i}$$

$$M = \sum (G_i \cdot y_i) = \sum G_i \cdot y_T \Rightarrow y_T = \frac{\sum (G_i \cdot y_i)}{\sum G_i} \quad (3.55)$$

kde $\sum G_i = G$ je celková tiaž telesa [N].

Z vlastností statického stredu SRS vyplýva, že sila tiaže $G = \sum G_i$ prechádza vždy ťažiskom telesa a to nezávisle na jeho umiestnení (polohe a natočení) vo vzťažnom priestore.



Obr. 3.40

Napríklad, ak zavesíme ľubovoľný homogénny hmotný objekt (obr.3.40a) v ktoromkoľvek bode, napr. bod 1 alebo bod 2, poloha objektu sa ustáli vtedy (obr.3.40b), keď nositeľka výslednice reakčných síl T bude kolineárna (t.j. stotožní sa) s nositeľkou akčnej sily G , vyvolanej vlastnej tiažou objektu, pôsobiacej práve v hmotnom strede telesa – ťažisku. Objekt sa dostane do stavu pokoja, keď začne platiť $G = -T$.

3.6.1. Ťažiská jednoduchých a zložených útvarov

Pre homogénne spojité hmotné objekty platí

$$dG = \rho \cdot g \cdot dV \quad (3.56)$$

kde ρ predstavuje známu **hustotu (mernú špecifickú hmotnosť) materiálu**, g je gravitačné zrýchlenie a dV je elementárny objem objektu. Ich modelom môže byť rovinná čiara (L), plocha (A) alebo teleso (V), pričom ich hmotnosť je okrem rozmerov objektu charakterizovaná aj ďalšou veličinou - ρ_L [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$] pre čiaru, ρ_A [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$] pre plochu, resp. ρ_V [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] pre hmotné objemové objekty, predstavujúcou mernú špecifickú hmotnosť – hustotu - materiálu, z ktorého je objekt vytvorený.

Polohu ťažiska objemového objektu môžeme analogicky so vzťahmi 3.54 vyjadriť súradnicami

$$x_T = \frac{\int_{(V)} x \cdot dV}{\int_{(V)} dV}, \quad y_T = \frac{\int_{(V)} y \cdot dV}{\int_{(V)} dV}, \quad z_T = \frac{\int_{(V)} z \cdot dV}{\int_{(V)} dV}. \quad (3.57a)$$

Pre homogénne plošné útvary konštantnej hrúbky h , uvažované v priestore môžeme objemový element nahradiť plošným elementom $dV = h \cdot dA$, kde A je plocha útvaru a pre súradnice jeho ťažiska preto vzťahy (3.57a) prejdú do tvaru

$$x_T = \frac{\int_{(A)} x \cdot dA}{\int_{(A)} dA}, \quad y_T = \frac{\int_{(A)} y \cdot dA}{\int_{(A)} dA}, \quad z_T = \frac{\int_{(A)} z \cdot dV}{\int_{(A)} dV} \quad (3.57b)$$

Pre jednorozmerné homogénne útvary stálega prierezu $A = \text{konšt}$ (tyče, drôty, profily a pod.) uvažované v priestore môžeme pre objemový element písať $dV = A \cdot dl$, kde l je dĺžka útvaru. Súradnice ťažiska jednorozmerných útvarov sú podľa (3.57a) určené vzťahmi v tvare

$$x_T = \frac{\int_{(l)} x \cdot dl}{\int_{(l)} dl}, \quad y_T = \frac{\int_{(l)} y \cdot dl}{\int_{(l)} dl}, \quad z_T = \frac{\int_{(l)} z \cdot dl}{\int_{(l)} dl} \quad (3.57c)$$

V prípade, ak je možné hmotný objekt rozdeliť na konečný počet elementov – t.j. diskretných útvarov, ktorých ťažiská poznáme alebo vieme určiť, potom ťažisko takého – zloženého – homogénneho hmotného objektu určíme podľa vzťahov (3.57), platných pre:

- **telesá** - priestorové objekty:

$$x_T = \frac{\sum x_i \cdot V_i}{\sum V_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i \cdot V_i}{\sum V_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i \cdot V_i}{\sum V_i} \quad (3.58a)$$

- **plochy** - plošné útvary konštantnej hrúbky:

$$x_T = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad (3.58b)$$

- **čiar** - jednorozmerné telesá konštantného prierezu:

$$x_T = \frac{\sum x_i \cdot l_i}{\sum l_i}, \quad y_T = \frac{\sum y_i \cdot l_i}{\sum l_i}, \quad z_T = \frac{\sum z_i \cdot l_i}{\sum l_i} \quad (3.58c)$$

Z dôvodu toho, že sa v učebnom texte venujeme iba statickej analýze rovinných úloh, budeme ďalej uvažovať iba základné vzťahy pre určenie súradníc ťažísk plošných útvarov a jednorozmerných objektov. Ak do vzťahov (3.55) dosadíme za elementárnu tiaž $G_i = \rho_L \cdot l_i \cdot g$ (čiara) resp. $G_i = \rho_A \cdot A_i \cdot g$ (plocha), pre $i=1,2,\dots,n$, predstavujúce jednotlivé časti hmotného objektu, pre súradnice ťažiska útvaru dostaneme:

Čiara v rovine	Plocha v rovine
$x_T = \frac{\sum (l_i \cdot x_i)}{\sum l_i}, \quad y_T = \frac{\sum (l_i \cdot y_i)}{\sum l_i}$	$x_T = \frac{\sum (A_i \cdot x_i)}{\sum A_i}, \quad y_T = \frac{\sum (A_i \cdot y_i)}{\sum A_i}$

(3.59)

kde $\sum l_i = l$ je celková dĺžka [m] a $\sum A_i = A$ je celková plocha [m²] hmotného útvaru.

Podľa rovníc (3.59) môžeme bez výraznejších problémov určovať aj ťažiská tvarovo komplikovanejších čiar a plôch. Najskôr ich rozložíme na viac jednoduchších objektov, ktorých rozmery a polohu ťažísk poznáme alebo vieme vyriešiť. Pri určovaní ťažísk homogénnych (rovnorodých) hmotných objektov a útvarov platia nasledovné tvrdenia (obr.3.41):

- **útvary so stredom súmernosti, majú ťažiská v tomto strede,**
- **útvary, ktoré majú os súmernosti, majú ťažisko na tejto osi,**
- **útvary, ktoré majú rovinu súmernosti, majú ťažiská v tejto rovine,**
- **ak sú známe ťažiská dvoch častí telesa, leží ťažisko celého telesa na spojnici týchto ťažísk.**

Poznámka: Ťažisko môže ležať aj mimo hmotný útvar (čiaru, plochu, teleso) !

Pomocné výpočty pre výpočet ťažiska prútovej konštrukcie

Tabuľka 3.4

i	x_i [m]	y_i [m]	$l_i \cdot x_i$	$l_i \cdot y_i$
1	3,25	3,00	14,98	13,827
2	3,75	1,75	18,56	8,66
3	0,50	1,25	1,346	3,365
4	1,50	1,25	4,038	3,365
5	1,00	0,00	2,00	0,00
			40,924	29,217

Pre súradnice ťažiska podľa (3.58c) potom z Tab.3.4 dostaneme

$$x_T = \frac{\sum l_i \cdot x_i}{\sum l_i} = \frac{40,922}{16,942} = 2,415 \text{ m} , \quad y_T = \frac{\sum l_i \cdot y_i}{\sum l_i} = \frac{29,217}{16,942} = 1,724 \text{ m} .$$

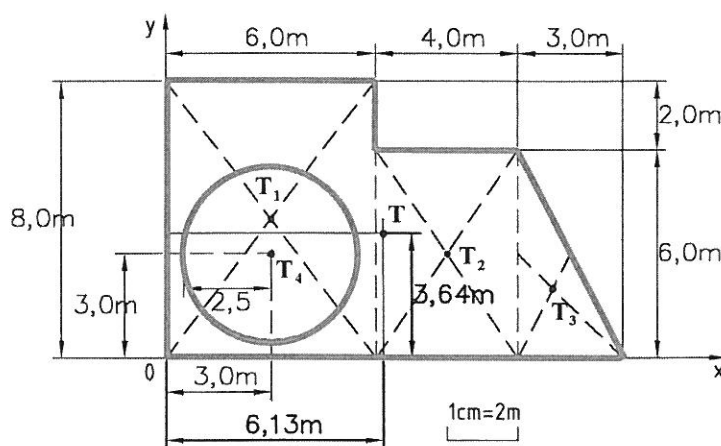
Celková tiažová sila žeriava: $G = \rho_L \cdot g \cdot \sum l_i \Rightarrow G = 5,5 \cdot 9,81 \cdot 16,942 = 914,1 \text{ N}$.

Príklad 3.19: Nadrozmerné teleso (obr.3.44) je potrebné pred prepravou uložiť bezpečne na vozidlo a preto je z hľadiska stability a bezpečnosti jazdy nutné určiť súradnice ťažiska. Zadané parametre sú v Obr.3.44.

Riešenie:

Zložený prierez rozdelíme na štyri časti: dva obdĺžniky (T_1, T_2), jeden trojuholník (T_3) a jeden kruh (T_4), ktorého plocha je tzv. *negatívna* (tzn. musíme ju pri zisťovaní celkovej plochy A zloženého prierezu odrátať!).

Súradnice ťažísk $T_i(x_i, y_i)$ jednotlivých častí zloženého prierezu telesa (pre $i=1,2,3,4$) sú spolu s výsledkami výpočtov ďalších potrebných parametrov uvedené v tab.3.5.



Obr. 3.44

Pomocné výpočty pre výpočet ťažiska zloženej plochy

Tabuľka 3.5

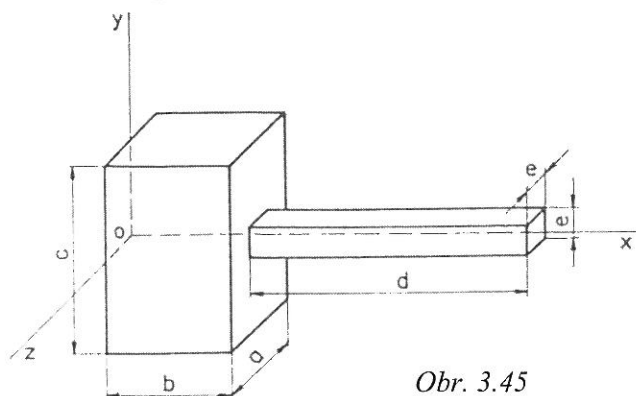
i	x_i [m]	y_i [m]	A_i [m ²]	$y_i A_i$	$x_i A_i$
0	1	2	3	4 = (2 x 3)	5 = (1 x 3)
1	3,00	4,00	48,00	192,00	144,0
2	8,00	3,00	24,00	72,00	192,0
3	11,00	2,00	9,00	18,00	99,0
4	3,00	3,00	-19,63	-58,89	-58,89
			61,37	223,11	376,11

Podľa rovníc (3.58b) sú súradnice ťažiska prepravovaného telesa

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{376,11}{61,37} = 6,13 \text{ m} , \quad y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{223,11}{61,37} = 3,64 \text{ m} .$$

Poznámka: Nadrozmerné telesá sú telesá, ktoré majú rozmery väčšie, ako sú technickými normami stanovené priečne prechodové prierezy komunikácií. Obvykle prekračujú aj dovolené zaťaženie ďalších stavieb na komunikáciách (najmä mosty), pri výbere a príprave trasy je nutné brať na to zreteľ a ich tzv. zodolňovaniu venovať pozornosť.

Príklad 3.20: Určte súradnice ťažiska telesa podľa obr.3.45. Zadané: $a=100\text{ mm}$, $b=80\text{ mm}$, $c=180\text{ mm}$, $d=400\text{ mm}$, $e=30\text{ mm}$.



Obr. 3.45

Riešenie:

Jedná sa o teleso súmerné podľa osi x , preto platí $y_T = z_T = 0$.

Zložené teleso rozdelíme na dva základné geometrické útvary s objemami V_1 a V_2 . Platí

$$V_1 = a \cdot b \cdot c = 100 \cdot 80 \cdot 180 = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$V_2 = e^2 \cdot d = 30^2 \cdot 400 = 0,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$V = V_1 + V_2 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Určíme súradnice ťažísk obidvoch základných geometrických útvarov a dostaneme

$$x_1 = \frac{b}{2} = 40 \text{ mm} \quad , \quad x_2 = b + \frac{d}{2} = 280 \text{ mm}$$

Podľa (3.55) určíme súradnicu ťažiska x_T , pričom platí $G_i = m_i \cdot g = \rho \cdot V_i \cdot g$ a dostaneme

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^2 G_i \cdot x_i}{G} = \frac{\rho \cdot V_1 \cdot g \cdot x_1 + \rho \cdot V_2 \cdot g \cdot x_2}{\rho \cdot V \cdot g} = \frac{V_1 \cdot x_1 + V_2 \cdot x_2}{V} \cong 88 \text{ mm} .$$

3.6.2. Ťažiská zložitých útvarov zadaných analyticky

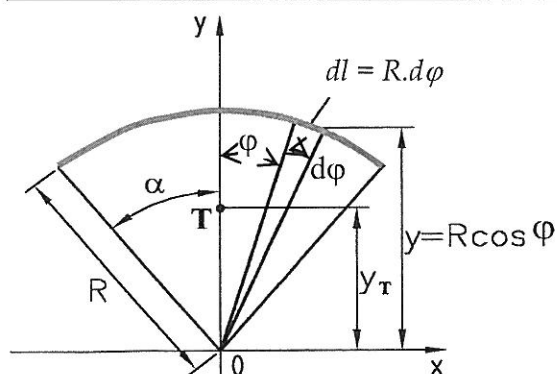
V prípade, keď čiaru alebo plochu (z dôvodu zložitosti ich tvaru) môžeme vyjadriť iba analyticky - ako funkciu, pri určovaní polohy ich ťažiska využívame integrálny počet. Súradnice ťažísk sú určené vzťahmi

Čiara		Plocha	
$x_T = \frac{\int x \cdot dl}{\int dl}$	$y_T = \frac{\int y \cdot dl}{\int dl}$	$x_T = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA}$	$y_T = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$

(3.60)

kde $\int_l dl = l \text{ [m]}$ je dĺžka úseku a $\iint_A dA = A \text{ [m}^2\text{]}$ je plocha útvaru.

Príklad 3.21: Určte súradnice ťažiska oblúka (obr.3.46a) o polomere R , vymedzeného uhlom 2α .



Obr. 3.46a

Riešenie:

Os y je osou symetrie oblúka a teda $x_T = 0$. Druhú súradnicu $y_T = ?$ môžeme určiť podľa rovnice (3.60) a platí

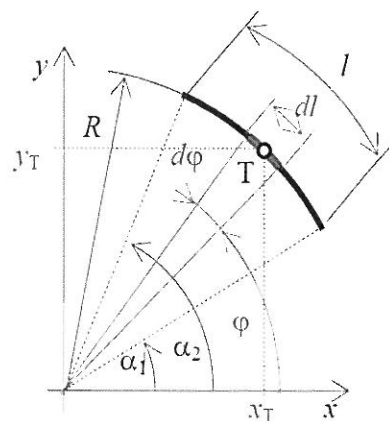
$$y_T = \frac{\int y \cdot dl}{\int dl} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cdot \cos \phi \cdot R \cdot d\phi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cdot d\phi} = \frac{R^2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot R \cdot \alpha} = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\alpha} ,$$

kde pre oblúk platí $y = R \cdot \cos \phi$ a $dl = R \cdot d\phi$.

V prípade, ak výsek (oblúk) nie je symetrický okolo žiadnej z osí x , y , podľa nákresu na Obr.3.46b a pre $x = R \cdot \cos \varphi$, $y = R \cdot \sin \varphi$ a $dl = R \cdot d\varphi$ pre súradnice ťažiska oblúka dostaneme

$$x_T = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R \cdot \cos \varphi \cdot R \cdot d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cdot d\varphi} = R \cdot \frac{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

$$y_T = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R \cdot \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cdot d\varphi} = R \cdot \frac{\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$



Obr.3.46b

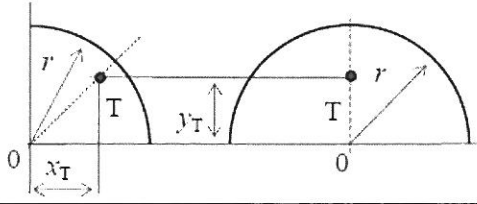
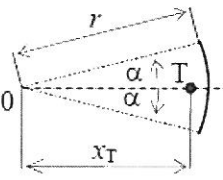
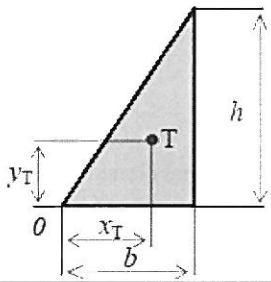
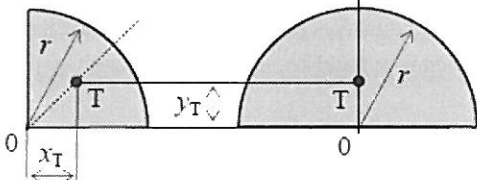
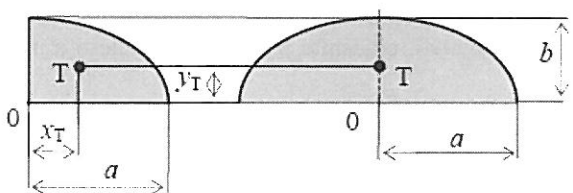
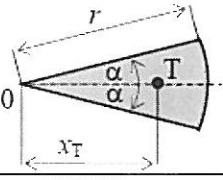
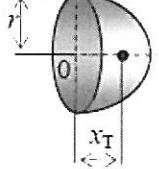
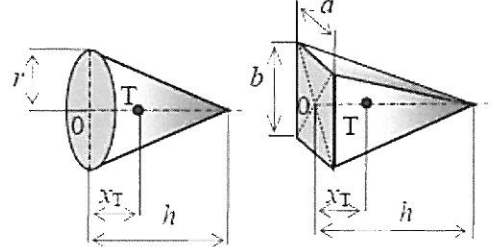
Vzťahy pre určovanie plochy a súradníc ťažísk mnohých čiar a plošných útvarov nájdeme obvykle v statických, príp. iných tabuľkách, resp. pre vybrané plošné a priestorové objekty sú základné vzťahy pre súradnice ťažiska a dĺžku, plochu resp. objem útvaru uvedené v Tab.3.6.

Kontrolné otázky:

1. Charakterizujte pojem silová sústava, objasnite základné členenia silových sústav podľa usporiadania síl v rovine.
2. Objasnite podstatu a význam postupov ako skladanie a rozkladanie sily a ich využitie pri riešení silových sústav.
3. Definujte základné pojmy v analýze silových sústav a objasnite ich podstatu.
4. Účinok sústavy síl na teleso – posuvný a otáčavý účinok – vzťahy a dohodnutá konvencia znamienok a zmyslov síl.
5. Definujte základné úlohy analýzy silových sústav – pojmy statická rovnováha, statická ekvivalencia.
6. Charakterizujte sústavu síl na spoločnej nositeľke, objasnite spôsob jej redukcie, rovnováhy a ekvivalencie, praktický príklad.
7. Definujte sústavu síl so spoločným pôsobiskom, objasnite analytický aj grafický spôsob jej redukcie.
8. Objasnite pre sústavu síl so spoločným pôsobiskom možnosti analytického a grafického riešenia jej rovnováhy.
9. Riešenie rovnováhy a ekvivalencie dvoch zväzkov síl v rovine, objasnite nutnú podmienku statickej určitosti RZS.
10. Charakterizujte všeobecnú rovinnú sústavu síl, objasnite jej účinky na teleso a uveďte, čo sú podmienky náhrady a aký majú vo všeobecnosti tvar.
11. Objasnite základný princíp a spôsob redukcie VRSS – analytický, grafický. (é a ekvivalencie, využitie v praxi).
12. Uveďte štyri možné prípady, ktoré môžu nastať pri redukcii VRSS a objasnite ich.
13. Objasnite spôsob riešenia rovnováhy VRSS, definujte vektorový a skalárny tvar rovníc rovnováhy VRSS.
14. Uveďte spôsob analytického riešenia rovnováhy VRSS a uveďte príklad jeho praktického využitia, princíp grafického riešenia rovnováhy VRSS.
15. Objasnite rovnice rovnováhy / ekvivalencie viac VRSS a uveďte možnosti ich praktického využitia.
16. Charakterizujte sústavu rovnobežných síl, objasnite spôsob jej redukcie, rovnováhy a ekvivalencie, praktický príklad sústavy rovnobežných síl.
17. Objasnite pojem statický stred sústavy rovnobežných síl, možnosti jeho určenia výpočtom aj graficky, uveďte jeho význam v statike v spojitosti s ťažiskom hmotných objektov.
18. Charakterizujte ťažisko hmotných objektov, základné vzťahy a možnosti jeho určenia pre čiary, plochy príp. telesá.
19. Definujte možnosti zjednodušenia určovania polohy ťažiska zložených homogénnych objektov, uveďte príklady.
20. Objasnite základný princíp a používaný matematický aparát pre určovanie ťažiska zložitých útvarov.

Vzťahy pre určenie súradníc ťažiska pre vybrané geometrické útvary

Tabuľka 3.6

Útvár	Geometrický útvar	x_T	y_T	$l / A / V$
štvrtkružnica		$\frac{2}{\pi} r$	$\frac{2}{\pi} r$	$\frac{\pi}{2} r$
polkružnica		0		πr
výsek z kružnice		$r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$
trojuholníková plocha		$\frac{2}{3} b$	$\frac{1}{3} h$	$\frac{1}{2} bh$
štvrtkruhovacia plocha		$\frac{4}{3\pi} r$	$\frac{4}{3\pi} r$	$\frac{\pi}{4} r^2$
polkruhovacia plocha		0		$\frac{\pi}{2} r^2$
štvrtelipsovacia plocha		$\frac{4}{3\pi} a$	$\frac{4}{3\pi} b$	$\frac{\pi}{4} ab$
polelipsovacia plocha		0		$\frac{\pi}{2} ab$
kruhový výsek		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
polguľa		$\frac{3}{8} r$	0	$\frac{2}{3} \pi r^3$
kužeľ		$\frac{1}{4} h$	0	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$
ihlan				$\frac{1}{3} abh$

4. PRIAME A LOMENÉ NOSNÍKY

Nosné konštrukcie slúžia k prenosu silových účinkov od ich vonkajšieho zaťaženia na ďalšie objekty (napr. stavebný objekt a horninový masív, príp. zaťaženia od činnosti strojnej konštrukcie prenášané na jej nosné prvky a pod.). Vo všeobecnosti nosná konštrukcia pozostáva z konštrukčných prvkov typu:

1D - Prútový prvok (prút, tyč, nosník) – dĺžka je výrazne väčšia ako dva ďalšie (pričné) rozmery. Idealizácia sa realizuje tzv. *dokonale tuhou čiarou*. V statike je prútový prvok charakterizovaný svojim umiestnením, dĺžkou a vlastnou tiažou, pričom jeho tvar môže byť priamy alebo zakrivený.

2D - Plošný prvok (doska, stena) – hrúbka prvku je výrazne menšia ako zostávajúce dva rozmery. Idealizácia je možná tzv. *rovinným alebo v priestore zakriveným plošným útvarom*. Napr. v stavebníctve, plošné prvky členíme na *steny* (zaťaženie iba vo vlastnej rovine), *dosky* (zaťaženie kolmo k rovine) a *škrupiny* (zakrivený plošný prvok). Najčastejšie sa plošný prvok idealizuje odpovedajúcim rovinným útvarom, charakterizovaným jeho umiestnením, rozmermi (plochou) a vlastnou tiažou.

3D - Priestorový (teleso, trojrozmerný objekt) prvok – idealizuje sa prostredníctvom *dokonale tuhého telesa* a je charakterizovaný svojim umiestnením v priestore, rozmermi, objemom a vlastnou tiažou.

Vo všeobecnom prípade môže byť nosná konštrukcia tvorená jedným konštrukčným prvkom, obvykle však pozostáva z viac prvkov, tvoriacich tzv. *mechanickú sústavu*. Základné prvky rozličných nosných stavebných konštrukcií a nosných podsystemov strojných zariadení musia spĺňať najmä podmienky dostatočnej únosnosti (t.j. zaistenia bezpečnej a spoľahlivej funkcie počas celého technického života), primeranej deformácie, ako aj dlhodobej použiteľnosti v určených podmienkach ich používania.

4.1. Základné typy nosníkov, zaťaženie a uloženie nosníkov

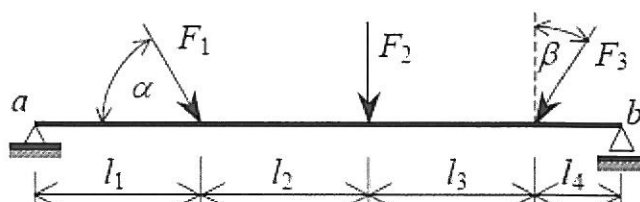
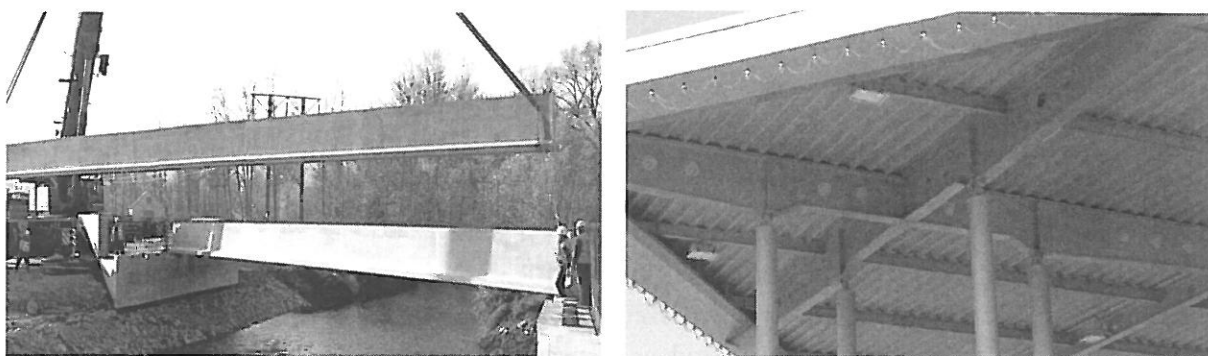
Nosník - ako hlavný predstaviteľ prútových konštrukčných prvkov, je definovaný ako nosný prvok konkrétneho technického diela, primárne určený na prenos silových účinkov v dôsledku jeho zaťaženia vyplývajúceho z jeho prevádzkového použitia. V statike sa obvykle jedná o druhy zaťaženia statické, analýza dynamického (v čase premenlivého) zaťaženia sa vyskytuje menej často.

Nosník je konštrukčný prvok, ktorého jeden rozmer (dĺžka) je oveľa väčší, ako ďalšie dva rozmery (výška a šírka) a je uložený tak, že sa pri zaťažení ohýba.

Nosníkom môže byť v stavebnej praxi napr. nosný stĺp, priečna vzpera, šikmá výstuha, horizontálne votknutá konzola apod., resp. v oblasti strojných zariadení sa jedná o rôzne druhy nosných rámov, pracovných ústrojenstiev a výložníkov manipulačných a zdvíhacích strojov a pod.

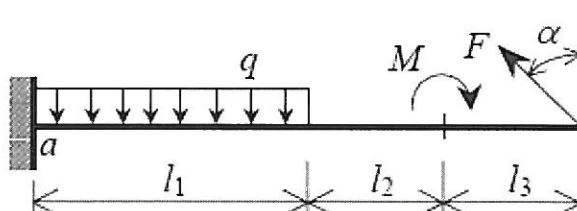
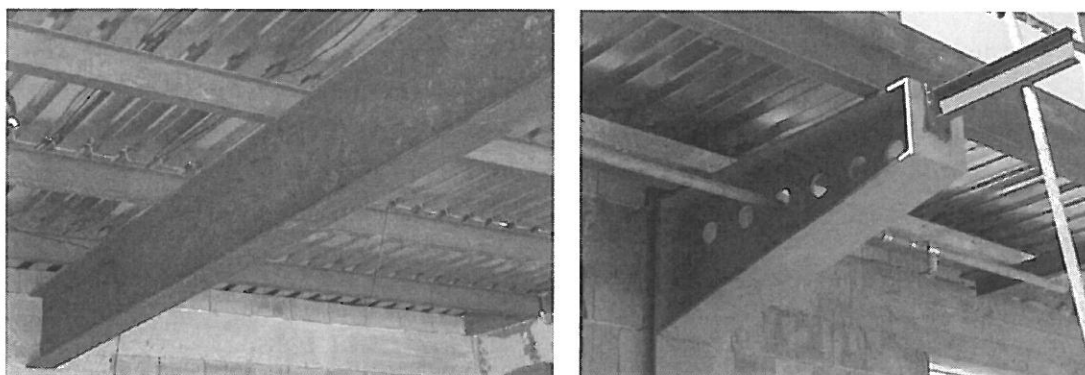
V technickej praxi sa najčastejšie vyskytujú prúty s priamou osou prierezu, tzv. **priame nosníky** alebo nepriamou (obvykle lomenou) osou, tzv. **lomené nosníky**. Prúty s priamou osou sú najjednoduchšie typy nosných prvkov rozličných konštrukcií. Podľa spôsobu ich uloženia a usporiadania majú ich mechanické modely zaužívané pomenovania, ako napr. jednoduchý nosník, konzolový nosník, nosník s kĺbom, spojitý nosník, priehradový nosník a pod.

1. Jednoduchý nosník – je priamy prút, ktorý je na jednom okraji viazaný k okoliu dvojnásobnou väzbou (napr. pevný kĺb) a na druhom konci má väzbu jednoduchú (napr. posuvný kĺb alebo kyvný prút). Príklady použitia jednoducho uložených nosníkov a fyzikálny model jednoduchého nosníka sú na obr.4.1.



Obr.4.1

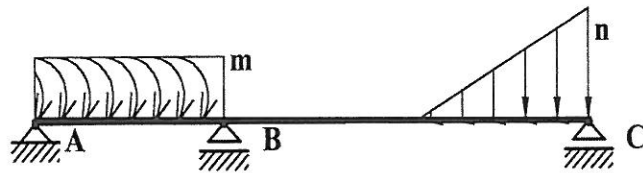
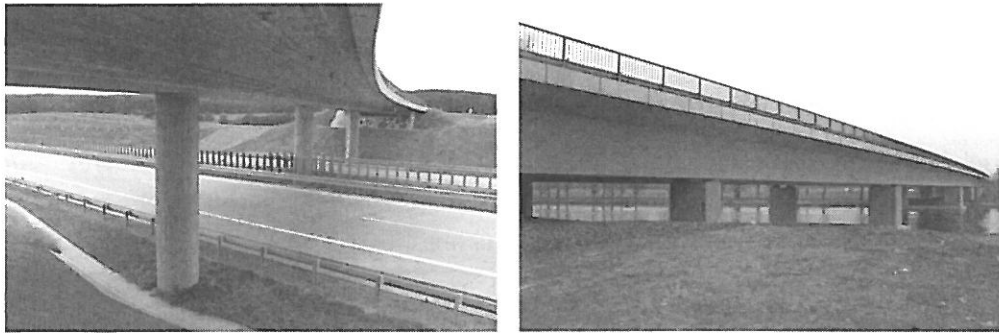
2. Konzolový nosník – je obvykle priamy, ale môže byť aj lomený prútový prvok, na jednom okraji viazaný k okoliu trojnásobnou väzbou (dokonalé votknutie), na druhom okraji je voľný – t.j. bez väzby. Príklady konzolových nosníkov a fyzikálny model priameho konzolového nosníka sú na obr.4.2.



Obr.4.2

Z uvedených dvoch základných druhov nosníkov, boli s ohľadom na rozmanitosť konštrukcií a potreby ich rozličných praktických aplikácií (najmä v oblasti pozemného staviteľstva, ale aj konštrukcie rozličných technických zariadení), odvodené ďalšie typy nosníkov, ako sú napr. **spojitý nosník**, **nosník s vloženým kĺbom** (*Gerberov nosník*), **nosník s previsnutým koncom**, **priehradový nosník** a niektoré ďalšie typy.

3. Spojitý nosník – je priamy nosník, uložený na viac ako dvoch podporách, z ktorých jedna je pevná (pevný kĺb, dokonalé votknutie) a ostatné sú posuvné (posuvný kĺb). Na konci môže mať nosník ľubovoľnú vonkajšiu väzbu, prípadne aj tzv. *previsnutý koniec*. Časť spojitého nosníka medzi dvoma susednými podporami nazývame **pole**, dĺžku poľa definujeme ako **rozpätie**. Príklady použitia spojitých nosníkov a fyzikálny model priameho spojitého nosníka sú uvedené na Obr.4.3.

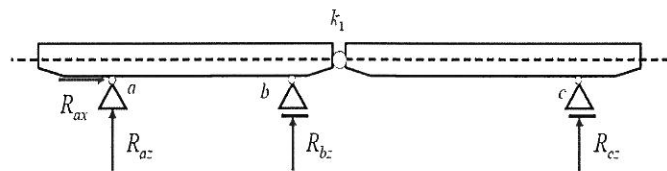


Obr. 4.3

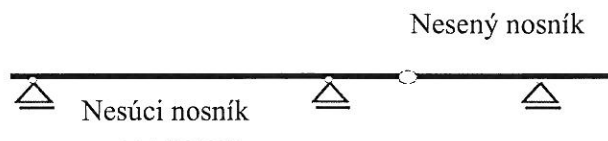
4. Spojitý nosník s vloženými kĺbmi – tzv. Gerberov nosník. Príklady jeho použitia sú na Obr.4.4.



Vložením kĺbov medzi polia spojitého nosníka **nesmie** vzniknúť pohyblivý mechanizmus, iba rotačná väzba.

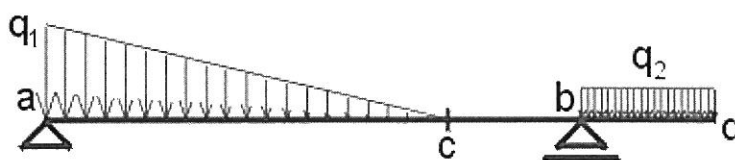
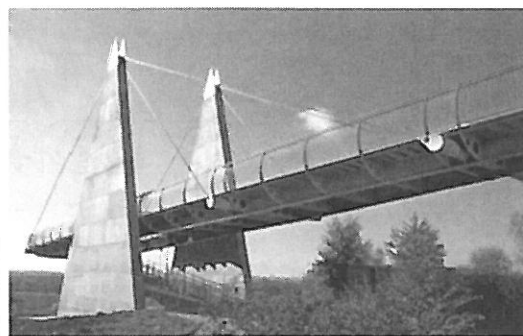


Nerovnosti terénu vložením kĺbu spôsobujú iba minimálne prídavné namáhanie nosníka nesúceho.



Obr. 4.4

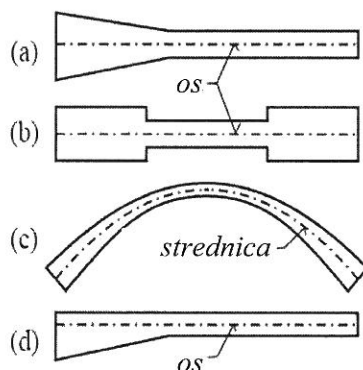
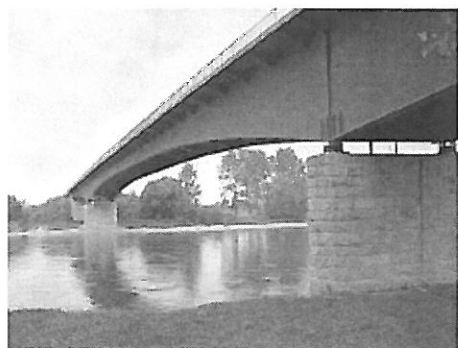
5. Nosník s previsnutým koncom. Príklady jeho praktického použitia sú na Obr.4.5.



Obr. 4.5

Pri statickom vyšetrowaní priamych nosníkov a rámových konštrukcií **nezáleží na tvare prierezu** (napr.  atď.), **ani na použitom konštrukčnom materiáli**. Rozhoduje iba tvar pozdĺžnej osi nosníka a pri statickej analýze vždy v mechanických modeloch nahrádzame skutočné telesá iba ich osou.

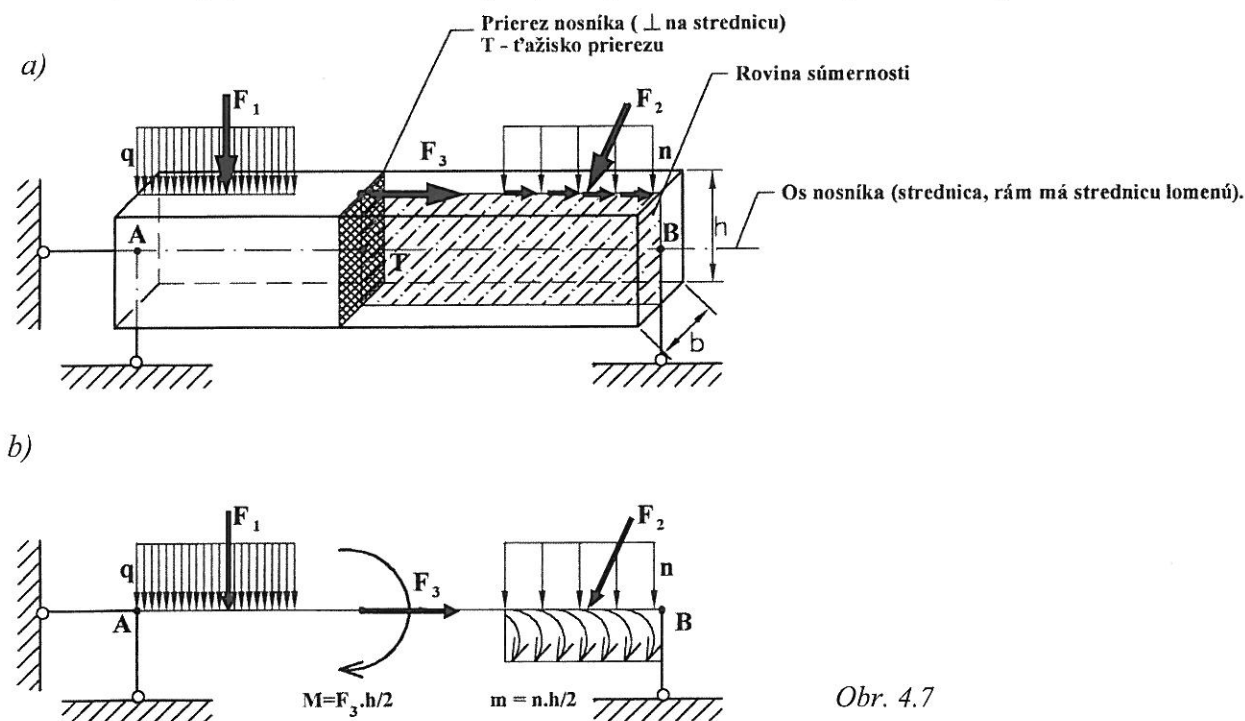
Geometrický popis nosníkov v statike je založený iba na definovaní ich rozmerov - *dĺžky* a *zmeny prierezu*. Prierezy môžu byť po celej dĺžke **konštantné** (tzv. prizmatický nosník) alebo **premenlivé**. Vybrané príklady premenlivých prierezov nosníkov sú uvedené na obr.4.6.



Zmena prierezu nosníka môže byť buď **postupná** (Obr.4.6a,c), **skoková** (Obr.4.6b) príp. v miestach podpier môžu byť tzv. nábehy (Obr.4.6d). Nábehy sú realizované najmä kvôli zvýšeniu únosnosti (zosilneniu) časti nosnej konštrukcie, obvykle v miestach jej podoprenia, t.j. vo väzbách.

Obr.4.6

Na obr.4.7a je znázornený **prizmatický nosník**, t.j. nosník s nemenným prierezom - uložený a zaťažovaný v jeho tzv. *rovine súmernosti* (symetrie). Mechanický model nosníka je predstavovaný iba jeho **osou** (tzv. *strednicou*), ako spojnicou ťažísk T_i všetkých priečných rezov nosníka a je znázornený na obr.4.7b.

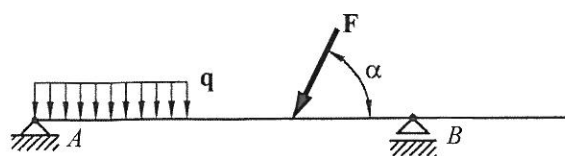


Obr. 4.7

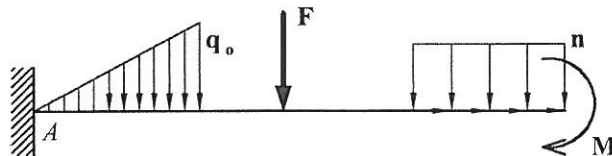
Poznámka: Spôsob zakreslenia podpier (väzieb nosníka s rámom) v miestach A resp. B prostredníctvom tzv. kyvných prútov (Obr.4.7b) zodpovedá spôsobu zakreslenia pevnej podpory, resp. posuvnej podpory a ich funkcie.

V statike všeobecne platí, že všetky zaťaženia pôsobiace na nosník prenášame na os nosníka. V prípade podľa Obr.4.7a sú to zaťaženia vo forme osamelých síl F_1 , F_2 , F_3 , spojitého zaťaženia priečného q a spojitého zaťaženia osového n . Transformáciou ich účinkov do osi nosníka je strednica, ako mechanický model prútového prvku – nosníka, zaťažená silami F_1 , F_2 , F_3 [N], spojitými bremenami q , n [N.m⁻¹], ale aj transformáciou vzniknutými veličinami a to: momentom M [Nm] a spojitým momentovým zaťažením m [Nm.m⁻¹], ktoré vznikli preložením sily F_3 a osového zaťaženia n z povrchu do osi nosníka.

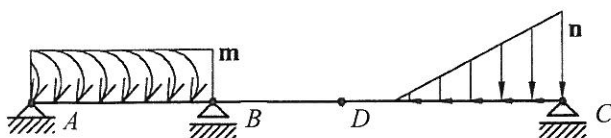
V technickej praxi sa najčastejšie vyskytujú prútové prvky s priamou osou - **priame nosníky** alebo nepriamou (obvykle lomenou) osou - **lomené nosníky** (tzv. **rámové konštrukcie**). Na obr.4.8, pre ilustráciu variability usporiadania a zaťaženia nosníkov, uvádzame mechanické modely vybraných typov priamych a lomených nosníkov a príkladov najčastejších spôsobov ich možného uloženia a prevádzkového zaťaženia.



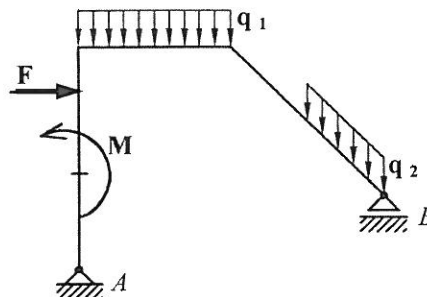
a) jednoduchý nosník (s previsnutým, prečnievajúcim koncom)



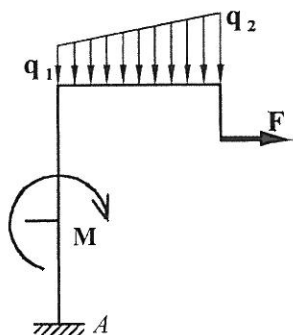
b) votknutý (konzolový) nosník



c) nosník s vloženým kĺbom (bod D)



d) jednoducho uložený lomený nosník (rám)



e) votknutý rám

Poznámka: Normálové sily v mechanických modeloch kreslíme pre názornosť taktiež kolmo na strednicu, aj keď v skutočnosti pôsobia v jej smere, t.j. v smere normály na prierezovú plochu nosníka.

Obr. 4.8

Nosníky uvažujeme vždy ako viazané telesá. Ich zaťaženie a uloženie riešime za predpokladu, že sústava zaťažujúcich (akčných) síl, aj síl sekundárnych (väzbových reakcií) tvoria rovinnú sústavu silových účinkov. Najčastejšie sa vyskytujúce väzby nosníkov v technickej praxi sú uvedené na obr.4.9.

1. Kĺbové uloženie pevné ($n_o = 2$ °V)



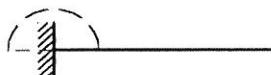
odoberá 2° voľnosti (vodorovný a zvislý posun), zostáva otáčanie v kĺbe)

2. Kĺbové uloženie posuvné ($n_o = 1$ °V)



odoberá 1° voľnosti (zvislý posun), zostáva otáčanie v kĺbe a vodorovný posun)

3. Dokonale votknuté uloženie ($n_o = 3$ °V)



odoberá 3° voľnosti (vodorovný posun, zvislý posun, otáčanie v kĺbe)

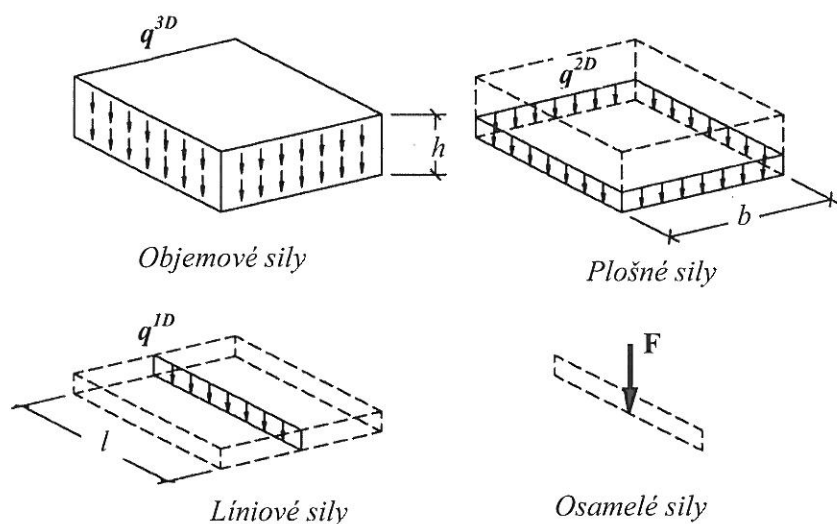
4. Votknuté uloženie posuvné ($n_o = 2$ °V)



odoberá 2° voľnosti (zvislý posun a otáčanie v kĺbe), zostáva vodorovný posun

Obr.4.9

Zaťaženie sme definovali ako akýkoľvek jav, vyvolávajúci zmenu stavu napätosti konštrukcie. Pri riešení rovnováhy síl sa najskôr zaoberáme analýzou a riešením silových účinkov akčných – vonkajších – síl pôsobiacich na hmotný objekt, ktoré podľa dimenzie idealizácie hmotného objektu, rozdelíme na sily:



Obr.4.10

- Objemové q^{3D} (N/m³)
- Plošné q^{2D} (N/m²)
- Líniové q^{1D} (N/m)
- Osamelé F (N)

Podľa potreby môžeme medzi nimi vykonať vzájomný prepočet (transformáciu) a platí

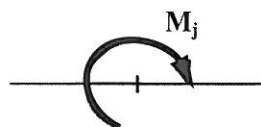
$$\begin{aligned} q^{2D} &= q^{3D} \cdot h \\ q^{1D} &= q^{2D} \cdot b \\ F &= q^{1D} \cdot l \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde h je tzv. zaťažovacia hrúbka, b je zaťažovacia šírka a l je zaťažovacia dĺžka (Obr.4.10).

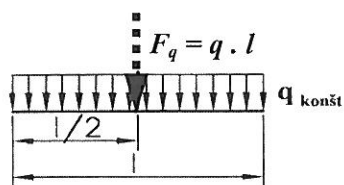
V uvedených príkladoch nosníkov a rámových konštrukcií (Obr.4.8) je uvedené aj pôsobenie väčšiny z najdôležitejších druhov zaťaženia nosníkov v technickej praxi. Ide najmä o zaťaženia podľa obr.4.11.



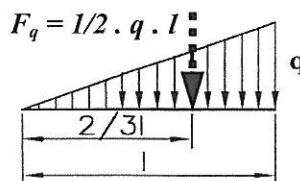
a) zaťaženie osamelou silou



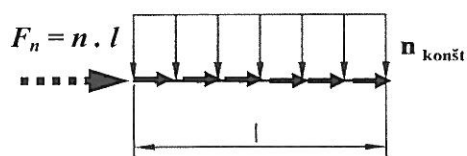
b) zaťaženie osamelým momentom



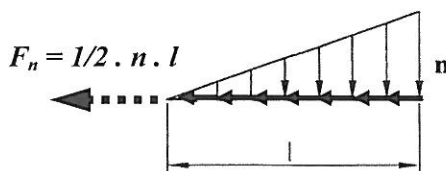
c1) spojité zaťaženie priečne - rovnomerné



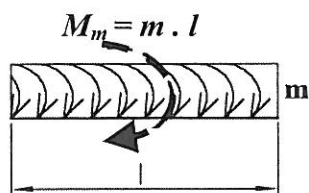
c2) spojité zaťaženie priečne - nerovnomerné (napr. lineárne)



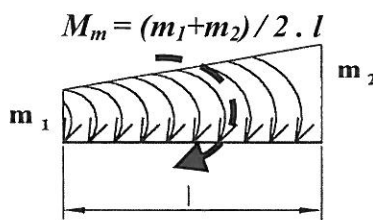
d1) spojité zaťaženie osové (normálové) - rovnomerné



d2) spojité zaťaženie osové (normálové) - nerovnomerné (napr. lineárne)



e1) spojité zaťaženie momentové - rovnomerné



e2) spojité zaťaženie momentové - nerovnomerné (napr. lineárne)

Obr. 4.11

Pre ilustráciu uvedieme príklady zaťaženia konštrukcií pozemných stavieb. Jedná sa o zaťaženie:

- **stále:** vlastná tiaž konštrukcie, zemný a horninový tlak, predpätie a pod.
- **náhodné:**
 - *úžitkové* (prevádzkou a vybavením, strojmi a zariadením, skladovaným materiálom, vozidlami apod.),
 - *klimatické* (snehom, vetrom, námrazou, klimatickými teplotami),
 - *vynúteným pretvorením* (prevádzkové teploty, zmršťovanie a dotvarovanie betónu, pokles podpíer),
- **mimoriadne:** zemetrasenie, výbuch, havarijné pretvorenie základov, narušenie procesu a pod.

Z kapitoly 2 už vieme, že pre úplný popis zaťaženia je nutné definovať jeho **výskyt, intenzitu, dobu trvania a opakovanie zaťaženia**. Uvedené parametre sú náhodné a sú opísateľné iba pravdepodobnostnými charakteristikami. Znamená to, že reálne zaťaženie konštrukcií v technickej praxi má **stochastický charakter**.

Pri realizácii praktických výpočtov v mechanike telies využívame nasledovné charakteristiky zaťaženia:

- **normová hodnota zaťaženia** (normové zaťaženie) F_{norm} – hodnota zaťaženia, ktorú môžeme v priebehu používania konštrukcie skutočne očakávať,
- **súčiniteľ zaťaženia** λ_F – vyjadruje variabilitu (náhodné odchýlky) zaťaženia od normových hodnôt,
- **výpočtová hodnota zaťaženia** (výpočtové zaťaženie) F_{dov} – hodnota zaťaženia, ktorá môže byť prekročená iba s definovanou minimálnou pravdepodobnosťou a určujeme ju podľa vzťahu

$$F_{dov} = \lambda_F \cdot F_{norm} \quad (4.2)$$

Z uvedených mechanických modelov nosníkov (Obr.4.8) je zrejmé, že pôsobiace vonkajšie zaťaženia rozdeľujú os nosníkov na body - v ktorých pôsobia napr. iba osamelé sily F_i alebo momenty M_j a na úseky – v ktorých pôsobia spojité zaťaženia typu q , n , m nulové alebo rôzne od nuly. Vonkajšie zaťaženie nosníkov môže byť uvažované ako zaťaženie konštantné alebo aj ako zaťaženie v čase alebo po dĺžke nosníka premenné, t.j. v tvare funkcie $F_{(t)}$, $M_{(t)}$, $q_{(t)}$, $n_{(t)}$, $m_{(t)}$ resp. $F_{(x)}$, $M_{(x)}$, $q_{(x)}$, $n_{(x)}$, $m_{(x)}$.

Všetky uvedené silové účinky F_i , M_j , a náhradné bremená F_q , F_n , M_m , ktorými nahrádzame účinok spojitého zaťaženia q , n , m - používame pri výpočte väzbových reakcií, t.j. pri riešení statickej rovnováhy silových účinkov na nosník pôsobiacich. V praxi sa najčastejšie vyskytujú zaťaženia - typ *a*, *b*, *c* podľa obr.4.11 a preto sa zameriame najmä na riešenie úloh so zaťažením mechanických modelov vo forme osamelých síl F_i , momentov M_j a spojitého priečného zaťaženia q_i .

4.2. Rovnováha silových účinkov na nosníkoch, väzbové reakcie

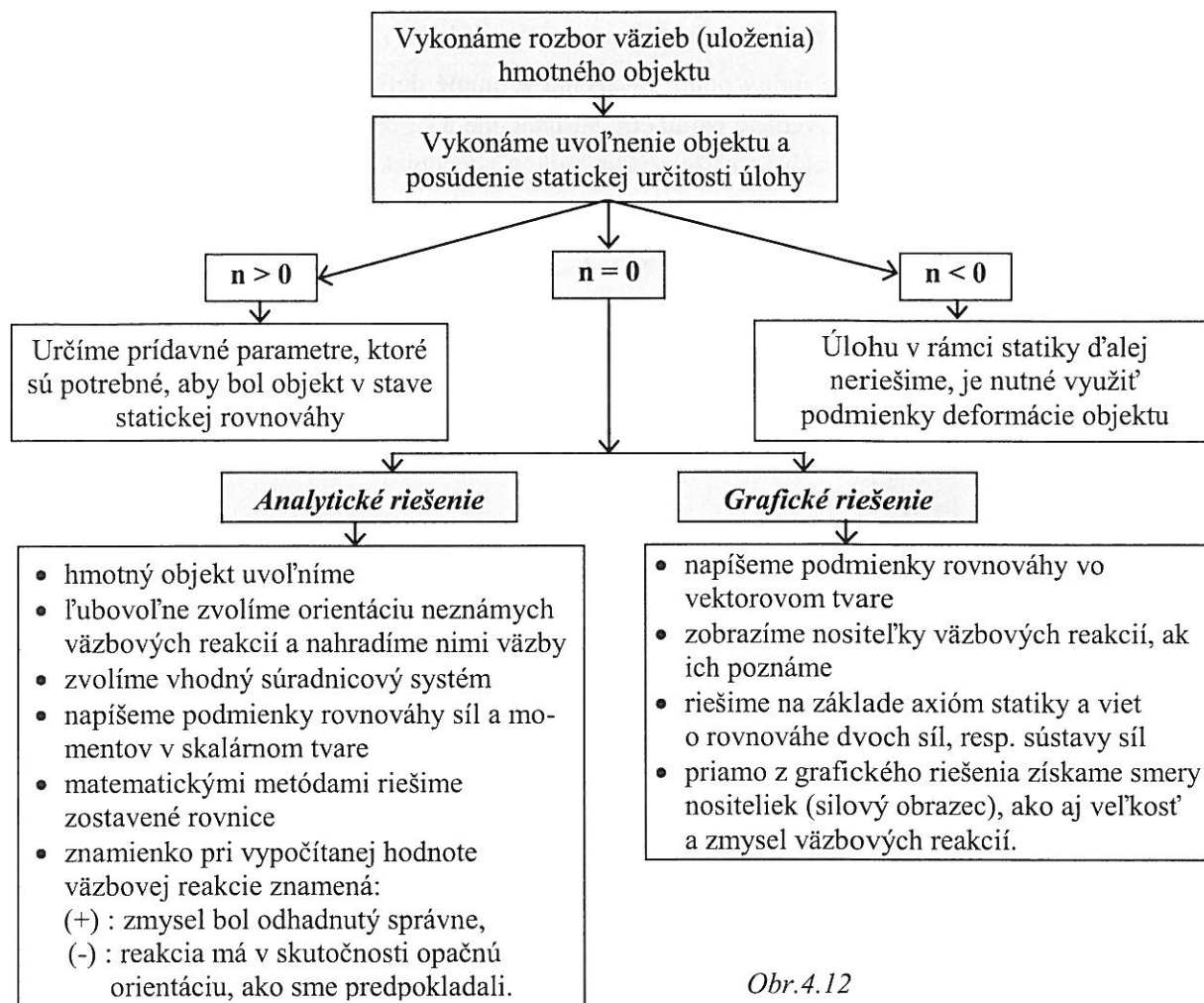
Pre hmotné objekty je charakteristické, že vždy vystupujú ako viazané k rámu alebo k iným hmotným objektom. Po nahradení väzieb väzbovými reakciami pôsobí na zadaný hmotný objekt – napr. nosník - silová sústava, pozostávajúca z **primárnych** (zaťažujúcich) a **sekundárnych** (reakčných) **silových účinkov** – t.j. **väzbových reakcií**. Základnou úlohou statiky je práve určenie veľkosti a zmyslu väzbových reakcií v prípadoch staticky určených úloh. V prípade staticky neurčitých – preurčených – úloh je okrem väzbových reakcií nutné určiť aj tzv. *prídavné silové účinky*, nutné pre zaistenie rovnováhy hmotného objektu.

Vyriešenie statickej rovnováhy silových účinkov musí byť prvou fázou realizácie statickej analýzy aj pri riešení nosníkov. Ide predovšetkým o posúdenie riešiteľnosti úlohy a určenie charakteru a veľkosti sekundárnych silových účinkov – **väzbových reakcií**, vznikajúcich vo väzbách medzi nosníkom a ďalšími telesami, ako dôsledok pôsobenia primárnych síl – **zaťažení**. Snažíme sa teda o **vyriešenie rovnováhy sústavy vonkajších - akčných a reakčných - síl**.

Ďalšou úlohou v rámci statickej analýzy nosníkov obvykle býva aj určenie charakteru a veľkosti **výslednice vnútorných síl a jej zložiek** v určených prierezoch nosníka. Ich znalosť je nevyhnutná pre analýzu charakteru a veľkosti pretvorenia a z neho vyplývajúcej napätosti nosníka, ktorá bude náplňou ďalšej časti predmetu – a to mechaniky poddajných telies.

Metodika riešenia úloh statickej rovnováhy hmotných objektov

Riešenie silových sústav realizujeme predovšetkým **analyticky (výpočtom)**, kedy musíme zostaviť podmienky rovnováhy príp. podmienky ekvivalencie, ale v odôvodnených prípadoch aj **graficky**, kedy je nutné vytvoriť a analyzovať silový (zložkový) obrazec. Metodika, platná pre realizáciu analytického aj grafického riešenia statickej rovnováhy hmotných objektov, je zhrnutá v postupe podľa Obr.4.12.



Obr.4.12

Podľa axiómy akcie a reakcie musí vo všeobecnosti platiť, že **posuvné aj otáčavé účinky výslednice** sústavy sekundárnych síl – väzbových reakcií $\Sigma \mathbf{R}_i$ a výslednice sústavy primárnych síl – zaťaženia $\Sigma \mathbf{F}_i$ **musia byť rovnako veľké, ale opačne orientované**. Vtedy môžeme povedať, že sa teleso nachádza v stave pokoja.

Opäť sa obmedzíme iba na analýzu rovinných problémov, t.j. prípadov, kedy sa všetky silové účinky od zaťaženia, väzbové reakcie, ako aj idealizovaný tvar objektu nachádzajú v jednej rovine. S určovaním veľkosti reakcií u statiky určito uložených objektov sme sa už stretli pri riešení rovnováhy sústav síl (kap.3). Odtiaľ vieme, že podmienky rovnováhy, spoločne s kontrolnými rovnicami, majú niektorý z tvarov:

(1) $\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma M_{iA} = 0$	(2) $\Sigma M_{iA} = 0$ $\Sigma M_{iB} = 0$ $\Sigma F_{ix} = 0$	(3) $\Sigma M_{iA} = 0$ $\Sigma M_{iB} = 0$ $\Sigma M_{iC} = 0$
KONTROLNÉ ROVNICE		
$\Sigma M_{iB} = 0$	$\Sigma F_{iy} = 0$	$\Sigma F_{ix} = 0$

(4.3)

Tvar rovníc typu (1) považujeme za základný tvar. Pre riešenie jednoducho uložených nosníkov obvykle s výhodou využívame tvar rovníc rovnováhy - typ (2), tvar rovnovážnych rovníc typu (3) je vhodný najmä v prípadoch uloženia objektu na troch prútoch alebo uloženia na tzv. klzných podperách.

Príklad 4.1: Napíšte všeobecný tvar rovníc rovnováhy pre určenie veľkosti a zmyslu väzbových reakcií na nosníku podľa obr.4.13. Zadané: $F_1, F_2, F_3, \alpha, \beta, l_1, l_2, l_3, l_4$.

Riešenie:

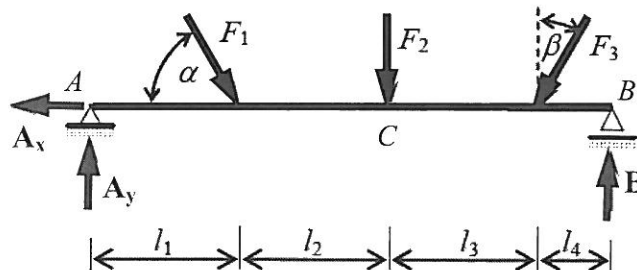
Hľadáme: A_x, A_y, B .

$n = n_v - n_o = 0^{\circ}V$ – úloha je staticky určitá

Teleso uvoľníme, sily rozložíme na zložky:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha, \quad F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \sin \beta, \quad F_{3y} = F_3 \cdot \cos \beta$$



Obr.4.13

Väzbovú reakciu B v posuvnom kĺbe B

určíme napr. z momentovej podmienky rovnováhy, formulovanej napr. k bodu A a dostaneme

$$\sum M_A = 0: \quad B \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) - F_3 \cdot \cos \beta \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0.$$

Zvislú zložku väzbovej reakcie A v pevnom kĺbe A , tzn. silu A_y , určíme z momentovej podmienky rovnováhy formulovanej napr. k bodu B a dostaneme

$$\sum M_B = 0: \quad A_y \cdot (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (l_2 + l_3 + l_4) - F_2 \cdot (l_3 + l_4) - F_3 \cdot \cos \beta \cdot l_4 = 0.$$

Vodorovnú zložku väzbovej reakcie A (t.j. zložku A_x), vznikajúcu v pevnom kĺbe A , môžeme určiť napr. zo silovej podmienky v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -A_x + F_1 \cdot \cos \alpha - F_3 \cdot \sin \beta = 0.$$

Kontrolu vykonáme prostredníctvom kontrolnej podmienky, napr. v tvare silovej podmienky

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 - F_3 \cdot \cos \beta + B = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (L = P) - \text{splnené.}$$

Kontrolná podmienka môže mať samozrejme aj iný tvar, napr. ďalšej momentovej podmienky, formulovanej k ľubovoľnému bodu v rovine nosníka (obvykle na ňom leží), t.j. napr. k bodu $C = l_1 + l_2$ a platí

$$\sum M_C = 0: \quad -A_y \cdot (l_1 + l_2) + F_1 \cdot \sin \alpha \cdot l_2 - F_3 \cdot \cos \beta \cdot l_3 + B \cdot (l_3 + l_4) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (L = P) - \text{splnené.}$$

? Určite veľkosť a zmysel väzbových reakcií pre nosník podľa Obr.4.13. Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$, $F_3 = 4 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $l_1 = l_2 = l_3 = 2 \text{ m}$, $l_4 = 1 \text{ m}$.

Príklad 4.2: Určite všeobecný tvar rovníc rovnováhy pre určenie veľkosti a zmyslu väzbových reakcií na jednoducho uloženom nosníku s previsnutým koncom (obr. 4.14). Zadané: F, q, M, α, a, b, c .

Riešenie:

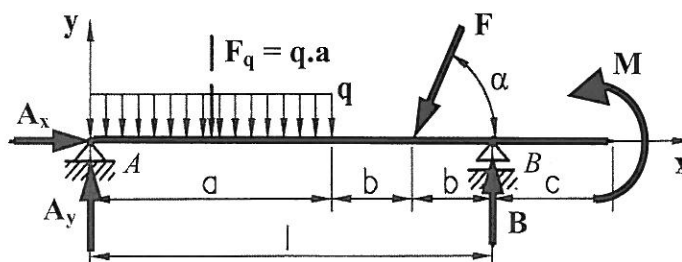
Hľadáme: A_x, A_y, B .

$n = n_v - n_o = 3 - 3 = 0^{\circ}V$ – úloha staticky určitá.

Náhradné bremeno: $F_q = q \cdot a$

Sily rozložíme na zložky a nosník uvoľníme:

$$F_x = F_1 \cdot \cos \alpha, \quad F_y = F_1 \cdot \sin \alpha.$$



Obr. 4.14

Použijme napr. rovnice rovnováhy – typ (2) a dostaneme

$$\sum M_A = 0: -F_q \cdot \frac{a}{2} - F \cdot \sin \alpha \cdot (a+b) + B \cdot l + M = 0 \quad \Rightarrow B$$

$$\sum M_B = 0: -A_y \cdot l + F_q \cdot (l - \frac{a}{2}) + F \cdot \sin \alpha \cdot b + M = 0 \quad \Rightarrow A_y$$

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F \cdot \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow A_x$$

$$\text{Kontrolná rovnica: } \sum F_{iy} = 0: A_y - F_q - F \cdot \sin \alpha + B = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené.}$$

Poznámka: Pri použití rovnovážnych rovníc typ (2) – t.j. dvoch momentových rovníc vzhľadom k bodom jednoducho uloženého nosníka (body A, B) – sa v každej rovnici nachádza iba jedna neznáma, čo výrazne urýchľuje výpočet.

? Určite veľkosť a zmysel reakcií na nosníku podľa Obr.4.14. Zadané: $F=20 \text{ kN}$, $\alpha=60^\circ$, $q=10 \text{ kN.m}^{-1}$, $M=15 \text{ kNm}$, $a=3 \text{ m}$, $b=1 \text{ m}$, $c=1,5 \text{ m}$.

Príklad 4.3: Na konzolovom nosníku (obr.4.15) určite veľkosť a zmysel väzbových reakcií. Zadané: $F = 30 \text{ kN}$, $M = 50 \text{ kNm}$, $q = 9 \text{ kN.m}^{-1}$, $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = 0,8$.

Riešenie:

Hľadáme: A_x , A_y a moment vo votknutí M_A .

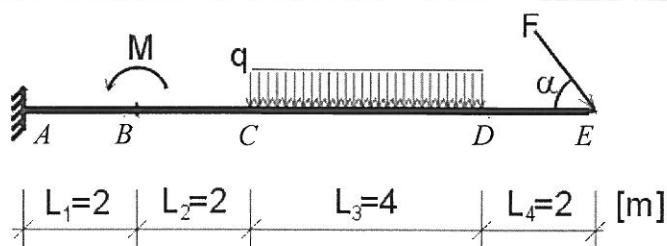
$$n = n_v - n_o = 3 - 3 = 0 \text{ } ^\circ V \Rightarrow \text{staticky určité.}$$

Spojité rovnomerné zaťaženie q pretransformujeme na náhradné bremeno F_q , šikmú silu F rozložíme na zložky F_x a F_y , a dostaneme

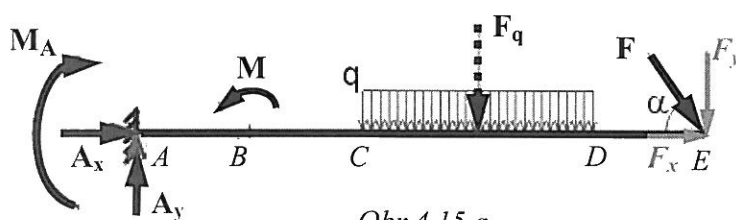
$$F_q = q \cdot L_3 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ kN}$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ kN}$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 30 \cdot 0,8 = 24 \text{ kN}$$



Obr. 4.15



Obr.4.15 a

Konzolový nosník je v bode A tzv.

votknutý. V tomto mieste (Obr.4.15a) po uvoľnení nosníka vzniknú tri zložky reakcií a to A_x , A_y a M_A . Ich veľkosť získame z podmienok rovnováhy, napr. zvolíme typ (1) a dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0: A_x + F_x = 0 \Rightarrow A_x = -F_x = -18 \text{ kN} \quad - \text{smer reakcie } A_x \text{ zvolený nesprávne}$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q - F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_q + F_y = 36 + 24 = 60 \text{ kN} \quad - \text{smer reakcie } A_y \text{ zvolený správne}$$

$$\sum M_{iA} = 0: -M_A + M - F_q \cdot (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) - F_y \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = M - F_q \cdot (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) - F_y \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \quad - \text{smer otáčania } M_A \text{ zvolený nesprávne}$$

$$\Rightarrow M_A = 50 - 36 \cdot 6 - 24 \cdot 10 = -406 \text{ kNm.}$$

Kontrolná rovnica:

$$\sum M_{iB} = 0: -M_A - A_y \cdot L_1 + M - F_q \cdot (L_2 + \frac{L_3}{2}) - F_y \cdot (L_2 + L_3 + L_4) = 0$$

$$406 - 120 + 50 - 144 - 192 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené.}$$

Príklad 4.4: Určite veľkosť a zmysel väzbových reakcií v bode A (miesto votknutia) pre votknutý lomený nosník - rám (obr.4.16). Zadané: $F, q_1, q_2, M, a, b, c, d$.

Riešenie:

Hľadáme A_x, A_y a moment vo votknutí M_A .

$n = n_v - n_o = 3 - 3 = 0 \text{ } ^\circ V \Rightarrow$ úloha je staticky určitá.

Náhradné bremená: $F_{q1} = q_1 \cdot b$; $F_{q2} = 1/2 \cdot (q_2 - q_1) \cdot b$

Rovnice rovnováhy – zvolíme napr. typ (1) a platí:

$$\sum F_{ix} = 0: A_x + F = 0 \Rightarrow A_x = -F$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_{q1} - F_{q2} = 0 \Rightarrow A_y = F_{q1} + F_{q2}$$

$$\sum M_A = 0: -M - F_{q1} \cdot \frac{b}{2} - F_{q2} \cdot \frac{2b}{3} - F \cdot c + M_A = 0$$

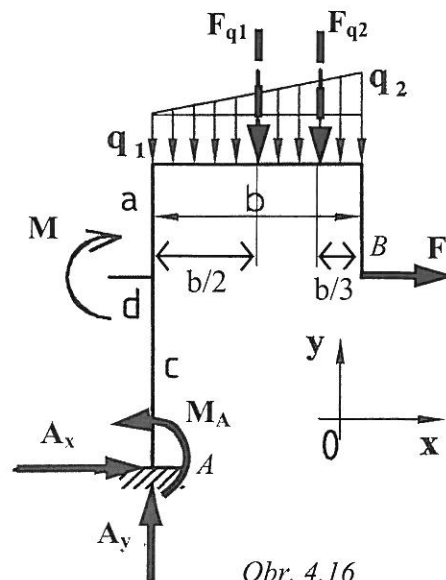
$$M_A = M + F_{q1} \cdot \frac{b}{2} + F_{q2} \cdot \frac{2b}{3} + F \cdot c.$$

Kontrolná rovnica: napr. momentová podmienka k bodu B a platí:

$$\sum M_B = 0: M_A + A_x \cdot c - A_y \cdot b - M + F_{q1} \cdot \frac{b}{2} - F_{q2} \cdot \frac{b}{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Mohol by to byť však aj iný bod roviny nosníka. Po dosadení vyrátaných neznámych reakcií do kontrolnej rovnice musí vždy v prípade správneho výpočtu neznámych platiť $\sum L = \sum P$, t.j. $0 = 0$.

Poznámka: Z prvej rovnice vyplýva, že sme pri odhade smeru väzbových reakcií chybné predpokladali zmysel sily A_x . Reakcia A_x má v skutočnosti smer doľava ($\leftarrow$).



Obr. 4.16

? Určite veľkosť a zmysel väzbových reakcií na nosníku podľa Obr.4.16. Zadané: $F = 100 \text{ kN}$, $q_1 = 15 \text{ kN.m}^{-1}$, $q_2 = 25 \text{ kN.m}^{-1}$, $M = 25 \text{ kN.m}$, $a = 2 \text{ m}$, $b = c = 3 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$.

Príklad 4.5: Určite väzbové reakcie pre spojitý nosník s vloženým kĺbom (Gerberov nosník) podľa obr.4.17. Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 1,5 \text{ kN}$, $q = 500 \text{ N.m}^{-1}$, $M = 750 \text{ N.m}$, $\alpha = 75^\circ$, $a = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 1,5 \text{ m}$.

Riešenie:

Hľadáme: A_x, A_y, B, C .

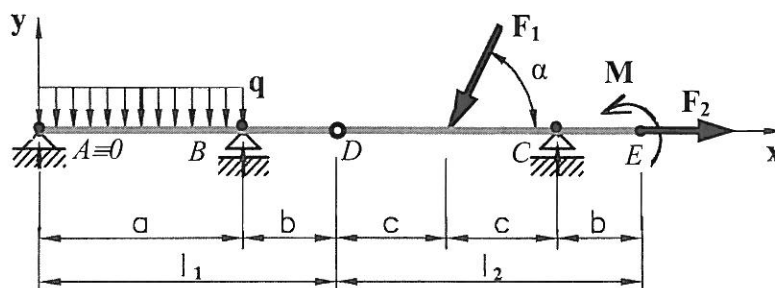
Náhradné bremeno:

$$F_q = q \cdot a = 500 \cdot 2 = 1000 \text{ N}.$$

Statická určitosť:

$$n = n_v - n_o = 3 - (2 + 1 + 1) + 1 = 0 \text{ } ^\circ V$$

$\Rightarrow$ úloha je staticky určitá.



Obr. 4.17

Statická neurčitosť zadaného spojitého nosníka, uloženého na troch podperách A, B, C je odstránená vložením kĺba D. Takýto tzv. Gerberov nosník sa v podstate skladá z dvoch, navzájom viazaných telies, spojených práve v kĺbe D.

Rovnice rovnováhy – zvolíme napr. typ (1) a podľa Obr.4.17a dostaneme

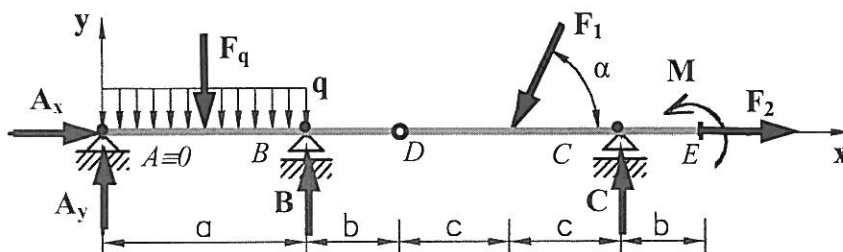
$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 = 0$$

1 neznáma $\Rightarrow A_x$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q + B - F_1 \cdot \sin \alpha + C = 0$$

3 neznáme $\Rightarrow A_y, B, C$

$$\sum M_{iA} = 0: -F_q \cdot \frac{a}{2} + B \cdot a - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a+b+c) + C \cdot (a+b+2c) + M = 0 \quad 2 \text{ neznáme} \Rightarrow \mathbf{B, C}$$



Obr. 4.17 a

Problém: rovnice rovnováhy pre objekty uvažované v rovine sú tri, ale neznáme zložky reakcií máme v prípade Gerberovho nosníka štyri, tzn. 1 rovnica chýba, t.j. sústava rovníc je neriešiteľná.

Nosník s vloženým kĺbom - Gerberov nosník – obvykle riešime jedným z dvoch uvedených spôsobov:

Spôsob 1 - rozklad spojitého nosníka s kĺbmi na viac nosníkov - nesúci a nesený nosník.

Spôsob 2 - vychádza z predpokladu, že otáčavé účinky vo vložených kĺboch sú nulové.

Spôsob 1: Nosník rozdelíme na nesúci (časť naľavo od kĺba D) a nesený (časť napravo od kĺba D). Kĺbové spojenie nahradíme 2 zložkami reakcií v smere odobratých stupňov voľnosti pohybu (t.j. akoby bol kĺb D nahradený pevnou podperou) a určíme väzbové reakcie. Náhradné bremeno $F_q = q \cdot a = 500 \cdot 2 = 1 \text{ kN}$.

Zložky šikmej sily F_1 : $F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sin 75^\circ = 1,93 \text{ kN}$, $F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \cos 75^\circ = 0,52 \text{ kN}$.

1. Nesený nosník (Obr.4.17b, pravá časť nosníka):

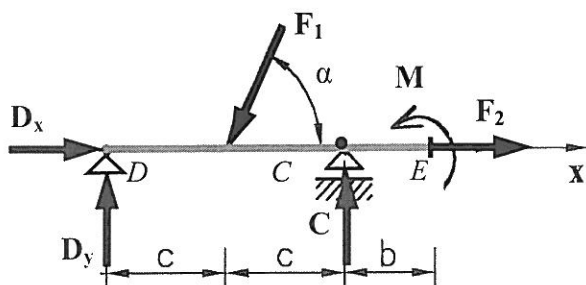
$$\sum M_{iD} = 0: -F_{1y} \cdot c + C \cdot 2c + M = 0 \Rightarrow C = \frac{(F_{1y} \cdot c - M)}{2c} = \frac{(1,93 \cdot 1,5 - 0,75)}{(2 \cdot 1,5)} \Rightarrow \mathbf{C = 0,715 \text{ kN}}$$

$$\sum M_{iC} = 0: -D_y \cdot 2c + F_{1y} \cdot c + M = 0 \Rightarrow D_y = \frac{(F_{1y} \cdot c + M)}{2c} = \frac{(1,93 \cdot 1,5 + 0,75)}{(2 \cdot 1,5)} \Rightarrow \mathbf{D_y = 1,215 \text{ kN}}$$

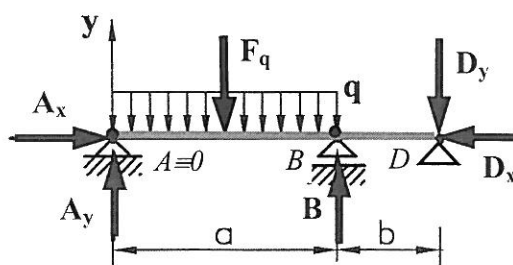
$$\sum F_{ix} = 0: D_x - F_{1x} + F_2 = 0 \Rightarrow D_x = F_{1x} - F_2 = 1,93 - 1,5 \Rightarrow \mathbf{D_x = 0,43 \text{ kN}}$$

Kontrolná podmienka: určené hodnoty dosadíme napr. do podmienky rovnováhy zvislých síl a platí

$$\sum F_{iy} = 0: D_y - F_{1y} + C = 0 \Rightarrow 1,215 - 1,93 + 0,715 \Rightarrow \mathbf{0 = 0} \quad \text{– splnené.}$$



Obr. 4.17 b



Obr. 4.17 c

2. Nesúci (nosný) nosník (Obr.4.17c, ľavá časť nosníka)

$$\sum M_{iA} = 0: -F_q \cdot \frac{a}{2} + B \cdot a - D_y \cdot (a+b) = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{(F_q \cdot a/2 + D_y \cdot (a+b))}{a} = \frac{(1 \cdot 1/2 + 1,215 \cdot (2+1))}{2} \Rightarrow \mathbf{B = 2,323 \text{ kN}}$$

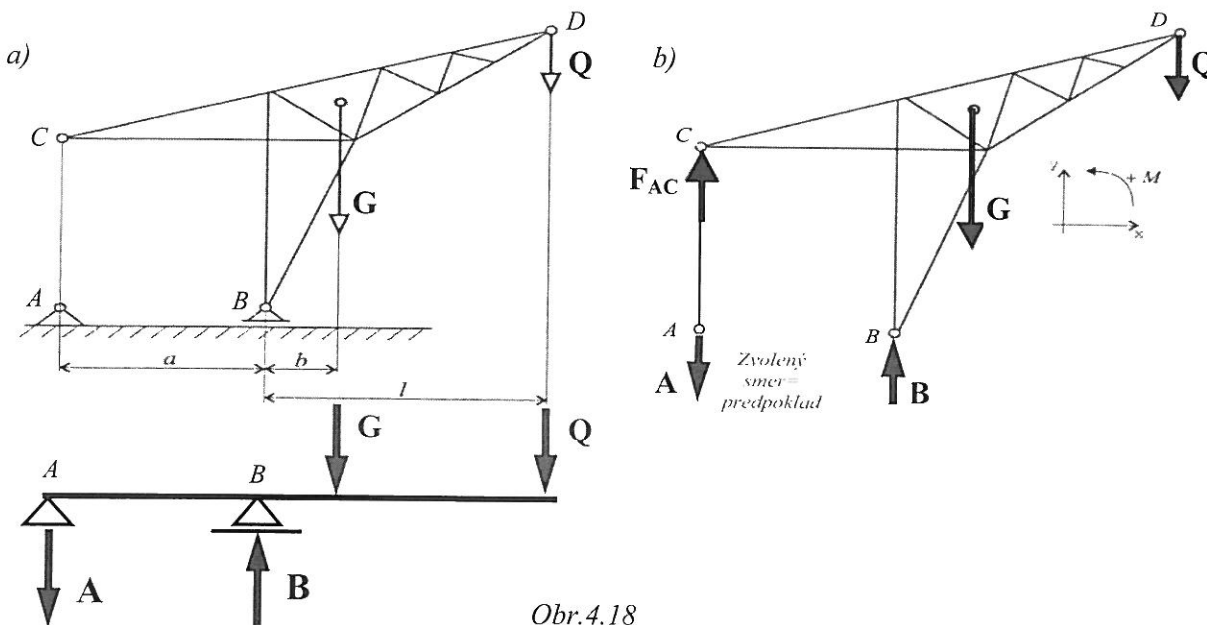
Z riešenia nosníka s vloženým kĺbom vyplýva, že spojenie oboch polí (telies) v kĺbe D umožňuje napísať, napr. pre časť napravo od kĺba D rovnovážnu podmienku v tvare

$$\sum M_{iD}^{(P)} = 0 \Rightarrow M + C \cdot 2c - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot c = 0 \rightarrow \textcircled{C}.$$

Zo známej veľkosti a zmyslu reakcie C už nie je problém určiť aj zostávajúce neznáme reakcie B a A_y .

Príklad 4.6: Rovinná konštrukcia žeriava (Obr.4.18) má tiaž G a je zaťažaná bremenom Q . Určite reakcie v podperách. Zadané: $G=13 \text{ kN}$, $Q=10 \text{ kN}$, $a=3 \text{ m}$, $b=2 \text{ m}$, $l=10 \text{ m}$.

Riešenie:



Obr.4.18

Teleso uvoľníme, tzn. s ohľadom na charakter primárnych síl G , Q zavedieme v bode A v tomto prípade iba zvislú zložku reakcie A ; v bode B s ohľadom na typ väzby a zaťaženie tiež iba zvislú reakciu B .

I. *Statická určitosť:* $n = n_v - n_0 = 3 - 3 = 0^\circ \text{V}$ – staticky určitá úloha.

II. *Väzbové reakcie:* vhodné je použitie rovníc rovnováhy typ (2), t.j. definovať 2 momentové podmienky a podľa Obr.4.18a dostaneme

$$\sum M_{iB} = 0: A \cdot a - G \cdot b - Q \cdot l = 0 \Rightarrow A \cdot 3 = 13 \cdot 2 + 10 \cdot 10 \Rightarrow A = \frac{(26 + 100)}{3} = 42 \text{ kN},$$

t.j. kladná hodnota sily A znamená, že skutočná reakcia má rovnaký zmysel ako bol pôvodne predpokladaný smer zvolený na začiatku riešenia. Platí: **Reakcia A vyvodzuje na prúte AC ťahový účinok.**

$$\sum M_{iA} = 0: B \cdot a - G \cdot (a + b) - Q \cdot (l + a) = 0$$

$$B \cdot 3 - 13 \cdot 5 - 10 \cdot (10 + 3) = 0 \Rightarrow 13.5 + 10 \cdot (10 + 3) = B \cdot 3 \Rightarrow B = \frac{(13.5 + 10 \cdot 13)}{3} = \frac{195}{3} = 65 \text{ kN}$$

Kladná hodnota sily B znamená, že skutočná reakcia B má zmysel podľa predpokladu, t.j. sila do bodu B vstupuje. Platí: **Výsledný účinok reakcie B na konštrukciu je tlakový.**

Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: B - A - G - Q = 0 \Rightarrow 65 - 42 - 13 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}.$$

$$\sum M_{iB} = 0: -A_y \cdot a + F_q \cdot \frac{a}{2} - D_y \cdot b = 0 \Rightarrow A_y = \frac{(F_q \cdot a / 2 - D_y \cdot b)}{a} = \frac{(1,1 - 1,215 \cdot 1)}{2} \Rightarrow A_y = -0,108 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - D_x \Rightarrow A_x = D_x \Rightarrow A_x = 0,43 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q + B - D_y = 0 \Rightarrow -0,1075 - 1 + 2,3225 - 1,215 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}.$$

Spôsob 2: využívame skutočnosť, že v kĺbovom spojení vzniká nulový momentový účinok. Platí:

$$F_q = q \cdot a = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ kN}, F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \sin 75^\circ = 1,93 \text{ kN}, F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \cos 75^\circ = 0,52 \text{ kN}.$$

Statické podmienky rovnováhy pre Gerberov nosník môžu mať napr. tvar

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F_{1x} + F_2 = 0 \Rightarrow A_x = F_{1x} - F_2 = 1,93 - 1,5 \Rightarrow A_x = 0,43 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q + B - F_{1y} + C = 0 \Rightarrow 3 \text{ neznáme (A}_y, B, C)$$

$$\sum M_{iA} = 0: -F_q \cdot \frac{a}{2} + B \cdot a - F_{1y} \cdot (a + b + c) + C \cdot (a + b + 2c) + M = 0 \Rightarrow 2 \text{ neznáme (B, C)}$$

Rovnice rovnováhy sú tri, neznáme zložky reakcií sú štyri, t.j. **jedna rovnica chýba**. Spojenie nosníkov - nesúceho AD a neseného DE v kĺbe D umožňuje, napr. pre časť napravo od kĺba D, napísať momentovú podmienku vzhľadom ku kĺbu D (Obr.4.17b) v tvare

$$\sum M_{iD}^{(P)} = 0: M + C \cdot 2c - F_{1y} \cdot c = 0 \Rightarrow C = \frac{(F_{1y} \cdot c - M)}{2c} = \frac{(1,93 \cdot 1,5 - 0,75)}{(2 \cdot 1,5)} \Rightarrow C = 0,715 \text{ kN}$$

Rovnako by bolo možné postupovať aj zľava. Rovnovážna momentová rovnica k bodu D od nesúceho nosníka, t.j. z ľavej strany, avšak obsahuje dve neznáme **A_y** a **B** (Obr.4.17 c) a platí

$$\sum M_{iD}^{(L)} = 0: -A_y \cdot (a + b) + F_q \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - B \cdot b = 0 \Rightarrow 2 \text{ neznáme (A}_y, B).$$

Z uvedeného dôvodu musíme napr. reakciu **B** alebo reakciu **A_y** najskôr určiť z inej rovnice rovnováhy a potom sa k riešeniu tejto rovnice vrátiť. Napr. z momentovej podmienky rovnováhy celého nosníka k bodu A (tým eliminujeme z rovnice zatiaľ neznámu reakciu **A_y**; reakcia **C** je už známa) získame reakciu **B** a platí

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} = 0: & -F_q \cdot \frac{a}{2} + B \cdot a - F_{1y} \cdot (a + b + c) + C \cdot (a + b + 2c) + M = 0 \\ \Rightarrow B = & \frac{(F_q \cdot a / 2 + F_{1y} \cdot (a + b + c) - C \cdot (a + b + 2c) - M)}{a} = \\ = & \frac{(1,1 - 0,52 \cdot (2 + 3 + 3) - 0,715 \cdot (2 + 3 + 2,3) - 750)}{2} \Rightarrow B = 2,323 \text{ kN} \end{aligned}$$

Dosadením hodnoty reakcie **B** do vyššie uvedenej momentovej podmienky k bodu D z ľavej strany nosníka už teraz môžeme určiť aj veľkosť a zmysel reakcie **A_y** a dostaneme

$$\sum M_{iD}^{(L)} = 0: -A_y \cdot (a + b) + F_q \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - B \cdot b = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F_q \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) - B \cdot b}{(a + b)}$$

$$A_y = -0,1075 \text{ kN}$$

$\Rightarrow$ pôvodne zvolený smer zložky **A_y**, nebol správny, zložka **A_y** v skutočnosti smeruje $\downarrow$.

Kontrolná podmienka: určené väzbové reakcie dosadíme napr. do podmienky rovnováhy zvislých síl a vykonáme tak skúšku správnosti. Platí

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q + B - F_{1y} + C = 0 \Rightarrow -0,1075 - 1 + 2,3225 - 1,93 + 0,715 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}.$$

Príklad 4.7: Vysokozdvíhací vozík s hmotnosťou m a konštrukciou určenými rozmermi l a je zaťažený vlastnou tiažou G . Jeho ťažisko sa nachádza vo vzdialenosti b od predného kola (obr.4.19). Určite sily, pôsobiace v bode styku podložky a vozíka a aké maximálne bremeno môžeme naložiť s ohľadom na bezpečnosť proti prevráteniu. Zadané: $m=4425$ kg, $Q=32$ kN, $l=1740$ mm, $a=968$ mm, $b=930$ mm.

Riešenie:

Hľadáme: $A, B, Q_{\max} = ?$

$$G = m \cdot g \cong 4425 \cdot 10 = 44,25 \text{ kN}, Q = 32 \text{ kN}$$

I. Statická určitosť: $n = n_v - n_0 = 0$ °V - úloha je staticky určitá.

II. Väzbové reakcie: (Obr.4.19)

$$\sum M_{iB} = 0: Q \cdot (l + b) - A \cdot l + G \cdot (l - a) = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{Q \cdot (l + b) + G \cdot (l - a)}{l}$$

$$A = \frac{32 \cdot (1,74 + 0,93) + 44,25 \cdot (1,74 - 0,97)}{1,74} \Rightarrow A = 68,74 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0: B \cdot l - G \cdot a + Q \cdot b = 0 \Rightarrow B = \frac{G \cdot a - Q \cdot b}{l}$$

$$B = \frac{44,25 \cdot 0,968 - 32 \cdot 0,93}{1,74} = \frac{12,624}{1,74} \Rightarrow B = 7,514 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrola: } \sum F_{iy} = 0: -Q + A - G + B = 0 \Rightarrow -32 + 68,74 - 44,25 + 7,514 = 0 \text{ kN} \Rightarrow 0 = 0.$$

III. Maximálne bremeno s ohľadom na bezpečnosť proti prevráteniu

Základ tvorí úvaha, že max. bremeno $Q_{\max}$ musí vyvolávať klopny moment M_{klop} menší ako moment stabilizujúci M_{stab} (Obr.4.19a). Musí platiť podmienka v tvare

$$M_{\text{stab}} \geq M_{\text{klop}}$$

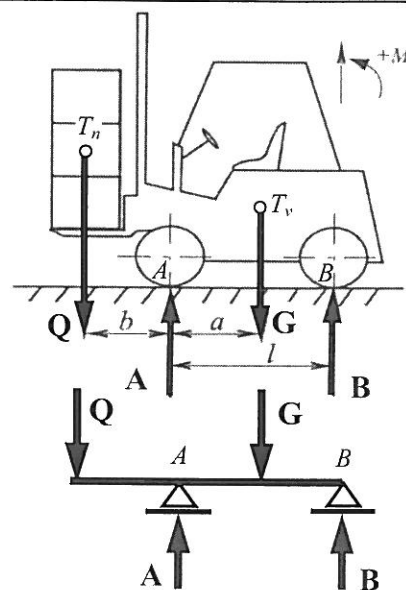
Sila B v bode B je iba sekundárna, tzn. uvažujeme, že jej otáčavý účinok k bodu otáčania A je nulový a teda platí $B=0$. Musí platiť momentová podmienka:

$$\sum M_A = 0: M_{\text{stab}} + M_{\text{klop}} = -G \cdot a + Q_{\max} \cdot b = 0$$

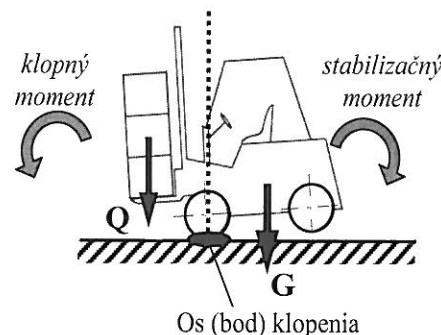
$$-G \cdot a + Q_{\max} \cdot b = 0$$

$$Q_{\max} = \frac{G \cdot a}{b} = \frac{44,25 \cdot 0,968}{0,93} = 46,06 \text{ kN} \Rightarrow m_Q \leq 4606 \text{ kg}$$

IV. Interpretácia výsledkov: Sily vznikajúce v miestach kontaktu vozíka s podložkou sú – na prednom kolese $A=68,74$ kN, na zadnom kolese $B=7,514$ kN a maximálne možné bezpečné bremeno je $m_Q=4606$ kg.



Obr.4.19



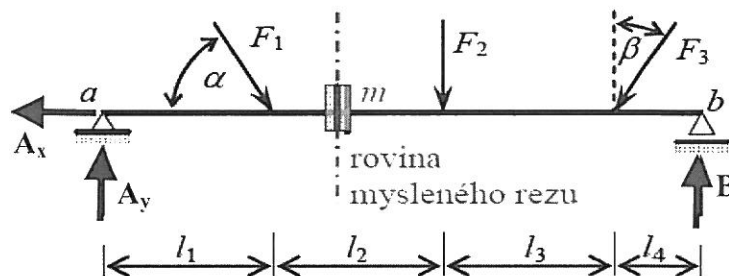
Obr.4.19 a

4.3. Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Okrem riešenia rovnováhy silových účinkov na nosníkoch, t.j. určovania väzbových reakcií, môžeme v rámci znalostí získaných v statike vykonať aj analýzu tzv. **vnútorných silových veličín** v ľubovoľnom mieste nosníka. Určiť charakter a veľkosť vnútorných silových veličín, charakterizujúcich namáhanie nosníka v analyzovanom priereze môžeme v ktoromkoľvek, ľubovoľne zvolenom, bode na osi nosníka.

Riešiť vnútorné silové veličiny pre rôzne typy rovinných nosníkov a rámov, pri ich rôznom uložení a zaťažení, patrí medzi základné znalosti zo statiky. Takéto znalosti tvoria potrebný základ pre pochopenie zásadných princípov pri posudzovaní a navrhovaní telies v rámci mechaniky poddajných telies.

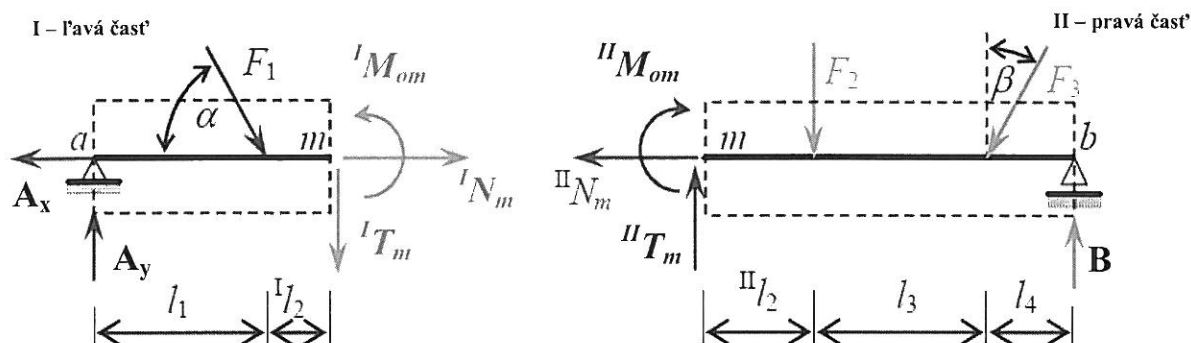
V dôsledku pôsobenia vonkajších silových účinkov vznikajú v nosníku vnútorné sily, ktorých výsledný účinok určujeme tzv. **metódou myslenného rezu**. Uvažujeme jednoducho uložený nosník podľa Obr. 4.20.



Obr.4.20

Mysleným rezom, prechádzajúcim miestom, v ktorom chceme vnútorné silové veličiny určiť, rozdelíme myslene (fiktívne) nosník na dve časti. V mieste myslenného rezu (m) potom musí pôsobiť určitá sústava vnútorných síl, ktorú môžeme taktiež nahradiť jej výslednicou $\mathbf{P}$ a momentom $\mathbf{M}_0$. Dodatočným rozložením výslednice $\mathbf{P}$ do zložiek v smere súradnicových osí získame jej zložky $P_x = N$ a $P_y = T$. Z axiomy akcie a reakcie vyplýva, že veličiny N , T aj $\mathbf{M}_0$ musia byť na oboch častiach myslene rozdeleného nosníka rovnako veľké, ale opačne orientované. Zložku N obvykle nazývame **osová sila**, zložku T voláme **priečna (posúvajúca) sila** a silovú dvojicu $\mathbf{M}_0$ nazývame **ohybový moment**.

Nosník (prút) je uvažovaný ako spojité teleso, t.j. je homogénny. V ľubovoľne zvolenom priereze m , t.j. v mieste, v ktorom uvažujeme pomyselný - **fiktívny rez** - na osi nosníka a kde chceme určiť vnútorné sily preto nemôžu nastať žiadne relatívne posuny, ani vzájomné pootočené. V priereze myslenného rezu preto predpokladáme existenciu vnútornej väzby spĺňajúcej podmienky nulového pohybu – t.j. **dokonalé votknutie**. Prakticky to znamená, že ak myslenným rezom, vedeným v uvažovanom priereze m kolmo na os nosníka, prerušíme vnútornú väzbu, potom účinok tejto väzby, vyjadrenej výslednicou vnútorných síl v nosníku, môžeme nahradiť zodpovedajúcimi zložkami interakčných síl (obr.4.21), ako **pre prípad dokonalého votknutia**, tzn. tromi zložkami N_m , T_m , M_{om} .



Obr.4.21

Nakoľko predpokladáme, že sústava vonkajších síl (primárnych aj sekundárnych), pôsobiaca na nosník je pri statickom riešení v rovnováhe, podmienky rovnováhy musia byť splnené aj pre každú jeho časť. Veľkosť a orientáciu zložiek výslednice vnútorných síl $^I N_m$, $^I T_m$, $^I M_{om}$ môžeme teda s výhodou určiť z podmienok rovnováhy, formulovaných buď pre sily pôsobiace na ľavú časť nosníka (časť I) alebo veľkosť a orientáciu zložiek výslednice vnútorných síl $^{II} N_m$, $^{II} T_m$, $^{II} M_{om}$ musia vyhovovať silovým a momentovým podmienkam rovnováhy síl pre pravú časť nosníka (časť II).

Hodnoty vnútorných síl po oboch stranách rezu sa musia rovnať, tzn. musí platiť

$$^I N_m = ^{II} N_m = N_m, \quad ^I T_m = ^{II} T_m = T_m, \quad ^I M_{om} = ^{II} M_{om} = M_{om}. \quad (4.4)$$

Z poznatkov o ekvivalencii a rovnováhe silových sústav už vieme, že ak zmeníme orientáciu všetkých síl v jednej z dvoch ekvivalentných sústav, **budú sily obidvoch sústav v rovnováhe**.

V dôsledku toho sú aj zložky výslednice vnútorných síl $^I N_m$, $^I T_m$, $^I M_{om}$ ekvivalentné so sústavou vonkajších síl pôsobiach na časť I a zložky výslednice vnútorných síl $^{II} N_m$, $^{II} T_m$, $^{II} M_{om}$ sú ekvivalentné so sústavou vonkajších síl, pôsobiach na časť II. Neznačená to však, že musíme vnútorné sily určovať pre obidve časti nosníka (I aj II). Obvykle riešime iba časť, na ktorej pôsobí menej silových účinkov.

4.3.1. Výpočet vnútorných silových účinkov

V rámci mechaniky telies vo všeobecnosti rozoznávame nasledovné **vnútorné silové veličiny**:

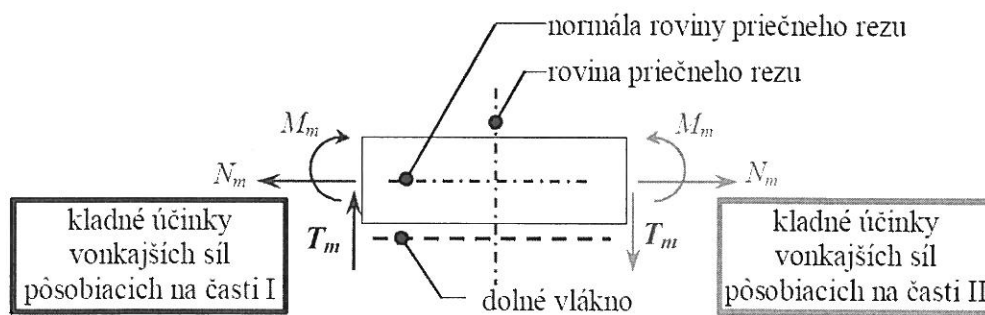
1. **osová (normálová) sila N ,**
2. **priečna (tangenciálna, posúvajúca) sila T ,**
3. **ohybový moment M_o .**

Z podmienok rovnováhy príslušnej časti nosníka (silových a momentových podmienok, definovaných vzhľadom k miestu mysleného rezu), vychádza aj princíp určovania veľkostí vnútorných silových veličín.

1. Normálová (osová) sila N

Zložka N_m pôsobí v smere normály roviny priečného rezu a preto ju nazývame **normálová sila**. Pre priamy nosník je smer normály totožný so smerom jeho osi a preto je v praxi zaužívaný aj ďalší ekvivalentný názov **osová sila**.

Jej hodnotu v ľubovoľnom priereze m určíme ako **algebraický súčet zložiek všetkých síl**, pôsobiach na uvažovanú (ľavú / pravú) časť nosníka v smere kolmom na rovinu priečného rezu, tzn. **v smere pozdĺžnej osi nosníka**. Algebraický súčet znamená, že orientáciu pôsobenia vnútorných síl v súlade s konvenciou znamienok, uvedenou na obr.4.22, považujeme za kladnú. Opačné pôsobenie zložiek vnútorných veličín zohľadníme záporným znamienkom.



Obr.4.22

Napríklad, pre nosník podľa obr.4.20 určíme hodnotu normálovej sily N v reze m (Obr.4.21) buď:

- uvažovaním pôsobenia normálových zložiek vonkajších síl na časť I (ľavý úsek: $a-m$)

$$+\Leftrightarrow N_m = \sum ^I F_{ix} = A_x - F_1 \cdot \cos \alpha \quad \text{alebo} \quad (4.5a)$$

- uvažovaním pôsobenia normálových zložiek vonkajších síl na časť II (pravý úsek: $b-m$)

$$+\Leftrightarrow N_m = \sum ^{II} F_{ix} = -F_3 \cdot \sin \beta. \quad (4.5b)$$

2. Pričná (tangenciálna) sila T

Vnútorná veličina T_m pôsobí v smere roviny mysleného priečného rezu a nazýva sa **priečna sila**. Jej pôsobením majú okrajové prierezy dĺžkového elementu prúta tendenciu vzájomne sa posunúť a preto je zaužívaný aj názov **posúvajúca sila** alebo **šmyková**, príp. **tangenciálna sila**.

Jej hodnotu v ľubovoľnom priereze m môžeme určiť ako **algebraický súčet všetkých síl kolmých na os nosníka**, pôsobiacich z jednej strany (buď naľavo alebo napravo) od uvažovaného prierezu v smere roviny priečného rezu, tzn. **v smere kolmom na os prúta**. Pre nosník podľa obr.4.20 určíme hodnotu priečnej sily T v reze m (Obr.4.21) buď uvažovaním:

- pôsobenia tangenciálnych zložiek vonkajších síl na časť I (ľavý úsek: $a-m$) z rovnice

$$+\uparrow T_m = \sum^I F_{iy} = A_y - F_1 \cdot \sin \alpha \quad \text{alebo} \quad (4.6a)$$

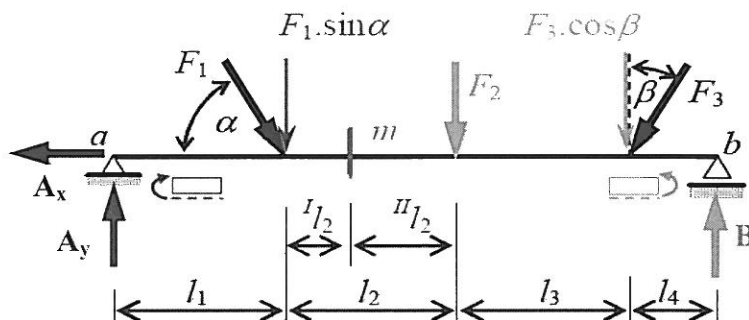
- pôsobenia tangenciálnych zložiek vonkajších síl na časť II (pravý úsek: $b-m$) z rovnice

$$+\downarrow T_m = \sum^{II} F_{iy} = -B + F_3 \cdot \cos \beta + F_2. \quad (4.6b)$$

3. Ohybový moment M_o

Vnútorná veličina M_o vyjadruje otáčavý účinok výslednice vnútorných síl v priereze vzhľadom k ľubovoľnému bodu na osi nosníka a nazývame ju **ohybový moment**. Veľkosť ohybového momentu v uvažovanom priereze m určíme ako **algebraický súčet statických momentov všetkých síl pôsobiacich z jednej strany** (I - ľavú alebo II - pravú) **od prierezu m , určených vzhľadom k zvolenému bodu prierezu m** .

Pre analyzovaný nosník podľa obr.4.20 je pre preukázanie podstaty riešenia momentových účinkov na nosník vhodnejšie využiť mierne upravený mechanický model podľa obr.4.23.



Obr.4.23

Veľkosť ohybového momentu M_o v reze m od pôsobenia vonkajších síl môžeme určiť (Obr.4.23) buď:

- na časti I (ľavý úsek: $a-m$) z rovnice

$$+\curvearrowright M_{om} = \sum^I M_{ob} = A_y \cdot (l_1 + I l_2) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot I l_2 \quad \text{alebo} \quad (4.7a)$$

- pre sily pôsobiace na časti II (pravý úsek: $b-m$) z rovnice

$$+\curvearrowleft M_{om} = \sum^{II} M_{oa} = B \cdot (II l_2 + l_3 + l_4) - F_3 \cdot \cos \beta \cdot (II l_2 + l_3) - F_2 \cdot II l_2. \quad (4.7b)$$

Zo spôsobu, ako boli vnútorné silové veličiny definované môžeme zhrnúť ich definície nasledovne:

Normálová (osová) sila N je v ľubovoľnom priereze telesa rovná algebraickému súčtu priemetov všetkých síl pôsobiacich v smere normály prierezu po jednej strane od zvoleného miesta rezu $\Rightarrow$

$$N = \sum^I F_{ix} \quad \text{resp.} \quad N = \sum^{II} F_{ix}.$$

Tangenciálna (pričná, posúvajúca) sila T je v ľubovoľnom priereze telesa rovná algebrickému súčtu priemetov všetkých síl pôsobiacich v rovine rezu po jednej strane od zvoleného miesta rezu $\Rightarrow$

$$T = \sum^I F_{iy} \quad \text{resp.} \quad T = \sum^{II} F_{iy}.$$

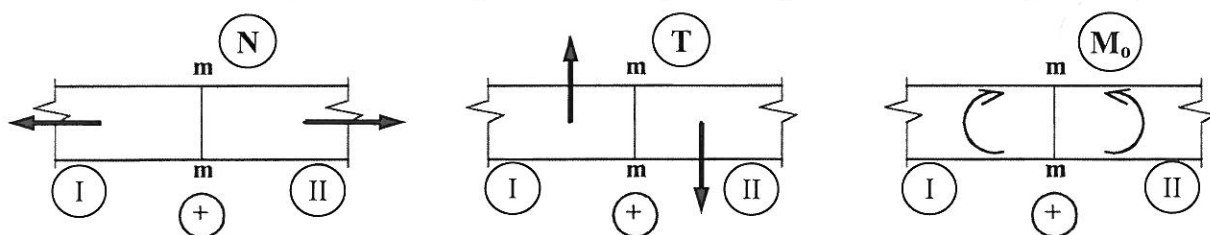
Ohybový moment M_o je v ľubovoľnom priereze telesa rovný algebrickému súčtu otáčavých účinkov od všetkých síl a silových dvojíc, pôsobiacich po jednej strane od miesta rezu, určených vzhľadom k zvolenému bodu (obvykle však ťažisko prierezu nosníka) $\Rightarrow$

$$M_o = \sum^I M_{oT} \quad \text{resp.} \quad M_o = \sum^{II} M_{oT}$$

Pre určenie veľkosti vnútorných síl preto môžeme vysloviť všeobecne platné tvrdenie:

Veľkosť vnútorných silových veličín N , T a M_o v ľubovoľnom priereze telesa sa rovná algebrickému súčtu všetkých im prislúchajúcich silových účinkov po jednej strane vyšetrovaného prierezu.

Pri algebrickom sčítaní po jednej strane prierezu berieme zreteľ aj na zmysel pôsobenia vnútorných síl, v súlade s už uvedeným znamienkovým dohovorom (Obr.4.22), tentoraz znázorneným inak (Obr.4.24).



Obr. 4.24

Poznámky: 1. Pôsobenie vnútorných síl a momentov v opačnom zmysle, ako je uvedené na obr.4.24 uvažujeme so záporným znamienkom. 2. Znamienkový dohovor je výrazne závislý na orientácii telesa, t.j. na určení jeho ľavého a pravého konca, resp. pri momente na voľbe horných a dolných vlákien pričného rezu. 3. Pri inej než vodorovnej polohe nosníka (napr. zvislica rámu) nemusí už byť uvedený dohovor vždy jednoznačný.

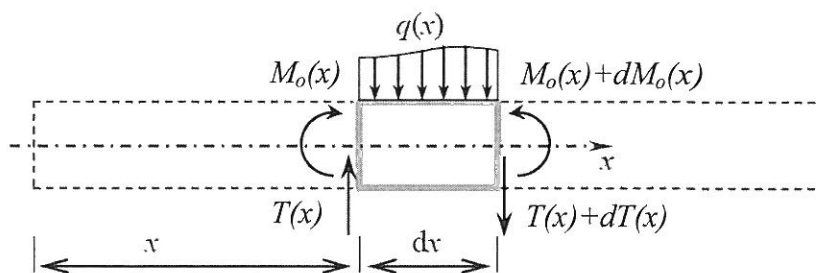
Z uvedenej znamienkovej konvencie (Obr.4.24) resp. (Obr.4.22) vyplýva:

- za kladný smer normálovej sily N považujeme takú jej orientáciu, ktorá sa snaží prút nat'ahovať,
- za kladný smer pričnej sily T považujeme takú jej orientáciu, ktorá vyvoláva vzhľadom k miestu rezu (m) otáčavý účinok v smere pohybu hodinových ručičiek,
- za kladný považujeme taký zmysel ohybového momentu M_o , ktorý spôsobuje ohýbanie nosníka tak, aby sa prehýbal smerom nadol. Znamená to, že na časti naľavo od uvažovaného mysleného rezu, za kladné považujeme momenty orientované v smere zmyslu pohybu hodinových ručičiek. Pre pravú časť za kladné považujeme naopak momenty, orientované proti pohybu ručičiek hodín.

Aby bolo možné identifikovať nielen extrémne hodnoty vnútorných veličín, ale aj miesto ich pôsobenia, znázorňujeme obvykle pre všetky vnútorné veličiny aj ich priebehy po celej dĺžke nosníka. Bude preukázané, že charakter priebehov a tvar ich funkcií sa riadi určitými, teoreticky zdôvodnenými, zákonitostami.

4.3.2. Závislosť medzi pričným zaťažením, pričnou silou a ohybovým momentom

Vyberme z nosníka, na ktorý pôsobí sústava vonkajších silových účinkov v rovnováhe, v jeho ľubovoľnom priereze x element dĺžky dx (obr.4.25). Uvažujme, že na element nepôsobí osamelá sila, ale iba spojité zaťaženie $q(x)$, pôsobiace kolmo na os prúta a ktoré môžeme pri dostatočne malej dĺžke úseku dx považovať za konštantné. Odstránené časti nosníka (t.j. naľavo aj napravo od elementu dx) nahradíme ekvivalentnými vnútornými silovými veličinami – a to pričnou silou T a ohybovým momentom M_o .



Obr.4.25

Osovú silu N v prípade zaťaženia spojitým priečnym zaťažením $q(x)$ neuvažujeme, pretože nemá vplyv na závislosť medzi priečnym zaťažením q a vnútornými silovými účinkami. Predpokladáme, že celý prút je v rovnováhe a preto musia byť splnené aj podmienky rovnováhy pre každú jeho elementárnu časť.

4.3.2.1. Schwedlerove-Žuravského vety

Podľa Obr.4.25 pôsobí v ľavom priereze určenom súradnicou x posúvajúca sila $T=T(x)$ a ohybový moment $M_o=M_o(x)$. V pravom reze, ktorého súradnica je väčšia o dx , pôsobí posúvajúca sila väčšia o $dT(x)$ t.j. $T(x)+dT(x)$ a ohybový moment väčší o $dM_o(x)$, t.j. $M_o(x)+dM_o(x)$.

Už vieme, že spojitý zaťaženie q obvykle aproximujeme (približne nahradzame) náhradným bremenom. Pre úsek dx dostaneme pre $q=\text{konšt}$ elementárne náhradné bremeno s veľkosťou $q(x).dx$, s pôsobiskom v strede úseku dx . Zo silovej podmienky rovnováhy síl pre uvažovaný element dx v tvare

$$T(x) - [T(x) + dT(x)] - q(x).dx = 0,$$

z ktorého po úprave dostaneme závislosť medzi priečnym zaťažením $q(x)$ a priečnou silou $T(x)$ v tvare

$$T(x) - T(x) - dT(x) - q(x).dx = 0 \Rightarrow \frac{dT(x)}{dx} = -q(x), \quad (4.8)$$

ktorá je v mechanike známa ako **1. Schwedlerova-Žuravského veta**, ktorú môžeme slovne vyjadriť v tvare:

Spojitý zaťaženie $q(x)$ predstavuje zápornú hodnotu prvej derivácie posúvajúcej sily $T(x)$.

Jej integráciou dostaneme funkciu, popisujúcu zmenu priečnej sily T pozdĺž osi nosníka, v tvare $T(x) = -\int q(x).dx + C_1$. Momentová podmienka, napr. k pravému okraju elementu dx (Obr.4.25) má tvar

$$-M_o(x) + [M_o(x) + dM_o(x)] - T(x).dx + q(x).dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$dM_o(x) - T(x).dx + q(x) \cdot \frac{dx^2}{2} \Rightarrow T(x).dx = dM_o(x) + q(x) \cdot \frac{dx^2}{2}.$$

Ak posledný člen na ľavej strane rovnice zanedbáme, pretože obsahuje tzv. infinitezimálne (takmer nekonečne) malú veličinu druhého rádu ($q(x).dx^2/2$), po jednoduchšej úprave dostaneme vzťah

$$\frac{dM_o(x)}{dx} = T(x), \quad (4.9)$$

uvádzaný ako **2. Schwedlerova-Žuravského veta**. Uvedenú závislosť môžeme slovne vyjadriť nasledovne:

V uvažovanom priereze nosníka sa hodnota funkcie priečnej sily $T(x)$ rovná hodnote derivácie funkcie ohybového momentu $M_o(x)$, podľa premennej x (t.j. podľa polohy mysleného rezu).

Za predpokladu, že funkcie zaťaženia sú spojitý, všetky uvedené závislosti platia nielen pre elementárny úsek prúta, ale aj pre ľubovoľný úsek konečnej dĺžky. V takomto prípade budú na vyšetrovanom úseku spojitý aj funkcie vnútorných silových veličín, t.j. ich priebehy.

Obidve Schwedlerove-Žuravského vety majú veľký praktický význam. Z diferenciálnych rovníc 1. rádu (4.8) a (4.9) je možné pri známom priečnom zaťažení q určiť na zadanom úseku nosníka aj **charakter priebehu** (tzn. tvar krivky) priečnej sily T a ohybového momentu M_o . Z vlastnosti derivácie funkcie vyplýva, že v poradí veličín q, T, M_o sa jedná vždy o **krivku rádovo vyššiu** (Obr.4.26).

$$q \dots \text{nulový} \Rightarrow T \dots \text{konšt.} \Rightarrow M_o \dots \text{lineárny}$$

$$q = 0$$

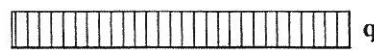


T - konštantné



M_o - lineárny

$$q \dots \text{konšt.} \Rightarrow T \dots \text{lineárny} \Rightarrow M_o \dots \text{kvadratický}$$



q - konštantné

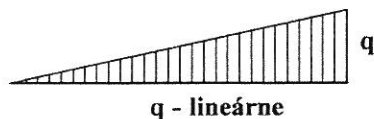


T - lineárne

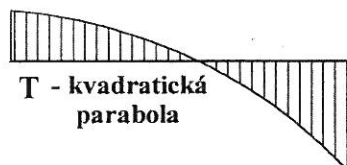


M_o - kvadratická parabola

$$q \dots \text{lineárny} \Rightarrow T \dots \text{kvadratický} \Rightarrow M_o \dots \text{kubický}$$



q - lineárne



T - kvadratická parabola



M_o - kubická parabola

Obr. 4.26

Funkčné hodnoty $q(x)$ resp. $T(x)$ predstavujú smernice dotyčníc ku krivkám $T(x)$ resp. $M_o(x)$ v zadanom priereze, t.j. sú to extrémny týchto funkcií. Z uvedeného vyplýva významné, prakticky využiteľné, tvrdenie:

Pomocou priebehu $T(x)$ je možné kontrolovať správnosť priebehu $M_o(x)$ a naopak (!)

4.3.2.2. Maximálny ohybový moment, nebezpečný prierez na nosníku

Okrem priebehov veličín T a M_o potrebujeme obvykle identifikovať aj polohu takého mysleného rezu (p), v ktorom je ohybový moment na celej dĺžke nosníka maximálny. Znamená to, že **je nutné určiť nielen polohu x_p takéhoto „nebezpečného“ prierezu**, ale aj **veľkosť extrémneho ohybového momentu $M_p = M_o \max$** v ňom. Je zřejmé, že keď má ohybový moment M_o lineárny (priamkový) priebeh, je určenie polohy a veľkosti $M_o \max$ z priebehu jednoznačné. Ak však $M_o \max$ leží v úseku, kde priebeh $M_o(x)$ je krivka, musíme jeho polohu aj veľkosť určovať analyticky.

Maximálny moment $M_o \max$ určujeme z podmienky pre extrém funkcie jednej premennej v tvare

$$\frac{dM_o}{dx} = 0, \quad (4.10)$$

z ktorej môžeme určiť aj súradnicu, t.j. polohu x_p takého prierezu na nosníku, pre ktorý platí

$$M_o(x_p) = M_o \max. \quad (4.11)$$

Z 2. Schwedlerovej - Žuravského vety ($dM_o / dx = T$) vyplýva, že extrém ohybového momentu vzniká v takom mieste nosníka, kde priečna sila T je nulová (t.j. kde mení svoje znamienko)! Takémuto miestu na nosníku hovoríme **prechodový (nebezpečný) prierez.**

Inak povedané, **maximálny (mezipodperový) moment $M_{o_{max}}$** vzniká v mieste tzv. **nebezpečného (prechodového) prierezu**, v ktorom je veľkosť posúvajúcej sily T nulová, tzn. kde platí $T = 0$.

Určenie silových účinkov v prechodovom priereze nosníka nie je možné bez poznania polohy prierezu p . Jeho polohu zistíme z podmienky, že posúvajúca sila je v tomto priereze rovná nule, t.j. $T_{(p)} = 0$. Veľkosť a zmysel ohybového momentu $M_{o_{max}}$ v prechodovom priereze p potom určíme jednoducho ako súčet všetkých statických momentov vonkajších silových účinkov vzhľadom k bodu p z jednej, fiktívnym rezom myslene oddelenej, časti nosníka.

Iba na doplnenie uvádzame, že ak pôsobia na vyšetrovanom intervale nosníka aj spojité zaťaženia typu - osové $n(x)$, príp. momentové $m(x)$ podľa obr.4.11, majú vzťahy (4.8) a (4.9) tvar

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad \text{resp.} \quad \frac{dM_o}{dx} = T - m(x) \quad (4.12)$$

s rovnakým významom použitia ako pre $q(x)$.

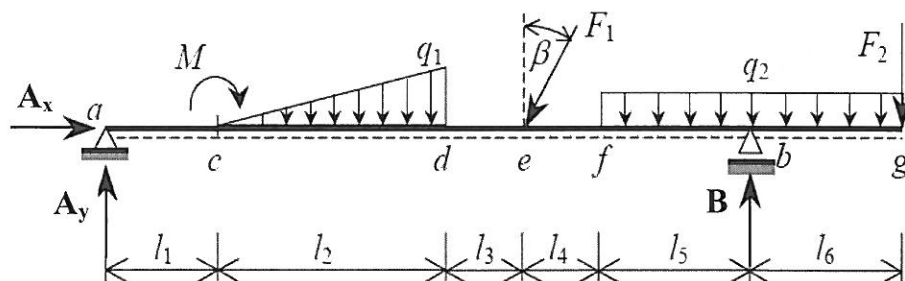
Pri zakresľovaní priebehov vnútorných silových veličín na priamych/lomených nosníkoch platí dohoda:

Na priamych nosníkoch vynášame kladné hodnoty N a T nad tzv. nulovou osou, kladné hodnoty ohybových momentov M_o na stranu natáhaných vlákien, t.j. štandardne pod nulovú os.

Na lomených nosníkoch volíme stranu kladných hodnôt N a T ľubovoľne, ale priebehy ohybových momentov M_o zakresľujeme opäť na stranu ťahaných (t.j. pri ohybe predlžovaných) vlákien.

4.3.3. Závislosť medzi vnútornými veličinami pre vybrané typy zaťaženia

Každý analyzovaný nosník, na ktorom sú vonkajšie silové účinky v rovnováhe (napr. obr.4.27), môžeme myslennými rezmi rozdeliť na **body** (kvázi úseky s takmer nulovou dĺžkou), ktoré volíme v miestach uloženia a v pôsobiskách osamelých síl a silových dvojíc (momentov) a na **úseky**, ktoré sú po celej ich dĺžke zaťažené spojitými silovými účinkami, resp. nie sú zaťažené žiadnym silovým účinkom.

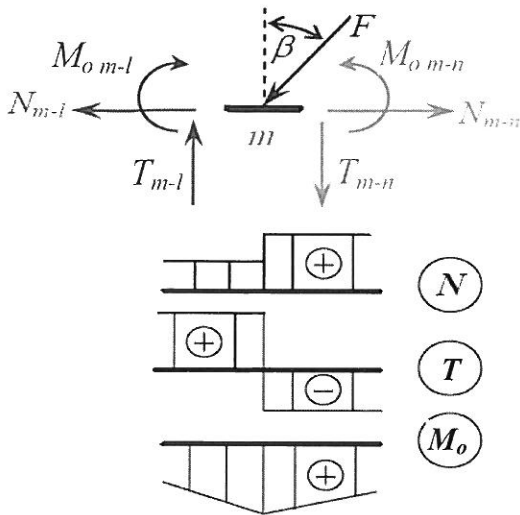


Obr.4.27

Pri objasňovaní určovania a zakresľovania priebehov vnútorných silových veličín na úsekoch s rozličným zaťažením budeme vychádzať z nasledovných predpokladov:

1. Ak sú vonkajšie sily (primárne zaťaženia a väzbové reakcie), pôsobiace na hmotný objekt v rovnováhe, musí byť v rovnováhe aj jeho ľubovoľná časť.
2. Hodnoty vnútorných síl na začiatku alebo na konci úseku sú už známe z predchádzajúcich krokov riešenia.
3. Poloha ľubovoľného prierezu (m) na osi nosníka je udávaná súradnicou x .

4.3.3.1. Prierez, v ktorom pôsobí vonkajšia osamelá sila



Obr.4.28

Ak v niektorom priereze prúta pôsobí osamelá sila (obr. 4.28), vyberieme myslennými rezní, vedenými tesne v okolí prierezu, elementárny úsek prúta ($l - n$) s dĺžkou limitne sa blížiacou nule. Uvažujeme, že hodnoty síl na začiatku / konci úseku už poznáme.

Neznámu normálovú silu N určíme ako

$$+\Leftarrow N_{m-n} = N_{m-l} + F \cdot \sin \beta \quad \text{alebo}$$

$$+\Rightarrow N_{m-l} = N_{m-n} - F \cdot \sin \beta$$

Neznámu priečnu silu T určíme ako

$$+\Uparrow T_{m-n} = T_{m-l} - F \cdot \cos \beta \quad \text{alebo}$$

$$+\Downarrow T_{m-l} = T_{m-n} + F \cdot \cos \beta$$

Hodnoty ohybových momentov M_o sú rovnaké a teda platí

$$+\Rrightarrow M_{o\,m-n} = M_{o\,m-l} \quad +\Lleftarrow$$

Znamená to, že pôsobenie osamelej sily F sa v priebehoch N a T prejaví „skokom“ a v priebehu M_o (Obr.4.28) „zlomom“.

4.3.3.2. Prierez, v ktorom pôsobí osamelá silová dvojica

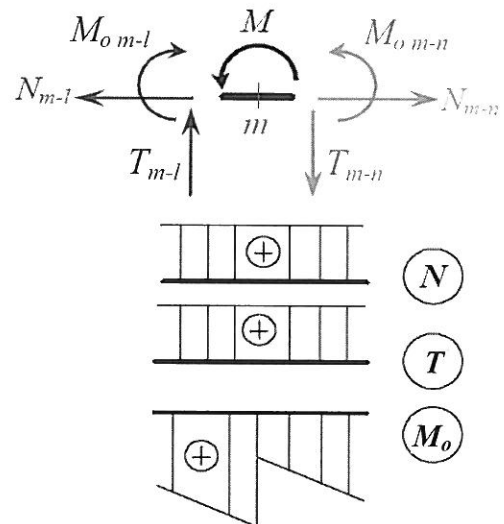
Pôsobenie silovej dvojice – statického momentu - v niektorom priereze priameho prúta (Obr.4.29) nemá vplyv na priebeh normálových ani osových síl. Ich hodnoty sú z oboch strán myslenného rezu rovnaké a platí

$$N_{m-n} = N_{m-l} \quad \text{a} \quad T_{m-l} = T_{m-n}$$

Pre určenie hodnoty ohybového momentu M_o platí

$$+\Rrightarrow M_{o\,m-n} = M_{o\,m-l} - M \quad \text{alebo} \quad +\Lleftarrow M_{o\,m-l} = M_{o\,m-n} + M.$$

V grafickom znázornení budú priebehy N a T závislé iba na charaktere osového a priečného zaťaženia, pôsobenie osamelej silovej dvojice M_o sa prejaví v priebehu ohybového momentu M_o (obr.4.29) „skokom“.



Obr.4.29

Príklad 4.8: Výpočtom určite veľkosť a priebeh vnútorných silových veličín N , T , M_o na jednoducho uloženom nosníku, zaťaženom osamelou silou F . Zadané: $F=500$ N, rozmery a usporiadanie podľa Obr.4.30.

Riešenie:

I. Statická určitosť: $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ - staticky určitý problém.

II. Vážbové reakcie:

$$\sum M_{iA} = 0 \Rightarrow B \cdot l - F \cdot a = 0 \Rightarrow B = F \cdot a / l = 500 \cdot 2 / 6 \Rightarrow B = 166,7 \text{ N}$$

$$\sum M_{iB} = 0 \Rightarrow -A \cdot l + F \cdot b = 0 \Rightarrow A = F \cdot b / l = 500 \cdot 4 / 6 \Rightarrow A = 333,3 \text{ N}$$

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{Kontrolná podmienka: } \sum F_{iy} = 0: A - F + B = 0 \Rightarrow 333,3 - 500 + 166,7 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ - splnené.}$$

III. Vnútorné silové veličiny:

- Osová (normálová) sila N :

$$N = \sum F_{ix} = 0N$$

- Priečna (posúvajúca) sila T :

- bod A :

$$T_A^{(L)} = 0N, \quad T_A^{(P)} = T_A^{(L)} + A = 333,3N$$

tzn. v úseku I pre $x \in (A, C)$: $T_I = A = 333,3N$

- bod C :

$$T_C^{(L)} = T_A^{(P)} = A = 333,3N$$

$$T_C^{(P)} = A - F = -166,7N$$

tzn. v úseku II pre $x \in (C, B)$:

$$T_{II} = A - F = 333,3 - 500 = -166,7N$$

- bod B :

$$T_B^{(L)} = T_C^{(P)} = -166,7N, \quad T_B^{(P)} = T_B^{(L)} + B = 0N.$$

- Ohybový moment M_o :

V miestach podoprenia, t.j. v bodoch A, B je ohybový moment $M_o = 0$. Maximálna hodnota momentu $M_o_{\max}$ pôsobí v priereze, kde priečna sila $T=0$, t.j. kde mení znamienko $\Rightarrow$ bod „ C “.

Pre moment k bodu C , napr. zľava platí

$$M_{oC}^{(L)} = A \cdot x = 333,3 \cdot 2 = 666,6N = M_{o\max},$$

resp. uvažovaním pravej časti nosníka dostaneme

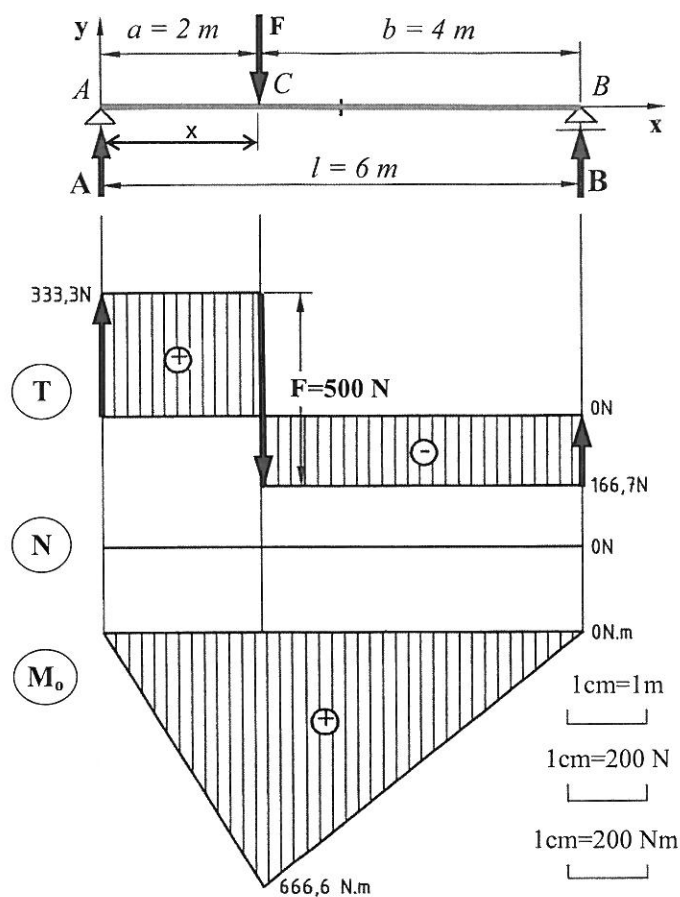
$$M_{oC}^{(P)} = B \cdot (l - x) = 166,7 \cdot (6 - 2) = 666,6N = M_{o\max}.$$

V oboch intervaloch (t.j. úseky I aj II) platí: $\frac{dM_o}{dx} = T = \text{konst.} \Rightarrow M_o - \text{lineárny priebeh.}$

Zvolené mierky pre zakreslenie priebehov:

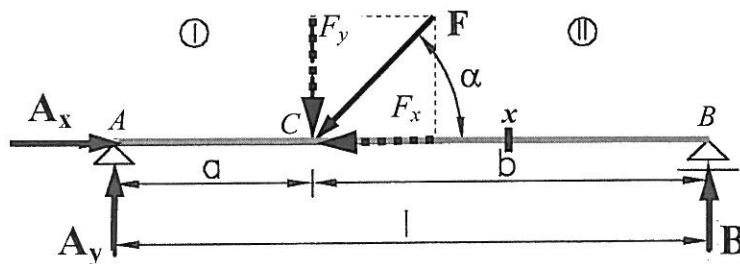
$$m_L = 0,1 \text{ m.mm}^{-1}, \quad m_F = 20 \text{ N.mm}^{-1},$$

$$m_M = 20 \text{ Nm.mm}^{-1} - \text{nie je to však nutné!}$$



Obr. 4.30

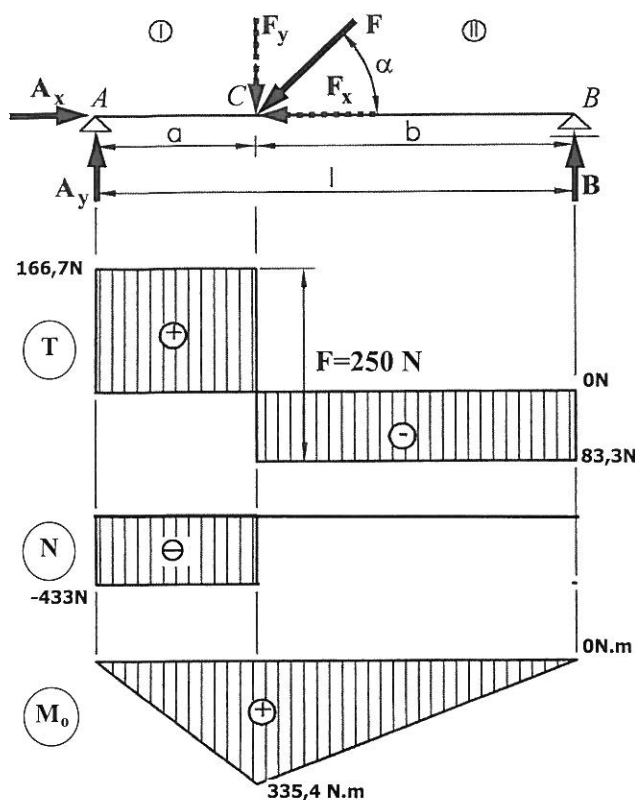
Príklad 4.9: Na nosníku (obr.4.31) zaťaženom šikmou silou F určite výpočtom väzbové reakcie, veľkosť a zmysel vnútorných silových veličín v priereze $x = (a+b/2)$ a zakreslite priebehy veličín N, T, M_o po celej dĺžke nosníka. Zadané: $F = 500N$, $a = 2m$, $b = 4m$, $l = 6m$, $\alpha = 30^\circ$.



Riešenie:

Obr.4.31

I. Statická určitost': $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý problém.



Obr.4.31 a

Mierky: $m_L = 0,1 \text{ m.mm}^{-1}$, $m_F = 10 \text{ N.mm}^{-1}$, $m_M = 20 \text{ Nm.mm}^{-1}$ - **nie je nutné kresliť v mierke!**

II. Väzbové reakcie:

Zložky sily $\mathbf{F}$: $F_y = F \cdot \sin \alpha = 250 \text{ N}$,
 $F_x = F \cdot \cos \alpha = 433 \text{ N}$

$A_x = 433 \text{ N}$, $A_y = 166,7 \text{ N}$, $B = 83,3 \text{ N}$

III. Vnútorné silové veličiny (Obr.4.31a):

a) vnútorné sily v priereze x (dohoda podľa 4.22):

$N_x^{(L)} = -A_x + F_x = -433 + 433 = 0 \text{ N}$ alebo

$N_x^{(P)} = 0 \text{ N}$

$T_x^{(L)} = A_y - F_y = 166,66 - 250 = -83,34 \text{ N}$ alebo

$T_x^{(P)} = -B = -83,33 \text{ N}$

$M_{ox}^{(L)} = A_y \cdot (a + b/2) - F_y \cdot b/2$

$M_{ox}^{(L)} = 166,66 \cdot 4 - 250 \cdot 2 = 166,6 \text{ Nm}$ alebo

$M_{ox}^{(P)} = B \cdot b/2 = 83,33 \cdot 2 = 166,6 \text{ Nm}$

b) priebehy vnútorných silových veličín po celej dĺžke nosníka (Obr.4.31a)

- Osová (normálová) sila N :

- Bod A: $N_A^{(L)} = 0 \text{ N}$, $N_A^{(P)} = -A_x = -433 \text{ N} \Rightarrow$ v úseku I pre $x \in (A, C)$: $N_I = -A_x = -433 \text{ N}$

- Bod C: $N_C^{(L)} = N_A^{(P)} = -A_x = -433 \text{ N}$, $N_C^{(P)} = -A_x + F_x = 0 \text{ N}$

$\Rightarrow$ v celom úseku II pre $x \in (C, B)$: $N_{II} = -A_x + F_x = -433 + 433 = 0 \text{ N}$

- Bod B: $N_B^{(L)} = N_C^{(P)} = 0 \text{ N}$, $N_B^{(P)} = N_B^{(L)} + B = -433 + 433 = 0 \text{ N}$

- Priečna (posúvajúca) sila T :

- Bod A: $T_A^{(L)} = 0 \text{ N}$, $T_A^{(P)} = A_y = 166,7 \text{ N} \Rightarrow$ v celom úseku I pre $x \in (A, C)$: $T_I = A_y = 166,7 \text{ N}$

- Bod C: $T_C^{(L)} = T_A^{(P)} = A_y = 166,7 \text{ N}$, $T_C^{(P)} = A_y - F_y = -83,3 \text{ N}$

$\Rightarrow$ v celom úseku II pre $x \in (C, B)$: $T_{II} = A_y - F_y = -166,7 \text{ N}$

- Bod B: $T_B^{(L)} = T_C^{(P)} = -83,3 \text{ N}$, $T_B^{(P)} = T_B^{(L)} + B = 0 \text{ N}$

- Ohybový moment M_o :

$M_{oA}^{(L)} = B \cdot l - F_y \cdot a = 83,3 \cdot 6 - 250 \cdot 2 = 500 - 500 = 0 \text{ Nm}$

$M_{oC}^{(P)} = A_y \cdot a = 166,7 \cdot 2 = 333,4 \text{ Nm} = M_{o \max}$

$M_{oB}^{(L)} = -A_y \cdot l + F_y \cdot b = -166,7 \cdot 6 + 250 \cdot 4 = -1000 + 1000 = 0 \text{ Nm}$

- Nebezpečný prierez:

Polohu nebezpečného prierezu x_p (miesto, kde $T=0$, t.j. priečna sila T mení znamienko) určíme z priebehu sily T . Platí $x_p = \text{bod C} \Rightarrow x_p = 2 \text{ m}$ od ľavého konca nosníka a maximálny ohybový moment je

$M_{o \max} = M_{o x_p} \Rightarrow M_{o x_p}^{(L)} = A_y \cdot a = 166,7 \cdot 2 = 333,4 \text{ Nm}$ resp. $M_{o x_p}^{(P)} = B \cdot b = 83,3 \cdot 4 = 333,4 \text{ Nm}$.

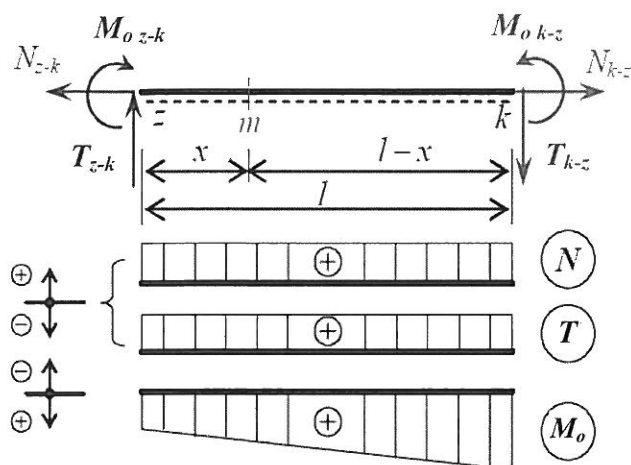
Poznámka: Určenie väzbových reakcií :

$$\sum M_{iA} = 0: B \cdot l - F \cdot \sin \alpha \cdot a = 0 \Rightarrow B = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot a}{l} = \frac{500 \cdot 0,5 \cdot 2}{6} = 83,33 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iB} = 0: -A_y \cdot l + F \cdot \sin \alpha \cdot b = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot b}{l} = \frac{500 \cdot 0,5 \cdot 4}{6} = 166,67 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow A_x = F \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 30^\circ = 433 \text{ N}$$

Kontrolná podmienka: $\sum F_{iy} = 0: A_y - F_y + B = 0 \Rightarrow 166,7 - 250 + 83,3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ - splnené.



Obr.4.32

4.3.3.3. Nezaťažný úsek nosníka

Majme nezaťažný úsek priameho prúta (obr.4.32), so začiatkom v bode z a koncom v bode k .

Normálová sila N má v každom priereze úseku ($z-k$) konštantnú hodnotu, vyjadrenú v súlade so znamienkovou dohodou (obr.4.22) v tvare

$$+\Leftarrow N(x) = N_{z-k} \quad \text{alebo} \quad +\Rightarrow N(x) = N_{k-z}$$

Priečna sila T má v každom priereze úseku ($z-k$) tiež konštantnú hodnotu, vyjadrenú v súlade s dohodou znamienok (obr.4.22) v tvare

$$+\Uparrow T(x) = T_{z-k} \quad \text{alebo} \quad +\Downarrow T(x) = T_{k-z}$$

Funkciu ohybového momentu M_o v uvažovanom priereze m analyzovaného úseku ($z-k$) vyjadríme podľa dohody (obr. 4.22) v tvare

$$+\Leftarrow M_o(x) = M_{o z-k} + T_{z-k} \cdot x \quad \text{alebo} \quad +\Leftarrow M_o(x) = M_{o k-z} - T_{k-z} \cdot (l - x) \quad (4.13)$$

z ktorej pre premennú x , udávajúcu polohu uvažovaného prierezu vyplýva zrejmy lineárny priebeh (zmena) hodnôt ohybového momentu.

Z matematiky vieme, že pre zobrazenie lineárnej funkcie postačuje poznať dve jej hodnoty. Stačí preto určiť hodnotu ohybového momentu na konci úseku pre známe hodnoty vnútorných síl na začiatku úseku (ľavá strana), alebo opačne, na začiatku úseku, ak sú hodnoty vnútorných síl známe na jeho konci (pravá strana). Priebehy jednotlivých vnútorných silových veličín N , T , M_o znázorníme graficky na základe vyčíslených hodnôt pre nosník ako celok. Pre ľubovoľný nezaťažný úsek musí byť zachovaný charakter priebehu tak, ako je uvedené na obr.4.32. Pre zakresľovanie priebehov vnútorných silových veličín nezaťažného úseku platí:

Kladné hodnoty N a T vynášame na stranu horných vlákien, záporné na stranu dolných a sú pre celý úsek konštantné. Pre vykreslenie priebehu ohybových momentov M_o platí, že kladné hodnoty M_o vynášame na stranu dolných (naťahovaných) vlákien, záporné na stranu horných vlákien a priebeh funkcie M_o je lineárny.

4.3.3.4. Úsek zaťažný rovnomerným spojitým priečnym zaťažením

Analyzujeme úsek priameho prúta (obr.4.33) so začiatkom v ľavom bode z . Predpokladajme, že intenzita spojitého zaťaženia je konštantná a je vyjadrená funkciou $q(x) = q$.

Normálová sila N má pre tento prípad v každom priereze úseku ($z-k$) konštantnú hodnotu, vyjadrenú podľa konvencie (obr.4.22) zápisom

$$+\Leftrightarrow N(x) = N_{z-k} \quad \text{alebo}$$

$$+\Rightarrow N(x) = N_{k-z}$$

Funkciu **priečnej sily** T v uvažovanom priereze m na riešenom úseku ($z-k$) vyjadríme ako

$$+\Uparrow T(x) = T_{z-k} - q \cdot x \quad \text{alebo}$$

$$+\Downarrow T(x) = T_{k-z} + q \cdot (l-x)$$

a vyjadruje lineárnu zmenu hodnôt priečnej sily podľa premennej x , udávajúcej polohu analyzovaného prierezu (Obr.4.33).

Funkciu **ohybového momentu** M_o v uvažovanom priereze m analyzovaného úseku ($z-k$) vyjadríme podľa konvencie v tvare

$$+\Rrightarrow M_o(x) = M_{o\,z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \quad \text{alebo}$$

$$+\Leftrightarrow M_o(x) = M_{o\,k-z} - T_{k-z} \cdot (l-x) - \frac{q \cdot (l-x)^2}{2} \quad (4.14)$$

a vyjadruje kvadratickú funkciu (zmenu) priebehu ohybového momentu M_o podľa premennej x , udávajúcej polohu analyzovaného prierezu (obr.4.33).

Pre jednoznačné zobrazenie funkcie druhého stupňa - **kvadratickej paraboly** musíme poznať aspoň tri funkčné hodnoty. Okrem hodnôt ohybových momentov na začiatku a konci úseku je preto nutné určiť aj hodnotu prislúchajúcu ďalšiemu prierezu, napr. prierez (s) v strede úseku. Pre ľubovoľný úsek prúta, zaťažený spojitým priečnym zaťažením s konštantnou intenzitou, musí byť zachovaný charakter priebehu vnútorných veličín podľa obr.4.33.

V konkrétne riešenej úlohe môže, ale nemusí, nastať prípad, že v určitom priereze p je hodnota priečnej sily nulová, t.j. $T=0$. Už vieme, že takýto prierez nazývame **prechodový (nebezpečný) prierez**, v ktorom sa mení hodnota priečnej sily T z kladnej na zápornú alebo naopak. Poznanie takéhoto špecifického miesta na nosníku je dôležité, pretože v tomto mieste nosníka bude funkcia **ohybového momentu dosahovať extrém**. Z matematiky je známe, že spojitá funkcia má v rozsahu skúmaného intervalu lokálny extrém (MAX alebo MIN) v tých bodoch, v ktorých sa jej prvá derivácia rovná nule (ako dôsledok Š-Ž viet).

Polohu prechodového prierezu p určenú súradnicou x_p zistíme tak, že do funkcie priečnej sily $T(x)$ dosadíme za $x = x_p$ a pre hodnotu priečnej sily $T_p = T(x=x_p) = 0$ dostaneme

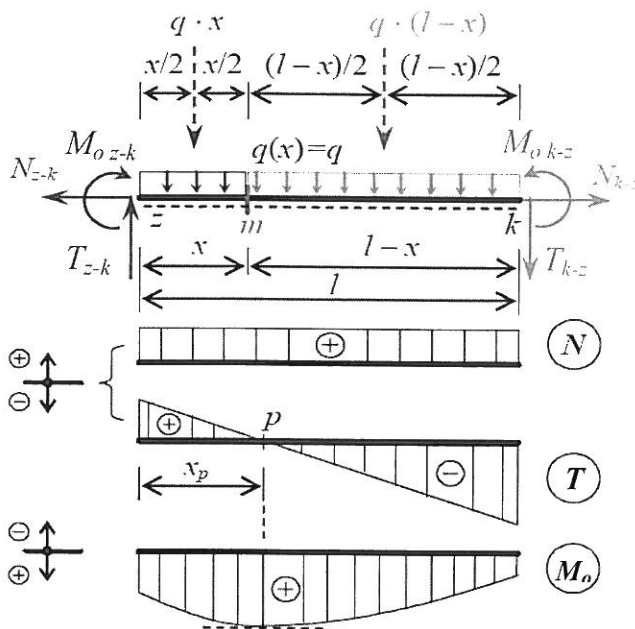
$$+\Uparrow T_{z-k} - q \cdot x_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{T_{z-k}}{q} \quad \text{resp.} \quad +\Downarrow T_{k-z} + q \cdot (l-x_p) = 0 \Rightarrow x_p = \frac{T_{k-z}}{q} + l \quad (4.15)$$

a všeobecne pre polohu nebezpečného prierezu potom platí $x_p^{(L)} = \frac{T}{q}$ resp. pre $x_p^{(P)} = \frac{T}{q} + l$.

Hodnotu extrémneho ohybového momentu vypočítame po určení polohy prechodového prierezu p dosadením za $x = x_p$ do funkcie ohybového momentu a dostaneme

$$+\Rrightarrow M_{o\max}^{(L)} = M_{o(x_p)} = M_{o\,z-k} + T_{z-k} \cdot x_p - \frac{q \cdot x_p^2}{2}, \quad \text{resp.}$$

$$+\Leftrightarrow M_{o\max}^{(P)} = M_{o(x_p)} = M_{o\,k-z} - T_{k-z} \cdot (l-x_p) - \frac{q \cdot (l-x_p)^2}{2}. \quad (4.16)$$

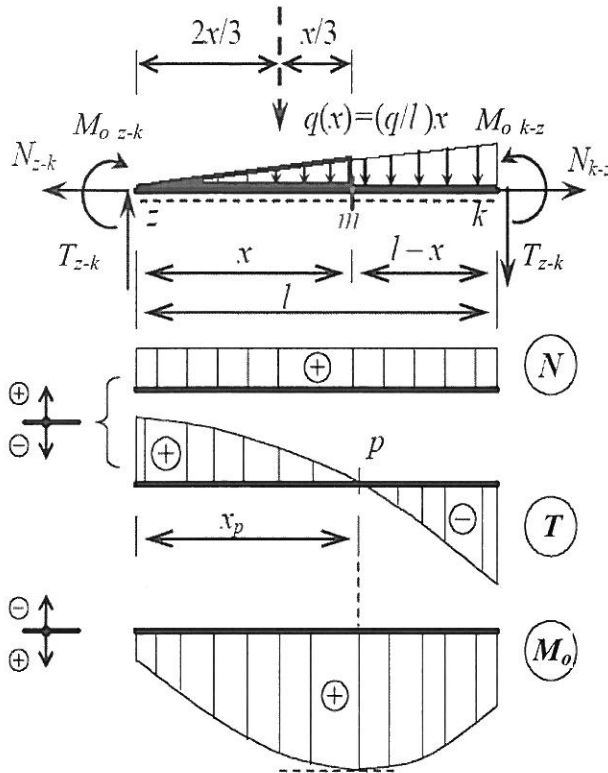
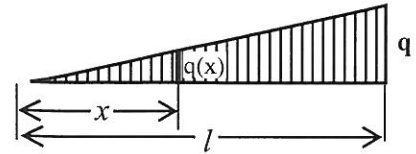


Obr.4.33

4.3.3.5. Úsek zaťažený nerovnomerným spojitým priečnym zaťažením

Majme opäť ľubovoľný úsek priameho prúta (obr.4.34) so začiatkom v bode z . Lineárnu zmenu intenzity priečného zaťaženia vyjadruje funkcia $q(x) = q \cdot x / l \Rightarrow$ trojuholníkové spojité priečne zaťaženie.

$$\text{Odvedenie: } \frac{q}{q(x)} = \frac{l}{x} \Rightarrow q(x) = \frac{q \cdot x}{l}$$



Obr.4.34

Normálová sila N má aj v tomto prípade spojitého zaťaženia v každom priereze úseku ($z-k$) konštantnú hodnotu (obr.4.34), vyjadrenú podľa konvencie (4.22) zápisom v tvare

$$+\Leftrightarrow N(x) = N_{z-k} \quad \text{alebo}$$

$$+\Leftrightarrow N(x) = N_{k-z}.$$

Funkciu priebehu priečnej sily T v uvažovanom priereze m analyzovaného úseku ($z-k$) určíme podľa dohody o znamienkach (obr.4.22) v tvare

$$+\Uparrow T(x) = T_{z-k} - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = T_{z-k} - \frac{q}{2l} x^2$$

a vyjadruje **kvadratickú zmenu hodnôt T** pre premennú x , udávajúcu polohu prierezu.

Pre zobrazenie funkcie druhého stupňa je potrebné poznať aspoň tri funkčné hodnoty, preto je nutné okrem hodnôt priečných síl na začiatku (z) a na konci (k) úseku určiť aj tretiu hodnotu, napr. veľkosť priečnej sily T_s , prislúchajúcu prierezu (s) v strede úseku.

Funkciu ohybového momentu M_o v priereze m na úseku ($z-k$) prúta (Obr.4.34) môžeme vyjadriť zápisom podľa znamienkovej dohody (obr.4.22), napr. pri postupe zľava v tvare

$$+\Leftrightarrow M_o(x) = M_{o z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{1}{3} x = M_{o z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{q \cdot x}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = M_{o z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{q}{6l} x^3. \quad (4.17)$$

Uvedená rovnica s premennou x , udávajúcou polohu uvažovaného prierezu, vyjadruje zmenu hodnôt ohybového momentu M_o podľa **krivky tretieho stupňa**. Pre zobrazenie funkcie tretieho stupňa (tzv. **kubickej paraboly**) potrebujeme poznať aspoň štyri funkčné hodnoty a preto je nutné okrem hodnôt M_o na začiatku (z) a konci (k) úseku určiť ešte minimálne ďalšie dve hodnoty, prislúchajúce prierezom, napr. vo vzdialenostiach $x_1 = l/3$, resp. $x_2 = 2l/3$ od začiatku úseku.

Pre ľubovoľný úsek prúta, zaťaženého lineárnym rastúcim spojitým priečnym zaťažením, musí byť zachovaný charakter priebehu tak, ako je to znázornené na obr.4.34. V niektorých prípadoch riešenej úlohy môže, ale nemusí, nastať prípad, že v istom – špecifickom – priereze p je priečna sila $T = 0$. Polohu takéhoto - **nebezpečného prierezu** - určenú súradnicou x_p určíme tak, že do funkcie priečnej sily $T(x)$ dosadíme za $x = x_p$, pričom pre známu hodnotu priečnej sily $T_p = T(x = x_p) = 0$ dostaneme

$$T_{z-k} - \frac{q}{2l} x_p^2 = 0 \Rightarrow x_p = \sqrt{\frac{2 \cdot |T_{z-k}| \cdot l}{q}}. \quad (4.18)$$

Hodnotu extrému ohybového momentu určíme dosadením $x = x_p$ do funkcie (4.17) pre M_o a platí

$$+ \curvearrowright M_{op} = M_{o(x=x_p)} = M_{oz-k} + T_{z-k} \cdot x_p - \frac{q}{6l} \cdot x_p^3 = M_{o \max}. \quad (4.19)$$

Ak je spojité lineárne zaťaženie q úseku reprezentované funkciou, ktorej *priebeh z počiatočnej hodnoty q klesá do hodnoty nulovej na konci úseku*, je výhodnejšie *začiatok lokálneho systému* zvoliť v *bode k*, zjednoduší sa tým riešenie (obr.4.35).

Funkcie popisujúce na uvažovanom úseku zmenu priečných síl vyjadríme ako

$$+ \nabla T(x) = T_{k-z} + \frac{1}{2} q(x) \cdot x = T_{k-z} + \frac{q}{2l} \cdot x^2$$

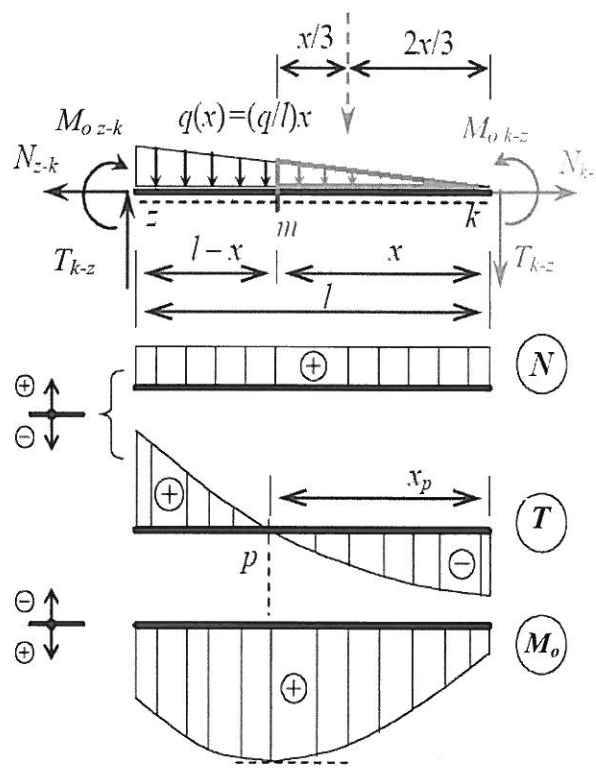
a zmenu ohybových momentov (obr.4.21b)

$$+ \curvearrowright M_o(x) = M_{ok-z} - T_{k-z} \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x$$

$$M_o(x) = M_{ok-z} - T_{k-z} \cdot x - \frac{q}{6l} \cdot x^3$$

Polohu prechodového prierezu určíme rovnako ako pre rastúce zaťaženie a analogicky platí

$$T_{k-z} - \frac{q}{2l} \cdot x_p^2 = 0 \Rightarrow x_p = \sqrt{\frac{2 \cdot |T_{k-z}| \cdot l}{q}}. \quad (4.20)$$



Obr.4.35

Príklad 4.10: Určite výpočtom veľkosť a priebehy vnútorných silových veličín na jednoducho uloženom nosníku od spojitého rovnomerného zaťaženia q (obr.4.36). Zadané: $q=2 \text{ kN.m}^{-1}$, $l=7 \text{ m}$.

Riešenie:

I. Statická určitosť: $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý problém.

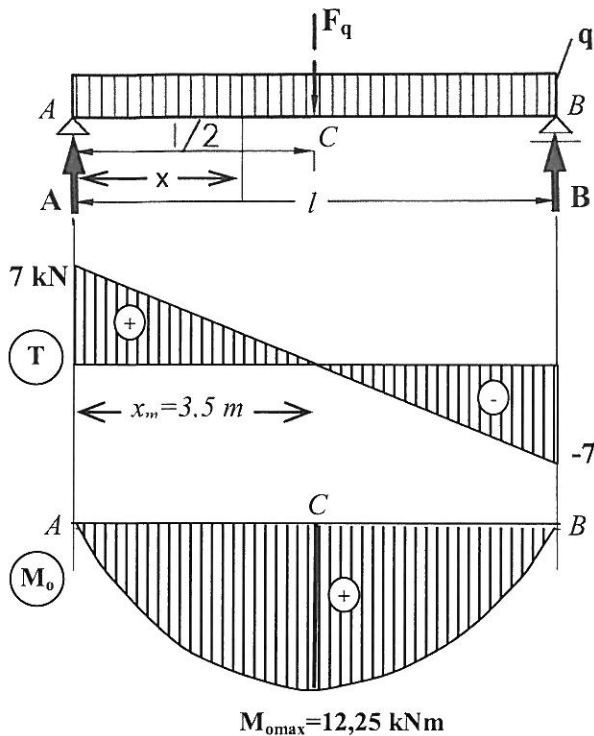
II. Väzbové reakcie: $A = B = \frac{F_q}{2} = \frac{q \cdot l}{2}$.

III. Vnútorné silové veličiny:

- Normálové sily: $N_x = 0$, sú po celej dĺžke nosníka nulové.
- Priečne sily: napr. v priereze x platí $T_x = A - q \cdot x$, pričom zmena znamienka **T** musí nastať vždy, keď pre bod x platí $A - q \cdot x = 0$.
- Ohybový moment: napr. v priereze x dostaneme $M_x = A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l \cdot x}{2} - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} \cdot (x \cdot l - x^2)$, z čoho je zrejmé, že sa bude jednať o funkciu druhého stupňa, t.j. *parabolický priebeh hodnôt M_o* .

Pre zadaný príklad platí $x_p = \frac{A}{q} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{l}{2}$ (tzn. bod C). Pre momenty vzhľadom k bodu C (stred nosníka) uvažované napr. zľava potom dostaneme

$$M_{o(x_p=C)} = M_{o \max} = A \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{l}{4} \Rightarrow M_{oC} = q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q \cdot l^2}{4} - \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{2 \cdot q \cdot l^2 - q \cdot l^2}{8} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$



Obr.4.36

Riešenie pre zadané hodnoty: $q = 2 \text{ kN/m}$, $l = 7 \text{ m}$.

I. *Náhradné bremeno:* transformácia spojitého zaťaženia na osamelú silu

$$F_q = q \cdot l = 14 \text{ kN}.$$

II. *Väzbové reakcie:* zaťaženie je súmerné a preto platí

$$A = B = \frac{F_q}{2} = \frac{q \cdot l}{2} = 7 \text{ kN}.$$

III. *Vnútorne silové veličiny:* zaťaženie je iba spojité priečne, tzn. $q = \text{konšt.}$ a preto platí

$$N = 0$$

$\Rightarrow$ konštantné po celej dĺžke nosníka

$$T = A - q \cdot x$$

$\Rightarrow$ lineárny priebeh s premennou x (Obr.4.36),

$$M_o = A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2} \cdot (x \cdot l - x^2)$$

$\Rightarrow$ kvadratický priebeh s premennou x (Obr.4.36).

Ak dosadíme za x hodnoty 0 , $l/2$, l získame hodnoty vnútorných veličín v bodoch A , B , C . Je

zrejmé, že $T=0$ je pre $x = l/2 = 3,5 \text{ m}$ a miestom pôsobenia $M_{o \max}$ je preto prierez $x_p = x_c = l/2$.

$$\text{Extrémny ohybový moment na nosníku } M_{o \max} = M_{o(x_p=l/2)} = \frac{q l^2}{8} \Rightarrow M_{o \max} = 12,25 \text{ kNm}.$$

Príklad 4.11: Zakreslite priebehy vnútorných veličín N , T , M_o na nosníku s previsnutými koncami, zaťaženom podľa obr.4.37. Zadané: $F_1 = F_3 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = F_4 = 3 \text{ kN}$, $\alpha_1 = \alpha_4 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$.

Riešenie:

I. *Statická určitosť:* $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý problém.

II. *Rozklad akčných síl do zložiek:*

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 2,0,5 = 1 \text{ kN}, \quad F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 2,0,866 = 1,732 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 3,0 = 0 \text{ kN}, \quad F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 3,1 = 3 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 2,0,707 = 1,414 \text{ kN}, \quad F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 2,0,707 = 1,414 \text{ kN}$$

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 3,0,5 = 1,5 \text{ kN}, \quad F_{4y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 3,0,866 = 2,598 \text{ kN}.$$

III. *Väzbové reakcie:*

$$\sum M_{iA} = 0: F_{1y} \cdot 1,5 - F_{2y} \cdot 1,5 - F_{3y} \cdot 3,5 + B \cdot 5 - F_{4y} \cdot 6,5 = 0 \Rightarrow B = 4,747 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iB} = 0: F_{1y} \cdot 6,5 - A_y \cdot 5 + F_{2y} \cdot 3,5 + F_{3y} \cdot 1,5 - F_{4y} \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow A_y = 3,996 \text{ kN}$$

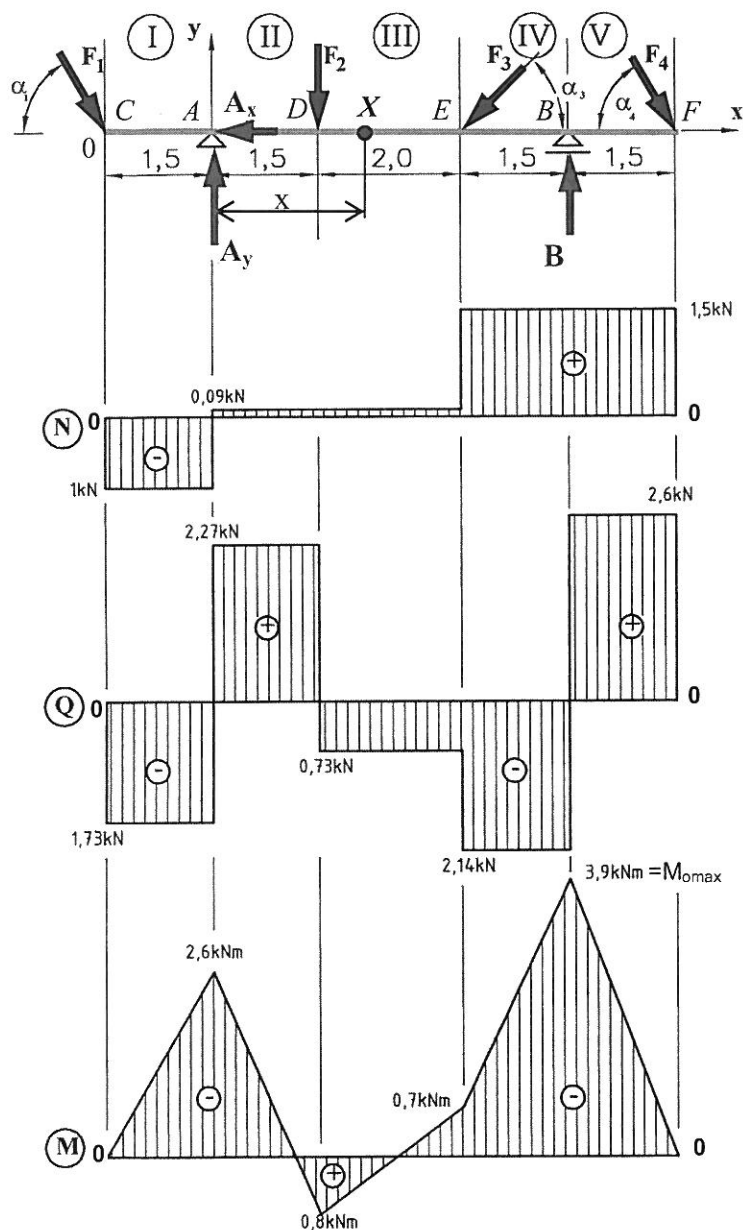
$$\sum F_{ix} = 0: F_{1x} + A_x - F_{3x} + F_{4x} = 0 \Rightarrow A_x = -1,086 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: F_{1y} - A_y + F_{2y} + F_{3y} - B + F_{4y} = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}.$$

Zvolené mierky:

$$m_L = 0,1 \text{ m.mm}^{-1}, m_F = 0,1 \text{ kN.m}^{-1}, m_M = 0,1 \text{ kNm.mm}^{-1}.$$



Obr.4.37

Výpočet vnútorných síl v jednotlivých úsekoch:

$$N_I + F_{1x} = 0 \Rightarrow N_I = -F_{1x} = \text{const} = -1 \text{ kN}$$

$$T_I + F_{1y} = 0 \Rightarrow T_I = -F_{1y} = \text{const} = -1,73 \text{ kN}$$

Úsek I:

$$M_{oI} = 0 \Rightarrow M_{oI} = -F_{1y} \cdot x = -1,73 \cdot x \Rightarrow \text{lineárna funkcia}$$

$$\Rightarrow \text{pre } x=0 \text{ (bod C): } M_{oC} = 0 \text{ kNm} \quad \text{resp.} \quad \text{pre } x=1,5 \text{ (bod A): } M_{oA} = -2,595 \text{ kNm}$$

$$N_{II} + F_{1x} + A_x = 0 \Rightarrow N_{II} = -F_{1x} - A_x = -1 + 1,086 = 0,086 \text{ kN}$$

$$T_{II} + F_{1y} - A_y = 0 \Rightarrow T_{II} = -F_{1y} + A_y = -1,73 + 3,996 = 2,266 \text{ kN}$$

Úsek II:

$$M_{oII} = 0 \Rightarrow M_{oII} = -F_{1y} \cdot (1,5 + x) + A_y \cdot x = 2,264x - 2,598 \Rightarrow \text{lineárna funkcia}$$

$$\Rightarrow \text{pre } x=0 \text{ (bod A): } M_{oA} = -2,598 \text{ kNm} \quad \text{resp.} \quad \text{pre } x=1,5 \text{ (bod D): } M_{oD} = 0,798 \text{ kNm}.$$

IV. Vnútorné sily:

Pre objasnenie postupu vyberieme jeden úsek (napr. III podľa Obr.4.37) a zvolíme miesto myšlieného rezu m (bod X). V zvolenom priereze (podľa 4.22) platí

$$N_{III} = -F_{1x} + A_x = -1 + 1,09$$

$$\Rightarrow N_{III} = 0,09 \text{ kN} - \text{konštantný priebeh}$$

$$T_{III} = -F_{1y} - F_2 + A_y = -1,732 - 3 + 4$$

$$\Rightarrow T_{III} = -0,73 \text{ kN} - \text{konštantný priebeh}$$

$$M_{oIII} = -F_{1y} \cdot (1,5 + x) + A_y \cdot x - F_2 \cdot (x - 1,5)$$

$$\Rightarrow M_{oIII} = 1,902 - 0,736 \cdot x - \text{lineárny priebeh}$$

Dosadením do určenej rovnice pre M_{oIII} , napr. za $x=1,5$ dostaneme

$$\Rightarrow M_{oD} = 0,798 \text{ kNm}$$

resp. za $x=3,5$ dostaneme

$$\Rightarrow M_{oE} = -0,674 \text{ kNm}.$$

V intervale III platí, že sily N aj T sú konštantné a teda ohybový moment M_o bude lineárnou funkciou x . Pri určovaní priebehov N , T a M_o v ďalších intervaloch nosníka postupujeme analogicky.

Poznámky:

1. V miestach pôsobenia osamelých síl sú v priebehoch N a T skoky.
2. Pre kreslenie priebehov ohybového momentu M_o určíme jeho hodnoty v bodoch $A - F$. Kladné priebehy obvykle kreslíme na stranu ťahaných vlákien, tzn. $\oplus$ pod osou, resp. $\ominus$ nad osou.
3. Priebeh síl N a T je v podstate silový obrazec rovnováhy, rozťahnutý na celú dĺžku nosníka.

$$N_{III} + F_{1x} + A_x = 0 \Rightarrow N_{III} = -F_{1x} - A_x = -1 + 1,086 = 0,086 \text{ kN}$$

$$T_{III} + F_{1y} - A_y + F_2 = 0 \Rightarrow T_{III} = -F_{1y} + A_y - F_2 = -1,73 + 3,996 - 3 = -0,734 \text{ kN}$$

Úsek III:

$$M_{o_{III}} = 0 \Rightarrow M_{o_{III}} = -F_{1y} \cdot (1,5 + x) + A_y \cdot x - F_2 \cdot (x - 1,5) = -0,736x + 1,902 \Rightarrow \text{lineárna f-cia}$$

$$\Rightarrow \text{pre } x = 1,5 \text{ (bod D): } M_{oD} = 0,798 \text{ kNm} \text{ resp. pre } x = 3,5 \text{ (bod E): } M_{oE} = -0,674 \text{ kNm}$$

$$N_V = F_{4x} = \text{const} = 1,5 \text{ kN}$$

$$T_V = F_{4y} = \text{const} = 2,598 \text{ kN}$$

Úsek V:

$$M_{o_V} = 0 \Rightarrow M_{o_V} = -F_{4y} \cdot x = -2,598 \cdot x \Rightarrow \text{lineárna funkcia}$$

$$\Rightarrow \text{pre } x = 0 \text{ (bod F): } M_{oF} = 0 \text{ kNm} \text{ resp. pre } x = 1,5 \text{ (bod B): } M_{oB} = -3,897 \text{ kNm}$$

$$N_{IV} = N_V = F_{4x} = 1,5 \text{ kN}$$

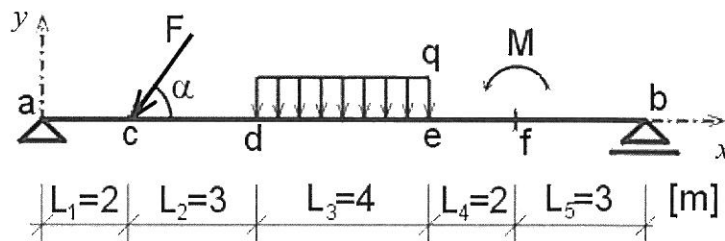
$$T_{IV} = T_V - B = 2,598 - 4,747 = -2,149 \text{ kN}$$

Úsek IV:

$$M_{o_{IV}} = 0 \Rightarrow M_{o_{IV}} = -F_{4y} \cdot (1,5 + x) + B \cdot x = 2,149x - 3,897 \Rightarrow \text{lineárna funkcia}$$

$$\Rightarrow \text{pre } x = 0 \text{ (bod B): } M_{oB} = -3,897 \text{ kNm} \text{ resp. pre } x = 1,5 \text{ (bod E): } M_{oE} = -0,6735 \text{ kNm.}$$

Příklad 4.12: Určíte vazbové reakcie, vnútorné silové účinky N , T , M_o v bode $x = (L_1 + L_2)/2$ a zakreslite ich priebehy pre nosník podľa obr.4.38. Zadané: $F = 20 \text{ kN}$, $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = 0,8$, $q = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, $M = 18 \text{ kNm}$.

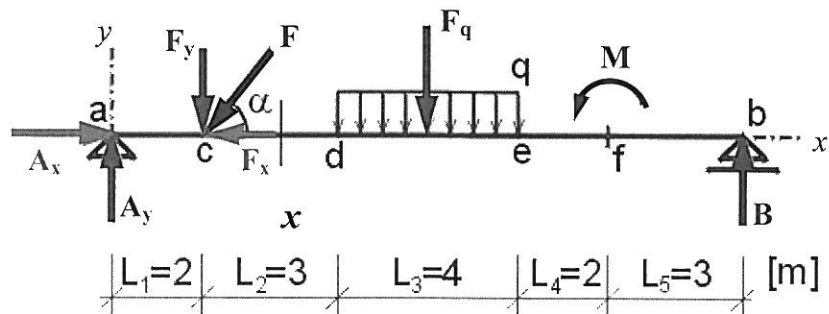


Obr. 4.38

Riešenie:

I. *Statická určitost'*: $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý problém.

II. *Väzbové reakcie*: najskôr rozložíme silu F na vodorovnú zložku F_x a zvislú zložku F_y . Spojité rovnomerné zaťaženie q medzi bodmi d , e nahradíme náhradným bremenom F_q pôsobiacim v ťažisku zaťažovacieho obrazca, t.j. v mieste $L_3/2$. Platí:



Obr.4.38 a

$$F_q = q \cdot L_3 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ kN},$$

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 12 \text{ kN}, \quad F_y = F \cdot \sin \alpha = 16 \text{ kN}.$$

Teleso uvoľníme (Obr.4.38a), tzn. nahradíme väzby (podpery) zložkami väzbových reakcií. Bod a je podopretý pevným neposuvným kĺbom (pevný kĺb) $\Rightarrow$ dve zložky reakcií, t.j. vodorovná zložka A_x a zvislá zložka A_y . Bod b je podoprený posuvne (posuvný kĺb) $\Rightarrow$ jediná zložka reakcie – zvislá sila B .

Veľkosť neznámych zložiek reakcií určíme z podmienok rovnováhy VRSS. Volíme napr. typ (1) a platí

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_y - F_q + B = 0 \Rightarrow A_y = F_y + F_q - B = 16 + 24 - 13 = 27 \text{ kN}$$

$$\sum M_{ia} = 0: -F_y \cdot L_1 - F_q \cdot (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) + M + B \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) = 0$$

$$-F_y \cdot 2 - F_q \cdot 7 + M + B \cdot 14 = 0 \Rightarrow B = \frac{F_y \cdot 2 + F_q \cdot 7 - M}{14} = \frac{16 \cdot 2 + 27 \cdot 7 - 18}{14} = 13 \text{ kN}$$

Kontrolná rovnica:

$$\sum M_{ib} = 0: -A_y \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + F_y \cdot (L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + F_q \cdot (L_5 + L_4 + \frac{L_3}{2}) + M = 0$$

$$-27 \cdot (2 + 3 + 4 + 2 + 3) + 16 \cdot (3 + 4 + 2 + 3) + 24 \cdot (3 + 2 + 2) + 18 = 0$$

$$-378 + 192 + 168 + 18 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené.}$$

III. Vnútorne silové veličiny:

a) v zadanom priereze $x = (L_1 + L_2/2)$, napr. pri postupe zľava dostaneme

$$N_x = -A_x + F_x = 0 \text{ kN},$$

$$T_x = A_y - F_y = 27 - 16 = 11 \text{ kN},$$

$$M_{ox} = A_y \cdot (L_1 + L_2/2) - F_y \cdot (L_2/2) = 27 \cdot 3,5 - 16 \cdot 1,5 = 94,5 - 24 = 70,5 \text{ kNm}$$

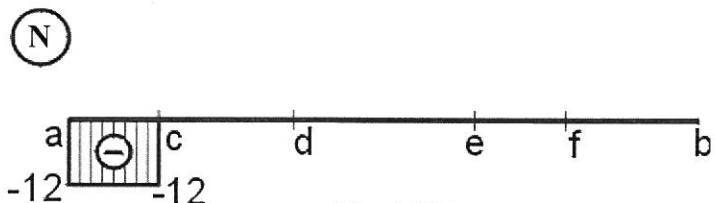
b) Priebehy vnútorných veličín N , T , M_o :

Normálové sily: (Obr.4.38b)

$$N_a = -A_x = -12 \text{ kN}$$

$$N_c^{(L)} = -A_x = -12 \text{ kN}$$

$$N_c^{(P)} = -A_x + F_x = 0 \text{ kN}$$



Posúvajúce sily: (Obr.4.38c)

$$T_a = A_y = 27 \text{ kN}$$

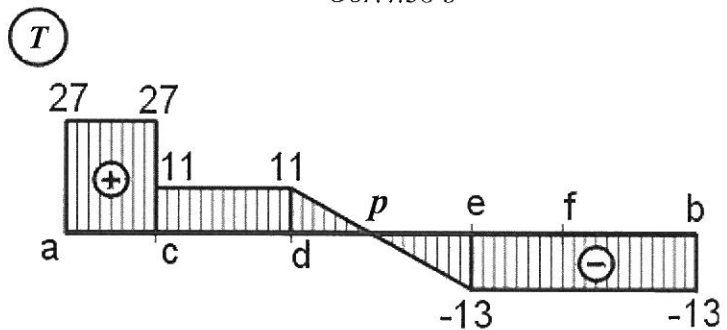
$$T_c^{(L)} = A_y = 27 \text{ kN}$$

$$T_c^{(P)} = A_y - F_y = 27 - 16 = 11 \text{ kN}$$

$$T_d^{(L)} = A_y - F_y = 11 \text{ kN}$$

$$T_e^{(L)} = A_y - F_y - F_q = -13 \text{ kN}$$

$$T_b = -B = -13 \text{ kN}$$



Obr.4.38 c

Nebezpečný prierez: (obr.4.38c)

$$p = \frac{T_d}{q} = \frac{11}{6} = 1,833 \text{ m} \quad \text{resp.} \quad p' = \frac{T_e}{q} = \frac{-13}{6} = -2,166 \text{ m}.$$

$$\text{Skúška: } L_3 = p + p' = 1,833 + 2,166 = 4 \text{ m}.$$

Ohybové momenty: (Obr.4.38d)

$$M_a = 0 \text{ kNm}$$

$$M_c = A_y \cdot L_1 = 27.2 = 54 \text{ kNm}$$

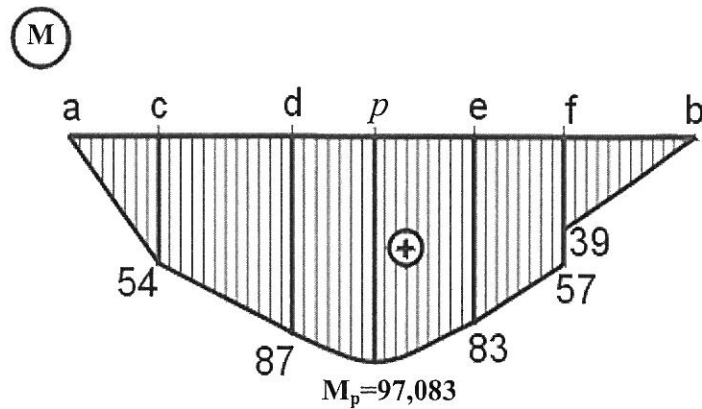
$$M_d = A_y \cdot (L_1 + L_2) - F_y \cdot L_2 = 27.5 - 16.3 = 87 \text{ kNm}$$

$$M_b = 0 \text{ kNm}$$

$$M_f^{(P)} = B \cdot L_5 = 13.3 = 39 \text{ kNm}$$

$$M_f^{(L)} = B \cdot L_5 + M = 13.3 + 18 = 57 \text{ kNm}$$

$$M_e = B \cdot (L_4 + L_5) + M = 13.5 + 18 = 83 \text{ kNm}$$



Obr.4.38 d

Maximálny moment v nebezpečnom priereze p: (Obr.4.38d)

$$M_p = A_y \cdot (L_1 + L_2 + p) - F_y \cdot (L_2 + p) - q \cdot p \cdot \frac{p}{2} = 27.6,83 - 16.4,83 - 6.1,83 \cdot \frac{1,83}{2} = 97,083 \text{ kNm}.$$

Príklad 4.13: Určite väzbové reakcie a vnútorné silové účinky na konzolovom nosníku (obr.4.39). Zadané: $F = 30 \text{ kN}$, $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \alpha = 0,8$, $M = 50 \text{ kNm}$, $q = 9 \text{ kNm-l}$.

Riešenie:

I. Statická určitost':

$n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý problém.

II. Väzbové reakcie:

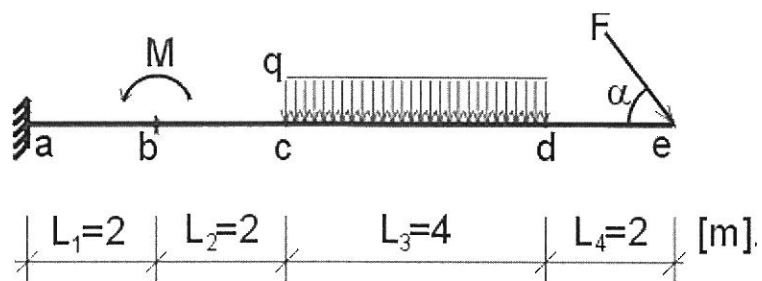
- náhradné bremeno F_q

$$F_q = q \cdot L_3 = 9 \cdot 4 = 36 \text{ kN}$$

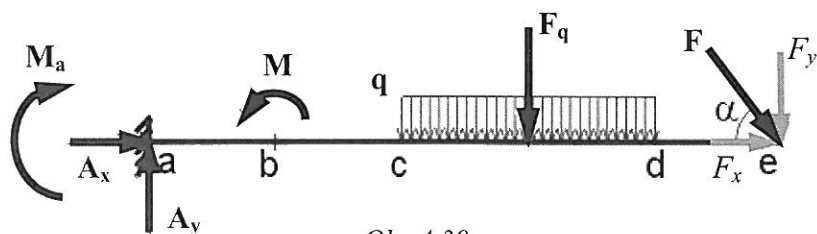
- rozklad sily F na zložky (Obr.4.39a):

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 30 \cdot 0,6 = 18 \text{ kN}$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 30 \cdot 0,8 = 24 \text{ kN}$$



Obr. 4.39



Obr.4.39 a

$$\sum F_{ix} = 0: A_x + F_x = 0 \Rightarrow A_x = -F_x \Rightarrow A_x = -18 \text{ kN}$$

- nesprávne zvolený smer reakcie

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_q - F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_q + F_y = 36 + 24 \Rightarrow A_y = 60 \text{ kN}$$

- smer reakcie zvolený správne

$$\sum M_{ia} = 0: -M_a + M - F_q \cdot (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) - F_y \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 0$$

- smer otáčania zvolený nesprávne

$$M_a = M - F_q \cdot (L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) - F_y \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) \Rightarrow M_a = -406 \text{ kNm}$$

$$\text{Kontrolná rovnica: } \sum M_{ic} = 0: -M_a - A_y \cdot (L_1 + L_2) + M - F_q \cdot \frac{L_3}{2} - F_y \cdot (L_3 + L_4) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ - splnené.}$$

III. Vnútročné silové veličiny: (Obr.4.39b)

• **Osové (normálové) sily N :** v smere osi nosníka pôsobia iba zložky A_x a F_x na koncoch nosníka $\Rightarrow$ priebeh normálových síl bude po celej dĺžke konštantný a bude mať veľkosť

$$N_a = N_b = N_c = N_d = -A_x = 18 \text{ kN}$$

$$N_e = F_x = 18 \text{ kN}.$$

• **Priečne (tangenciálne) sily T :**

tangenciálne sily vyvodzuje zaťaženie, pôsobiace kolmo na os nosníka (zložky A_y , F_y a spojité priečne zaťaženie q nahradené náhradným bremenom F_q). Z charakteru zaťaženia je zrejmé, že priebeh T medzi bodmi a, c a d, e bude konštantný, medzi bodmi c, d bude lineárny. Hodnoty priečnej sily T v charakteristických bodoch nosníka:

$$T_a = T_b = T_c = A_y = 60 \text{ kN}$$

$$T_d = A_y - F_q = 60 - 36 = 24 \text{ kN}$$

$$T_e = F_y = 24 \text{ kN}.$$

• **Ohybové momenty M_o :** dokážu u konzolového nosníka vyvodit' iba priečne zaťaženia (t.j. iba zaťaženia v smere osi y).

Pri postupe napr. zľava dostaneme:

$$M_{oa} = M_a = -406 \text{ kNm}$$

$$M_{ob}^{(L)} = M_a + A_y \cdot L_1 = -406 + 60 \cdot 2 = -286 \text{ kNm}.$$

V bode b pôsobí osamelý moment M a preto pri postupe sprava platí

$$M_{ob}^{(P)} = M_a + A_y \cdot L_1 - M$$

$$M_{ob}^{(P)} = -406 + 60 \cdot 2 - 50 = -336 \text{ kNm}.$$

Ďalej budeme vo výpočte vnútorných silových veličín postupovať už z pravej strany nosníka a platí

$$M_{oe} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{od} = -F_y \cdot L_4$$

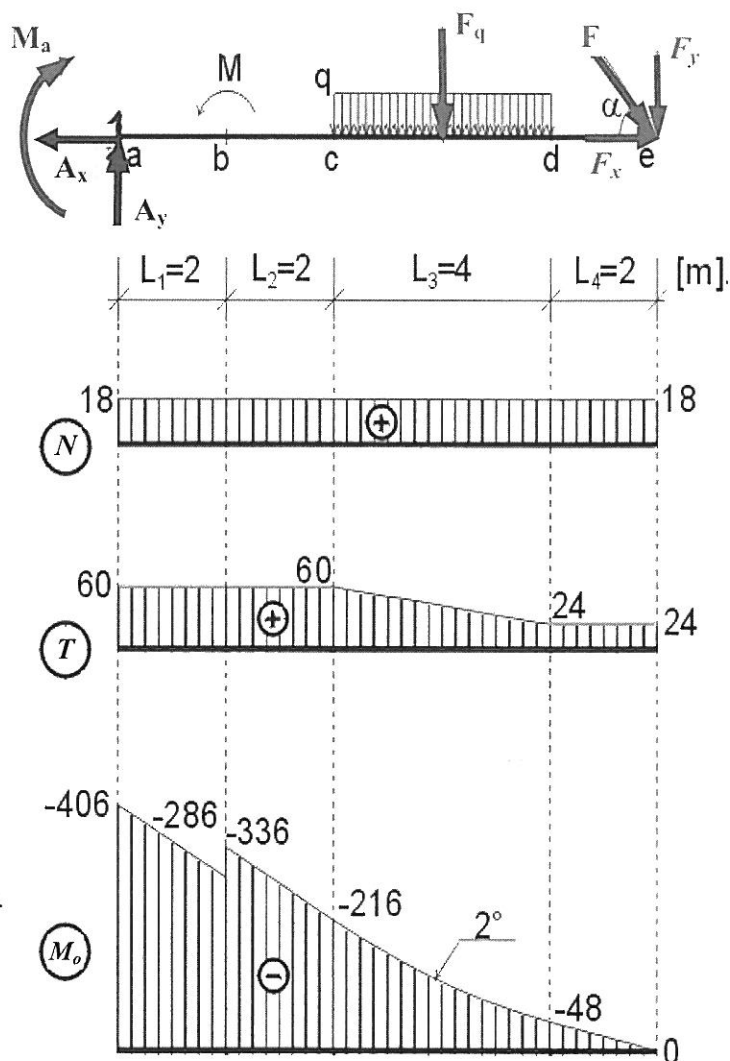
$$M_d = -24 \cdot 2 = -48 \text{ kNm}$$

$$M_{oc} = -F_y \cdot (L_3 + L_4) - F_q \cdot \frac{L_3}{2}$$

$$M_{oc} = -24 \cdot 6 - 36 \cdot 2 = -216 \text{ kNm}.$$

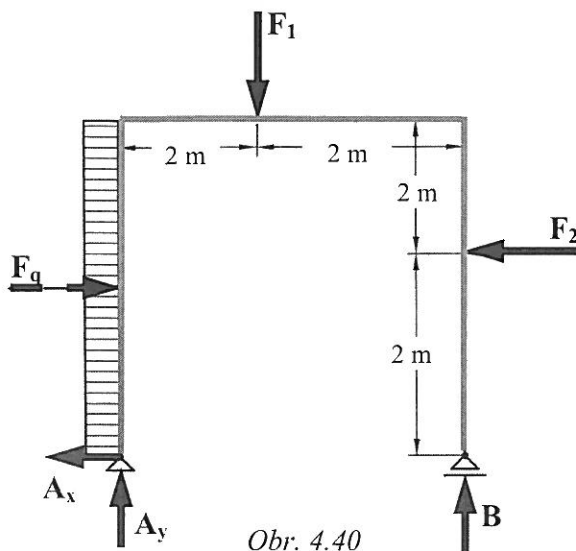
Zistené priebehy vnútorných silových veličín sú uvedené na obr. 4.39b. Podľa Schwedler-Žuravského viet, súvisí charakter priebehu ohybového momentu M_o s charakterom vonkajšieho zaťaženia a priebehom priečných síl T . Znamená to, že ak máme vykreslené priebehy priečnej sily T , môžeme určiť aj charakter priebehu ohybových momentov M_o .

Napr. medzi bodmi a, c a d, e je sila $T = \text{konšt.} \Rightarrow$ priebeh ohybového momentu M_o bude lineárny. V bode b pôsobí akčný moment M , preto v tomto mieste bude v priebehu ohybového momentu M_o nespojitost' (skok). Medzi bodmi c, d je priebeh T lineárny a preto bude mať v tomto úseku priebeh ohybového momentu M_o charakter funkcie 2.stupňa (t.j. parabola). To sme aj v zistených priebehoch preukázali.



Obr.4.39 b

Príklad 4.14: Určite priebehy N , T , M_o na pravouhlom rovinnom ráme. Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $q = 1 \text{ kN.m}^{-1}$. Tvar a rozmery rámu podľa obr.4.40. Mierka dĺžok : $m_F = 0,1 \text{ m.mm}^{-1}$.



Obr. 4.40

Riešenie:

I. Statická určitost': $n = 3 - 3 = 0^\circ V$ – staticky určitý.

II. Väzbové reakcie: $F_q = q \cdot l \Rightarrow F_q = 4 \text{ kN}$

$$\sum M_{iA} = 0 : -F_q \cdot 2 - F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + B \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow B = 1,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iB} = 0 : -A_y \cdot 4 - F_q \cdot 2 + F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0 : -A_x + F_q - F_2 = 0$$

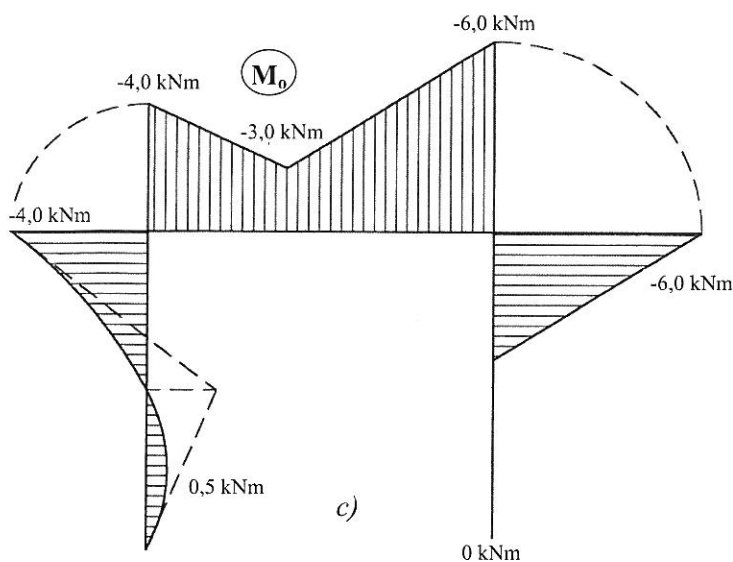
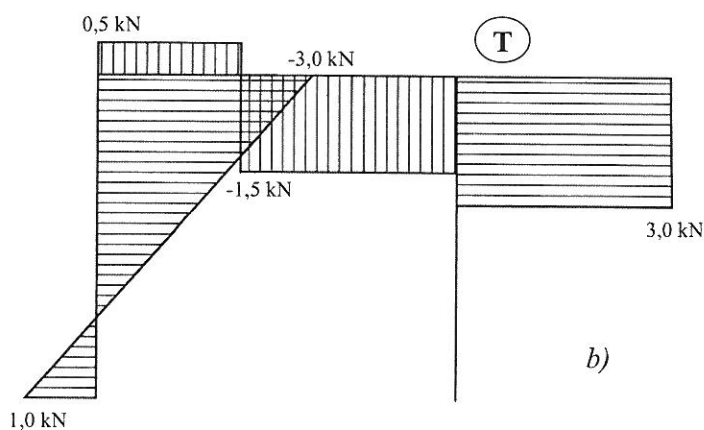
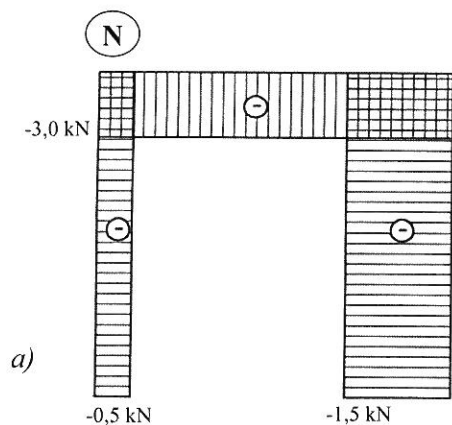
$$\Rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka

$$\sum F_{iy} = 0 : -A_y + F_1 - B = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené.}$$

III. Vnútročné silové veličiny:

Obrazce priebehov N , T , M_o na rámoch sa tiež kreslia do troch samostatných diagramov (obr.4.40 a,b,c). Ohybové momenty kreslíme opäť na stranu ťahaných vlákien.



Obr.4.40 a,b,c

Poznámky k riešeniu:

1. V pravouhlých rámoch platí, že pri prechode z jednej časti rámu na inú, dochádza k transformácii osových síl N na sily priečne T a naopak.

2. V pravouhlých rámoch majú ohybové momenty M_o v mieste prechodu z jednej časti rámu na druhú vždy na oboch častiach rámu rovnakú hodnotu.

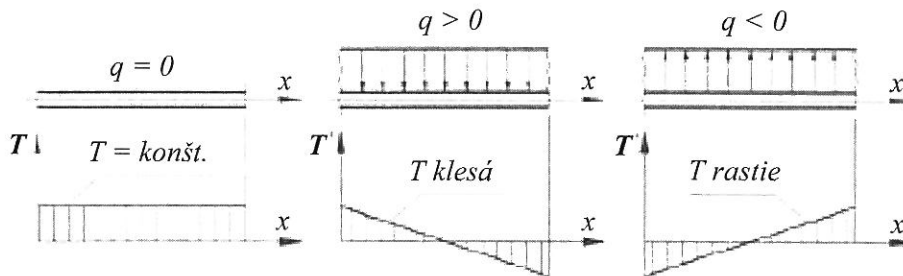
3. U rámových konštrukcií je vhodné priebeh vnútorných silových veličín N , T , M_o určovať najskôr pre jednu časť rámu (ako priamy nosník) a potom pokračovať na ďalšej časti, znova riešenej ako priamy nosník.

4.3.4. Závěrečné poznámky k analýze vnútorných síl

Už vieme, že Schwedler - Žuravského vety (4.8) a (4.9) sú dôležité poznatky pre určovanie priebehov priečnej sily T a ohybového momentu M_o , ako aj pre kontrolu správnosti funkcie, popisujúcej ich priebehy.

Podľa 1.S-Ž vety (4.8) v tvare $dT(x)/dx = -q(x)$ predstavuje spojité zaťaženie $q(x)$ zápornú hodnotu prvej derivácie posúvajúcej sily $T(x)$. Ak na určitom úseku platí (Obr.4.41):

- $q = 0 \Rightarrow$ posúvajúca sila bude na tomto úseku konštantná. Ak $q=0$ potom $T(x)=\text{konšt.}$
- $q > 0 \Rightarrow$ (q je orientované dolu), na úseku je $T'(x)<0$. Ak $q>0$ potom $T(x)$ má klesajúci priebeh.
- $q < 0 \Rightarrow$ (q je orientované nahor), posúvajúca sila narastá. Ak $q<0$, potom $T(x)$ má stúpajúci priebeh.



Obr.4.41

Podľa 2.S-Ž vety (4.9), definovanej v tvare $dM_o(x)/dx = T(x)$ je zrejmé, že sila $T(x)$ je prvou deriváciou $M_o(x)$. Znamená to, že ak poznáme funkciu vyjadrujúcu priebeh $M_o(x)$ môžeme ju využiť pre určenie funkcie priebehu priečných síl $T(x)$ po celej dĺžke nosníka. Ak platí:

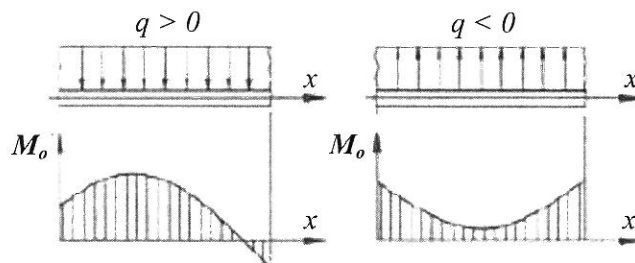
- $T(x) > 0 \Rightarrow$ hodnota $M_o(x)$ rastie.
- $T(x) < 0 \Rightarrow$ priebeh $M_o(x)$ klesá.
- $T(x) = 0 \Rightarrow$ v mieste, v ktorom je $T(x)=0$, dosahuje ohybový moment M_o extrémnu hodnotu - $M_{o \max}$, t.j. lokálne maximum alebo minimum a toto miesto nazývame **prechodový (nebezpečný) prierez**.

Ak do 2.S-Ž vety dosadíme za $T(x)$ z 1.S-Ž vety dostaneme vzťah

$$-q = \frac{d^2 M_o}{dx^2}, \quad (4.21)$$

ktorý znamená, že $q(x)$ predstavuje zápornú hodnotu druhej derivácie $M_o(x)$. Znamená to, že pri:

- kladnom q t.j. ak $q>0$ je $M_o''(x)<0$ a krivka priebehu $M_o(x)$ je konkávna,
- zápornom q , t.j. ak platí $q<0$ je $M_o''(x)>0$ a krivka $M_o(x)$ je konvexná (Obr.4.42).



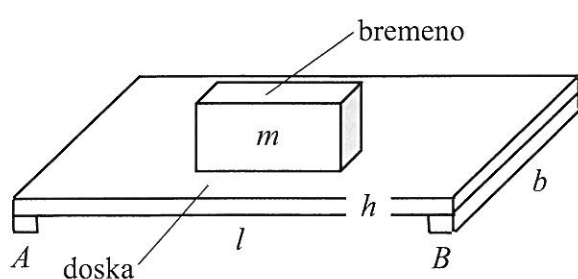
Obr.4.42

Je nutné však pripomenúť, že všetky uvedené úvahy platia iba v prípade, ak postupujeme zľava doprava. Pri opačnom postupe sa v rovniciach pre S-Ž vety menia znamienka, rovnica (4.21) sa nemení. Je nutné si tiež uvedomiť, že S-Ž vety platia iba pre úseky na nosníkoch. Neplatia v miestach pôsobenia osamelých síl alebo silových dvojíc, pretože v takýchto „kvázi úsekoch“ s dĺžkou blízkou nule, nastávajú v priebehoch vnútorných silových veličín T a M_o nespojitosti, obvykle vo forme zlomov (Obr.4.28) alebo skokov (Obr.4.29).

Je zrejmé, že s narastajúcou zložitou analyzovaných telies a sústav telies je aj realizácia statických výpočtov náročnejšia. Z uvedeného dôvodu bolo doteraz vyvinuté množstvo softvérových nástrojov, umožňujúcich základné statické výpočty, ako aj riešenie vnútorných silových účinkov, vykresľovanie ich priebehov, ako aj určovanie kritických miest na konštrukcii. Medzi najznámejšie softvérové riešenia patria produkty, ako napr. SCIA Engineer, ALGOR, CADKON, NEXIS, DFEM4, SolidWorks a mnoho ďalších.

Pre ilustráciu uvedieme príklad, v ktorom sú pre porovnanie výsledkov z ručného riešenia rovnováhy vonkajších aj vnútorných silových účinkov, pôsobiach na betónovú dosku, zaťaženú náhodným úžitkovým zaťažením, uvedené aj výsledky získané prostredníctvom študentskej licencie softvéru SCIA Engineer.

Príklad 4.15: Určite veľkosť väzbových reakcií v miestach styku železobetónovej dosky s podlahou a priebeh vnútorných silových účinkov v doske od jej zaťaženia. Na dosku pôsobí sila od vlastnej tiaže a od bremena s hmotnosťou m (Obr.4.43). Zadané: $m=210\text{ kg}$, $l=3\text{ m}$, $b=0,8\text{ m}$, $h=5\text{ cm}$, $\rho_{\text{beton}}=2500\text{ kg.m}^{-3}$.



Obr.4.43

Riešenie

1. Analýza a definovanie zaťaženia:

Na dosku pôsobí zaťaženie od:

- bremena $\Rightarrow$ sila F
- vlastnej tiaže dosky $\Rightarrow$ spojité zaťaženie q

a) zaťaženie od bremena – osamelá sila F

$$F = m \cdot g = 210\text{ kg} \cdot 10\text{ m.s}^{-2} \Rightarrow F = 2100\text{ N}$$

b) zaťaženie od hmotnosti dosky – spojitě rozložené priečne zaťaženie q

Dosku môžeme idealizovať na prútový prvok - nosník, keďže jej dĺžkový rozmer l je výrazne väčší ako hrúbka dosky h . U nosníkov (keďže uvažujeme iba s jeho dĺžkou a nie prierezom) počítame so spojitým zaťažením líniovým q^{1D} , ktoré je uvažované ako spojité zaťaženie pripadajúce na bežný meter $[\text{kN.m}^{-1}]$.

Keďže hodnotu q^{1D} nepoznáme, musíme najskôr spočítať veľkosť tiaže pripadajúcu na plochu q^{2D} (obvykle 1 m^2 a preto jednotka $[\text{kN.m}^{-2}]$). K tomu však potrebujeme poznať objemovú tiaž materiálu dosky q^{3D} $[\text{kN.m}^{-3}]$, ktorú buď pre zadaný materiál dosky vyhladáme v tabuľkách alebo určíme ako súčin hustoty materiálu ρ (objemová hmotnosť) a gravitačného zrýchlenia g . Pre materiál dosky - betón - dostaneme

$$q^{3D} = \rho \cdot g = 2500\text{ kg.m}^{-3} \cdot 10\text{ m.s}^{-2} \Rightarrow q^{3D} = 25000\text{ N.m}^{-3} = 25\text{ kN.m}^{-3}.$$

Tiaž dosky na plochu 1 m^2 – plošná tiaž - získame ako súčin (4.1) objemovej tiaže a hrúbky dosky

$$q^{2D} = q^{3D} \cdot h = 25\text{ kN.m}^{-3} \cdot 0,05\text{ m} \Rightarrow q^{2D} = 1,25\text{ kN.m}^{-2}.$$

Požadujeme však hodnotu spojitého zaťaženia pripadajúceho na 1 dĺžkový meter a preto podľa (4.1) pre spojité líniové zaťaženie dosky dostaneme $q = q^{1D} = q^{2D} \cdot b = 1,25\text{ kN.m}^{-2} \cdot 0,8\text{ m} \Rightarrow q^{1D} = 1\text{ kN.m}^{-1}$

Je možný aj iný – z fyziky známejší - postup:

- objem dosky: $V = b \cdot h \cdot l = 0,8 \cdot 0,05 \cdot 3 \Rightarrow V = 0,12\text{ m}^3$
- hmotnosť dosky: $m_d = \rho \cdot V = 2500\text{ kg.m}^{-3} \cdot 0,12\text{ m}^3 \Rightarrow m_d = 300\text{ kg}$
- sila tiaže dosky: $G_d = m \cdot g = 300\text{ kg} \cdot 10\text{ m.s}^{-2} \Rightarrow G_d = 3000\text{ N}.$

Ak silu G_d podelíme dĺžkou dosky l získame spojité líniové zaťaženie, pripadajúce na 1 m dĺžky dostaneme

$$q = \frac{G_d}{l} = \frac{3000}{3} \Rightarrow q = 1000\text{ N.m}^{-1}.$$

2. Uvoľnenie telesa, statická určitosť:

Z analýzy väzieb (Obr.4.43a) je zrejmé, že horizontálne reakcie v bodoch A a B budú s ohľadom na charakter zaťaženia nulové. Pre určenie väzbových reakcií preto vystačíme iba s 2 rovnicami rovnováhy.

3. Výpočet väzbových reakcií: (Obr.4.43 a)

$$F_q = l \cdot q = 3 \cdot 1 = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0: -F \cdot \frac{l}{2} - F_q \cdot \frac{l}{2} + B \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{F + F_q}{2} = \frac{2,1 + 3,0}{2} \Rightarrow B = 2,55 \text{ kN}.$$

$$\sum M_{iB} = 0: F \cdot \frac{l}{2} + F_q \cdot \frac{l}{2} - A \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{F + F_q}{2} = \frac{2,1 + 3,0}{2} \Rightarrow A = 2,55 \text{ kN}.$$

Kontrolná podmienka: $\sum F_{iy} = 0: F + F_q - B - A = 0 \Rightarrow 2,1 + 3 - 2,55 - 2,55 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ - splnené!

4. Výpočet vnútorných silových účinkov:

- **Normálové sily:** po celej dĺžke nosníka nulové.

- **Ohybové momenty:**

- moment k bodom A, B (miesto podopretia):

$$M_{oA} = M_{oB} = 0 \text{ kNm}$$

- moment k bodu C (miesto pôsobenia sily F)

môžeme určovať dvomi spôsobmi:

1. *superpozíciou*: moment od osamelej sily F + moment od spojitého zaťaženia q a platí

$$M_{oc} = M_F + M_q = \frac{F \cdot l}{4} + \frac{1}{8} q \cdot l^2 = M_{o \max}$$

$$M_{oc} = \frac{2,1 \cdot 3}{4} + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 3^2 \Rightarrow M_{oc} = 2,7 \text{ kNm} = M_{o \max}.$$

2. *momenty od oboch zaťažení naraz* a platí:

$$M_{oc} = A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 2,55 \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = M_{o \max}$$

$$M_{oc} = 2,7 \text{ kNm} = M_{o \max}.$$

- **Posúvajúce sily:**

$$T_A^{(L)} = 0, T_A^{(P)} = A = 2,55 \text{ kN},$$

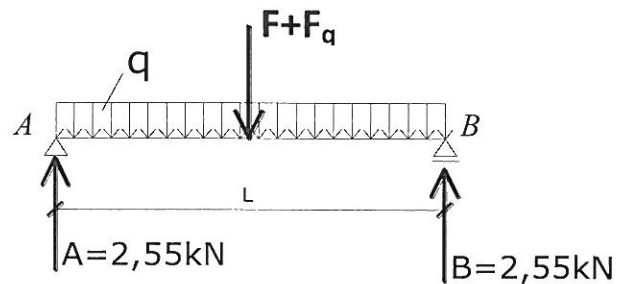
$$T_C^{(L)} = A - q \cdot \frac{l}{2} = 2,55 - 1 \cdot \frac{3}{2} = 1,05 \text{ kN},$$

$$T_C^{(P)} = -B + q \cdot \frac{l}{2} = -2,55 + 1 \cdot \frac{3}{2} = -1,05 \text{ kN},$$

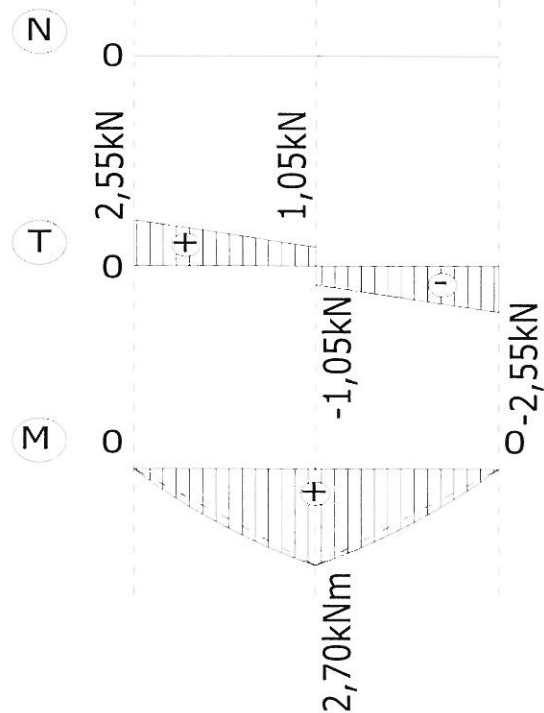
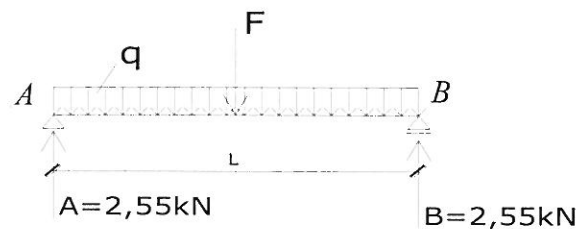
$$T_B^{(P)} = 0,$$

$$T_B^{(L)} = A - q \cdot l - F = 2,55 - 1 \cdot 3 - 2,1 = -2,55 \text{ kN} \text{ alebo } T_B^{(L)} = B = 2,55 \text{ kN},$$

$$T_{\max} = T_A = 2,55 \text{ kN}.$$



Obr. 4.43 a



Obr. 4.43 b

Na Obr.4.43b je uvedený výstup z aplikácie softvérového nástroja SCIA Engineer, ako jedného z vhodných nástrojov pre realizáciu statickej analýzy prvkov nosných konštrukcií. Odporúčame sa v prípade záujmu o predmetnú problematiku s týmto produktom a jeho funkcionalitami zoznámiť bližšie. Odkaz [<http://nemetschek-scia.com/sk/software-scia-engineer-pre-studentov-ucitelov>].

Z priebehov vnútorných síl vidíme, že od zaťaženia dosky (pôsobenie bremena F a vlastná tiaž dosky F_q) pôsobia na betónovú dosku ako ohybové momenty M_o , tzn. doska je *namáhaná ohybom*, tak aj priečne sily T , tzn. betónová doska je namáhaná aj tzv. *šmykom*. Uvedenými druhmi namáhania a ich charakteristikou sa však budeme bližšie zaoberať až v ďalšej časti predmetu, venovanej objasneniu základov mechaniky poddajných telies, známej pod názvom náuka o pevnosti a pružnosti.

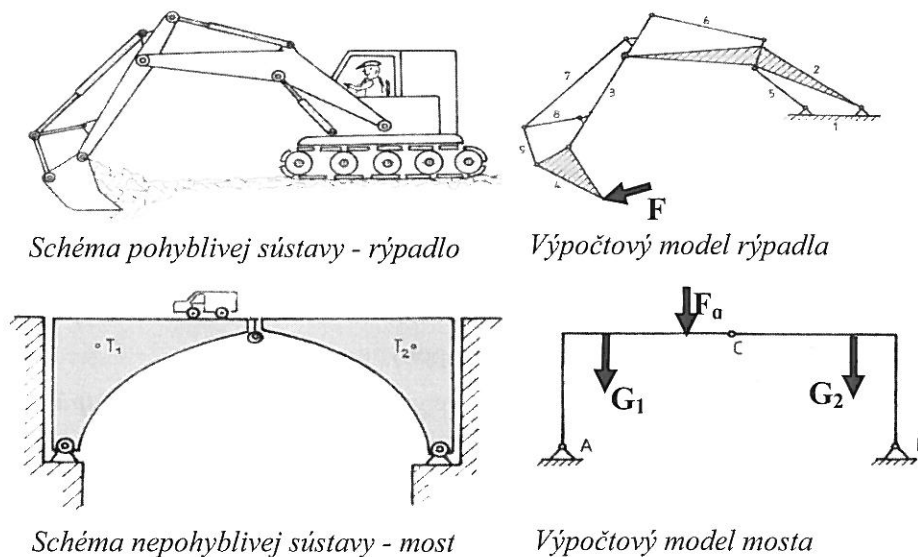
Kontrolné otázky:

1. Charakterizujte pojem nosná konštrukcia a uveďte hlavné typy prvkov, z ktorých pozostáva ich mechanický model.
2. Definujte pojem nosník, uveďte základné typy nosníkov a ich charakteristické odlišnosti, uveďte príklady z praxe.
3. Objasnite spôsob transformácie zaťaženia nosníka z jeho povrchu do jeho strednice a najčastejšie sa vyskytujúce typy väzieb, používaných u nosníkov.
4. Uveďte základné typy zaťaženia nosníkov v praxi a objasnite spojité priečne zaťaženie líniové, plošné a objemové a uveďte transformačné vzťahy medzi nimi.
5. Objasnite metodiku riešenia úloh rovnováhy síl na nosníkoch a uveďte základné typy rovnovážnych rovníc a im prislúchajúci tvar rovnice kontrolnej.
6. Charakterizujte spôsob riešenia nosníkov s vloženým kĺbom, objasnite možné prístupy a ich podstatu.
7. Definujte pojem vnútorné silové veličiny, uveďte, prečo je potrebné ich vyriešenie a ako ich dokážeme určiť.
8. Objasnite podstatu metódy mysleného rezu a aké silové veličiny určujeme na nosníkoch, charakterizujte ich.
9. Uveďte charakteristiku jednotlivých vnútorných silových veličín a spôsob ich určenia,
10. Definujte znamienkovú konvenciu pre zmysel vnútorných veličín na ľavej časti, myslene rozdeleného nosníka.
11. Objasnite základné závislosti medzi q , T a M_o . Uveďte Schwedler-Žuravského vety a ich praktický význam.
12. Graficky znázornite závislosti medzi veličinami q , T a M_o a objasnite ich.
13. Charakterizujte pojem prechodový (nebezpečný) prierez a uveďte možnosti jeho určenia a význam pre prax.
14. Objasnite závislosť medzi vnútornými veličinami v bode, v ktorom pôsobí iba osamelá sila, zakresliť priebehy.
15. Objasnite závislosť medzi vnútornými veličinami v bode, v ktorom pôsobí iba osamelý moment, priebehy.
16. Objasnite závislosť medzi vnútornými veličinami na nezaťaženom úseku nosníka, zakreslite priebehy.
17. Objasnite závislosť medzi vnútornými veličinami na úseku zaťaženom spojitým rovnomerným zaťažením.
18. Objasnite závislosť medzi vnútornými veličinami na úseku zaťaženom spojitým nerovnomerným zaťažením.
19. Definujte možnosti určovania nebezpečného prierezu na jednotlivých charakteristických úsekoch nosníka
20. Uveďte priebehy priečnej sily T a ohybového momentu M_o na nosníkoch pre prípad $q=0$, $q>0$, $q<0$ a objasnite ich.

5. ROVINNÉ SÚSTAVY TELIES

Rovinné sústavy telies sú mechanické sústavy, tvorené navzájom pohyblivo spojenými telesami, t.j. s možným vzájomným relatívnym pohybom. Zaťaženie (primárne sily a väzbové reakcie), ako aj väzby medzi telesami sú realizované tak, že silové účinky pôsobiace na sústavu telies vytvárajú rovinnú sústavu síl. Znamená to, že spojenie telies umožňuje ich vzájomný pohyb iba v rovinách rovnobežných s jedinou referenčnou rovinou. V sústavách telies je obvykle jedno alebo viac telies pevne spojených (uchytené, podopreté) s okolím a nazývame ho **rám**. Reakčné sily medzi telesami sústavy a rámom sú **vonkajšie väzbové reakcie**, sily vo väzbách medzi telesami sústavy navzájom sú **vnútorné väzbové reakcie**.

V mechanike telies rozoznávame vo všeobecnosti sústavu telies **nepohyblivé** alebo **pohyblivé**, tzv. mechanizmy (obr.5.1). Cieľom ich statického riešenia je určenie veľkosti, smeru a zmyslu vonkajších a vnútorných väzbových reakcií. U pohyblivých sústav je navyše potrebné určiť aj tzv. **prídavné vonkajšie silové účinky**, nutné pre zaistenie rovnováhy sústavy, t.j. pre obmedzenie ich neželaného pohybu.



Obr. 5.1

Pri statickej analýze sústav telies sú skutočné tvary a prierezy telies sústavy nepodstatné. S výhodou to využívame pri definovaní zjednodušených výpočtových modelov telies a ich vzájomných väzieb, ktoré v mechanike nazývame **kinematické dvojice**. Rovinná kinematická dvojica je tvorená 2 prvkami (i, j), v ktorých dochádza ku styku dvoch telies a ktorá svojim usporiadaním vymedzuje ich vzájomný pohyb v rovine. V oblasti aplikácie sústav telies sa najčastejšie vyskytujú kinematické dvojice podľa Tab.5.1.

Základné kinematické dvojice v technickej mechanike

Tabuľka 5.1

Kinematické dvojice			
$n_0 = 2^\circ V$			$n_0 = 1^\circ V$
Kĺbová (rotačná) väzba	Posuvná (translačná) väzba	Valivá väzba	Všeobecná väzba

5.1. Základná úloha riešenia sústav telies, statická určitosť

Analogicky s riešením rovnováhy síl na jednom telese aj pre sústavy telies platí, že sústava telies ako celok je v stave statickej rovnováhy iba vtedy, ak je v rovnováhe každý jej prvok. Znamená to, že ak má byť sústava telies v pokoji, musí byť v pokoji aj každá jej časť a preto silové účinky, pôsobiace na jednotlivé telesá sústavy musia byť v rovnováhe. Ak je zaťaženie a uloženie sústavy telies definované iba v miestach spojenia telies – tzv. uzloch – budú prvky sústavy telies namáhané iba osovou silou. V takomto prípade bude každý uzol predstavovať usporiadanie síl ako *rovinného zväzku síl* a preto v prípade rovinnnej sústavy telies musí byť pre u uzlov splnených celkom $2u$ rovnovážnych rovníc typu

$$\sum_{i=1}^u F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^u F_{iy} = 0. \quad (5.1)$$

V rovniciach (5.1) sú už zahrnuté aj 3 podmienky rovnováhy vonkajších síl pôsobiacich na sústavu telies, potrebné pre určenie vonkajších väzbových reakcií. Voľných rovnovážnych rovníc, zostávajúcich k výpočtu veľkosti a zmyslu vnútorných väzbových reakcií, ako silových účinkov pôsobiacich v telesách sústavy, máme preto k dispozícii už iba $2u - 3$.

Základnou úlohou riešenia sústav telies je určenie veľkosti a zmyslu neznámych silových účinkov, vznikajúcich v jednotlivých prvkoch mechanického modelu sústavy telies.

Aby bolo možné veľkosť a zmysel silových účinkov v zaťaženej sústave telies, charakterizovanej sústavou $2u$ rovníc rovnováhy, určovať metódami statiky, musí byť sústava telies tzv. **staticky**, ale aj **tvarovo určitá**. Statickú riešiteľnosť môžeme posudzovať napr. podľa Čebyševovho kritéria v tvare

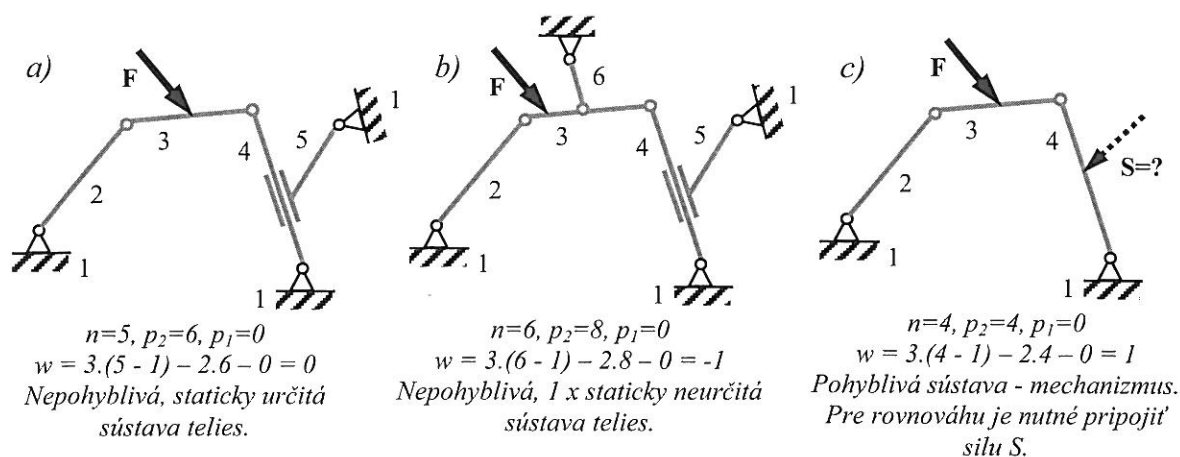
$$w = n_v \cdot (n - 1) - n_o = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_2 - p_1 \quad (5.2)$$

kde n je počet telies v sústave, vrátane pevného rámu, n_v je počet stupňov voľnosti voľného hmotného objektu (v rovine $n_v = 3^\circ V$) a n_o je počet stupňov voľnosti odobratých použitými väzbami, p_2 je počet neznámych parametrov väzbových síl vo väzbách odoberajúcich $2^\circ V$ pohybu a p_1 je počet neznámych parametrov väzbových síl vo väzbách odoberajúcich $1^\circ V$ pohybu.

Hodnota kritéria w u nepohyblivej sústavy telies reprezentuje jej tzv. **počet stupňov voľnosti**, resp. u mechanizmov predstavuje tzv. **stupeň premenlivosti** pohyblivej sústavy. Pri splnení rovnice (5.2) je splnená podmienka tvarovej, ale aj statickej určitosti sústavy telies. Kritérium w môže nadobudnúť hodnoty:

- $w = 0$ - sústava je nepohyblivá, staticky určitá.
- $w < 0$ - sústava je nepohyblivá, ale staticky neurčitá.
- $w > 0$ - sústava je pohyblivá a staticky preurčená – jedná sa o mechanizmus.

Príklady na jednotlivé prípady Čebyševovho kritéria statickej určitosti sú uvedené na obr.5.2.



Obr. 5.2

V statike dokážeme bez problémov vyriešiť iba prípad $w = 0$. Pre $w < 0$ je nutné použitie vhodnej deformačnej podmienky. V prípade $w > 0$ musíme doplniť ďalšie – tzv. prídavné – silové účinky tak, aby bola sústava telies v zadanej polohe v pokoji (silové účinky sa uvedú do rovnováhy). Napríklad, podľa Obr.5.2c, by pre prípad $w = 1$ bolo pre rovnováhu síl nutné pripojiť ďalšiu silu S , potrebnú pre zaistenie nepohyblivosti sústavy telies. Zvolený spôsob riešenia sústav telies významne závisí od stupňa ich statickej určítosti.

Všeobecne v analýze sústav telies rozlišujeme statickú určitosť **vonkajšiu, vnútornú a celkovú**.

1. Vonkajšia statická určitosť sústav telies sa vzťahuje k určeniu vonkajších väzbových síl uvoľneného telesa z použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Musí platiť

$$n_v - n_o = 0 \Rightarrow n_v = n_o \quad (5.3)$$

kde n_v je počet °V voľného hmotného objektu, t.j. počet použiteľných statických podmienok rovnováhy pre voľné teleso (rovina $n_v = 3$) a n_o je počet °V odobratých použitými väzbami, t.j. počet neznámych parametrov vonkajších väzbových reakcií. Rovinná sústava telies je uložená staticky určito, ak platí $3 = 3$.

2. Vnútorná statická určitosť sústav telies sa vzťahuje k možnosti určenia všetkých neznámych silových účinkov vznikajúcich v telesách sústavy. Počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy pre rovinnú sústavu telies je (2.u). Podmienka vnútornej statickej určítosti pre rovinnú sústavu telies má tvar

$$2.u - n_v = p \Rightarrow 2.u - 3 = p \quad (5.4)$$

kde u predstavuje počet uzlov (spojenie telies) a p je počet telies v sústave.

3. Celková statická určitosť sústav telies sa vzťahuje k určeniu všetkých neznámych nezávislých parametrov sústavy z použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Z rozboru vonkajšej a vnútornej určítosti pre podmienku celkovej statickej určítosti rovinatej sústavy telies musí platiť

$$2.u = p + n_v. \quad (5.5)$$

Sústava telies je celkovo staticky určitá iba vtedy, ak je staticky určitá vnútorne aj vonkajšo.

V prípade zistenia **statickej neurčitosti sústavy telies**, rovnako ako sústavu staticky určitú uvoľníme, ale z dôvodu nedostatočného počtu rovníc rovnováhy musíme doplniť chýbajúci počet deformačných podmienok. Znamená to, že znalosti zo statiky je nutné doplniť o vybrané poznatky z mechaniky poddajných telies. Pri riešení zložitejších sústav telies je nutné rozboru ich statickej určítosti venovať náležitú pozornosť.

5.2. Rovinné prútové sústavy

Medzi najvýznamnejšie a najrozšírenejšie nepohyblivé sústavy telies patria tzv. **priehradové konštrukcie**, často nazývané aj **priehradové nosníky**. Na Obr.5.3 sú príklady priehradových konštrukcií (stožiar pre prenos elektrickej energie, nosná a strešná konštrukcia štadióna, podporná a mostná konštrukcia).



Obr. 5.3

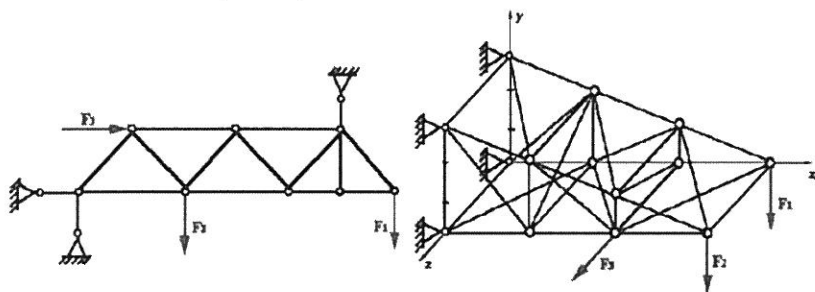
Hlavné aplikácie priehradových konštrukcií sú najmä v oblastiach konštrukcie mostov, stožiarov, strešných systémov, nosných subsystémov manipulačných zariadení a pod. Dôvodom je ich nenáročná výroba a jednoduchosť montáže a použitia v porovnaní s rámovými príp. betónovými konštrukciami. V praxi sa jedná najčastejšie o stožiare vysokého napätia, strešné systémy, mostné konštrukcie, podporné systémy-skruže, anténne systémy, rôzne veže, rampy, výložníky žeriavov a mnoho ďalších technických konštrukcií.

Konštrukčné prvky priehradových konštrukcií – napr. vertikálne prvky (zvislice), horizontálne prvky (pásky), diagonálne prvky (priečky), styčnickové telesá (plechy) a ďalšie sú obvykle vyrobené z valcovaných oceľových profilov rôzneho tvaru a prierezu (obr.5.4). Ich prierezová plocha môže byť rôzna, ale po dĺžke prvku priehradovej konštrukcie je spravidla konštantná a nemá na statický výpočet priehradového nosníka výraznejší vplyv. Odborné názvy prierezov prvkov priehradových nosníkov (často odvodené od ich geometrického tvaru) a ich geometrickú charakteristiku obvykle určujú záväzné technické normy.



Obr. 5.4

Najjednoduchším výpočtovým modelom priehradovej konštrukcie v mechanike telies je tzv. **prútová sústava** (PS). Prútové sústavy predstavujú špeciálne modely sústavy telies, využívané hlavne pri navrhovaní a posudzovaní veľkorozmerných nosných konštrukcií v mostovom a pozemnom stavitelstve a v konštrukcii zdvíhacích a manipulačných zariadení.



Obr. 5.5

Prútové sústavy podľa priestorového usporiadania prútov delíme na **rovinné** a **priestorové**.

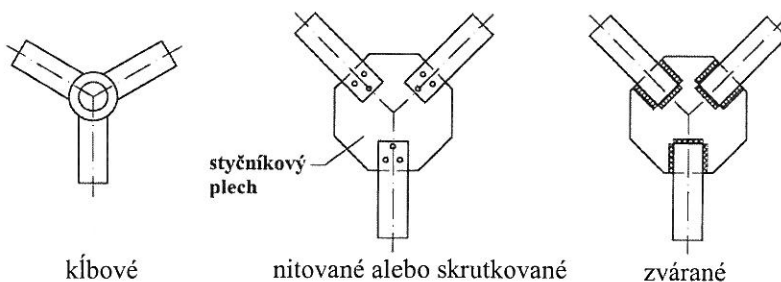
Konštrukčné prvky, tzv. **prúty** a zaťaženia ležia u rovinnej prútovej sústavy v jednej rovine; naopak usporiadanie priestorovej PS vytvára priestorový útvar (obr.5.5).

Prútová sústava je vo všeobecnosti zložená z nehmotných binárnych členov s dvomi rotačnými (v rovine) príp. sférickými (v priestore) väzbami, ktoré najčastejšie nazývame **prúty**.

Prút chápeme ako štíhle modelové teleso, tvarovo určené iba jeho osou - strednicou, ako spojnicou ťažísk jeho priečných prierezov. V učebnom texte budeme uvažovať výhradne s **prútmí s priamou osou** (ďalej iba priame prúty). Znamená to, že prúty, tvoriace PS uvažujeme ako priame, štíhle telesá (okrem dĺžky sú ich ďalšie rozmery zanedbateľné), nahradené ich strednicou.

Prútová sústava vzniká spojením viacerých prútov v spoločných bodoch – **uzloch** a vytvára tzv. **nepohyblivé prútové teleso**. Uzly (kĺby, styčníky) sú spojenia prútov, v ktorých pre zjednodušenie výpočtu uvažujeme s možnosťou vzájomného pootočenia prútov (aj to iba pootočenia čiastočného).

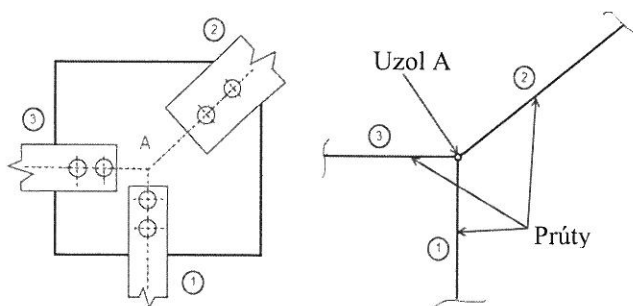
Konštrukčné prevedenie uzlov je vo väčšine praktických aplikácií PS realizované niektorým zo spôsobov podľa obr.5.6. Pri statickej analýze PS uvažujeme iba s vonkajším zaťažením vo forme síl a momentov, pôsobiach výhradne v uzloch, tzn. **akčné sily pôsobia v miestach spojenia prútov**.



Obr. 5.6

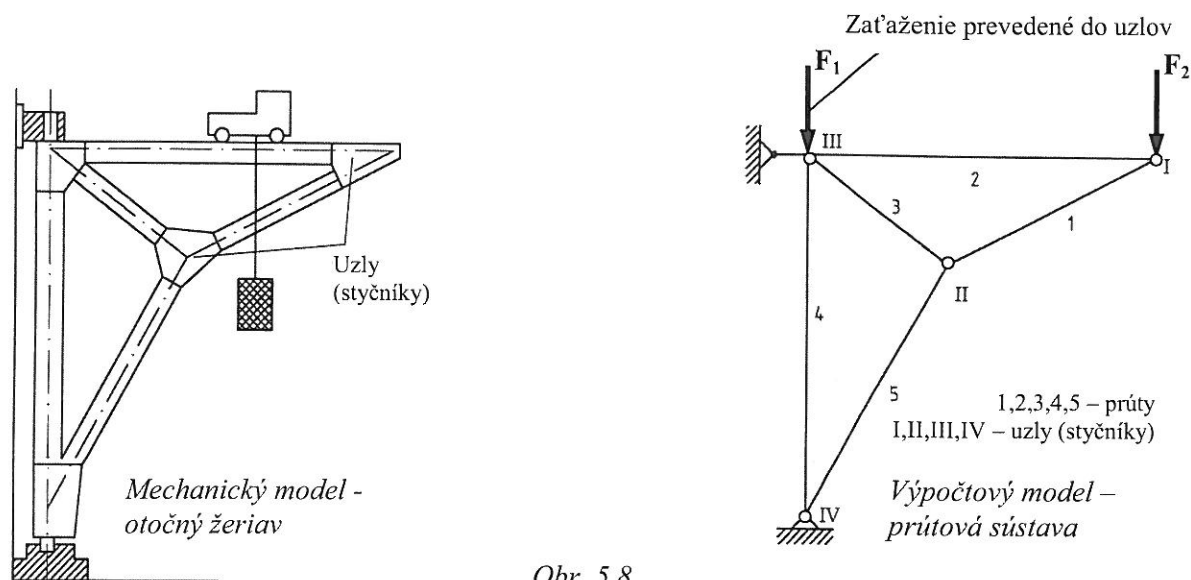
Ak zaťaženie PS pôsobí mimo uzla je nutné na základe zásad prekladania síl v statike ho transformovať (previesť) na zaťaženie v uzloch.

Časté spojenie prvkov prihradovej konštrukcie je realizované prostredníctvom skrutiek alebo nitov a jeho výpočtový model s uvažovanou kĺbovou väzbou je uvedený na obr.5.7. Pre zjednodušenie modelu budeme predpokladať, že osi prútov sa pretínajú v jedinom bode – ležiacom na tzv. **styčníkovom telese** (plechu).

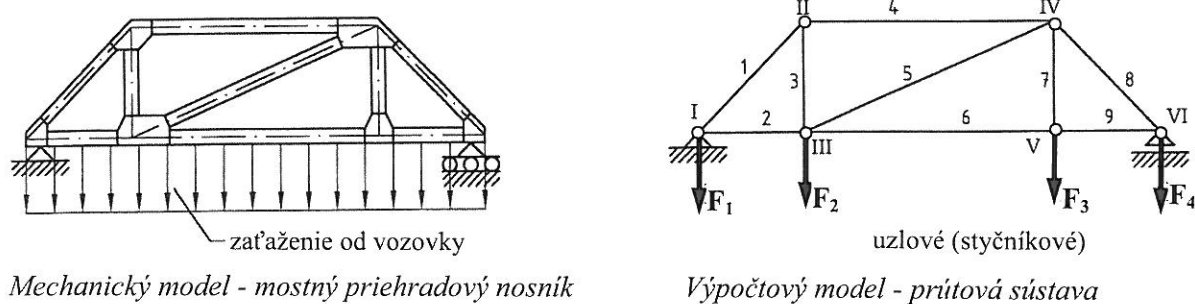


Obr. 5.7

V praktických aplikáciách sú PS obvykle tvorené trojuholníkovými jednotkami. Pre ilustráciu sú na Obr.5.8 a Obr.5.9 uvedené príklady prihradových konštrukcií a ich mechanické modely.



Obr. 5.8



Obr. 5.9

Z uvedenej charakteristiky rovinných sústav telies vyplýva, že **prútovú sústavu**, ako najjednoduchší statický výpočtový model prihradovej konštrukcie, vytvárame na základe nasledovných predpokladov:

- Jednotlivé telesá PS sú štíhle a sú uvažované ako jednorozmerné - tzv. **prúty**.
- Zaťaženie PS je uvažované iba v uzloch, zaťaženie mimo uzla je nutné ekvivalentne previesť do uzla.
- Uzol, ako prienik osí prútov je uvažovaný ako **kĺbové spojenie**. Prípadné otáčavé účinky od zaťaženia sa preto neprenášajú a uzol PS je uvažovaný ako pôsobisko RZS.
- Osi prútov, prechádzajú ťažiskami prierezov ich profilu a pretínajú sa v jedinom bode. Z toho vychádza predpoklad, že jednotlivé prúty PS **prenášajú iba osové (normálové) sily - ťahové alebo tlakové**.

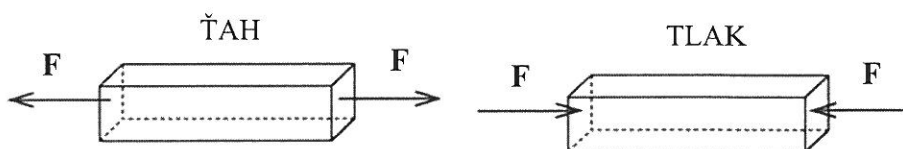
5.2.1. Namáhanie prútov v prútových sústavách

Zaťaženie prútových sústav uvažujeme iba v uzloch a preto sa môže vplyv zaťaženia prenášať iba formou osových síl v prútoch, ktoré sa v uzle stýkajú. Z uvedeného predpokladu vyplýva, že prúty v prútovej sústave môžu byť namáhané iba **t'ahom, tlakom**, prípadne tzv. **vzperom**.

1. Jednoduchý t'ah / tlak

Predstavuje jeden z hlavných druhov namáhania priamych prútov (obr.5.10) a platia predpoklady:

- priečne prierezy sa vzájomne oddiaľujú (t'ah) alebo približujú (tlak) a následne sa pretvárajú, (t.j. menia veľkosť plochy prierezu, ale nemení sa tvar prierezu),
- jedinou nenulovou zložkou vnútorných silových účinkov v prúte je osová (normálová) sila N ,
- deformácie prúta sú z hľadiska statickej rovnováhy nepodstatné a neuvažujeme s nimi.



Obr.5.10

2. Vzperná stabilita prúta

Z vymedzenia namáhania prúta tlakom vyplýva, že priečne prierezy prúta sa iba vzájomne približujú. V skutočnosti však platí, že keď tzv. **štíhly prút** (t.j. ak pomer charakteristického rozmeru priečného prierezu prúta je vzhľadom k jeho dĺžke malý) namáhame tlakom, na začiatku pôsobenia síl sa zaťažovaný prút (tyč) stláča. Od istého okamžiku sa však prút začne prehýbať a podstatnou deformáciou sa stáva ohyb.

Znamená to, že pri vzpere je v počiatočnej fáze zaťaženia podstatné stláčanie strednice a nepodstatné jej ohýbanie. Pri väčších zaťaženiach je to naopak – podstatný je ohyb, nepodstatné je stláčanie. Rozhranie medzi týmito dvoma stavmi nazývame **medzný stav vzpernej stability**.

Medzný stav vzpernej stability prúta je vnútorný mechanický stav, pri ktorom sa charakter podstatnej deformácie štíhleho prúta mení z tlaku na ohyb.

Spôsoby uloženia, analyzované v tzv. Eulerovskej teórii vzperu štíhlych prútov nie sú u priehradových nosníkov príliš využívané a preto sa budeme problematike vzpernej stability štíhlych prútov detailnejšie venovať až v rámci časti predmetu venovanej mechanike poddajných telies.

Pre zjednodušenie analýzy silových pomerov v PS budeme uvažovať, že v prútoch PS vznikajú iba normálové (osové) sily, ktoré svojim usporiadaním predstavujú centrálny silový systém (RZS).

5.2.2. Rozdelenie staticky určitých prútových sústav

Osové sily v prútoch PS môžeme určovať analyticky, graficky alebo prostredníctvom numerických postupov. Voľba spôsobu riešenia závisí obvykle na druhu - staticky a tvarovo určitej prútovej sústavy.

Rovinné, staticky aj tvarovo určité, prútové sústavy rozdelíme podľa geometrického usporiadania prútov na jednoduché, zložené a zložené.

5.2.2.1. Jednoduchá prútová sústava

Jednoduchá PS (obr.5.11) vznikne, keď k základnému trojuholníku prútov je každý ďalší uzol pripojený najviac dvoma prútmi (ktoré nie sú totožné) a sústava obsahuje aspoň jeden tzv. **dvojný uzol**. Dvojný uzol obsahuje iba 2 neznáme osové sily, čo zodpovedá počtu rovníc rovnováhy v uzle definovaných.

Overenie statickej určítosti:

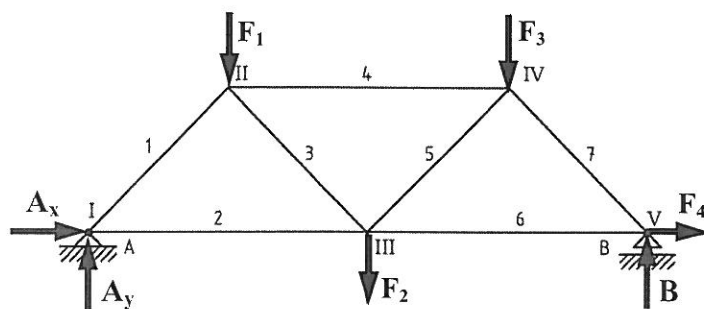
$$u = 5, p = 7, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa (5.9) platí:

$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1$$

$$2 \cdot 5 = 7 + 2 \cdot 1 + 1$$

⇒ podmienka riešiteľnosti metódami statiky **splnená!**



Obr. 5.11

Riešenie začíname vždy v dvojnom uzle. Pre analytické riešenie je vhodná tzv. **uzlová metóda**. Pre grafické riešenie je vhodná **grafická verzia tzv. postupnej uzlovej metódy** alebo **metóda Cremonova**.

5.2.2.2. Zložená prútová sústava

Zložená prútová sústava (obr.5.12) vznikne spojením dvoch jednoduchých PS prostredníctvom troch prútov, ktoré sa nepretínajú v spoločnom bode, pričom prútová sústava neobsahuje žiadny dvojný uzol.

Overenie statickej určítosti:

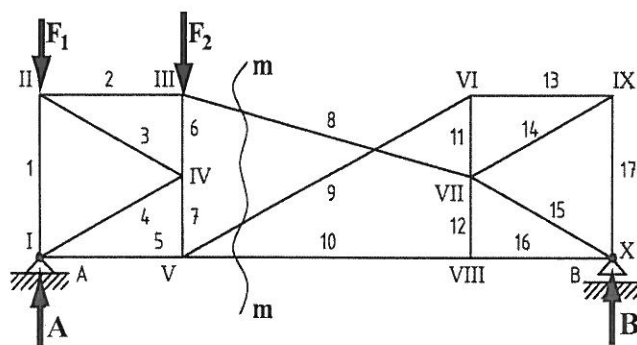
$$u = 10, p = 17, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa (5.9) platí:

$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1$$

$$2 \cdot 10 = 17 + 2 \cdot 1 + 1$$

⇒ podmienka riešiteľnosti **splnená!**



Obr. 5.12

Keďže zložená prútová sústava neobsahuje žiadny dvojný uzol je jej statická analýza možná iba vtedy, keď vieme nájsť taký fiktívny rez *m-m*, pretínajúci maximálne 3 prúty a ktorých nositeľky sa nepretínajú v spoločnom bode, t.j. netvorí centrálny silový systém. Zložené PS riešime najčastejšie tzv. **metódou rezu (priesečná metóda)**, z grafických postupov uvedieme iba princíp **Culmannovej grafickej metódy**.

5.2.2.3. Zložitá prútová sústava

Zložitá prútová sústava (obr.5.13) neobsahuje žiadny dvojný uzol a žiadnym rezom (*m-m*), vedeným cez tri prúty, nie je možné sústavu rozdeliť na dve časti.

Overenie statickej určítosti:

$$u = 6, p = 9, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa (5.9) platí:

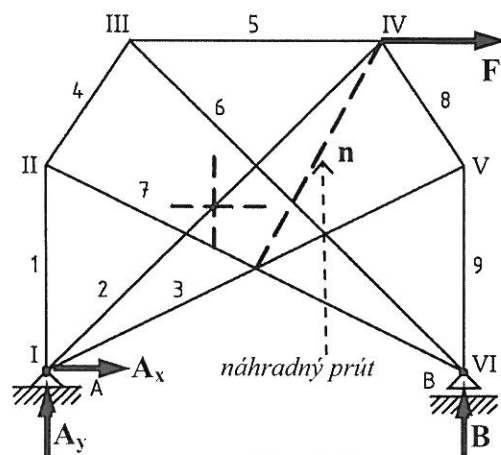
$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1$$

$$2 \cdot 6 = 9 + 2 \cdot 1 + 1$$

⇒ podmienka riešiteľnosti **splnená!**

Vhodnými metódami pre statické riešenie zložitých PS sú predovšetkým analyticky zdôvodnená **metóda náhradného prúta** alebo graficky orientovaná **metóda neurčitej mierky**.

V ďalšom výklade sa sústreďíme hlavne na pochopenie a zvládnutie postupov pre riešenie jednoduchých a zložených PS.



Obr. 5.13

5.3. Postup riešenia staticky určitých rovinných prúťových sústav

Cieľom statického riešenia, staticky aj tvarovo určitej, sústavy telies je určenie vonkajších a vnútorných väzbových reakcií. V prípade pohyblivých sústav je navyše nutné identifikovať a určiť prídavné silové účinky potrebné pre zaistenie rovnováhy síl v rámci analyzovanej pohyblivej sústavy telies. Podstatu riešenia statickej rovnováhy sústav telies môžeme vyjadriť nasledovne:

Ak je ľubovoľná sústava telies v pokoji, je v pokoji každé teleso, ako aj ktorákoľvek skupina telies, tzn. sily na každom telese, skupine telies alebo celej sústave telies sú v rovnováhe.

Statické riešenie priehradových nosníkov a ich mechanických modelov - prúťových sústav, ako najrozšírenejšej nepohyblivej sústavy telies v praxi, je založené na aplikácii troch základných princípov:

1. **Rovnováhy centrálnych silových sústav**, ktoré pôsobia na jednotlivé uzly - *postupná uzlová metóda* (známa tiež ako metóda styčných bodov), resp. grafická *Cremonova metóda*.
2. **Rovnováhy síl, pôsobiacich na časť prúťovej sústavy** rozdelenej myslenným rezom - *metóda rezu* (známa tiež ako priesečná metóda), resp. grafická *Culmannova metóda*.
3. **Superpozície** (analýza jednotlivých vplyvov a ich sčítanie) **a proporcionality medzi vonkajším zaťažením a jednotlivými osovými silami** – *Hannebergova metóda náhradných prúťov*, resp. graficky orientovaná *metóda neurčitej mierky*.

Základnou úlohou statického riešenia PS je určenie **veľkosti osových síl v prúťoch a ich zmyslu (ťah alebo tlak)**. Bez určenia miery statickej určitosti PS, ako aj výpočtu neznámych parametrov vonkajších väzbových reakcií, ako funkcie vonkajších primárnych zaťažení, to však nie je možné.

Postup statickej analýzy PS preto pozostáva z niekoľkých, na seba nadväzujúcich, krokov:

1. *Analýza prúťovej sústavy, definovanie vonkajších a vnútorných väzieb v sústave.*
2. *Posúdenie statickej príp. tvarovej určitosti prúťovej sústavy.*
3. *Určenie veľkosti a zmyslu vonkajších väzbových reakcií (tzn. sekundárnych síl, pôsobiacich na PS v miestach jej uloženia – vo vonkajších väzbách).*
4. *Riešenie prúťovej sústavy vhodným analytickým, grafickým príp. numerickým postupom, tzn. určenie veľkosti a zmyslu vnútorných (osových) síl v jednotlivých prúťoch PS.*

Metódami statiky dokážeme riešiť iba staticky určité PS a preto bude hlavná pozornosť venovaná práve riešeniu staticky určitých problémov. Voľba spôsobu statickej analýzy konkrétnej PS závisí na zložitosti usporiadania a počtu jej prvkov, početnosti a druhu pôsobiaceho zaťaženia, ale tiež od toho, aké analytické nástroje (metódy, softvéry) poznáme alebo sú k dispozícii. Pri riešení PS budeme opäť predpokladať, že **všetky väzby medzi telesami sú ideálne**, t.j. nebudeme uvažovať vplyv tzv. pasívnych odporov.

5.3.1. Analýza prúťovej sústavy a rozbor pohyblivosti

Spočíva v rozhodnutí, či ide o pohyblivú alebo nepohyblivú sústavu a definovanie vonkajších a vnútorných väzieb medzi telesami v rámci nej. Obsahuje analýzu PS ako celku a jednotlivých druhov väzieb medzi jednotlivými telesami, resp. medzi telesami a rámom. Hovoríme o tzv. *kinematickom rozbere*.

5.3.2. Statická určitosť prúťových sústav

Je možné preukázať, že počet rovníc rovnováhy pre všetky uzly PS sa rovná dvojnásobku počtu uzlov. Na základe uvedených predpokladov riešenia PS platí, že všetky silové účinky pôsobiace na uvoľnený uzol PS tvoria sústavu síl so spoločným pôsobiskom, ktorá má definované dve rovnice rovnováhy v tvare

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (5.6)$$

Na to, aby mohla byť PS staticky určitá musí byť splnená už uvedená **nutná podmienka celkovej statickej určítosti** sústavy telies (5.5).

Z rozboru podmienok statickej určítosti sústav telies (časť 5.1.), rovnako aj pre prútové sústavy platí:

Ak je počet neznámych silových veličín (sily v prútoch PS a zložky vonkajších väzbových reakcií) rovný počtu rovníc rovnováhy, ktoré je možné pre výpočet neznámych silových veličín definovať, hovoríme, že prútová sústava je staticky určitá.

Pri analýze statickej určítosti PS je vhodné zaviesť pojem **tvarová určitosť**, ktorá určuje, či je konštrukcia dostatočne tuhá. Tvarovo určitá je taká PS, ktorá aj po odpojení od rámu tvorí tuhý celok, ktorému hovoríme **prútové teleso**. Reakcie vo väzbách nepohyblivo uloženého telesa v rovine predstavujú tri neznáme statické parametre a pre staticky určitú PS v rovine podľa (5.5) platí

$$2u = p + 3 \quad \text{resp.} \quad p = 2u - 3 \quad \text{resp.} \quad 2u - p = 3. \quad (5.7)$$

Ak je $2u - p > 3$ – PS je **tvarovo neurčitá**; ak je $2u - p < 3$ – jedná sa o PS **tvarovo určitú, ale staticky (vnútorne) neurčitú**. Ak má byť rovinná PS **tvarovo i staticky určitá**, musia platiť rovnice v tvare

• pre voľnú (pohyblivú) prútovú sústavu $p = 2 \cdot u - 3$ (5.8)

• pre viazanú (nepohyblivú) prútovú sústavu $2 \cdot u = p + 2p_2 + p_1$ (5.9)

kde p je počet prútov, u počet uzlov, p_2 počet väzieb, ktoré odoberajú prútovej sústave ako celku $2^\circ V$ pohybu a p_1 počet väzieb odoberajúcich $1^\circ V$ pohybu.

Nakoľko u staticky určitých PS nedochádza ku zmene polôh ich jednotlivých členov (t.j. tvar sústavy sa nemení) obvykle uvažujeme, že **staticky určité prútové sústavy sú aj tvarovo určité**. Z uvedeného vyplýva aj základná podmienka riešiteľnosti PS, slovne definovaná v tvare:

Určiť neznáme sily v prútoch PS od pôsobenia vonkajších (primárnych aj sekundárnych) síl v jej uzloch je metódami statiky možné iba vtedy, keď je prútová sústava staticky, ale súčasne aj tvarovo určitá!

Je možné sa presvedčiť, že napr. mechanický model priehradovej konštrukcie mosta (Obr.5.9) je staticky i tvarovo určitá priehradová konštrukcia. V tomto prípade pre jej model dostaneme: počet uzlov $u = 6$, počet prútov $p = 9$, väzby typu 2 : $p_2 = 1$ a väzby typu 1 : $p_1 = 1$. Dosadením do podmienky (5.9), určenej pre viazanú sústavu telies, dostaneme $2 \cdot 6 = 9 + 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 12 = 12$.

5.3.3. Určenie väzbových reakcií vo vonkajších väzbách

Tretou fázou je určenie veľkosti a zmyslu pôsobenia **väzbových reakcií**, ako sekundárnych silových účinkov vo vonkajších väzbách. Reakcie sú vyvolané zaťažením PS, obvykle vo forme akčných vonkajších silových účinkov (**osamelé sily a momenty**), pôsobiacich v uzloch prútovej sústavy.

Pre priehradové nosníky je postup je totožný. Opäť využívame podmienky rovnováhy VRSS, ktoré môžu mať niektorý z tvarov:

(1)	$\sum F_{ix} = 0$	(2)	$\sum M_{iA} = 0$	(3)	$\sum M_{iA} = 0$	(5.10)
	$\sum F_{iy} = 0$		$\sum M_{iB} = 0$		$\sum M_{iB} = 0$	
	$\sum M_{iA} = 0$		$\sum F_{ix} = 0$		$\sum M_{iC} = 0$	
KONTROLNÉ ROVNICE						
	$\sum M_{iB} = 0$		$\sum F_{iy} = 0$		$\sum F_{ix} = 0$	

Pri statickej analýze prútových sústav najčastejšie využívame tvar rovníc typu (2). Je jasné, že musí opäť platiť tvrdenie: *Posuvné a otáčavé účinky výslednice vonkajších väzbových reakcií ΣR_j a výslednice sústavy zaťažujúcich síl ΣF_i sa musia navzájom zrušiť*. Práve vtedy bude PS v stave statickej rovnováhy.

5.3.4. Riešenie prútových sústav – výpočet osových síl a interpretácia výsledkov

Z hľadiska metodológie statického riešenia telies a sústav telies rozlišujeme vo všeobecnosti spôsoby **experimentálne** alebo **výpočtové**. Princíp experimentálneho prístupu spočíva v pozorovaní a zázname výsledkov skúmaných situácií a hľadaní súvislostí medzi vstupnými a výstupnými veličinami. Výpočtové postupy najčastejšie delíme na metódy *analytické*, *grafické* a *numerické*. Analytické a grafické metódy sú obvykle iba nástrojom na prvotné posúdenie alebo návrh zaťaženia konštrukcie, príp. pre získanie predstavy o ich prevádzkovom namáhaní. Aktuálne sú najčastejšie využívané numerické postupy, ktoré však vyžadujú špecifický teoretický aparát (napr. metóda konečných prvkov) a nevyhnutne aj vhodnú softvérovú podporu.

5.4. Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

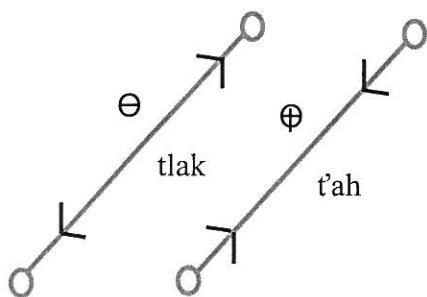
Nižšie uvedenými metódami statického riešenia PS môžeme určovať iba vonkajšie väzbové reakcie a vnútorné (osové) sily, vznikajúce v prútoch PS. Na výpočet deformácie a napätosti prútov a tým aj na analýzu staticky neurčitých úloh je nutné využiť vzťahy z oblasti mechaniky poddajných telies a preto metódami statiky riešime iba staticky určité prútové sústavy. Analytické (ale čiastočne aj grafické) metódy v súčasnosti slúžia iba ako nástroj pre pochopenie základných princípov a možností riešenia PS a zvládnutie postupov riešenia geometricky aj zaťažením menej zložitých PS.

5.4.1. Postupná uzlová metóda

Najznámejšou metódou pre riešenie jednoduchých PS je *uzlová (styčníková) metóda*. Jej jednoduchším, ale zdĺhavejším variantom je tzv. *postupná uzlová metóda* (PUM), pri ktorej postupne riešime rovnováhu v každom uzle PS, ako samostatnú úlohu riešenia rovnováhy rovinného zväzku síl.

Riešenie začíname prípravou geometrického modelu priehradovej konštrukcie, a to určením druhu PS, očíslovaním prútov, uzlov, posúdením statickej určitosti PS a nájdením dvojného uzla (uzol iba s dvoma neznámymi osovými silami) a . Po uvoľnení sústavy určíme *veľkosť a zmysel väzbových reakcií*, ktoré spoločne s akčnými silami predstavujú vonkajšiu všeobecnú rovinnú sústavu síl, pôsobiacu na uvoľnenú prútovú sústavu. Samotný *výpočet osových síl v prútoch* začíname vždy v *dvojnom uzle*. Po vyriešení jeho rovnováhy, t.j. určení neznámych osových síl v prútoch vstupujúcich do dvojného uzla, pokračujeme rovnako v ďalšom, novovzniknutom, dvojnom uzle. Tomu zodpovedá aj názov metódy.

Pri analytickom riešení PUM na začiatku riešenia vždy *predpokladáme, že všetky neznáme sily v prútoch sú ťahové (+)*, tzn. *pôsobia smerom von z uzla* (Obr.5.14). Vo výsledkoch sa tento úvodný predpoklad buď potvrdí – v prúte je skutočne ťah (+) alebo bol nesprávny – a prút je stláčaný a vzniká v ňom tlak (-).



Obr.5.14

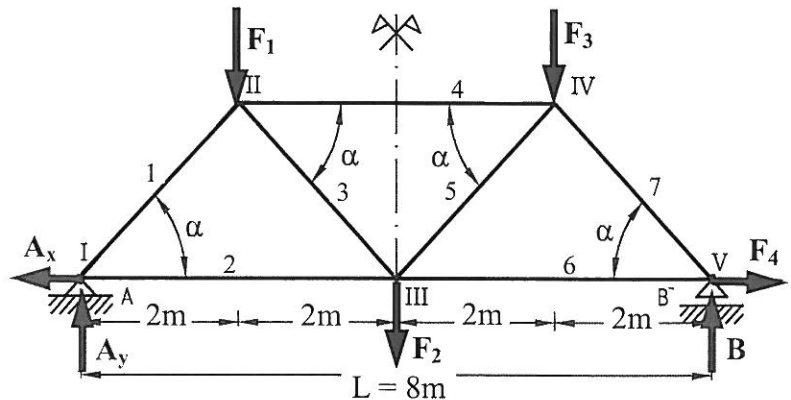
Pri realizácii grafického riešenia zakresľujeme zmysly osových síl v uzloch a u každého prúta označíme ťah (+) alebo tlak (-), ako napr. osové sily v obr.5.15g. Riešenie začíname opäť v dvojnom uzle. Princíp spočíva v grafickom vyriešení rovnováhy každého uzla PS, ako úlohy grafického riešenia rovnováhy zväzku síl v rovine. Postupnú uzlovú metódu obvykle využívame ako nástroj na dokončenie výpočtu po aplikácii iných metód analýzy PS.

Príklad 5.1: V zadanej prútovej sústave určite výpočtom aj graficky veľkosť a zmysel osových síl N_i vo všetkých prútoch sústavy. Zadané: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F = 20 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$, rozmery podľa Obr.5.15.

Riešenie:

• *Analyticky:*

Pre každý uzol zadanej rovinatej PS (uvažovaný ako RZS) možno definovať 2 podmienky rovnováhy síl. V zadanej rovinatej PS je 5 uzlov (I, II, III, IV, V). Ak v každom uzle definujeme 2 rovnice rovnováhy získame celkom 10 rovníc. Vyriešiť sústavu 10 lineárnych rovníc s 10 neznámymi je zdĺhavé a snažíme sa preto najskôr vyriešiť neznáme zložky väzbových reakcií. Po určení väzbových reakcií vyhladáme dvojné uzly, t.j. uzly v ktorých sú iba 2 neznáme sily, ktorých rovnováhu vieme vyriešiť jednoznačne – a to z 2 podmienok rovnováhy síl dvojného uzla.



Obr.5.15

I. *Overenie statickej určitosti:*

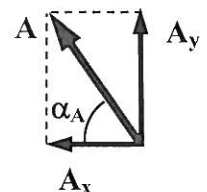
$$u = 5, p = 7, p_2 = 1, p_1 = 1$$

Pre statickú určitosť platí: $2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1 \Rightarrow 2 \cdot 5 = 7 + 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow$ podmienka je **splnená!**

II. *Výpočet väzbových reakcií:*

Zadaný priehradový nosník je podoprený v bode A pevným neposuvným kĺbom $\Rightarrow$ vznikajú dve zložky väzbovej reakcie A_x a A_y , v bode B je podpera typu - posuvný kĺb $\Rightarrow$ jediná zložka väzbovej reakcie B. Ich veľkosť určíme z podmienok rovnováhy, napr. typ (1) a dostaneme

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 : -A_x + F_4 &= 0 \Rightarrow A_x = F_4 = 20 \text{ kN} \\ \sum F_{iy} = 0 : A_y - F_1 - F_2 - F_3 + B &= 0 \Rightarrow B = -A_y + 3 \cdot F = 30 \text{ kN} \\ \sum M_{iB} = 0 : -A_y \cdot 8 + F \cdot (6 + 4 + 2) &= 0 \Rightarrow A_y = \frac{F \cdot 12}{8} = \frac{20 \cdot 12}{8} = 30 \text{ kN} \end{aligned}$$



Kontrolná podmienka: $\sum M_{iA} = 0 : -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 6 + B \cdot 8 = 0 \Rightarrow -F \cdot (2 + 4 + 6) + B \cdot 8 = 0$
 $-240 + 240 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

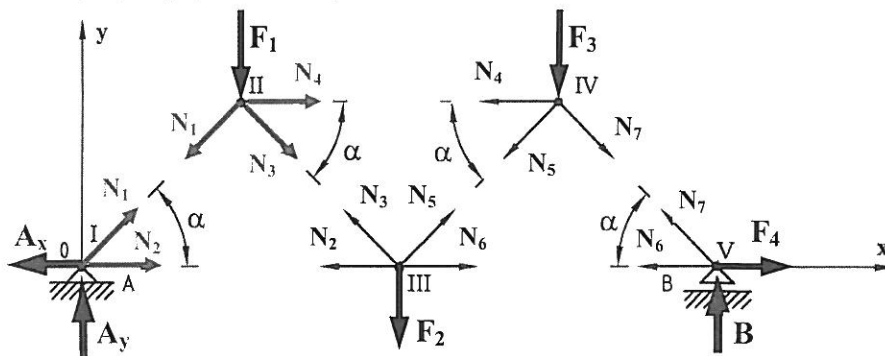
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1300} \Rightarrow A = 36,055 \text{ kN}; \quad \alpha_A = \operatorname{tg} \frac{A_y}{A_x} = \frac{30}{20} \Rightarrow \alpha_A = 56,3^\circ.$$

III. *Výpočet osových síl v prútoch:*

Podľa definovaných predpokladov pre zjednodušenie riešenia rovinných PS vieme, že sústava je zaťažená a podopretá iba v uzlových bodoch a preto vo všetkých prútoch PS uvažujeme iba so vznikom **normálovej (osovej) sily** N . Ďalšie vnútorné silové veličiny - priečne (posúvajúce) sily T a ohybové momenty M - považujeme v prípade statického riešenia PS za nulové. **Základnou úlohou riešenia je preto iba určenie veľkosti a zmyslu osových síl N** (u iných autorov sa používa aj označenie S , resp. F), vznikajúcich v prútoch PS, vplyvom vonkajšieho zaťaženia. Po vyriešení väzbových reakcií máme v uzloch I a V iba po dve neznáme. Sú to dvojné uzly $\Rightarrow$ PS je jednoduchá. V závislosti od geometrie a rozmerov konštrukcie môže byť potrebné aj dourčenie uhlov v trojuholníkových priehradových jednotkách. V našom prípade je uhol α zadaný. Ak by však zadaný nebol, musela by byť známa výška h priehradového nosníka.

V takomto prípade by platilo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{príľahlá}} = \frac{h}{L/2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{L/2}$.

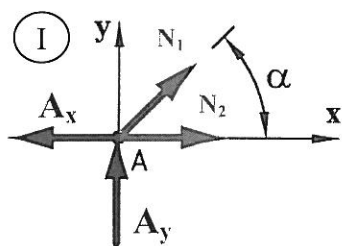
V uvoľnených uzloch zavedieme neznáme osovú sily N_i – *obvykle ich na začiatku uvažujeme ako ťahové*, tzn. osovú sily vystupujúce z uzla (obr.5.15a):



Obr. 5.15 a

Prútová sústava obsahuje dva dvojne uzly (uzol I a uzol V). Zvolíme jeden z dvojných uzlov. Riešenie začneme napr. v uzle I. Napíšeme podmienky rovnováhy a ich riešením získame neznáme osovú sily N_1 a N_2 . Obvyklá realizácia postupnej uzlovej metódy spočíva v rozložení neznámych osové sily do zložiek.

Napr. pre zložky sily N_1 platí: $N_{1x} = N_1 \cdot \cos \alpha$, $N_{1y} = N_1 \cdot \sin \alpha$ a potom $N_1 = \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1y}^2}$.



Obr. 5.15 b

$$\sum F_{iy} = 0: A_y + N_1 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{-A_y}{\sin \alpha} = -42,43 \text{ kN} - (\text{tlak})$$

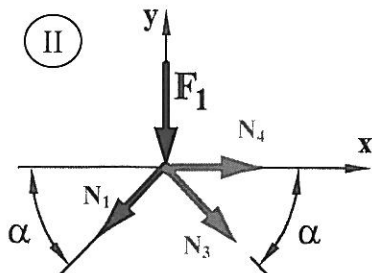
$$\sum F_{ix} = 0: -A_x + N_2 + N_1 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = A_x - N_1 \cdot \cos \alpha = 50 \text{ kN} - (\text{ťah})$$

Týmto už sú určené veľkosti a druh síl v prútoch N_1 , N_2 . Príslušné znamienka síl vyznačíme do obr. 5.15 ako tlak (-) v prúte N_1 , resp. ťah (+) v prúte N_2 (znamienko + obvykle neznačíme).

Poznámka: Pre väčšiu názornosť sa znamienkom označené osovú sily v prútovej sústave často dopĺňajú aj graficky - zmyslami (šípkami) ich zisteného, skutočného pôsobenia (obr.5.15g).

Postúpme do novovzniknutého dvojného uzla II, nakoľko sú aktuálne v ňom už iba dve neznáme osovú sily a to N_3 a N_4 (uzol III túto podmienku zatiaľ nespĺňa, sú v ňom stále neznáme až tri sily - N_3 , N_5 , N_6). Každú, v predchádzajúcom kroku určenú osoú silu v ďalšom uzle dosadzujeme už aj s jej znamienkom, určujúcim či sme na začiatku „odhadli“ jej zmysel správne.

Postupujeme vo výpočte do ďalšieho uzla, napr. do uzla II a pre sily N_3 a N_4 dostaneme:



Obr. 5.15 c

$$\sum F_{iy} = 0: -N_3 \cdot \sin \alpha - N_1 \cdot \sin \alpha - F_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_3 = \frac{-F_1 - N_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{F_1}{\sin \alpha} - N_1 \Rightarrow N_3 = 14,14 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0: N_4 + N_3 \cdot \cos \alpha - N_1 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_4 = (N_1 - N_3) \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_4 = -40 \text{ kN}$$

Po vyznačení síl so znamienkami, tzn. N_4 ako tlak (-), resp. N_3 ako ťah (+), príp. aj graficky zmyslami ich pôsobenia (obr.5.15g) môžeme pokračovať v riešení ďalej.

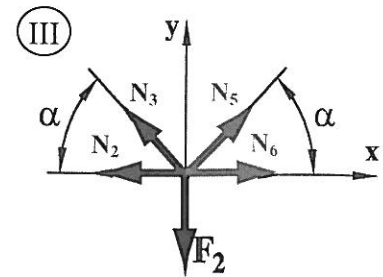
Pokračovanie výpočtu je možné v ktoromkoľvek z uzlov III, IV alebo V, nakoľko v každom z nich sú už iba po dve neznáme sily. Postupujme vo výpočte do ďalšieho uzla, napr. uzla III.

$$\sum F_{iy} = 0 : N_5 \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0$$

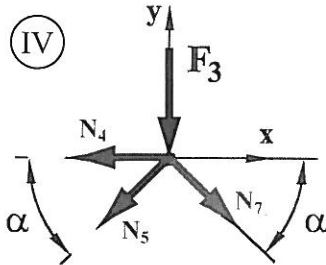
$$\Rightarrow N_5 = \frac{F_2}{\sin \alpha} - N_3 \Rightarrow N_5 = 14,14 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0 : -N_2 - N_3 \cdot \cos \alpha + N_5 \cdot \cos \alpha + N_6 = 0$$

$$\Rightarrow N_6 = N_2 + (N_3 - N_5) \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_6 = 50 \text{ kN}$$



Obr. 5.15 d



Obr. 5.15 e

Postupíme ďalej, napr. do uzla IV.

$$\sum F_{iy} = 0 : -N_5 \cdot \sin \alpha - F_3 - N_7 \cdot \sin \alpha = 0$$

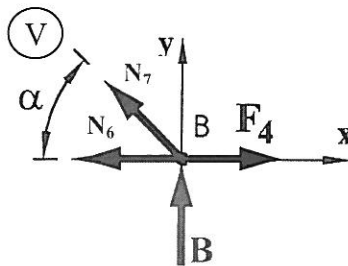
$$\Rightarrow N_7 = -(N_5 \cdot \sin \alpha + F_3) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = -\left(N_5 + \frac{F_3}{\sin \alpha}\right) \Rightarrow N_7 = -42,43 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0 : -N_4 - N_5 \cdot \cos \alpha + N_7 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_4 = (N_7 - N_5) \cdot \cos \alpha \Rightarrow N_4 = -40 \text{ kN}$$

(rovnaká hodnota ako N_4 v uzle II – vhodná kontrola výpočtu).

Opäť zaznačíme znamienkami (príp. zmyslmi síl) do obr.5.15g zistené osovú sily N_7 a N_4 a riešenie ukončíme v uzle V. **Overenie rovnováhy v poslednom uzle je aj kontrolou správnosti celého výpočtu !!!**



Obr. 5.15 f

Pre rovnováhu v uzle V dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0 : -N_6 - N_7 \cdot \cos \alpha + F_4 = 0$$

$$\Rightarrow -50 - (-42,43 \cdot 0,707) + 20 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{splnené.}$$

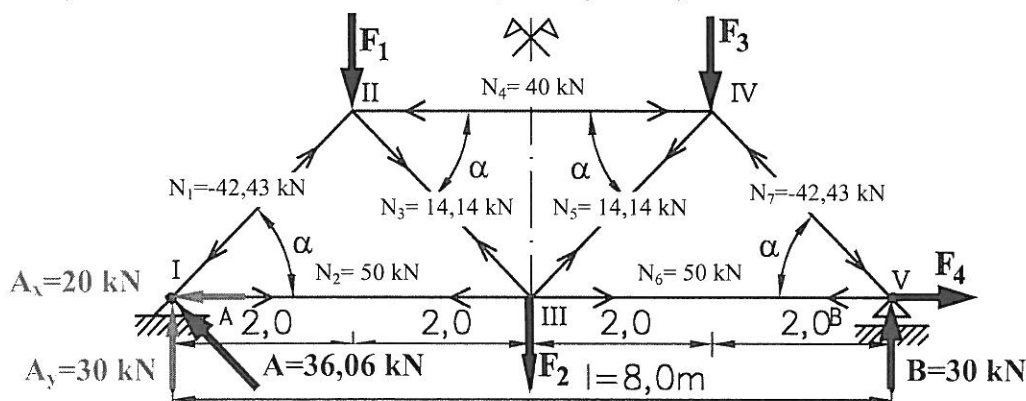
$$\sum F_{iy} = 0 : B + N_7 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 30 + (-42,43 \cdot 0,707) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{splnené.}$$

IV. Výsledky:

Sila	A_x	A_y	A	B	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
Veľkosť [kN]	20	30	36,06	30	-42,43	50	14,14	-40	14,14	50	-42,43

Zakreslenie výsledkov do mechanického modelu - prútovej sústavy:



Obr. 5.15 g

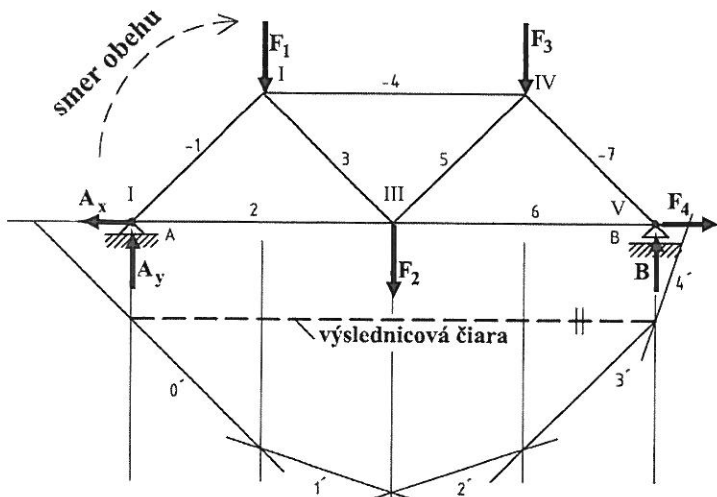
Poznámka: Mohli sme postupovať aj od uzla V (ďalší dvojný uzol) v smere do uzla I, ale získané veľkosti aj zmysel osových síl v prútoch musia vyjsť rovnaké. Bolo možné postupovať súčasne od uzlov I aj V, pričom v smere od uzla I vyriešime jednu polovicu PS, od uzla V druhú. Kontrolu vykonáme v jednom z vnútorných uzlov PS, napr. v uzle III.

• *Graficky:*

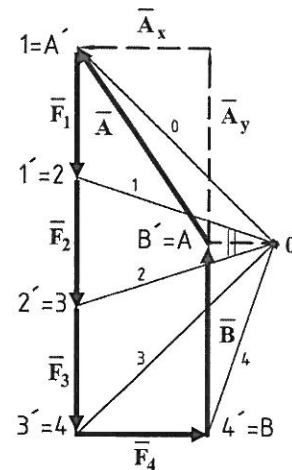
Princíp grafickej verzie PUM je založený na tvorbe silových obrazcov, postupne vytvorených pre vyriešenie rovnováhy každého z uzlov PS. Základný princíp je nasledovný:

Dve silové podmienky pre rovnováhu síl v uzle PS pri analytickom riešení môžeme nahradiť pri grafickom riešení podmienkou jedinou – a to uzavretím silového obrazca!

Rovnako, ako pri analytickom riešení, aj v tomto prípade je potrebné začať určením väzbových reakcií v mieste uloženia (obr.5.15i)!



Obr.5.15 h



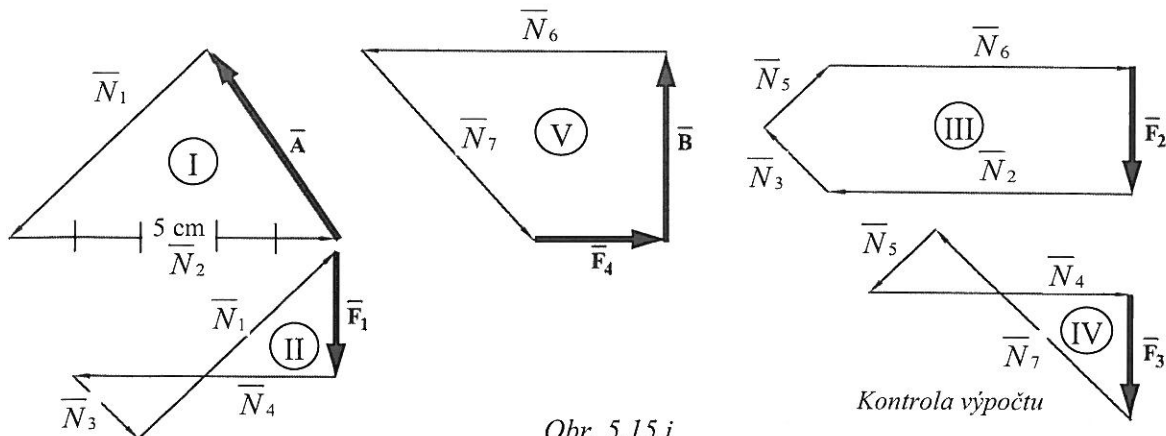
Obr.5.15 i

Smer a veľkosť väzbových reakcií môžeme určiť pomocou tzv. *pólového obrazca* a z neho určeného smeru výslednicovej čiary (Obr.5.15h) $\Rightarrow$ zobrazovacie úseky reakcií $\bar{A}$ a $\bar{B}$. Pre veľkosť hľadaných väzbových reakcií potom platí

$$A = \bar{A} \cdot m_F, \quad B = \bar{B} \cdot m_F.$$

Po určení veľkosti a zmyslu väzbových reakcií $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ vytvárame silové obrazce pre rovnováhu jednotlivých uzlov PS. Opäť musíme začať v dvojnóm uzle, nakoľko pri grafickom riešení sme schopní určiť veľkosť maximálne 2 neznáme síl. Výhodou však je, že poznáme smery ich nositeliek – t.j. smer prúta v prútovej sústave (Obr.5.15j). Pre skutočnú veľkosť osových síl v [N] platí $N_i = \bar{N}_i \cdot m_F$, kde N_i je skutočná veľkosť osovej sily [N] v i-tom prúte, m_F je zvolená mierka zakresľovania síl [mm] a $\bar{N}_i$ je zobrazovací úsek sily N_i [mm].

Zvolené mierky : mierka síl $m_F = 10 \text{ kN.cm}^{-1}$, mierka dĺžok $m_L = 0,01 \text{ m.mm}^{-1}$.



Obr. 5.15 j

Napríklad pre silu v prúte 2 dostaneme: $N_2 = \bar{N}_2 \cdot m_F = 5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1} \Rightarrow N_2 = 50 \text{ kN}$.

Zmysel sily: sila N_2 smeruje von z uzla I a preto v prúte 2 vzniká ťah – hovoríme, že sila N_2 je ťahová.

5.4.2. Všeobecná uzlová metóda

Podstatou všeobecnej uzlovej metódy (VUM) je **zostavenie rovníc rovnováhy pre všetky uvoľnené telesá naraz** a vyriešenie vzniknutej sústavy rovníc. Princíp metódy spočíva v uvoľnení a riešení rovnováhy jednotlivých uzlov prútovej sústavy. Vo všetkých prútoch zavedieme osové sily a ich zmysel opäť zvolíme ako **ťahový** (pôsobia smerom von z uzla).

Už vieme, že ľubovoľnú, staticky určitú, rovinnú PS môžeme vyriešiť zostavením a riešením sústavy (2.u) lineárnych rovníc typu

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0, \quad \text{pre všetky } i = 1, 2, \dots, u, \end{aligned} \quad (5.11)$$

vytvorených pre každý jeden uzol prútovej sústavy.

V maticovom vyjadrení má sústava lineárnych rovníc (5.11) tvar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

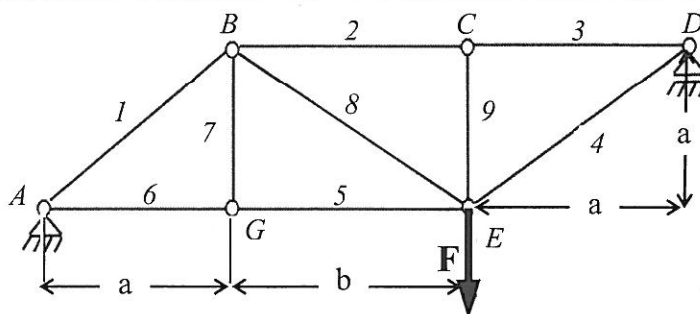
kde $\mathbf{A}$ je štvorcová matica koeficientov n neznámych osových síl a reakcií typu 2.u (matica sústavy, popisujúca PS z geometrického hľadiska), $\mathbf{x}$ je stĺpcová matica neznámych síl v prútoch a vonkajších väzbách, $\mathbf{b}$ je stĺpcová matica vonkajších zaťažovacích účinkov v uzloch a $\mathbf{0}$ je nulová stĺpcová matica.

V prípade, keď je matica sústavy $\mathbf{A}$ regulárna (t.j. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$) pre riešenie sústavy rovníc platí

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (5.13)$$

čo predstavuje maticový zápis **všeobecnej uzlovej metódy**. Jej výhodou je najmä univerzálnosť a relatívna jednoduchosť jej realizácie pomocou výpočtovej techniky. Poradie uvoľňovania uzlov pri zostavovaní rovníc je ľubovoľné a všetky neznáme môžeme takto vyrátať naraz. Použitie maticového zápisu je však pre riešenie reálnych priehradových konštrukcií manuálne náročné a vyžaduje použitie počítačov a príslušajúcej softvérovej podpory. Pre ilustráciu VUM uvedieme postup riešenia na jednoduchšej PS.

Príklad 5.2: V zadanej prútovej sústave (Obr.5.16) pomocou všeobecnej uzlovej metódy určte osové sily v prútoch. Zadané: $F=2000 \text{ N}$, $AG=BG=EC=CD=a$, $BC=GE=b$, uhol $GAB=45^\circ=\alpha$, uhol $GBE=60^\circ=\beta$.



Obr.5.16

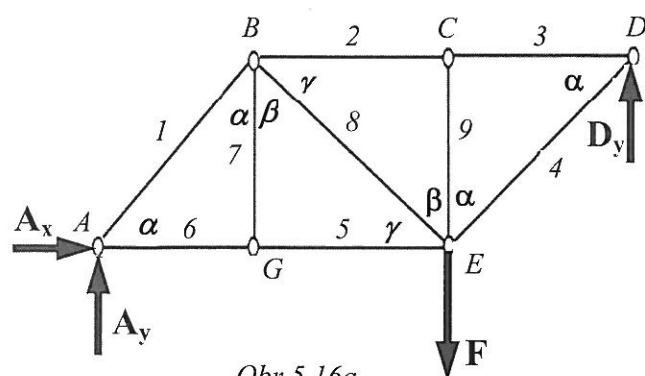
Riešenie:

I. Statická určitosť:

$$2.u = p + 2.p_2 + p_1 \Rightarrow 2.6 = 7 + 2.1 + 1 \Rightarrow 12 = 9 + 2 + 1 - \text{úloha je staticky určitá}$$

Určenie uhlov:

$$\alpha = \angle BAG, \angle ABG, \angle CED, \angle CDE = 45^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{2}/2, \sin \alpha = \sqrt{2}/2$$



Obr. 5.16a

$$\alpha = \angle AGB, BGE, BCE, ECD = 90^\circ \Rightarrow \cos = 0, \sin = 1.$$

$$\beta = \angle GBE, BEC = 60^\circ \Rightarrow \cos = 1/2, \sin = \sqrt{3}/2.$$

$$\gamma = \angle EBC, BEG = 30^\circ \Rightarrow \cos = \sqrt{3}/2, \sin = 1/2.$$

Uhly medzi prútmi PS sú zadane, rozmery a, b a ich hodnoty sú preto v tomto prípade nepodstatné.

II. Uvoľnenie sústavy: (Obr. 5.16a)

III. Definovanie matic $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|cccccccccc|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & N_9 & A_x & A_y & D_y \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{b} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{F}_{E,y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \mathbf{x} = \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ A_x \\ A_y \\ D_y \end{array}$$

IV. Výsledky: vyriešením sústavy 12 rovníc s 12 neznámymi (napr. v softvéri Matlab®) získame:

Väzbové reakcie: sekundárne sily v miestach uloženia

Reakcia	A_x	A_y	D
[N]	0	536	1465

Osové sily: vnútorné silové účinky v prútoch PS

Číslo prúta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Osová sila N_i v [N]	-758	-1464	-1464	2071	536	536	0	1072	0

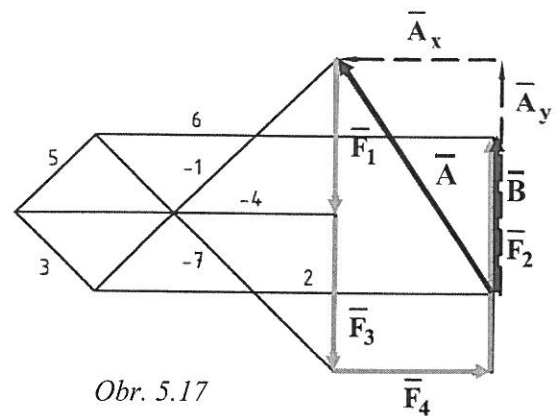
? Správnosť určených osových síl v prútoch 3, 4, 5 zadanej PS (Obr. 5.16) overte použitím PUM a zistenú silu v prútoch 6 a 7 overte graficky.

5.4.3. Cremonova grafická metóda

Základom metódy je pochopenie princípu grafickej interpretácie uzlovej metódy, t.j. grafické riešenie rovnováhy v uzloch (uvažovaných ako RZS). Metóda je aplikovateľná iba na jednoduchšie PS a to tak, že nakreslíme schému PS v mierke a vedľa nej zakresľujeme zložkový obrazec, tzv. **Cremonov obrazec**.

Základný postup spočíva v prekreslení vyšetrovanej PS v zvolenej mierke a zvolení vhodnej mierky silových účinkov. Graficky alebo analyticky určíme väzbové reakcie.

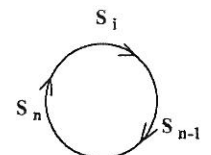
Riešenie začíname zásadne v dvojnom uzle, pričom postupne tvoríme silové obrazce pre jednotlivé uzly v smere zvoleného obehu vonkajších prútov PS a zakresľujeme ich do jediného – integrovaného zložkového (silového) obrazca (Obr.5.17). Pri rovnováhe síl pôsobiacich na PS musí byť obrazec uzatvorený, t.j. musí skončiť v bode, v ktorom sme ho začali kresliť. Výsledný - uzavretý - silový obrazec musí obsahovať všetky vonkajšie sily, väzbové reakcie, ako aj neznáme osovú sily v prútoch. Inak povedané, *Cremonov obrazec* začíname tvoriť zásadne v uzle s dvomi neznámymi osovými silami a prislúchajúci zložkový obrazec kreslíme tak, aby následnosť síl v obrazci odpovedala zvolenému smeru skladania síl. Vo výslednom zložkovom obrazci zostrojenom v zvolenej mierke odmeriame veľkosť neznámych osových síl v prútoch. Pre ich zmysel platí: **Sila pôsobiaca smerom do uzla je tlaková (-); sila pôsobiaca von z uzla je ťahová (+).**



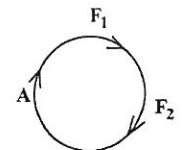
Obr. 5.17

Metódu môžeme zjednodušene charakterizovať ako „**prienik**“ postupne (pre každý uzol zvlášť) uzavretých silových obrazcov získaných grafickou verziou postupnej uzlovej metódy, avšak zakreslený do jediného obrazca. Platí zásada, že zobrazovacie úseky osových síl sa vo výslednom silovom obrazci vyskytujú iba jedenkrát, **tzn. neopakujú sa**. Prienik môžeme získať napr. „stotožnením“ úsekov tých istých síl v silových obrazcoch pre jednotlivé uzly. Pri aplikácii metódy je nutné dodržať určité zásady:

1. Rovnovážnu sústavu vonkajších síl (primárnych síl aj reakcií) kreslíme v poradi, v akom pôsobia po obvode prútovej sústavy, napr.:



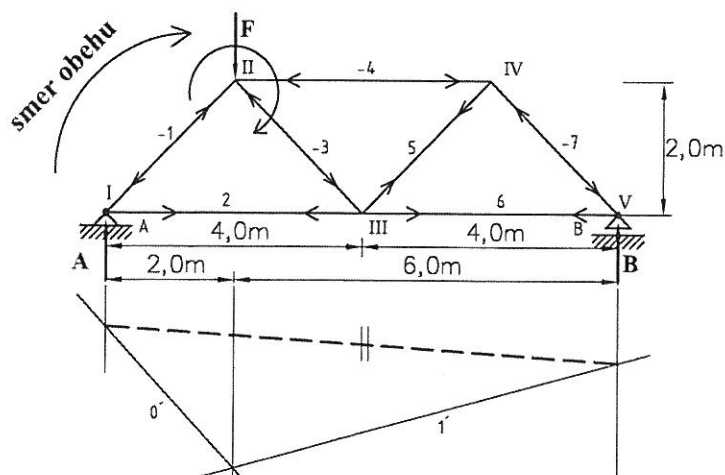
2. Rovnovážny zložkový obrazec síl v každom uzle vynášame v poradi ich usporiadania a v rovnakom zmysle ako vonkajšie sily, napr.:



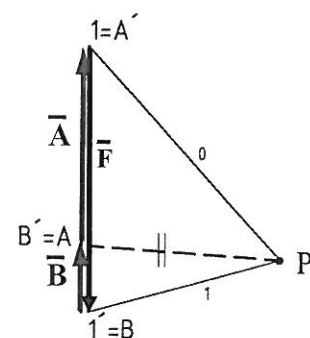
3. Keď sa prúty PS krížia (zriedkavý prípad), v mieste kríženia uvažujeme fiktívne kĺbové spojenie. To rozdelí krížiace sa prúty na dve časti a s každou z nich pracujeme zvlášť.

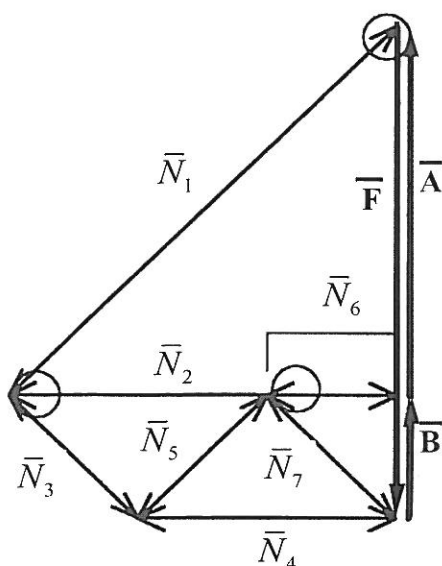
Uzatvorený Cremonov obrazec je kontrolou správnosti i presnosti grafického riešenia. Metóda je vhodná iba pre rovinné prútové sústavy jednoduché. Je názorná, umožňuje rozvíjať predstavivosť, avšak jej použitie vyžaduje určitú skúsenosť a rutinu.

Príklad 5.3: Cremonovou metódou určite veľkosť a zmysel osových síl zadanej PS. Zadané: $F=5\text{kN}$, rozmery a usporiadanie PS podľa Obr.5.18.



Obr. 5.18





Obr. 5.18 a

Riešenie:

Zvolená mierka síl: $m_F = 0,05 \text{ kN.mm}^{-1}$.

1. Určenie väzbových reakcií:

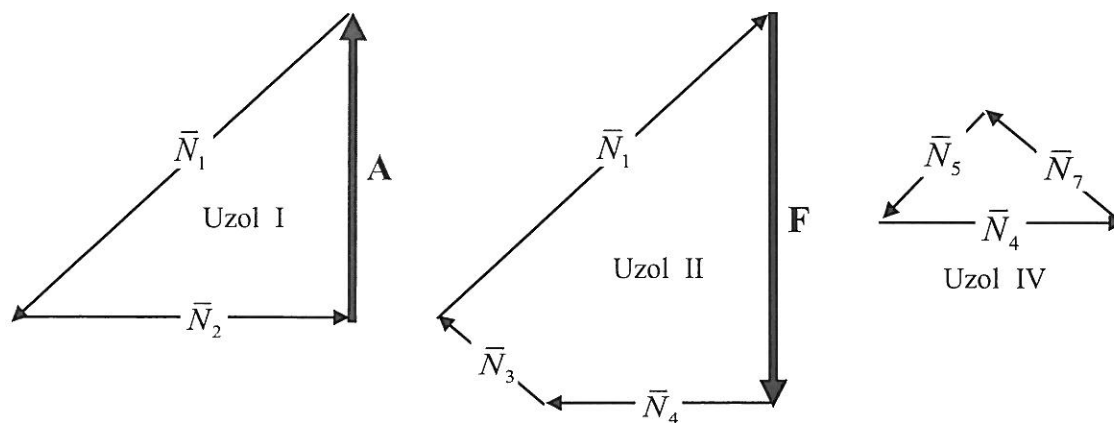
$$\mathbf{A} = m_F \cdot \bar{\mathbf{A}}, \text{ resp. } \mathbf{B} = m_{F_R} \cdot \bar{\mathbf{B}}$$

2. Určenie veľkosti a zmyslu osových síl:

$$\mathbf{N}_i = m_F \cdot \bar{N}_i, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, 7.$$

Poznámky k riešeniu:

- Po výpočte reakcií začíname riešiť vždy v **dvojnóm uzle**. V zvolenom smere obehu síl, najskôr zložíme už známe sily a potom ich výslednicu rozložíme do dvoch smerov (smer uloženia prúta v prútovej sústave).
- Ak zobrazovacie úseky určovaných síl vychádzajú príliš malé / veľké, je nutné zmeniť mierku síl aj v priebehu výpočtu.
- Pri prvých použitíach Cremonovho obrazca je vhodné si označovať dohovoreným znamienkom tie sily, ktorými začíname kresliť rovnováhu v novom (ďalšom) uzle (obr.5.18a). V novom uzle však musí mať logicky táto sila (podľa Obr.5.18b) zaznačený **vždy opačný zmysel**, ako sila v prúte uvažovaná v uzle na druhom konci prúta. Napr. pre uzly I, II a napr. IV by silové obrazce mohli vyzeráť ako na Obr.5.18b.



Obr.5.18 b

Veľkosť osových síl N_i [N] v prútoch PS získame odmeraním ich zobrazovacích úsekov $\bar{N}_i$ [mm] v Cremonovom obrazci (Obr.5.18a) a ich prenasobením mierkou síl m_F [N.mm⁻¹], zvolenou pre vytvorenie Cremonovho silového obrazca na začiatku riešenia.

5.5. Metódy riešenia zložených prútových sústav

Na riešenie zložených, ale aj jednoduchých PS s výhodou využívame tzv. **metódu rezu** (často nazývaná aj ako **priesečná metóda**). Metódu obvykle používame vtedy, ak požadujeme určenie **osových síl iba v niektorých prútoch** alebo v prípadoch, ak **nie je možné použitie uzlovej metódy** (t.j. PS neobsahuje žiadny dvojný uzol). Postup riešenia začíname očíslovaním uzlov a prútov PS a posúdením jej statickej určitosti.

Nasleduje uvoľnenie vybranej časti PS, ktorú získame realizáciou mysleneho, tzv. **uvoľňovacieho rezu**, vedeného zásadne cez prút, ktorého osovú silu chceme určiť. Hľadanú veľkosť a zmysel osovej sily N_i

v „prerezanom“ prúte potom určíme jednoducho vyriešením rovnováhy síl na takto uvoľnenej časti prútovej sústavy.

5.5.1. Metóda rezu – Ritterova priesečná metóda

Metóda rezu (MR) je výhodná vtedy, pokiaľ postačuje určiť iba osovú silu v niektorých prútoch PS. Podstata metódy spočíva v tom, že cez PS vedieme taký myslenný rez $m-m$, prechádzajúci cez maximálne tri riešené prúty (nesmú sa pretínať v spoločnom bode), v ktorých chceme osovú silu určiť.

Jednu, obvykle zložitejšiu, časť modelu priehradového nosníka fiktívne odstránime a jej účinok nahradíme iba formou neznámych osových síl N_i , definovaných práve v prerezaných prútoch. Zavedené osovú silu N_i v myslene prerezaných prútoch uvažujeme na riešenej časti PS ako *vonkajšie zaťaženie*.

Z vhodne formulovaných podmienok rovnováhy pre riešenú časť PS môžeme určiť veľkosť a zmysel neznámych osových síl N_i . Rovnako ako pri vnútorných silách na nosníkoch, môžeme si zvoliť, na ktorej z myslene oddelených častí PS budeme rovnice rovnováhy síl definovať (t.j. ľavá alebo pravá časť).

Princíp metódy vychádza z definovania a riešenia vhodných podmienok (momentových alebo silových) statickej rovnováhy jednej časti PS, oddelenej myslenným rezom. Po uvoľnení vybranej časti PS musia vzniknuté vnútorné (osové) sily vytvoriť rovnovážnu sústavu síl so silami vonkajšími, t.j. silami pôsobiace na analyzovanú časť PS. Definované, najčastejšie momentové, podmienky rovnováhy zvolenej časti PS obvykle určujeme vzhľadom k bodom, ktoré sú priesečníkom osí každej dvojice prerezaných prútov.

Výhodou metódy je skutočnosť, že ak potrebujeme určiť osovú silu iba v jednom prúte alebo vo viacerých prútoch umiestnených v rámci PS ďalej od dvojnásobného uzla, môžeme takto spočítať iba osovú silu v požadovanom prúte PS, a to bez nutnosti určovania osových síl v ďalších prútoch.

Príklad 5.4: Metódou rezu určite v modeli priehradovej konštrukcie väzbové reakcie a vnútorné (osové) sily v prútoch 4, 5 a 6. Zadané: $F_1=10\text{ kN}$, $F_2=20\text{ kN}$, $F_3=30\text{ kN}$. Rozmery a usporiadanie PS podľa Obr.5.19.

Riešenie:

I. Určenie statickej a tvarovej určitosti:

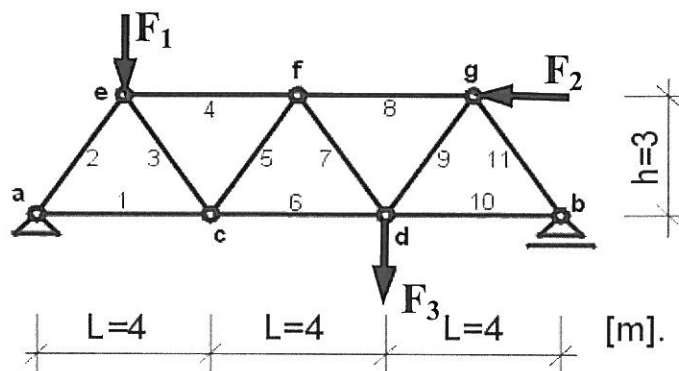
$$u = 7, p = 11, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa podmienky (5.9) platí

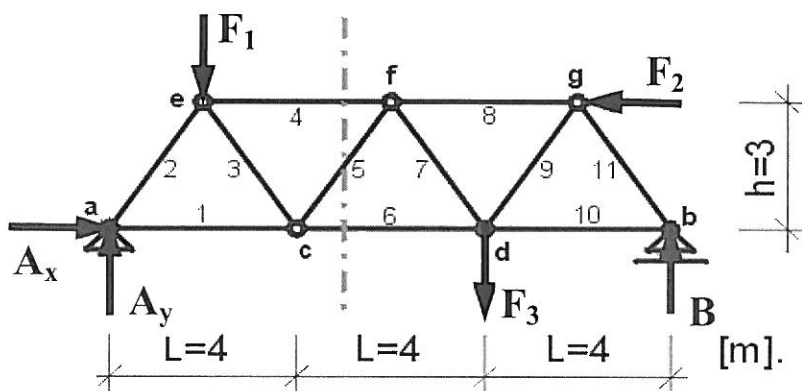
$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1 \Rightarrow 2 \cdot 7 = 11 + 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow$$

$$14 = 14 - \text{sústava je staticky aj tvarovo určitá.}$$

II. Uvoľnenie telesa a výpočet väzbových reakcií:



Obr.5.19



Obr.5.19 a

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - F_2 = 0 \Rightarrow A_x = F_2 = \mathbf{20\text{kN}}$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - F_1 - F_3 + B = 0 \Rightarrow A_y = F_1 + F_3 - B = 10 + 30 - 16,667 = \mathbf{23,333\text{kN}}$$

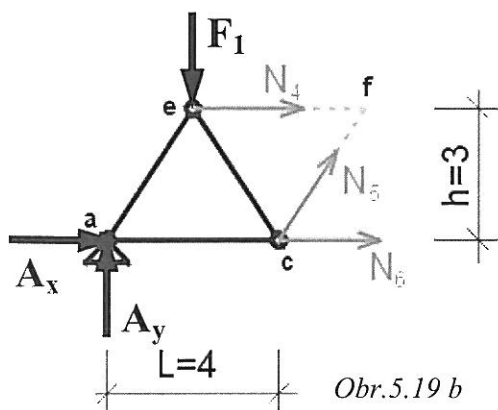
$$\sum M_{ia} = 0: -F_1 \cdot \frac{L}{2} - F_3 \cdot 2L + F_2 \cdot h + B \cdot 3L = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{F_1 \cdot \frac{L}{2} + F_3 \cdot 2L - F_2 \cdot h}{3L} = \frac{10 \cdot 2 + 30 \cdot 8 - 20 \cdot 3}{12} = \mathbf{16,667\text{kN}}.$$

Kontrolná podmienka: $\sum M_{ib} = 0: -A_y \cdot 3L + F_1 \cdot (2L + \frac{L}{2}) + F_2 \cdot h + F_3 \cdot L = 0$

$$-23,333 \cdot 12 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \mathbf{0 = 0} - \text{splnené}.$$

III. Výpočet veľkosti a zmyslu osových síl:



Obr. 5.19 b

Úlohou je určiť veľkosť a zmysel osových síl v prútoch 4, 5, 6. Myslený rez preto vedieme práve cez tieto prúty. Vplyv myslene oddelenej časti PS (napr. pravá časť PS) pre riešenie zvolenú časť (ľavá časť PS) nahradíme neznámymi osovými silami N_4 , N_5 a N_6 . Tieto sily ďalej uvažujeme ako primárne vonkajšie zaťaženie, pôsobiace na zvolenú časť sústavy PS (Obr. 5.19b).

Na začiatku obvykle predpokladáme, že v prútoch vzniká ťah (t.j. smer osovej sily N vystupuje von z uzlov). Podľa Obr. 5.19b definujeme podmienky rovnováhy (môžeme zvoliť opäť ktorýkoľvek z tvarov podmienok rovnováhy VRSS – typ (1), (2) alebo (3). Pri aplikácii metódy rezu je výhodné využívať najmä podmienky rovnováhy – typ (3), t.j. tri momentové podmienky, definované **k vhodne zvoleným bodom** roviny. Najlepšie je, ak momentové body ležia na PS. Napr. z momentovej podmienky k bodu c získame veľkosť sily N_4 a pri dodržaní dohody o znamienkach (4.22) dostaneme

$$\sum M_{ic} = 0: A_y \cdot L - F_1 \cdot \frac{L}{2} + N_4 \cdot h = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{F_1 \cdot \frac{L}{2} - A_y \cdot L}{h} = \frac{10 \cdot 2 - 23,333 \cdot 4}{3} \Rightarrow N_4 = \mathbf{-24,444\text{ kN}}.$$

Neznámu osoú silu N_i môžeme určovať (ak je to výhodné / potrebné) aj z podmienky definovanej k bodu neležiacemu na riešenej časti konštrukcie, napr. bod f . Stále platí už uvedené tvrdenie, že ak je VRSS v rovnováhe, musia byť splnené podmienky rovnováhy aj ku všetkým ďalším bodom v rovine. Podľa toho môžeme z momentovej podmienky k bodu f (Obr. 5.19b) určiť veľkosť sily N_6 (sily N_4 a N_5 nemajú k bodu f žiadny momentový účinok – ich nositeľky bodom f prechádzajú (a to je pre výpočet výhodné). Dostaneme

$$\sum M_{if} = 0: A_y \cdot \frac{3L}{2} - A_x \cdot h - F_1 \cdot L - N_6 \cdot h = 0 \Rightarrow N_6 = \frac{A_y \cdot \frac{3L}{2} - A_x \cdot h - F_1 \cdot L}{h} = \frac{23,333 \cdot 6 - 20 \cdot 3 - 10 \cdot 4}{3}$$

$$N_6 = \mathbf{13,333\text{ kN}}.$$

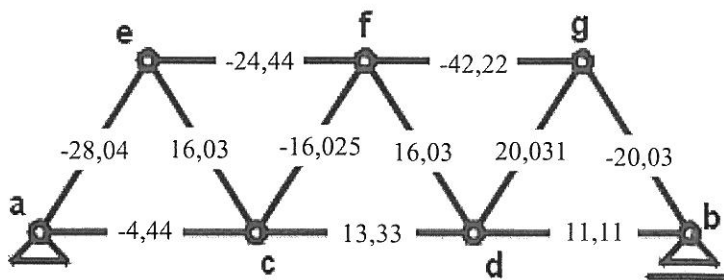
Silu N_5 môžeme potom ľahko určiť (už poznáme sily N_4 aj N_6) z ľubovoľnej momentovej podmienky, napr. k bodu a a dostaneme

$$\sum M_{ia} = 0: F_1 \cdot \frac{L}{2} + N_4 \cdot h - N_{5y} \cdot L = F_1 \cdot \frac{L}{2} + N_4 \cdot h - N_5 \cdot \sin \alpha \cdot L \Rightarrow N_5 = \frac{F_1 \cdot \frac{L}{2} + N_4 \cdot h}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{10 \cdot 2 + (-24,444 \cdot 3)}{4,0,832}$$

$$N_5 = \mathbf{-16,025\text{ kN}}.$$

IV. Výsledky:

Priebehy vnútorných síl po dĺžke jednotlivých prútov u PS nekreslíme, nakoľko prúty sú namáhané iba v smere ich osi a priebeh osovej sily N je po celej dĺžke prúta konštantný. Zakresľujeme buď iba schému PS s určenými hodnotami síl v prútoch (Obr.5.19c), príp. volíme formu tabuľky. **Pozor:** Opäť však platí, že ak vyjde osová sila kladná (+N) - **prút je natáhaný** (tzn. N smeruje von z uzla), naopak ak vyjde hodnota záporná, **prút je stláčaný** a sila N smeruje do uzla.



Obr. 5.19 c

Väzbové reakcie: sily v miestach uloženia:

Reakcia	A_x	A_y	B
[kN]	20	23,333	16,667

Vnútorné silové účinky v prútoch:

Prút i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N_i [kN]	-4,44	-28,04	+16,03	-24,44	-16,03	+13,33	+16,03	-42,22	+20,03	+11,11	-20,03

Poznámka: Metóda je veľmi efektívna, pokiaľ postačuje určiť iba osovú silu v prútoch, umiestnených ďalej od podpier. Napr. pri určení osovej sily N_6 sme v prípade použitia MR potrebovali riešiť iba 1 rovnicu, pri použití PUM by bolo nutné vyriešiť 6 rovníc.

Príklad 5.5: Metódou rezu určite osovú silu v prútoch 8, 9, 10 zadanej prútovej sústavy. Zadané: $F_1 = 3$ kN, $F_2 = 6$ kN, rozmery a usporiadanie PS podľa obr. 5.20.

Riešenie:

I. Rozbor úlohy:

Úloha zadaná úplne, ide o rovinný problém. Zložená PS.

Určenie statickej určitosti :

- vonkajšia: $n_v = n_o \Rightarrow 3 = 3$.
- vnútorná: $2u = 3 + p \Rightarrow 12 = 3 + 9 \Rightarrow 12 = 12$ - úloha je staticky aj tvarovo určitá.

II. Väzbové reakcie:

$$\sum M_{iA} = 0: -F_2 \cdot 2 + B \cdot 7 \Rightarrow B = \frac{F_2 \cdot 2}{7} = 1,715 \text{ kN}$$

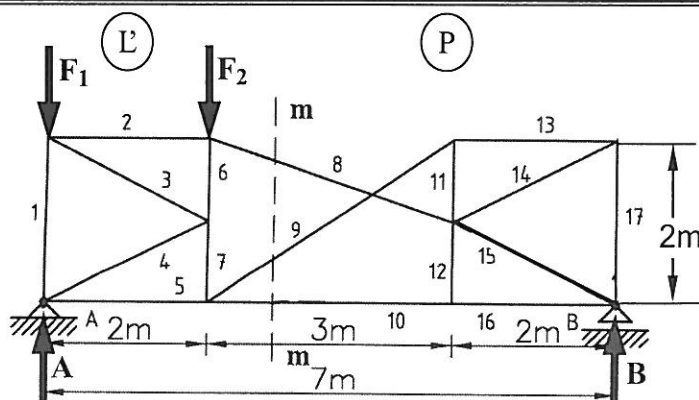
$$\sum M_{iB} = 0: -A \cdot 7 + F_1 \cdot 7 + F_2 \cdot 5 \Rightarrow A = \frac{F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 5}{7} = 7,285 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0: A_x = 0 \text{ kN}$$

Primárne sily sú iba zvislé $\Rightarrow$ zložka výslednice akčných síl F v smere osi x bude nulová ($A_x = 0$).

Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: A - F_1 - F_2 + B = 0 \Rightarrow 7,285 - 3 - 6 + 1,715 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené..}$$



Obr. 5.20

Pre preukázanie možnosti využitia aj ďalších typov rovnovážnych podmienok naznačíme ešte riešenie pomocou rovníc rovnováhy VRSS – typ (1). Je to síce mierne komplikovanejšie, ale možné riešenie. Platí

$$\sum F_{ix} = 0 : -N_{10} - N_8 \cdot \sin \alpha - N_9 \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow N_{10}$$

$$\sum F_{iy} = 0 : B + N_8 \cdot \cos \alpha - N_9 \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow N_8$$

$$\sum M_{IB} = 0 : N_8 \cdot \sin \alpha \cdot 1 - N_8 \cdot \cos \alpha \cdot 2 + N_9 \cdot \cos \beta \cdot 2 + N_9 \cdot \sin \beta \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_9 = \frac{N_8 \cdot \cos \beta \cdot 2 - N_8 \cdot \sin \beta \cdot 1}{2 \cdot (\cos \beta + \sin \beta)}$$

Po dosadení za silu N_9 z tretej rovnice do rovnice druhej môžeme určiť osoú silu N_8 , resp. po dosadení za N_9 a N_8 do rovnice prvej určiť aj veľkosť sily N_{10} . Použitie silových rovníc nemusí byť však vždy vhodné.

Záver: Výpočet metódou rezu by bolo možné aplikovať na všetky prúty v PS. Je ale výhodnejšie, keď po určení osových síl v niekoľkých prútoch PS a získaní aspoň jedného dvojného uzla, pokračujeme vo výpočte menej teoreticky náročným spôsobom, napr. PUM. Výhodou metódy rezu je najmä skutočnosť, že ak nepotrebujeme poznať osové sily vo všetkých prútoch PS, môžeme takto určiť **iba osové sily vo vopred definovaných prvkoch priehradovej konštrukcie**.

Príklad 5.6: Pre jednoduchú priehradovú konštrukciu (obr.5.21) určite väzbové reakcie, nájdite najviac zaťažný prút PS a rozhodnite, ktoré prúty je možné kvôli odľahčeniu konštrukcie nahradiť lanom. Zadané: $m=1,2 \text{ kg}$, $l=0,5 \text{ m}$, $\beta=30^\circ$, $g \cong 10 \text{ m.s}^{-2}$. Úlohu vyriešte postupnou uzlovou metódou a výsledok v prútoch 1,3,7 overte prostredníctvom metódy rezu..

Riešenie:

I. Rozbor úlohy:

Klasifikácia väzieb:

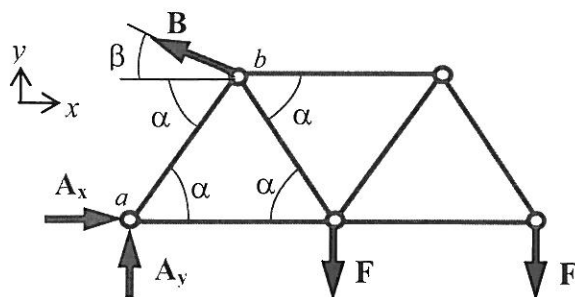
a – pevný kĺb, b – spojenie lanom

Kinematický rozbor:

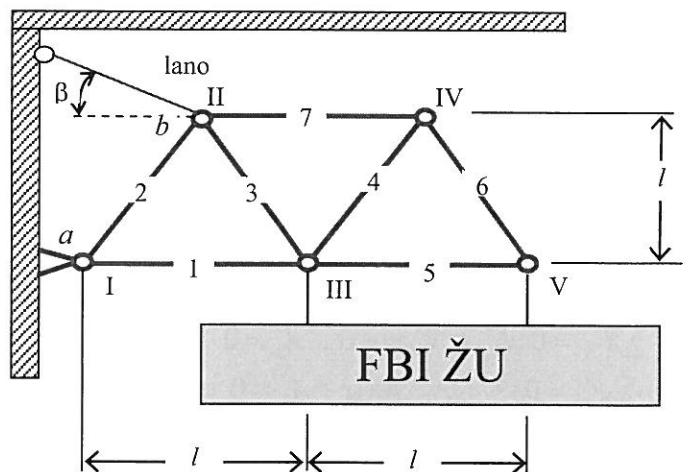
Všeobecná rovinná úloha.

Vonkajšia statická určitosť $n = 3 - (2+1) = 0 \Rightarrow$ sústava telies sa nemôže pohybovať.

II. Uvoľnenie prútového telesa: (Obr.5.21a)



Obr.5.21 a



Obr.5.21

Celková statická určitosť:

$$2u = p + 2 \cdot p_2 + p_1 \Rightarrow 2 \cdot 5 = 7 + 2 \cdot 1 \Rightarrow 10 = 10 \Rightarrow \text{staticky určitý problém}$$

Analýzu silových účinkov pôsobiach na PS môžeme rozdeliť do dvoch hlavných častí:

I. celú PS budeme uvažovať ako jedno viazané teleso a určíme väzbové reakcie (často nazývané aj ako stykové sily vo väzbách na rám), **pôsobiace v bodoch a, b.**

II. Väzbové reakcie: $F = \frac{G}{2} = \frac{m \cdot g}{2} = \frac{1,2 \cdot 10}{2} = 6 \text{ N}.$

Určenie väzbových reakcií (Obr.5.21a):

$$\sum F_{ix} = 0: A_x - B \cdot \cos \beta = 0 \Rightarrow A_x = B \cdot \cos 30^\circ = 13,97 \text{ N}$$

$$\sum F_{iy} = 0: A_y - 2 \cdot F + B \cdot \sin \beta = 0 \Rightarrow A_y = 2 \cdot F - B \cdot \sin 30^\circ = 3,94 \text{ N}$$

$$\sum M_{ia} = 0: -F \cdot l - F \cdot 2l + B \cdot \cos \beta \cdot l + B \cdot \sin \beta \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{F \cdot l + F \cdot 2l}{\cos \beta \cdot l + \sin \beta \cdot l/2} = 16,13 \text{ N}$$

Kontrolná podmienka:

$$\sum M_{ib} = 0: A_x \cdot l - A_y \cdot \frac{l}{2} - F \cdot \frac{l}{2} - F \cdot 1,5l = 0 \Rightarrow 6,985 - 0,985 - 1,5 - 4,5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}$$

Zápis statických podmienok rovnováhy v maticovej forme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos 30^\circ \\ 0 & 1 & \sin 30^\circ \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2F \\ 1,5F \end{bmatrix}$$

Zhodnotenie: Väzba b je realizovaná prostredníctvom lana. Kladná hodnota reakcie $\mathbf{B}$ naznačuje, že väzba b je funkčná a predpoklad jej smeru (ťahová sila), zvolený na začiatku riešenia, bol správny.

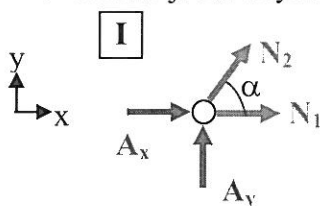
2. analýzou vnútornej rovnováhy síl v PS určíme veľkosť a zmysel osových síl v jednotlivých prútoch

III. Osové sily:

Zo zadania musíme dourčiť veľkosť uhla α : $\tan \alpha = \frac{l}{l/2} = 2 \Rightarrow \alpha = \arctg 2 \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$.

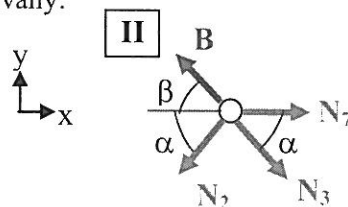
Pre výpočet budeme využívať hodnoty: $\sin \alpha = 0,8945$, $\cos \alpha = 0,447$.

- Uvoľnenie jednotlivých uzlov a definovanie podmienok rovnováhy:



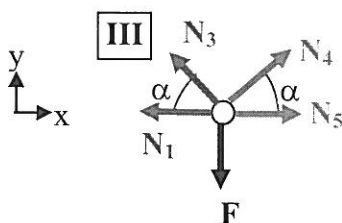
$$(1) \sum F_{ix} = 0: N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha + A_x = 0$$

$$(2) \sum F_{iy} = 0: N_2 \cdot \sin \alpha + A_y = 0$$



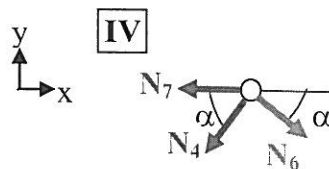
$$(3) \sum F_{ix} = 0: N_7 - B \cdot \cos \beta + N_3 \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$(4) \sum F_{iy} = 0: B \cdot \sin \beta - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$$



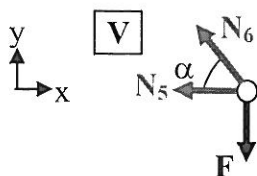
$$(5) \sum F_{ix} = 0: N_5 - N_1 + N_4 \cdot \cos \alpha - N_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$(6) \sum F_{iy} = 0: N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \alpha - F = 0$$



$$(7) \sum F_{ix} = 0: -N_7 - N_4 \cdot \cos \alpha + N_6 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$(8) \sum F_{iy} = 0: -N_4 \cdot \sin \alpha - N_6 \cdot \sin \alpha = 0$$



$$(9) \sum F_{ix} = 0: -N_5 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$(10) \sum F_{iy} = 0: -F + N_6 \cdot \sin \alpha = 0$$

- Riešenie sústavy rovníc:

Rovnice statickej rovnováhy pre jednotlivé uvoľnené uzly PS môžeme riešiť aj naraz, t.j. ako sústavu 10 rovníc s 10 neznámymi. V prvej časti riešenia sme už vyriešili z rovníc rovnováhy konštrukcie ako celku vznikajúce väzbové reakcie A_x , A_y , B . Z uvedených 10 rovníc nám preto stačí použiť iba 7 rovníc, pomocou ktorých dokážeme určiť, zatiaľ neznáme, osovú silu v prútoch 1 až 7. Využime napr. rovnice (1-7) a platí:

$$(1) \sum F_{ix} = 0: N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha + A_x = 0 \Rightarrow N_1 = -N_2 \cdot \cos \alpha - A_x = -12 \text{ N}$$

$$(2) \sum F_{iy} = 0: N_2 \cdot \sin \alpha + A_y = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{-A_y}{\sin \alpha} = -4,4 \text{ N}$$

$$(3) \sum F_{ix} = 0: N_7 - B \cdot \cos \beta + N_3 \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_7 = B \cdot \cos \beta - N_3 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha = 6 \text{ N}$$

$$(4) \sum F_{iy} = 0: B \cdot \sin \beta - N_2 \cdot \sin \alpha - N_3 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{B \cdot \sin \beta - N_2 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = 13,42 \text{ N}$$

$$(5) \sum F_{ix} = 0: N_5 - N_1 + N_4 \cdot \cos \alpha - N_3 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_5 = N_1 - N_4 \cdot \cos \alpha + N_3 \cdot \cos \alpha = -3 \text{ N}$$

$$(6) \sum F_{iy} = 0: N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \alpha - F = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{F - N_3 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = -6,71 \text{ N}$$

$$(7) \sum F_{ix} = 0: -N_7 - N_4 \cdot \cos \alpha + N_6 \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_6 = \frac{N_7 + N_4 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{6,93 - 6,93 \cdot 0,5}{0,5} = 6,71 \text{ N}$$

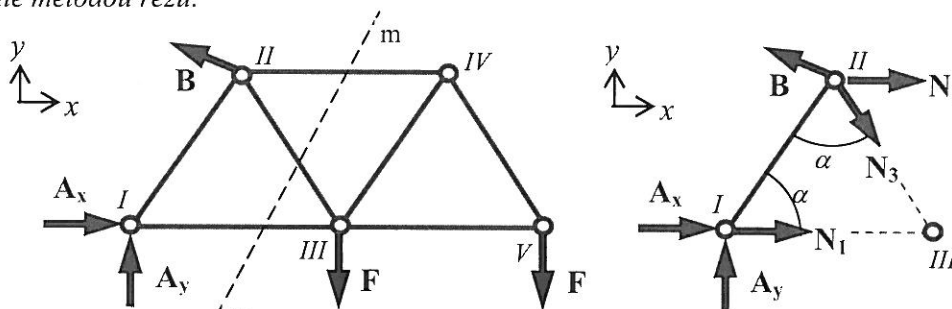
Kontrolná rovnica:

$$(8) \sum F_{iy} = 0: -N_4 \cdot \sin \alpha - N_6 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_6 = \frac{-N_4 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = -N_4 = 6,71 \text{ N}$$

- Zápis rovníc statickej rovnováhy v maticovej forme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, vhodnej pre numerické riešenie:

$$\begin{array}{ccccccc} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 \\ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\cos \alpha & \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha & 0 & \cos \alpha & -1 \end{bmatrix} & \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -A_x \\ -A_y \\ B \cdot \cos \beta \\ -B \cdot \sin \beta \\ 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

IV. Overenie metódou rezu:



Obr.5.21b

Vedíme myslenný rez $m-m$, prechádzajúci práve cez prúty 1, 3, 7 (Obr.5.21b), v ktorých máme za úlohu overiť výsledky získané prostredníctvom PUM. Zvolíme si jednu z fiktívne oddelených častí a zavedieme osovú silu N_1 , N_3 a N_7 , pričom ich zmysel volíme ako ťahový, t.j. sily z uzlov vystupujú.

Pre riešenie zvolíme napr. ľavú časť myslene rozdelenej PS (Obr.5.21b) a zavedieme osovú silu N_I , N_3 a N_7 . Pre rovnováhu síl pôsobiacich na ľavú časť PS platia rovnice rovnováhy, definované napr. v tvare

$$\sum M_{III} = 0: -N_7 \cdot l - A_y \cdot l + B \cdot \cos \beta \cdot l - B \cdot \sin \beta \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow N_7 = \frac{-A_y \cdot l + B \cdot \cos \beta \cdot l - B \cdot \sin \beta \cdot \frac{l}{2}}{l} = 6 \text{ N}$$

$$\sum M_{II} = 0: N_I \cdot l - A_y \cdot \frac{l}{2} + A_x \cdot l = 0 \Rightarrow N_I = \frac{A_y \cdot \frac{l}{2} - A_x \cdot l}{l} = -12 \text{ N}$$

$$\sum M_I = 0: -N_3 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} - N_3 \cdot \cos \alpha \cdot l - N_7 \cdot l + B \cdot \cos \beta \cdot l + B \cdot \sin \beta \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N_3 = \frac{-N_7 \cdot l + B \cdot \cos \beta \cdot l + B \cdot \sin \beta \cdot \frac{l}{2}}{\sin \alpha \cdot \frac{l}{2} + \cos \alpha \cdot l} = 13,41 \text{ N.}$$

Samozrejme, bolo by možné uvažovať aj druhú časť PS – napravo od mysleneho rezu. Uvedeným spôsobom môžeme určovať sily aj v ďalších prútoch PS, stačí viesť myslenný rez cez zvolené prúty a analogicky určiť osovú silu v nich. Bolo by možné použiť samozrejme aj iný typ podmienok rovnováhy, avšak typ (3) je pre aplikáciu metódy rezu najvhodnejší.

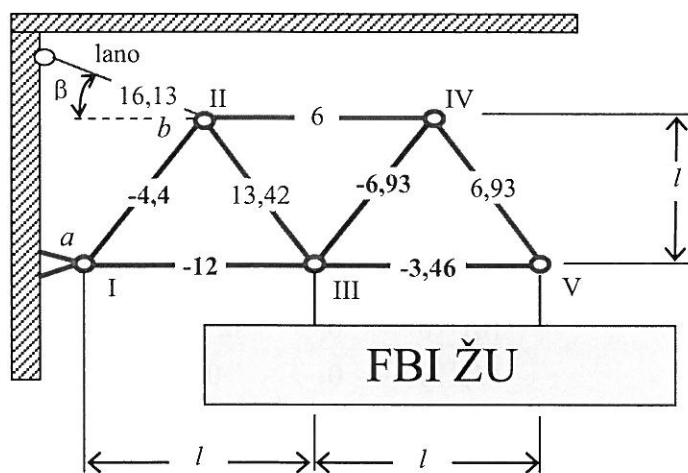
V. Výsledky:

Číslo prúta	1	2	3	4	5	6	7
Osová sila N_i v [N]	-12	-4,4	13,42	-6,93	-3,46	6,93	6

VI. Najviac namáhaný prút, nahradenie lanom

Najviac zaťažený prútom PS (samozrejme pri uvažovaní absolútnej veľkosti zaťaženia, t.j. nie je dôležité, či ide o ťah alebo tlak) je **prút 1** s tlakovou silou $N_I = -12 \text{ N}$, resp. **prút 3** s osovou ťahovou silou $N_3 = 13,42 \text{ N}$.

V konštrukcii by bolo možné z dôvodu zníženia jej hmotnosti **nahradiť lanom** všetky prúty namáhané tlakom (t.j. osovú silu so znamienkom (-), resp. sily smerujúce do uzla). V zadanom príklade by sa jednalo o **prúty č. 1, 2, 4 a 5** (Obr.5.21c).



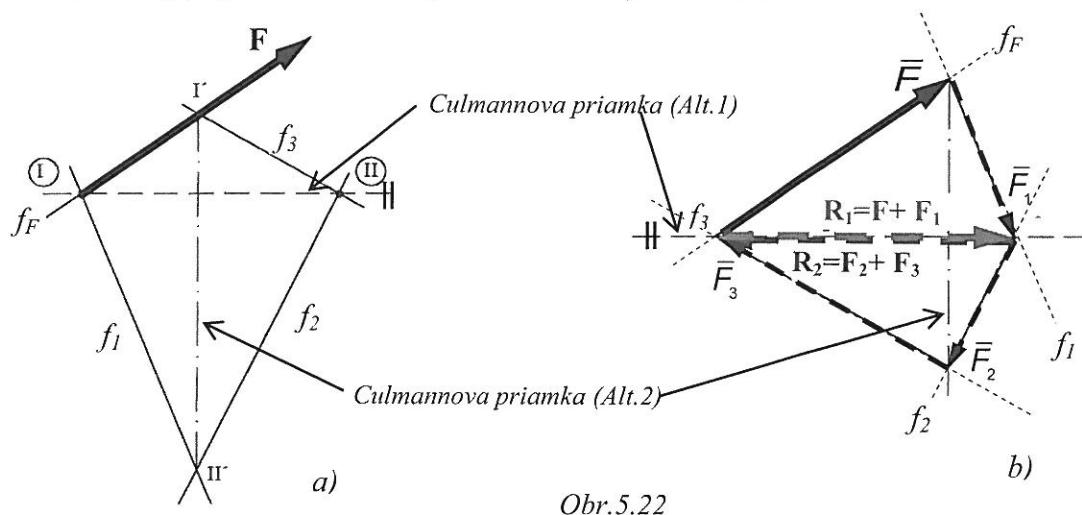
Obr.5.21c

? Určené osovú sily v prútoch 1, 3, 7 overte metódou rezu, avšak s využitím pravej časti PS, oddelenej myslenným rezom. Metódou rezu určte osovú sily N_5 a N_6 a porovnajte ich s výsledkom v tabuľke.

5.5.2. Culmannova grafická metóda

V rámci teórie o rovnováhe síl a silových sústav je jednoznačne a preukázateľne zdôvodnená možnosť riešenia problému **uvedenia zadanej sily F do rovnováhy s troma ďalšími, neznámymi silami**, ležiacimi na známych nositeľkách, ktoré sa nepretínajú v spoločnom priesečníku. Úloha nie je riešiteľná analyticky, ale graficky je možné využiť tzv. **Culmannovu priamku**.

Podstata grafického riešenia PS, ktoré neobsahujú žiadny dvojný uzol je založená na využití grafického spôsobu riešenia rovnováhy štyroch síl v rovine prostredníctvom Culmannovej priamky. U troch zo síl sú známe iba ich smery a miesto ich nositeľky (nepoznáme ich veľkosť), štvrtá sila je zadaná úplne. Jedná sa v podstate o špecifický prípad rozkladu 1 sily do troch zadaných smerov.



Obr.5.22

Na obr.5.22a je nakreslená sila F a nositeľky f_1, f_2, f_3 (zatiaľ) neznámych síl F_1, F_2, F_3 . Pri rovnováhe sústavy síl musí byť splnená podmienka v tvare

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \mathbf{0}. \quad (5.14)$$

Z poznatkov o RZS vieme, že dve sily majú výslednicu, ktorá prechádza priesečníkom ich nositeľiek. Napr. sila F a zatiaľ neznáma sila F_1 majú výslednicu, prechádzajúcu priesečníkom ich nositeľiek - bod (I) (obr.5.22a) a platí $\mathbf{R}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1$. Analogicky platí, že výslednica zatiaľ neznámych síl F_2 a F_3 prechádza bodom (II) a platí $\mathbf{R}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$. Pri rovnováhe sústavy všetkých síl musí platiť $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{0}$, tzn. sily $\mathbf{R}_1$ a $\mathbf{R}_2$ musia byť kolieárne (ležia na jednej nositeľke). Spoločnou nositeľkou oboch výsledníc je spojnica I,II , predstavujúca tzv. **Culmannovu priamku**. Takto je možné relatívne veľmi jednoducho získať smer výsledníc $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$, obvykle zo silového obrazca (obr.5.22b). Úloha má aj ďalšie dve alternatívne riešenia – jedným z nich je napr. spojnica I',II' .

Praktická aplikácia Culmannovej metódy pri riešení PS spočíva v rozdelení PS uvoľňovacím rezom $m-m$ na dve časti. Rez je vedený cez maximálne tri prúty (nie viac, pretože v rovine máme k dispozícii iba tri podmienky rovnováhy), ktoré sa nepretínajú v jednom bode. V prípade, ak na uvoľnenú časť sústavy pôsobí viac ako jedna známa sila, je vhodné najskôr určiť ich výslednicu. Vychádzajme z predpokladu, že na oboch uvoľnených častiach je rovnováha síl. Vykonáme výpočet rovnováhy síl na vybranej časti PS (z praktických dôvodov volíme obvykle časť, pre ktorú je výpočet menej prácny).

Po určení smeru Culmannovej priamky (Obr.5.22b) odmeriame získané dĺžky zobrazovacích úsekov hľadaných osových síl N_i a ich transformáciou pomocou zvolenej mierky síl m_F získame veľkosť hľadaných síl v [N]. Po určení osových síl vo všetkých troch „prerezaných“ prútoch môžeme pokračovať vo výpočte v ďalších prútoch PS, napr. PUM, nakoľko sa v sústave už obvykle vyskytuje aj dvojný uzol.

5.6. Metódy riešenia zložitých prútových sústav

Pri riešení zložitých prútových sústav najčastejšie využívame tzv. **princíp superpozície**, t.j. analýzy jednotlivých vplyvov a ich následné sčítanie (metóda náhradného prúta) alebo tzv. **princíp proporcionality** medzi vonkajším zaťažením a veľkosťou osových síl v prútoch PS (metóda neurčitej mierky). Metódy riešenia zložitých prútových sústav uvedieme iba informatívne, nakoľko aktuálne najviac využívané numerické riešenie PS a jeho všeobecné princípy už nerozlišujú druh riešenej sústavy telies.

5.6.1. Hannebergova metóda náhradného prúta

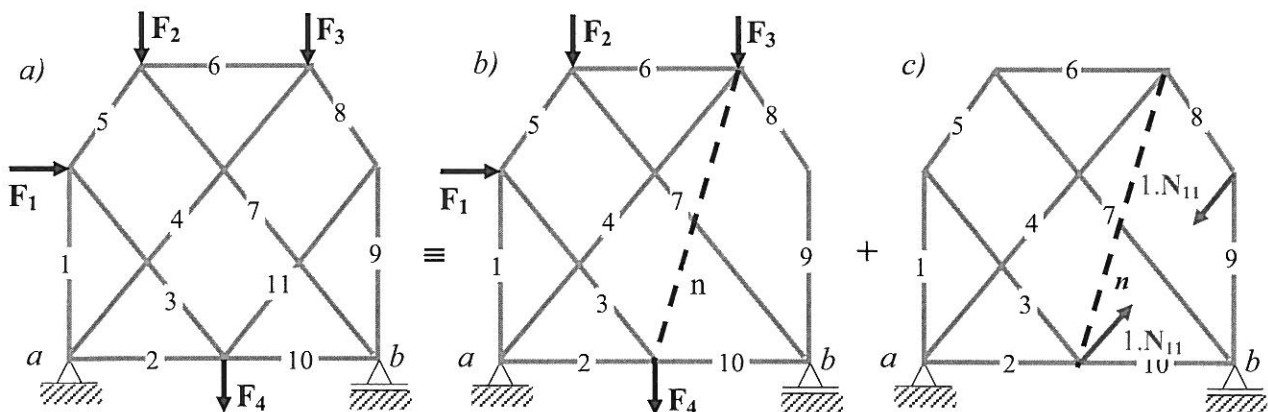
Metódu používame na riešenie PS neobsahujúcich žiadny dvojný uzel a neumožňujúcich ani nájsť žiadneho rezu $m-m$, prechádzajúceho tromi prútmi PS. Je vhodná tiež na statické riešenie vnútorných síl u sústav telies s vonkajšou statickou neurčitou, kedy nie je možné určiť vonkajšie väzbové reakcie a preto nemožno ani vyriešiť osovú silu.

Základný princíp metódy je založený na zmene geometrie PS, vyvolanej **zmenou polohy jedného jej prúta** (príp. ak je potrebné aj viacerých prútov) tak, aby bolo možné PS vyriešiť niektorou z metód riešenia jednoduchých PS. Zmenou polohy vhodne zvoleného prúta PS sledujeme cieľ - získanie dvojného uzla. Aby však bola stále zachovaná nutná podmienka statickej určitosti a najmä statickej ekvivalencie oboch PS, musí byť počet odobratých prútov rovnaký, ako počet pridaných, tzv. **náhradných prútov (n)**.

Aby výsledok statického riešenia náhradnej PS jednoznačne odpovedal statickému riešeniu PS pôvodnej, musia byť splnené dva základné predpoklady a to:

1. V uzle, v ktorom boli odobraté prútové väzby, musí pôsobiť silový účinok odpovedajúci osovým silám v odobratých prútoch.
2. Z dôvodu reálnej neexistencie náhradných prútov musia byť osovú silu v nich nulové ($N_n=0$).

Superpozíciou v podstate riešime dve samostatné silové sústavy. Osovú silu v prerušených prútových väzbách určíme z podmienky nulových osových síl v náhradných prútoch ($N_n=0$). Následne určíme sily v prútoch PS pod zaťažením vonkajšími silami, ale už bez uvažovania síl nahrádzajúcich odobraný prút (Obr.5.23b). Znamená to, že princíp superpozície použijeme tak, aby sa náhradný prút (n) stal nulovým a aby bolo možné v závere riešenia náhradný prút z PS odstrániť, tzn. neuvažovať s ním (obr.5.23 b,c).



Obr. 5.23

Pôvodne zložitá PS (obr.5.23a) je nahradená dvomi jednoduchými sústavami, ktoré vznikli :

1. Odobratím jedného prúta (v tomto prípade prút 11) a zavedením **náhradného prúta n** (obr.5.23b), potrebného pre zachovanie tvarovej určitosti oboch náhradných sústav.
2. Uvažovaním zaťaženia PS jednotkovými silami v uzloch, kde pôsobil odobraný prút (v tomto prípade $N_{11} = 1$, tzv. **jednotkový vektor**) (obr.5.23c).

V oboch náhradných jednoduchých PS určíme vznikajúce osovú silu v jednotlivých prútoch – tzn. sily N_i' a N_n' (obr.5.23b) a sily od zaťaženia jednotkovou silou $N_{11} = 1$, t.j. sily N_i'' a N_n'' (obr.5.23c).

Nová sústava telies - zaťažená vonkajšími silami F_i , väzbovými reakciami **A**, **B** a v miestach odobratého prúta aj silou N_{11} - bude staticky ekvivalentná pôvodnej PS iba vtedy, keď **osová sila v náhradnom prúte n bude nulová**, t.j. ak bude platiť $N_n=0$. Výsledné hodnoty osových síl v jednotlivých prútoch PS potom získame superpozíciou (sčítaním) osových síl v príslušajúcich prútoch oboch náhradných sústav.

Pre osové sily v prútoch platí

$$N_i = N'_i + N''_i \cdot N_{11} \quad (5.15)$$

a pre silu v náhradnom prúte platí $N_n = N'_n + N''_n \cdot N_{11}$. (5.16)

Pozor: Zatiaľ však nepoznáme reálnu veľkosť sily N_{11} . Doteraz sme ju uvažovali iba ako jednotkovú mieru – a preto ešte použitie vzťahov (5.15) a (5.16) nie je možné.

Z podmienky nulovej veľkosti sily v náhradnom prúte, t.j. $N_n = 0$ (!) po dosadení do (5.16) dostaneme

$$N_n = N'_n + N''_n \cdot N_{11} = 0$$

z čoho vyplýva, že
$$N_{11} = -\frac{N'_n}{N''_n}. \quad (5.17)$$

Ak už poznáme skutočnú veľkosť sily N_{11} , môžeme určiť aj ostatné osové sily podľa vzťahu (5.15).

Príklad 5.7: Metódou náhradného prúta vyriešte zložitú prútovú sústavu (obr. 5.24). Zadané: $F=6$ kN.

Riešenie:

Najskôr je potrebné (tak ako vždy v statike) určiť statickú určitosť a väzbové reakcie. V zadanej PS určíme reakcie z rovnováhy síl **F**, **A**, **B**. Ich nositeľky sa pretínajú v spoločnom priesečníku – bod (K) $\Rightarrow$ sily **F**, **A**, **B** tvoria rovinný zväzok síl. Z podmienok rovnováhy pre RZS môžeme určiť veľkosť reakcií a platí

$$\sum M_{iA} = 0: -F \cdot 4 + B \cdot 6 = 0 \Rightarrow B = \frac{F \cdot 4}{6} = 4 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iB} = 0: A_y \cdot 6 - F \cdot 4 = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F \cdot 4}{6} = 4 \text{ kN}$$

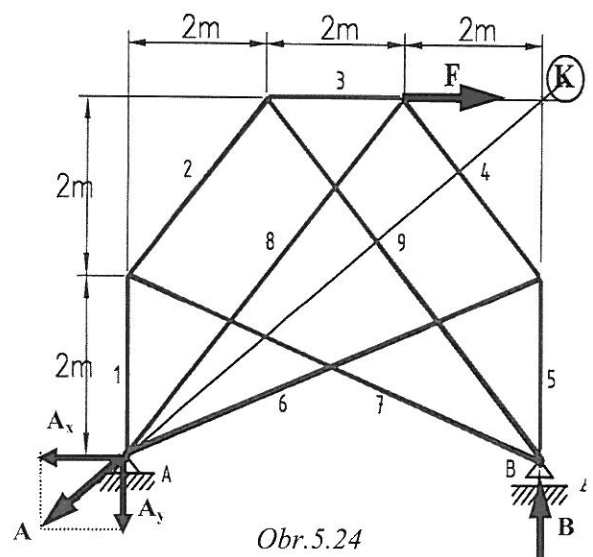
$$\sum F_{ix} = 0: -A_x + F = 0 \Rightarrow A_x = F = 6 \text{ kN}$$

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \Rightarrow A = \sqrt{52} = 7,2 \text{ kN}$$

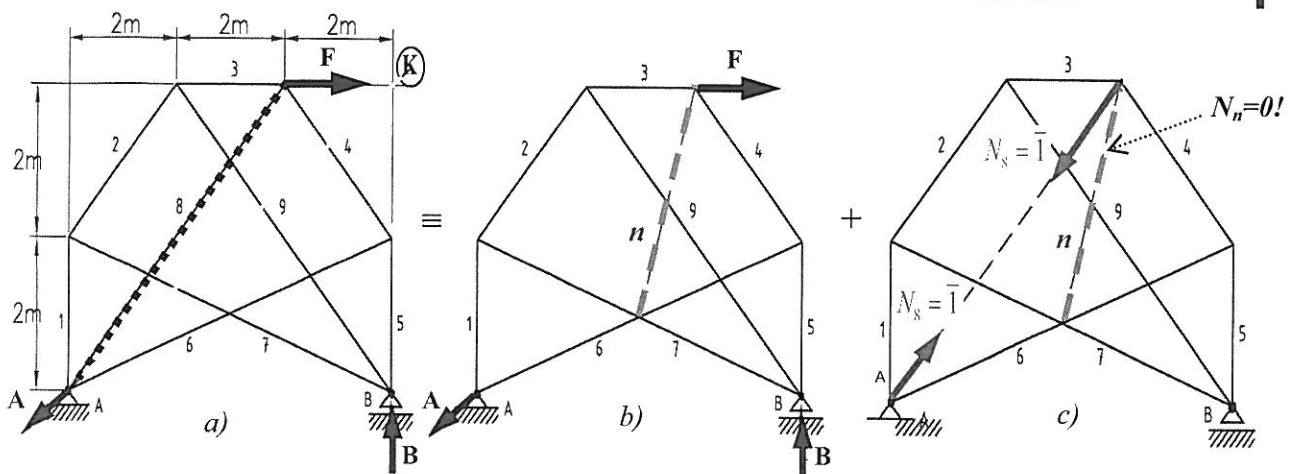
Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: -A_y + B = 0 \Rightarrow -4 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Vyberieme vhodný prút, napr. **prút 8**, zavedieme náhradný prút **n** a pôvodnú PS nahradíme dvoma jednoduchými sústavami (obr.5.24 a,b,c).



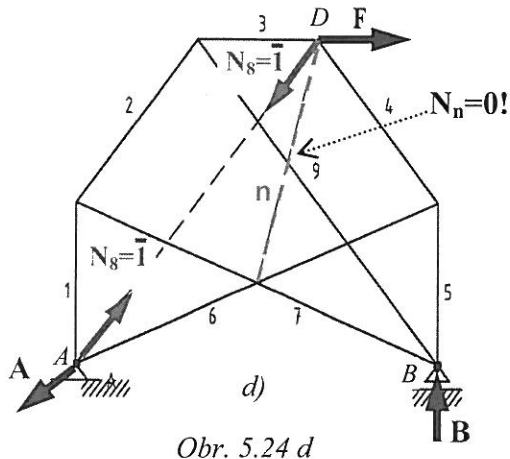
Obr.5.24



Obr. 5.24 a,b,c

Vo výslednej náhradnej PS (obr.5.24d) vyriešime:

1. sily N_i' a N_n' - tzn. osovú silu (N_i') v prútoch *od vonkajšieho zaťaženia* a osovú silu v náhradnom prúte (N_n'), napr. Cremonovou metódou – nakoľko nie sú zadane veľkosti uhlov!!! (obr.5.24b).
2. sily N_i'' a N_n'' - tzn. osovú silu (N_i'') v prútoch *od zaťaženia „jednotkovou“ silou $N_8 = \bar{1}$* v uzloch A a D a osovú silu v náhradnom prúte N_n'' (obr.5.24d).



Výsledné hodnoty osových síl, odpovedajúce pôvodnej PS a jej zaťaženiu, získame superpozíciou (sčítaním účinkov) síl:

- v odpovedajúcich prútoch oboch náhradných sústav v tvare $N_i = N_i' + N_i'' \cdot N_8$
- v náhradnom prúte v tvare $N_n = N_n' + N_n'' \cdot N_8$.

Z podmienky nulovej sily v náhradnom prúte ($N_n = 0$) dostaneme $N_n = N_n' + N_n'' \cdot N_8 = 0$, z ktorej pre silu N_8 platí

$$N_8 = -\frac{N_n'}{N_n''} = -\frac{2,4}{-0,54} = 4,44 \text{ kN}.$$

Výsledky riešenia oboch náhradných sústav (obr.5.24b, obr.5.24c), ako aj výsledných osových síl v pôvodnej prútovej sústave (obr.5.24a) sú účelne usporiadané do tabuľky (tab.5.2).

Výsledky riešenia náhradných sústav a osovú silu v prútoch PS

Tabuľka 5.2

Prút (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
N_i'	+2,00	+2,1	+2,95	-3,25	-3,10	6,45	1,55	0	-2,10	2,4
N_i''	-0,47	-0,52	-0,71	-0,25	-0,24	-0,74	0,38	1	0,50	-0,54
$N_i'' \cdot N_8$	-2,08	-2,30	-3,15	-1,11	-1,06	-3,28	1,68	4,44	2,22	
N_i	-0,08	-0,2	-0,2	-4,36	-4,16	3,17	3,23	4,44	0,12	

Metódou náhradného prúta môžeme riešiť aj PS s **vonkajšou statickou neurčitou**, tzn. prípady, ak nevieme určiť vonkajšie väzbové reakcie a preto nemožno riešiť ani vnútorné sily. Podstata riešenia je podobná ako pri riešení osových síl v zložitej PS. Podľa stupňa vonkajšej neurčitosti PS postupne odoberáme vonkajšie väzby tak, aby sústava zostala uložená staticky určito a pohyblivosť sústavy, vzniknutú odstránením väzby, jednoducho odstránime zavedením odpovedajúceho počtu náhradných prútov.

5.6.2. Metóda neurčitej mierky

Metóda neurčitej mierky je vhodná pre grafické riešenie zložitých PS, ale iba v prípadoch zaťaženia PS jednou, maximálne dvomi silami. Vtedy je ešte riešenie superpozíciou prijateľne efektívne. Riešenie osových síl v PS je potrebné opakovať **postupne pre každú jednu zaťažujúcu vonkajšiu silu zvlášť**. Pre jej zložitosť a nároky na precíznosť uvedieme iba jej základný princíp.

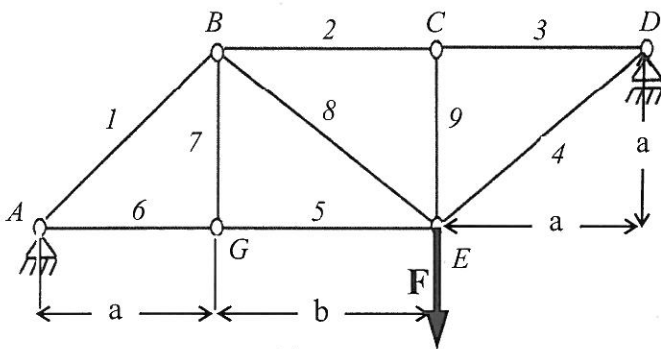
Podstata metódy spočíva v tom, že vnútorné sily v prútoch sú priamo úmerné veľkosti zaťaženia, pôsobiace na PS. Pri aplikácii metódy si najskôr **zvolíme veľkosť a zmysel vnútornej sily** v jednom (ľubovoľne zvolenom, ale nie nulovom) prúte PS a určíme, aká veľká vonkajšia sila pôsobiaca na tej istej nositeľke by takýto vnútorný účinok v prúte (ťah alebo tlak) vyvolala. Vo všeobecnosti platí, že takto získaná sila sa od skutočnej vonkajšej sily líši. Preto je potrebné z pomeru ich grafických znázornení – t.j. pomeru ich zobrazovacích úsekov – určiť doteraz „neurčitú“ mierku, ktorou všetky ďalšie, graficky zistené osovú sily pre násobíme.

Inak povedané, **silový obrazec** vnútorných (osových) síl a väzbových reakcií, ktorý sa nedá pre zadanú (jedinú!) zaťažujúcu silu zostrojiť, **začínáme** v tomto prípade **kresliť od niektorej, vhodne zvolenej osovej sily N_i v prúte**. Vhodný prút vyberáme tak, aby bolo možné postupne vyriešiť všetky väzbové reakcie v podperách, osové sily v prútoch, ako aj zaťažujúcu silu. Po určení veľkosti zobrazovacieho úseku zaťažujúcej sily $\bar{F}$ [mm] určíme mierku síl $m_F = F / \bar{F}$ [N/mm] a ďalšie sily pomocou tejto - doteraz „neurčitej“ mierky - prepočítame.

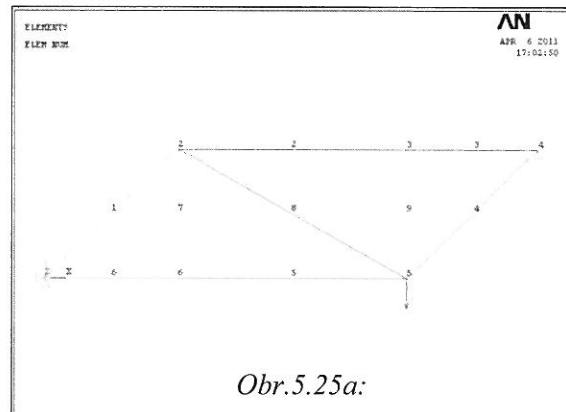
5.7. Záverečné poznámky k riešeniu prútových sústav

Aktuálne v mechanike dominujú postupy numerické. Ak je možné k analýze PS použiť počítače, z dostupných metód volíme najmä numericky orientované postupy, príp. všeobecnú uzlovú metódu (VUM). Pre ilustráciu uvádzame výsledky z riešenia jednoduchej PS realizovaného v prostredí ANSYS. Odkaz: [[http://www.ansys.com/Products/Simulation +Technology/Structural+Analysis/ANSYS+Mechanical](http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Structural+Analysis/ANSYS+Mechanical)]. Jedná sa o zadanie Príkladu 5.2. a preto je možné získané výsledky porovnať a overiť ich správnosť.

Príklad 5.8: Určite numericky, napr. v prostredí ANSYS, osové sily v prútoch zadanej PS (Obr.5.25),



Obr.5.25



Obr.5.25a:

Riešenie:

Numerické riešenie úlohy bude prezentované iba vo forme výstupov z analytického nástroja ANSYS.

Na Obr.5.25a je uvedený výpočtový model zadanej prútovej sústavy s definovanými väzbami a zaťažením, vytvorený v prostredí ANSYS. Na Obr.5.25b sú výsledky výpočtu väzbových reakcií v uložení a Obr.5.25c znázorňuje okno s určenými osovými silami v jednotlivých prútoch (porovnaj s Príkladom 5.2).

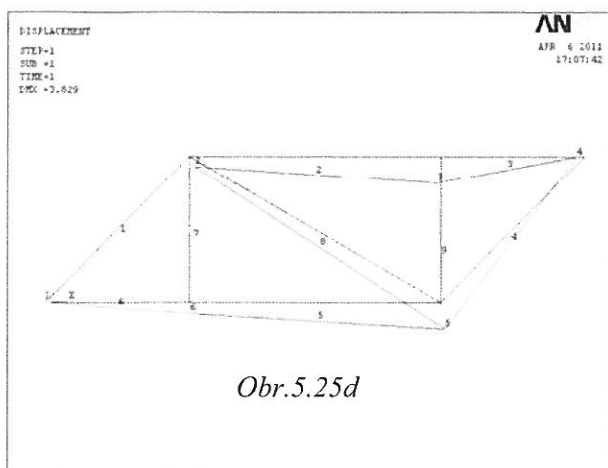
PRRSOL Command	
File	
PRINT F REACTION SOLUTIONS PER NODE	
***** POST1 TOTAL REACTION SOLUTION LISTING *****	
LOAD STEP= 0 SUBSTEP= 1	
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0	
THE FOLLOWING X,Y,Z SOLUTIONS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM	
NODE	FX FY
1	-0.11369E-12 535.90
4	1464.1
TOTAL VALUES	
VALUE	-0.11369E-12 2000.0

Obr.5.25b

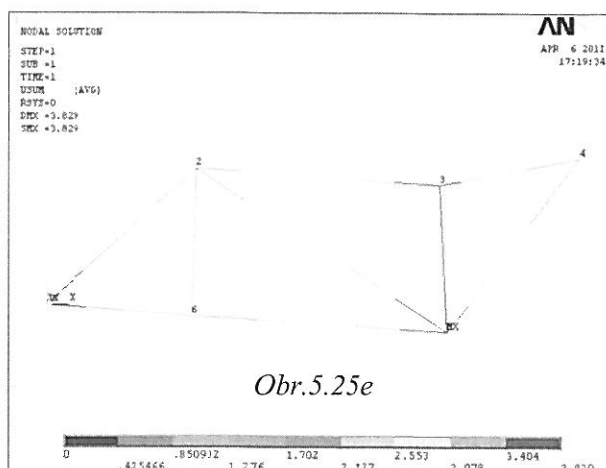
PRETAB Command	
File	
PRINT ELEMENT TABLE ITEMS PER ELEMENT	
***** POST1 ELEMENT TABLE LISTING *****	
STAT	CURRENT
ELEM	SILA
1	-757.87
2	-1464.1
3	-1464.1
4	2070.6
5	535.90
6	535.90
7	0.0000
8	1071.8
9	0.0000
MINIMUM VALUES	
ELEM	2
VALUE	-1464.1
MAXIMUM VALUES	
ELEM	4
VALUE	2070.6

Obr.5.25c

Na Obr.5.25d je uvedený tvar deformovanej a nedeformovanej sústavy a na Obr.5.25e je grafické zobrazenie sumárnych (celkových) posunutí jednotlivých uzlov prútov.



Obr.5.25d



Obr.5.25e

Analýza síl pôsobiacich na PS slúži iba na získanie hrubej predstavy o charaktere jej zaťaženia. Získané výsledky slúžia ako vstupné údaje pre realizáciu napätovo – deformačnej analýzy jej jednotlivých členov, ktorej výsledkom sú najčastejšie návrhy dĺžkových rozmerov prútov, tvaru a rozmerov ich prierezu, materiálových vlastností alebo ich posúdenie z hľadiska požadovanej úrovne bezpečnosti.

Záverečné poznámky k riešeniu staticky neurčitých prútových sústav

Prútové sústavy, v ktorých iba na základe statických podmienok rovnováhy síl nevieme určiť osovú silu v prútoch nazývame **staticky neurčité**. V takomto prípade je potrebné statické podmienky rovnováhy síl v uzle doplniť potrebným počtom deformačných podmienok (t.j. zohľadniť napr. podmienku neporušenosti spojenia prútov v uzloch aj po deformácii konštrukcie). Celkový počet rovníc rovnováhy musí byť totožný s počtom neznámych osových síl v uzle PS.

Staticky neurčité úlohy riešime najčastejšie pomocou tzv. **Castiglianovej vety**. Táto veta predstavuje jeden z najdôležitejších poznatkov z oblasti tzv. *lineárnej pružnosti*, pretože umožňuje určiť základné deformačné veličiny akéhokoľvek lineárne pružného telesa. Slovné je charakterizovaná nasledovne:

Castiglianova veta vyjadruje vzťah medzi deformáciou telesa a akumulovanou energiou v telese vplyvom jeho zaťaženia.

Každé elastické teleso sa pod účinkom vonkajšieho zaťaženia deformuje a vynaložená práca sa v telese akumuluje vo forme deformačnej energie. Platí:

Ak na lineárne pružné teleso (príp. sústavu telies) pôsobí sila F_j (príp. sústava síl), potom posunutie (u_j) pôsobiska každej zo síl po jej nositeľke je určené parciálnou deriváciou celkovej energie napätosti W telesa (príp. sústavy telies) podľa sily F_j . Platí:

$$u_j = \frac{\partial W}{\partial F_j}. \quad (5.18)$$

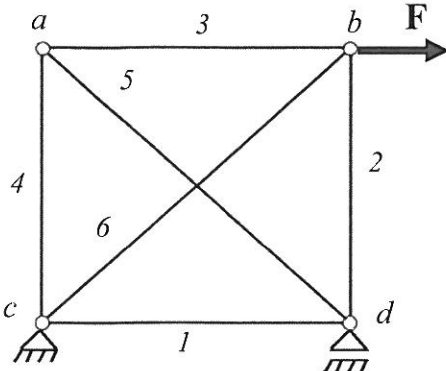
Z hľadiska deformácie telesa platí:

Uhol natočenia (γ) priamky spojenej s pôsobiskom momentu M v rovine jej pôsobenia je určený parciálnou deriváciou celkovej energie napätosti W telesa podľa momentu M_j . Platí:

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial M_j}. \quad (5.19)$$

Na záver uvedme významný praktický poznatok. Staticky neurčité PS sú z hľadiska pevnosti a tuhosti – a teda aj bezpečnosti používania - obvykle výhodnejšie konštrukcie, ale ich statická analýza klasickými metódami je zložitejšia. Aktuálne je analýza sústav telies realizovaná prostredníctvom numericky založených postupov, napr. metódou konečných prvkov. Jedným z najpoužívanějších softvérových prostriedkov na riešenie staticky neurčitých problémov pomocou metódy konečných prvkov, ako aj energeticky zameraných princípov, je produkt ADINA, <http://www.adina.com/adina-structures.shtml>.

Príklad 5.9: V zadanej PS v tvare štvorca (Obr.5.26) určite veľkosť a zmysel osových síl v prútoch. Zadané: $F=2\text{ kN}$, $E=2,1\cdot 10^5\text{ MPa}$ (tzv. modul pružnosti v ťahu), výrobná nepresnosť $\delta=0\text{ mm}$.



Obr.5.26

Riešenie:

I. Určenie statickej určitosti, uvoľnenie telies:

$$p = 6, u = 4, p_1 = 1, p_2 = 1$$

$$\text{Vonkajšia } n_v = n_o \Rightarrow 3 = 3$$

Vnútorňa $2u = p + 2p_1 + p_2 \Rightarrow 2 \cdot 4 = 6 + 2 \cdot 1 + 1$ - úloha 1 x staticky neurčitá. Záver: Pre získanie dostatočného počtu rovníc pre vyriešenie silovej rovnováhy PS bude nutné zaviesť jednu deformačnú podmienku.

Podľa princípu superpozície rozložíme PS na dve sústavy tak, aby sa Sústava I stala vnútorne staticky určitou (Obr.5.26a).

Uvoľnime (odoberme) napr. **prút 6** z uzla **b** (Sústava II) a zaveďme pre bod **b** vhodnú deformačnú podmienku, napr. pre jeho možný relatívny posun v tvare $u_b = \delta$, kde δ predstavuje výrobnú nepresnosť (tzv. dovolená tolerancia).

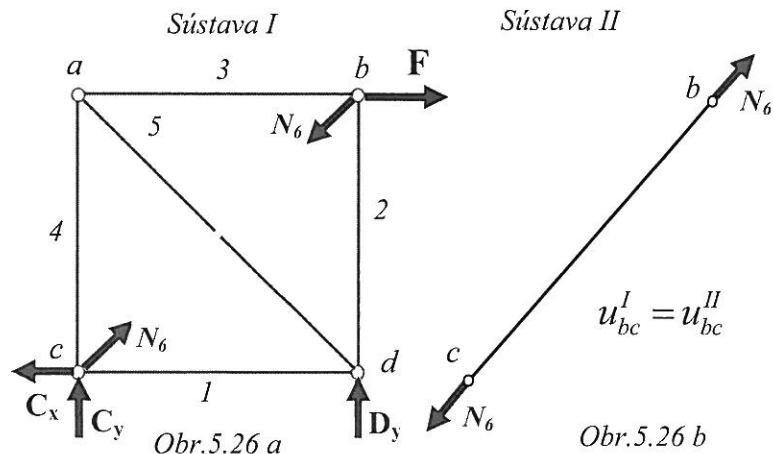
Parameter u_b nadobúda hodnoty:

(0) - pre ideálne rozmery elementu,

$\oplus$ - v prípade vôle,

$\ominus$ - v prípade presahu.

Uvažujeme s ideálnym rozmery a preto je $\delta = 0$. Úloha je staticky neurčitá a teda nedokážeme určiť veľkosť osových síl v PS priamo, ale hľadáme iba ich určitú „závislosť“ na silách (sila N_6), zavedených do uvoľnených väzieb (t.j. do Sústavy I a Sústavy II).



III. Väzbové reakcie:

$$\sum M_{ic} = 0: D_y \cdot l - F \cdot l = 0 \Rightarrow D_y = F = 2000\text{ N}$$

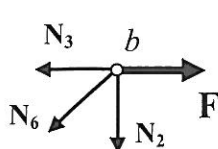
$$\sum F_{iy} = 0: D_y + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -D_y = -2000\text{ N}$$

$$\sum F_{ix} = 0: -C_x + F = 0 \Rightarrow C_x = F = 2000\text{ N}$$

Kontrola: $\sum M_{id} = 0: -C_y \cdot l - F \cdot l = 0 \Rightarrow 0 = 0$ príp. $\sum M_{ib} = 0: -C_x \cdot l - C_y \cdot l = 0 \Rightarrow 0 = 0$ - splnené.

IV. Vyjadrenie rovníc rovnováhy, deformačných podmienok a výpočet síl v prútoch:

1. Rovnice rovnováhy síl:



Uzol b:

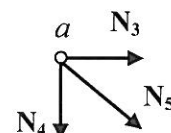
$$\sum F_{ix} = 0: F - N_6 \cdot \cos 45^\circ - N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = F - N_6 \cdot \cos 45^\circ$$

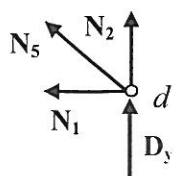
$$\sum F_{iy} = 0: -N_2 - N_6 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_2 = -N_6 \cdot \sin 45^\circ$$

Uzol a:

$$\sum F_{ix} = 0: N_3 + N_5 \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_3 = -N_5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sum F_{iy} = 0: -N_4 - N_5 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = -N_5 \cdot \sin 45^\circ$$





Uzol d:

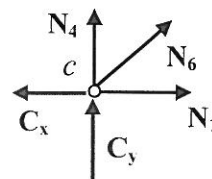
$$\sum F_{ix} = 0: -N_1 - N_5 \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = -N_5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sum F_{iy} = 0: D_y + N_2 + N_5 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_2 = -N_5 \cdot \sin 45^\circ - D_y$$

Uzol c:

$$\sum F_{ix} = 0: -C_x + N_1 + N_6 \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = C_x - N_6 \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sum F_{iy} = 0: C_y + N_4 + N_6 \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_4 = -C_y - N_6 \cdot \sin 45^\circ$$



2. Vyjadrenie deformačných podmienok – Castiglianova veta - výsledky:

$$u_b = \frac{\partial W}{\partial N_6} = \delta = 0 \quad ; \quad \frac{\partial N_1}{\partial N_6} = \frac{\partial N_2}{\partial N_6} = \frac{\partial N_3}{\partial N_6} = \frac{\partial N_4}{\partial N_6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \frac{\partial N_5}{\partial N_6} = \frac{\partial N_6}{\partial N_6} = 1.$$

$$u_b = \frac{1}{E \cdot A} \left[\left(N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - C_x \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(-N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + F \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \right. \\ \left. \left(N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C_y \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(N_6 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + D_y \right) \cdot 1 + \left(N_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 1 \right] = 0 \Rightarrow N_6 = -1121,3 \text{ N}$$

3. Výpočet veľkosti a zmyslu osových síl v prútoch:

Dosadením určenej veľkosti osovej sily N_6 do podmienok statickej rovnováhy síl môžeme určiť aj ostatné osové sily v prútoch 1 až 5 (tzn. sily N_1 až N_5). Dostaneme

$$N_1 = C_x - N_6 \cdot \cos 45^\circ = 2000 - (-1121,0,707) \Rightarrow N_1 = \mathbf{2792,5 \text{ N}}$$

$$N_2 = -N_6 \cdot \sin 45^\circ = 1121,0,707 \Rightarrow N_2 = \mathbf{792,5 \text{ N}}$$

$$N_3 = F - N_6 \cdot \cos 45^\circ = 2000 - (-1121,0,707) \Rightarrow N_3 = \mathbf{2792,5 \text{ N}}$$

$$N_4 = -C_y - N_6 \cdot \sin 45^\circ = 2000 - (-1121,0,707) \Rightarrow N_4 = \mathbf{2792,5 \text{ N}}$$

$$N_3 = -N_5 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow N_5 = -\frac{N_3}{\cos 45^\circ} = \frac{F - N_6 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{F}{\cos 45^\circ} - N_6 = \frac{2000}{0,707} - 1121 \Rightarrow N_5 = \mathbf{1707 \text{ N}}$$

Kontrolné otázky:

1. Charakterizujte pojem sústava telies, druhy sústav telies a príklady ich praktického použitia.
2. Uveďte základnú úlohu statického riešenia sústav telies, vysvetlite podstatu určovania ich statickej určitosti.
3. Charakterizujte prútovú sústavu, z čoho pozostáva, zaťaženie a väzby PS, príklady praktických aplikácií PS.
4. Zdôvodnite namáhanie prútov v prútových sústavách z hľadiska vznikajúcich vnútorných silových veličín.
5. Uveďte rozdelenie staticky určitých prútových sústav, charakterizujte ich a definujte rozdiely medzi nimi.
6. Vysvetlite základný postup riešenia staticky určitých prútových sústav a uveďte zásadne využívané princípy.
7. Vysvetlite spôsob posudzovania statickej určitosti prútových sústav, uveďte vzťahy pre statickú určitosť voľnej a viazanej PS a vysvetlite ich.
8. Uveďte možnosti určenia vonkajších a vnútorných väzbových reakcií u PS, podmienky rovnováhy a ich riešenie.
9. Charakterizujte podstatu postupnej uzlovej metódy (PUM), uveďte spôsob jej analytickej a grafickej realizácie.
10. Vysvetlite základný princíp všeobecnej uzlovej metódy (VUM), definujte jej odlišnosti od PUM a MR.
11. Definujte podstatu a spôsob realizácie tvorby Cremonovho obrazca a uveďte zásady správnej realizácie metódy.
12. Charakterizujte podstatu metódy rezu (MR), uveďte kedy je výhodné jej použitie, vysvetlite jej základný princíp.
13. Vysvetlite základný princíp metódy náhradného prúta, pojednajte o jej praktickej použiteľnosti.
14. Uveďte základné princípy Culmannovej grafickej metódy riešenia PS a metódy neurčitej mierky.
15. Definujte, kedy je PS staticky neurčitá a čo je nutné pre jej riešenie vykonať, aké znalosti sú potrebné.

6. PASÍVNE ODPORY

Pri riešení rovnováhy skutočných telies je v mechanike výpočet zjednodušený tým, že uvažujeme s jednou z fyzikálnych abstrakcií, tzv. *ideálnymi väzbami*. Hmotné objekty považujeme za dokonale tuhé a ideálne hladké. Aj v predchádzajúcich kapitolách sme väzby uvažovali vždy ako ideálne, t.j. s dokonale hladkými dotykovými plochami a väzbové reakcie boli uvažované výhradne v smere normály k plochám v kontakte. V skutočnosti však väzby medzi hmotnými objektmi nemajú dokonale hladký povrch a pri ich vzájomnom kontakte vznikajú lokálne deformácie. V mieste styku telies preto vzniká trenie a prídavné silové účinky, spôsobujúce odklon nositeľky výslednice síl od normály stykovej plochy telies. Takéto trecie – kontaktné – silové účinky pôsobia vždy proti smeru pohybu telies a súhrnne ich nazývame *pasívne odpory*.

Pasívne odpory predstavujú súbor javov a dejov prebiehajúcich v mechanických sústavách, pri ktorých sa mechanická energia mení na iné formy energie, v mechanických sústavách nevyužiteľné. Jedná sa hlavne o zmarenú energiu vo forme tepla, akustickej a svetelnej energie a pod.

V mechanických sústavách sa vo všeobecnosti jedná najmä o javy ako sú *šmykové trenie pri posuvnom pohybe a šmykové trenie rotujúcich telies (tzv. čapové trenie)*, ale nezanedbateľné sú aj vplyvy *valivého odporu (tzv. adhézne trenie)*, *trenia vlákien*, príp. *trakčné odpory*, *ohybová tuhosť lán* a pod.

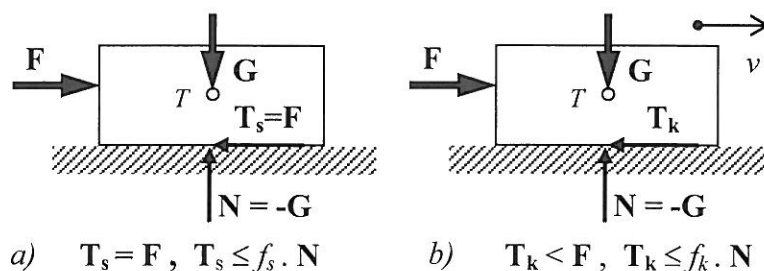
Pasívne odpory v mechanike telies vyjadrujeme ich silovým účinkom - silami alebo silovými dvojicami. Zavedené silové účinky pôsobia v mieste styku hmotných objektov, t.j. vo väzbách a smerujú vždy proti relatívnemu pohybu viazaných / dotýkajúcich sa telies. Vyjadrujú mieru odporu voči vzájomnému možnému pohybu telies. Je zrejmé, že pasívne odpory sa môžu prejavíť iba vtedy, keď uloženie dovoľuje pri zadanom zaťažení a pri uvažovaní ideálnych väzieb pohyb telesa alebo sústavy telies. Smer aj zmysel pasívnych odporov je preto jednoznačne určený možným alebo skutočným relatívnym pohybom telies a platí tvrdenie:

Pasívne odpory bránia vzájomnému pohybu dotýkajúcich sa telies a pôsobia vždy proti ich možnému alebo skutočnému relatívnemu pohybu.

V praktických úlohách sa najčastejšie stretávame so *šmykovým trením a valivým odporom*. Okrem nich si objasníme aj základné princípy *čapového trenia a trenia vlákien*, ktoré aj napriek ich priestorovému charakteru, môžeme jednoznačne charakterizovať a objasniť aj na základe znalostí z rovinatej statiky.

6.1. Šmykové trenie, súčiniteľ trenia a súčiniteľ adhézie

K šmykovému treniu pri posuvnom pohybe dochádza v mieste styku dvoch tuhých telies (Obr.6.1).



Obr.6.1

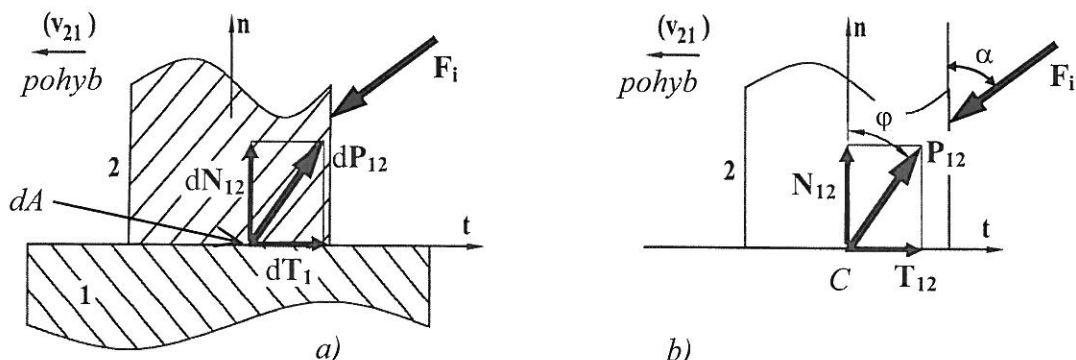
V idealizovanom prípade, t.j. pri uvažovaní hladkých stykových plôch roviny aj telesa by vznikla iba reakcia $\mathbf{N} = -\mathbf{G}$, pôsobiaca v smere normály - t.j. kolmo - na rovinu (Obr.6.1a). V prípade pohybu telesa by preto neexistoval žiadny odpor, pôsobiaci proti jeho pohybu. Znamenalo by to, že ľubovoľne malá vertikálna sila $\mathbf{F}$ by uviedla teleso do pohybu. Vieme však, že tomu v skutočnosti tak nie je.

Na uvedenie telesa do pohybu je v skutočnosti potrebná sila $\mathbf{F}$ určitej veľkosti, pri pôsobení menšej sily teleso ostáva v pokoji. Túto skutočnosť si vysvetľujeme tým, že v dôsledku drsnosti reálnych plôch vzniká v dotykovej ploche okrem normálovej reakcie $\mathbf{N}$ aj ďalšia reakcia - tangenciálna (dotyčnicová) sila $\mathbf{T}$ (Obr.6.1b). Pri dostatočne veľkej sile $\mathbf{F}$ dochádza k pohybu telesa a v dotykovej ploche začína pôsobiť doplnkový silový účinok - tzv. **trecia sila** $\mathbf{T}_k$, orientovaná vždy proti smeru pohybu. Znamená to, že aby sa teleso začalo vplyvom sily pohybovať priamočiarym rovnomerným pohybom musí na teleso pôsobiť akčná sila s veľkosťou $F \geq T_k$.

Všeobecne platí, že v dôsledku drsnosti povrchu dotýkajúcich sa telies (obr.6.2a) pôsobí na každú elementárnu stykovú plošku dA Telesa 2 všeobecne orientovaná elementárna sila $d\mathbf{P}_{12}$, pôsobiaca proti zmyslu jeho pohybu. Predpokladajme, že sa *Teleso 2* nachádza v stave pokoja. Keď rozložíme výslednú reakčnú silu $d\mathbf{P}_{12}$ na zložky $d\mathbf{N}_{12}$ (do smeru normály n stykovej plochy) a $d\mathbf{T}_{12}$ (do smeru tangenciály t roviny styku), získame dve sústavy elementárnych rovnobežných síl, definovaných v tvare

$$\mathbf{N}_{12} = \int_A d\mathbf{N}_{12} \quad \text{a} \quad \mathbf{T}_{12} = \int_A d\mathbf{T}_{12} \quad (6.1)$$

kde $d\mathbf{N}_{12} = p \cdot dA$ je elementárna normálová sila, ktorou pôsobí *Teleso 2* na podložku (*Teleso 1*) a $d\mathbf{T}_{12}$ je elementárna trecia sila medzi telesami. Veličina p predstavuje merný tlak medzi *Telesami 1 a 2* [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$].



Obr. 6.2

Na hranici pokoja a pohybu alebo pri pohybe *Telesa T2* po podložke vychádzame z výpočtového modelu, uvažujúceho „určitú“ závislosť medzi veľkosťou elementárnych síl $d\mathbf{T}$ a $d\mathbf{N}$, vyjadrenú v tvare

$$d\mathbf{T}_{12} = f \cdot d\mathbf{N}_{12} \quad (6.2)$$

kde f predstavuje bezrozmerný faktor tzv. **súčiniteľ šmykového trenia**. Ak predpokladáme, že súčiniteľ f je po celej stykovej ploche konštantný (tzn. medzi telesami nedošlo ku zmene rozhrania), dosadením rovnice (6.2) do (6.1) a jej integrovaním získame pre veľkosť trecej sily tzv. **Coulombov vzťah**, definovaný v tvare

$$\mathbf{T}_{12} = \int_A d\mathbf{T}_{12} = f \cdot \int_A d\mathbf{N}_{12} \Rightarrow \mathbf{T}_{12} = f \cdot \mathbf{N}_{12}. \quad (6.3)$$

Coulombov vzťah predstavuje základný výpočtový model pre vyjadrenie veľkosti prídavných sekundárnych silových účinkov - pasívnych odporov – vznikajúcich pri styku dvoch dotýkajúcich sa telies v pokoji, na hranici pokoja a pohybu alebo pri ich vzájomnom pohybe.

Geometrickou interpretáciou podstaty Coulombovho vzťahu je rovná styková plocha (obr.6.2b), kde v určitom mieste na telese - bod C, pôsobia zložky $\mathbf{N}_{12}$, $\mathbf{T}_{12}$ a teda aj ich výslednica

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{T}_{12} + \mathbf{N}_{12}. \quad (6.4)$$

Vo všeobecnosti je výslednica $\mathbf{P}_{12}$ odklonená od normály n stykovej plochy o tzv. **trecí uhol** φ a jej zmysel smeruje vždy proti zmyslu relatívneho pohybu *Telesa 2* (Obr.6.2b). Pre veľkosť uhla φ platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{12}}{N_{12}} = f. \quad (6.5)$$

Prakticky to znamená, že tangenta trecieho uhla φ definuje hodnotu **súčiniteľa šmykového trenia** f medzi oboma stýkajúcimi sa plochami. Z toho je zrejmé, prečo je súčiniteľ trenia f všeobecne bezrozmerná veličina [-].

Podľa toho, či sa jedná o prípad styku telies na hranici pokoja a pohybu (začiatok pohybu) alebo už pri vzájomnom pohybe telies, vo všeobecnosti rozlišujeme dva základné prípady:

- **Statické (pokojové) trenie** - trenie vznikajúce medzi telesami, ktoré sa navzájom nepohybujú – telesá sú v pokoji (Obr.6.1a). Platí

$$\mathbf{T}_s = f_s \cdot \mathbf{N}, \quad (6.6)$$

kde f_s predstavuje odporový faktor, tzv. **súčiniteľ statického trenia** ($f_s = \operatorname{tg} \varphi_s$). Súčiniteľ f_s je fyzikálna veličina, udávajúca pomer adhézne trecej sily $\mathbf{T}_s$ a kolmej tlakovej sily $\mathbf{N}$ pri statickom trení. Hodnota súčiniteľa f_s závisí od konkrétnej dvojice látok na povrchu telies, medzi ktorými statické trenie nastáva.

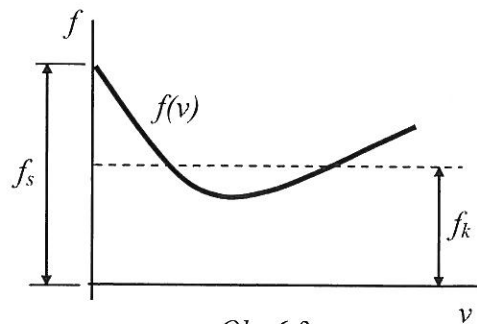
- **Kinematické (šmykové) trenie** - trenie medzi telesami pri ich vzájomnom posuvnom pohybe. Platí

$$\mathbf{T}_k = f_k \cdot \mathbf{N}, \quad (6.7)$$

kde $f_k = \operatorname{tg} \varphi_k$ predstavuje odporový faktor pri šmykovom trení, tzv. **súčiniteľ kinematického (šmykového) trenia**. Súčiniteľ f_k je veličina udávajúca pomer trecej sily $\mathbf{T}_k$ a kolmej tlakovej sily $\mathbf{N}$ pri kinematickom trení. Hodnoty súčiniteľov šmykového trenia f_k závisia od konkrétnej dvojice látok na povrchu a na drsnosti povrchu telies, medzi ktorými šmykové trenie prebieha. Hodnoty f_k sa v tabuľkách preto udávajú pre rôzne dvojice materiálov a pre rôzne drsnosti povrchu dotýkajúcich sa plôch.

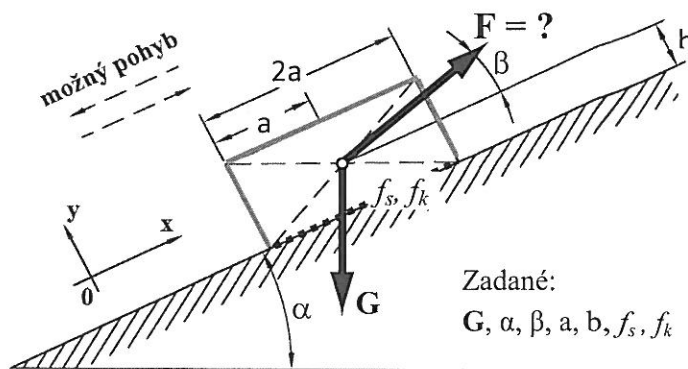
Z mnohých praktických aplikácií vyplynulo, že vo väčšine prípadov styku pevných telies platí $f_s > f_k$ a platí teda aj $\varphi_s > \varphi_k$. Znamená to, že statické trenie medzi telesami je obvykle väčšie ako trenie kinematické, t.j. súčiniteľ statického trenia f_s je obvykle väčší než súčiniteľ f_k trenia kinematického a platí, že **pasívny účinok trenia je pri pohybe telies menší**. V praktických výpočtoch orientačne uvažujeme $f_s = (1,1 \div 1,8) f_k$. Súčinitele šmykového trenia f_s resp. f_k sú obvykle uvedené vo fyzikálnych a iných tabuľkách a zisťujú sa experimentálne. Závisia predovšetkým na materiáli stýkajúcich sa telies a na drsnosti ich povrchu. Rôzne materiály sa prejavujú nielen svojimi mechanickými vlastnosťami (napr. tvrdosť), štruktúrou (napr. druh kryštalizácie), ale často rozhoduje aj smer relatívneho pohybu telies v kontakte (napr. v smere spracovania povrchu kovu alebo v smere kolmom).

Významná je aj závislosť faktora šmykového trenia f_s na rýchlosti v vzájomného pohybu telies. Jej charakter znázorňuje krivka $f(v)$ uvedená na Obr.6.3. Rešpektovanie tejto závislosti však spravidla predstavuje skomplikovanie výpočtu a preto skutočný priebeh $f(v)$ obvykle nahrádzame idealizovaným priebehom (Obr.6.3, čiarkovane). V tomto priebehu prislúcha treniu v stave pokoja hodnota f_s a treniu za pohybu hodnota f_k .



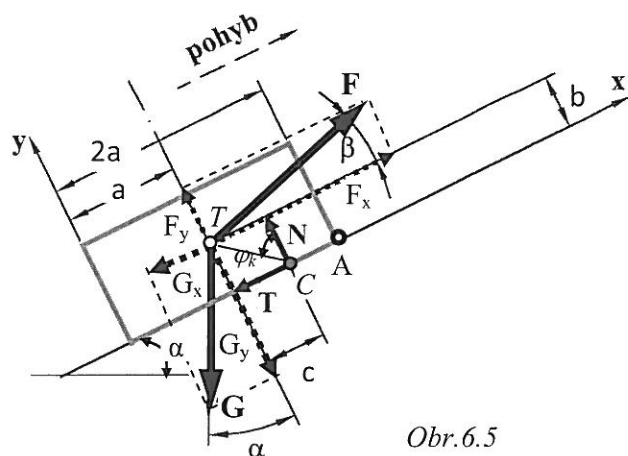
Obr.6.3

Princípy šmykového trenia v mechanike telies najčastejšie objasňujeme na úlohách o tzv. **naklonenej rovine**. Medzi najbežnejšie praktické problémy patrí riešenie pohybu telesa tiaže $\mathbf{G}$ po naklonenej rovine od pôsobenia sily $\mathbf{F}$ (obr.6.4). Najčastejšou úlohou býva určenie veľkosti sily $\mathbf{F}$, potrebnej na uvedenie telesa do pohybu po naklonenej rovine smerom nahor - **zdvíhanie** (obr.6.5) alebo pre zaistenie pohybujúceho sa telesa smerom nadol - **spúšťanie** (obr.6.6).



Obr.6.4

1. Zdvíhanie telesa



Obr.6.5

Na uvoľnené teleso pôsobí všeobecná rovinná sústava síl G, F, T, N , z ktorých nepoznáme sily F, T, N a rameno c (obr.6.5). Pre takúto sústavu síl môžeme napísať tri rovnice rovnováhy v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: F_x - G_x - T = F \cdot \cos \beta - G \cdot \sin \alpha - T = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: F_y - G_y + N = F \cdot \sin \beta - G \cdot \cos \alpha + N = 0$$

$$\sum M_{iT} = 0: -T \cdot b + N \cdot c = 0$$

a doplnkovú rovnicu pre treciu silu v tvare

$$T = f_k \cdot N, \text{ kde } f_k = \tan \varphi_k.$$

Veľkosť sily F , potrebnej na posúvanie telesa smerom nahor dostaneme, ak do prvej rovnice rovnováhy dosadíme za T zo štvrtej rovnice a z druhej rovnice za $N = -F_y + G_y = -F \cdot \sin \beta + G \cdot \cos \alpha$. Dostaneme

$$F = G \cdot \frac{\sin \alpha + f_k \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + f_k \cdot \sin \beta}. \quad (6.8)$$

Je nutné však skontrolovať, či pred začatím pohybu nedôjde skôr k preklopeniu telesa okolo jeho prednej hrany (bod A). Sila F vytvára destabilizujúci účinok - sklápajúci moment M_{skl} a sila G vytvára stabilizujúci účinok - stabilizujúci moment M_{stab} . Ak nemá nastať neželateľné preklopenie telesa okolo bodu A musí platiť podmienka v tvare

$$M_{skl(A)} \leq M_{stab(A)}$$

$$F_x \cdot b + F_y \cdot a \leq G_x \cdot b + G_y \cdot a \Rightarrow F \cdot \cos \beta \cdot b + F \cdot \sin \beta \cdot a \leq G \cdot \sin \alpha \cdot b + G \cdot \cos \alpha \cdot a$$

$$F \cdot (\cos \beta \cdot b + \sin \beta \cdot a) \leq G \cdot (\sin \alpha \cdot b + \cos \alpha \cdot a)$$

Po dosadení za F z rovnice (6.8) môžeme po úprave výrazu získať podmienku v tvare

$$\frac{\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha}{\cos \beta + f \cdot \sin \beta} \leq \frac{b \cdot \sin \alpha + a \cdot \cos \alpha}{a \cdot \sin \beta + b \cdot \cos \beta},$$

odkiaľ pre podmienku stability proti preklopeniu dostaneme

$$f \leq \frac{a}{b} \quad (f = f_s), \quad (6.9)$$

kde a je rozmer polovice základne telesa, b je polovica výšky telesa. Znamená to, že pokiaľ bude $f_s > a/b$ - teleso sa smerom nahor nebude posúvať, ale sa preklopí okolo prednej hrany telesa (t.j. okolo bodu A).

2. Spúšťanie telesa

Pri spúšťaní telesa (obr.6.6) sa vo vyššie uvedených rovniciach rovnováhy pre zdvíhanie po naklonenej rovine zmení iba zmysel trecej sily T , t.j. platí $T > 0$. Sila F , potrebná na spúšťanie telesa, bude mať veľkosť

$$F = G \cdot \frac{\sin \alpha - f_k \cdot \cos \alpha}{\cos \beta - f_k \cdot \sin \beta} \quad (6.10)$$

Ak vyjde hodnota sily F záporná - pri pohybe nadol je nutné teleso dokonca tlačiť, aby sa vôbec pohybovalo.

V prípade, ak $\alpha = \varphi_k$ bude čitateľ vzťahu (6.10)

$\sin \alpha - f_k \cdot \cos \alpha = \sin \alpha - \tan \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha - \sin \alpha = 0$ a podľa (6.10) bude akčná sila nulová, t.j. $F=0$. V takomto špecifickom prípade sa bude teleso po naklonenej rovine pohybovať rovnomerne zrýchleným pohybom smerom nadol, bez nutnosti akéhokoľvek vynúteného silového pôsobenia.

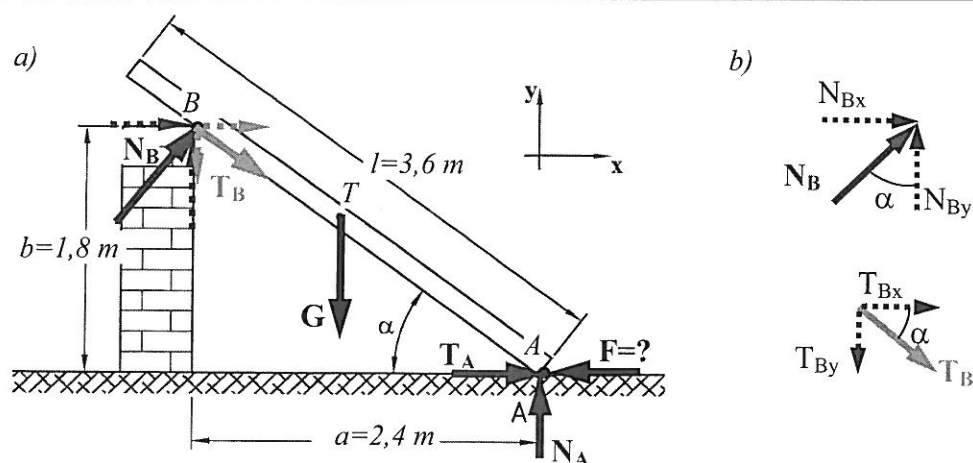
Z uvedenej úvahy vyplýva aj podstata a nutnosť **experimentálneho určovania súčiniteľa trenia f** . Ak uvedieme teleso naklonením roviny do rovnomerného pohybu, na rozhraní pokoja a pohybu musí zrejme platiť $\alpha = \varphi_k$ a pre experimentálne určovaný súčiniteľ trenia platí $f_k = \tan \varphi_k = \tan \alpha$. Takýmto spôsobom získané hodnoty sa uvádzajú v tabuľkách pre rôzne dvojice materiálov a pre rôzne drsnosti plôch. Vybrané hodnoty súčiniteľov šmykového trenia sú pre ilustráciu ich veľkosti uvedené v tabuľke 6.1.

Vybrané hodnoty súčiniteľov f pri suchom trení

Tabuľka 6.1

Materiály telies		Súčiniteľ šmykového trenia	
		f_s (z pokoja)	f_k (pri pohybe)
Oceľ na oceli		0,15	0,03 - 0,09
Oceľ na liatine		0,33	0,13 - 0,27
Oceľ na bronz		0,11	0,105
Oceľ na ľade		0,027	0,014
Dub na dube	v smere vlákien	0,62	0,48
	naprieč vláknami	0,7	

Príklad 6.1: Vypočítajte veľkosť sily F , potrebnej na posunutie homogénneho telesa (obr.6.7) s hmotnosťou m a dĺžkou l , voľne opretého o stenu s výškou b . Súčinitele statického trenia f_s v miestach A, B sú rovnaké. Zadané: $m = 40 \text{ kg}$, $l = 3,6 \text{ m}$, $a = 2,4 \text{ m}$, $b = 1,8 \text{ m}$, $f_s = 0,6$.



Obr. 6.7

Riešenie:

Po zavedení normálových (N_A, N_B) a tangenciálnych (T_A, T_B) zložiek reakcií v bodoch A a B v tvare

$$T_{Bx} = T_B \cdot \cos \alpha, \quad T_{By} = T_B \cdot \sin \alpha, \quad N_{Bx} = N_B \cdot \sin \alpha, \quad N_{By} = N_B \cdot \cos \alpha$$

môžeme napísať tri podmienky statickej rovnováhy síl v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: T_A - F + T_{Bx} + N_{Bx} = T_A - F + T_B \cdot \cos \alpha + N_B \cdot \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow F$$

$$\sum F_{iy} = 0: N_A - G + N_{By} - T_{By} = N_A - G + N_B \cdot \cos \alpha - T_B \cdot \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow N_A$$

$$\sum M_{iA} = 0: G \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot \cos \alpha\right) - N_B \cdot \overline{BA} = 0 \quad \Rightarrow N_B$$

a doplňujúce (väzobné) rovnice pre zadané body dotyku telies (A, B), definované v tvare

$$T_A = f_s \cdot N_A, \quad T_B = f_s \cdot N_B.$$

Po dosadení známych hodnôt môžeme určiť hodnoty potrebné pre ďalší výpočet a dostaneme

$$\overline{BA} = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3 \text{ m}; \quad G = m \cdot g = 40 \cdot 9,81 = 392,4 \text{ N a}$$

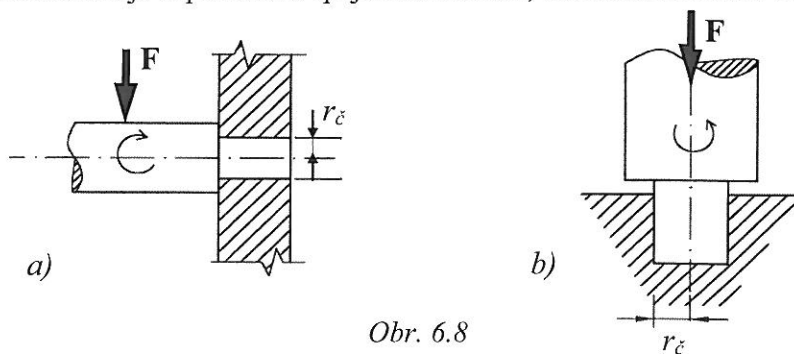
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1,8}{2,4} = 36,87^\circ.$$

Po dosadení hodnôt a vyriešení rovníc rovnováhy dostaneme $N_B = 188 \text{ N}$, $T_B = 112,8 \text{ N}$, $N_A = 309,7 \text{ N}$, $T_A = 185,8 \text{ N}$ a hľadanú silu potrebnú na posunutie dielca $F = 388,8 \text{ N}$.

6.2. Čapové trenie

Proti zmyslu otáčania rotujúcich tyčí – tzv. *čapov*, uložených v tzv. *puzdrách* vzniká v dotykových plochách medzi čapom a puzdrom odpor voči otáčaniu čapu, nazývaný **čapové trenie**. Veľkosť takýchto odporových účinkov vyjadrujeme vo forme momentu, v mechanike nazývaného **moment čapového trenia**.

Podľa smeru zaťaženia rotujúceho telesa a jeho uloženia rozdeľujeme čapy na **radiálne** (zaťaženie pôsobí v smere kolmo na os čapu, Obr.6.8a) a **axiálne** (zaťaženie pôsobí v smere osi čapu, Obr.6.8b). Príkladom čapového trenia je napr. kĺbové spojenie nosníkov, uloženie hriadeľov v klznom ložisku a pod.



Obr. 6.8

Kritérium rozdelenia čapov na radiálne a axiálne (ako vyplýva z obr.6.8) závisí iba na smere pôsobiacej sily F voči osi rotácie čapu. Vo všeobecnosti teda platí:

Veľkosť a zmysel pasívneho odporu v uložení čap – puzdro (napr. hriadeľ – klzné ložisko) vyjadrujeme tzv. momentom čapového trenia M_{ϵ} , ktorý pôsobí vždy proti smeru rotácie čapu.

Moment čapového trenia M_{ϵ} je vo všeobecnom prípade vyjadrený vzťahom

$$M_{\epsilon} = F \cdot r_c \cdot f_{\epsilon} \quad (6.11)$$

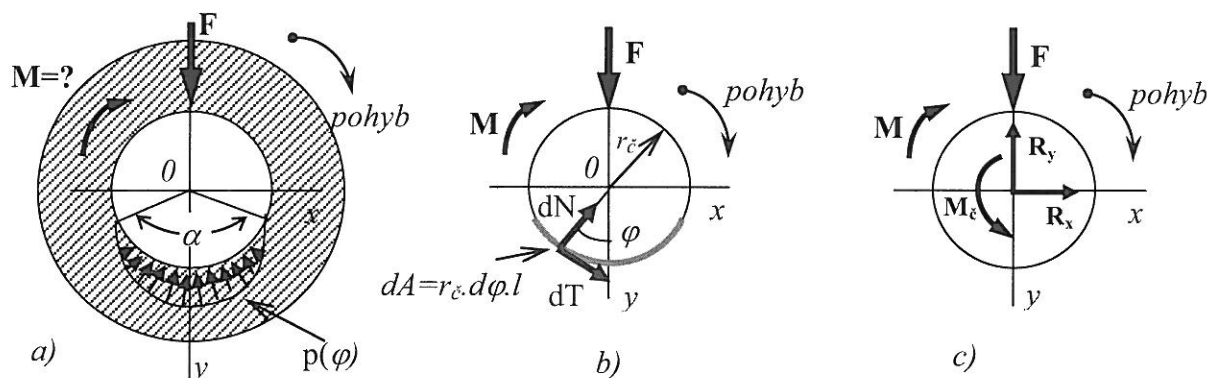
kde F je sila zaťažujúca čap [N], r_c je polomer čapu [m] a f_{ϵ} je faktor trecieho účinku, tzv. **súčiniteľ čapového trenia** [-].

Veličiny F a r_c sú zrejmé zo zaťaženia a konštrukcie čapu. Hodnotu faktora f_c môžeme pre konkrétny prípad telies v kontakte určiť z tabuliek. Súčiniteľ f_c závisí najmä na druhu materiálu čapu a puzdra a na rozložení merného tlaku p [$N.m^{-2}$] v stykovej ploche medzi čapom a puzdrom.

Všetky ďalej uvedené predpoklady a vzťahy pre určenie súčiniteľa čapového trenia f_c budú uvažované pre tzv. **nezabehané čapy**, kde predpokladáme rovnomerné rozloženie tlakov na čape, tzn. $p = \text{konšt.}$

6.2.1. Radiálny čap

Radiálny čap prenáša zaťaženia kolmé na os rotácie a styková plocha medzi čapom a puzdrom je valcová plocha. Predpokladajme, že styková plocha je vymedzená stredovým uhlom α a dĺžkou púzdra l (obr.6.9a). Aby sa čap otáčal rovnomerne, musí na čap pôsobiť akčný otáčavý účinok - moment M , prekonávajúci silový účinok od pasívneho odporu, pôsobiaceho v kontaktnej ploche čap – puzdro.



Obr. 6.9

Na radiálny čap, pri jeho rovnomernom rotačnom pohybe (obr.6.9b), pôsobí otáčavý účinok - moment M , sila F a elementárne odporové sily dN a dT , vztiahnuté na elementárnu plošku $dA = r_c \cdot d\varphi \cdot l$, kde l je dĺžka púzdra a r_c je polomer čapu. Elementárne normálové sily dN a trecie sily dT sú definované v tvare

$$dN = p \cdot dA, \quad dT = f_k \cdot dN, \quad (6.12)$$

kde p je merný tlak medzi čapom a puzdrom [Pa] a f_k je súčiniteľ šmykového (kinematického) trenia [-]. Elementárne sily dN a dT pôsobia proti otáčavému pohybu čapu elementárnym momentom veľkosti

$$dM_c = r_c \cdot dT. \quad (6.13)$$

Transformáciou náhradných silových účinkov do stredu čapu O (obr.6.9c) podmienky rovnováhy sú

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= R_x = 0 & \Rightarrow R_x &= 0 \\ \sum F_{iy} &= R_y - F = 0 & \Rightarrow R_y &= F \\ \sum M_{i0} &= M_c - M = 0 & \Rightarrow M &= M_c \end{aligned}$$

Silové pomery na čape budú jednoznačne určené vtedy, ak sa podarí určiť veľkosť momentu M_c . Dosadením vzťahov (6.12) do (6.13) a použitím vzťahu pre výpočet hodnoty merného tlaku p dostaneme

$$M_c = F \cdot r_c \cdot f_k \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \sin(\alpha/2)}. \quad (6.14)$$

Zavedením trecieho faktora - **súčiniteľa čapového trenia** f_c – určeného v tvare $f_c = f_k \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \sin(\alpha/2)}$

dostaneme už uvedený vzťah (6.11) v tvare $M_c = F \cdot r_c \cdot f_c$, všeobecne platný pre kinematické čapové trenie.

Napríklad pre $\alpha = \pi$ (t.j. pre nové, nezabehané čapy) uvažujeme $f_c = 1,57 \cdot f_k$. Praktický dôsledok:

Pre zaistenie rovnomernej rotácie radiálneho čapu musí byť akčný moment $M \geq M_c$.

6.2.2. Axiálny čap

Pre odpor v axiálnom čape – t.j. **moment čapového trenia M_{ϵ} axiálneho čapu** – analogicky s radiálnym prípadom zaťaženia čapu platí

$$M_{\epsilon} = F \cdot r \cdot f_{\epsilon}, \quad (6.15)$$

kde r je polomer čapu, f_k je súčiniteľ šmykového trenia a F je zaťažujúca sila. Prakticky to znamená:

Aby bol rotačný pohyb axiálneho čapu rovnomerný, musí na neho pôsobiť prídavný vonkajší moment s veľkosťou minimálne $M = M_{\epsilon}$.

Ak axiálny čap (napr. axiálny prstencový čap, t.j. čap s dotykovou plochou v tvare medzikružia a polomermi r , R) zaťažíme silou F , pri uvažovaní rovnomerného rozloženia merného tlaku p po celej uvažovanej stykovej ploche $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$ platí $p = F / A = F / (\pi \cdot (R^2 - r^2)) = \text{konšt}$, kde p je merný tlak [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$]; r , R sú vnútorný a vonkajší polomer prstenca [m] a F je veľkosť zaťažujúcej sily [N].

Pre moment čapového trenia M_{ϵ} axiálneho čapu napr. pre **štandardný axiálny čap plný** (Tab.6.2) platí

$$M_{\epsilon} = f_{\epsilon} \cdot F \cdot r = \frac{2}{3} f_k \cdot F \cdot r. \quad (6.16)$$

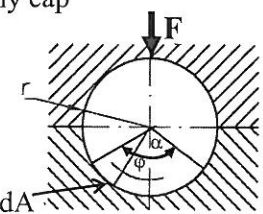
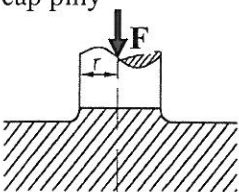
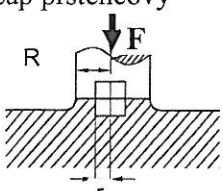
Pre moment čapového trenia M_{ϵ} axiálneho čapu s dotykovou **plochou v tvare medzikružia** platí

$$\begin{array}{ll} \text{Nezabehaný čap} & \text{Zabehaný čap} \\ M_{\epsilon} = \frac{2}{3} \cdot f_k \cdot F \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = f_{\epsilon} \cdot F \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} & M_{\epsilon} = \frac{1}{2} \cdot f_k \cdot F \cdot (R + r) = f_{\epsilon} \cdot F \cdot (R + r) \end{array} \quad (6.17a) \quad (6.17b)$$

kde R , r sú polomery medzikružia. Pre súčiniteľ čapového trenia nezabehaného čapu platí $f_{\epsilon} = 2/3 \cdot f_k$, resp. pre čap zabehaný je $f_{\epsilon} = 1/2 \cdot f_k$. V tab.6.2 sú súčinitele čapového trenia pre niektoré druhy čapov pri rovnomernom i premenlivom rozložení merného tlaku v stykovej ploche čapu pri suchom trení.

Súčinitele čapového trenia pre niektoré druhy čapov

Tabuľka 6.2

Radiálne a axiálne čapy – tvar stykovej plochy	Súčiniteľ čapového trenia pre merné tlaky	
	$p = \text{konšt}$	$p \cdot r = \text{konšt}$
Radiálny čap 	$f_{\epsilon} = f_k \cdot \frac{\alpha}{\sin 2\alpha}$ $\alpha = \pi \rightarrow f_{\epsilon} = 1,57 f_k$	$f_{\epsilon} = f_k \cdot \frac{4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha + \sin \alpha}$ $\alpha = \pi \rightarrow f_{\epsilon} = 1,27 \cdot f_k$
Axiálny čap plný 	$f_{\epsilon} = \frac{2}{3} \cdot f_k$	$f_{\epsilon} = \frac{1}{2} \cdot f_k$
Axiálny čap prstencový 	$f_{\epsilon} = \frac{2}{3} \cdot f_k \cdot \frac{1 - (\frac{r}{R})^3}{1 - (\frac{r}{R})^2}$	$f_{\epsilon} = f_k \cdot \frac{1 + \frac{r}{R}}{2}$

Príklad 6.2: Panva s obsahom tekutého kovu má hmotnosť m . Určite silu F vo zvislom lane (obr.6.10), ktorú je potrebné vyvinúť na začiatku nakláňania panvy pri jej vylievaní. Súčiniteľ šmykového trenia medzi čapom a závesnými hákmi je f_k . Zadané: $m=8000$ kg, $f_k = 0,3$, rozmery podľa obr.6.10.

Riešenie:

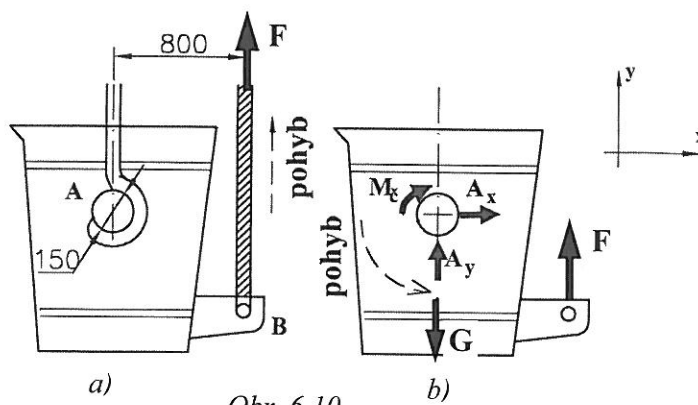
Vzhľadom na to, že zaťaženie panvy (ťaž, lano a zavesenie v mieste A) sú usporiadané symetricky vzhľadom ku zvislej rovine, môžeme úlohu riešiť ako rovinný problém.

Pre sily na uvoľnenej panve (obr.6.10b) môžeme napísať rovnice rovnováhy síl v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: -G + A_y + F = 0 \Rightarrow A_y = G - F$$

$$\sum M_{iA} = 0: F \cdot 0,8 - M_c = 0 \Rightarrow M_c = F \cdot 0,8$$



Obr. 6.10

a pre moment čapového trenia pre $F = G - A_y$ platí $M_c = r_c \cdot f_c \cdot F \Rightarrow M_c = (G - A_y) \cdot r_c \cdot f_c$.

Ak uvažujeme nové, nezabehané čapy, tzn. $\alpha = \pi$ (obr.6.10), súčiniteľ čapového trenia podľa údajov z Tab. 6.2 bude $f_c = 1,57 \cdot f_k$. Ak dosadíme zadané hodnoty do uvedených rovníc rovnováhy a za $G = m \cdot g = 8000 \cdot 9,81 \Rightarrow G = 78\,480$ N dostaneme

$$-G + A_y + F = 0 \Rightarrow -8000 \cdot 9,81 + A_y + F \Rightarrow F = G - A_y = 78480 - A_y.$$

Musíme preto vyjsť z inej, vhodnej je z tretej, rovnice rovnováhy a dostaneme

$$F \cdot 0,8 - M_c = 0 \Rightarrow F \cdot 0,8 - f_c \cdot r_c \cdot (G - A_y) = F \cdot 0,8 - 1,57 \cdot 0,3 \cdot \frac{0,15}{2} \cdot (G - A_y) \Rightarrow$$

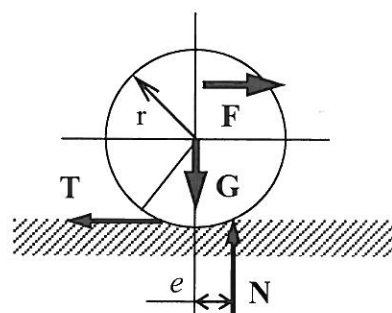
$$(78480 - A_y) \cdot 0,8 - 1,57 \cdot 0,3 \cdot \frac{0,15}{2} \cdot (78480 - A_y) = 0,835325 \cdot A_y = 60011,694 = 0 \Rightarrow A_y = 71842$$

$$F = 78480 - A_y = 78480 - 71842 \Rightarrow F = 6637,67 \text{ N} \Rightarrow M_c = F \cdot 0,8 = 5,31 \text{ kNm}.$$

Záver: Na vyklopenie panvy je potrebné vyvinúť v lane silu $F = 6,637$ kN a prekonať odpor proti otáčaniu v mieste styku čapu a závesných hákov o veľkosti $M_c = 5,31$ kNm.

6.3. Valivý odpor

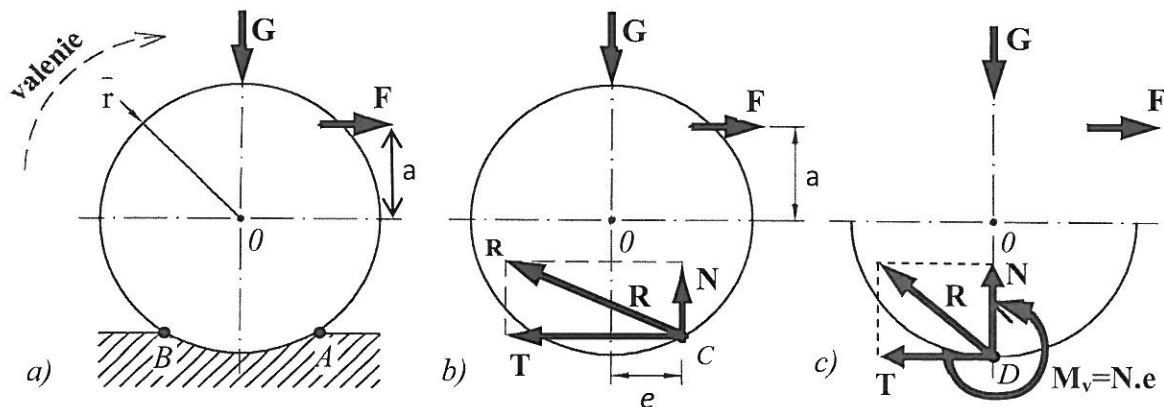
Pasívny silový účinok, vznikajúci pri valení telies nazývame **valivý odpor**. Vzniká v dôsledku toho, že skutočné telesá nie sú dokonale tuhé a pri vzájomnom dotyku sa účinkom síl deformujú. Znamená to, že pri valivom pohybe telies po podložke vzniká silový účinok - odpor voči valeniu - ktorý, rovnako ako iné pasívne odpory, pôsobí proti smeru pohybu (odvažovania). Pri riešení valivého odporu využívame pre zjednodušenie predpoklad, že v mieste styku telies pri valení nedochádza k prešmykovaniu.



Obr. 6.11

Na Obr.6.11 je znázornený valec tiaže G , ležiaci na vodorovnej podložke. Ak by boli obidve telesá (valec aj podložka) dokonale tuhé a hladké, valec by sa pri pôsobení vodorovnej sily F po podložke iba kĺzal. U skutočných telies však v mieste ich styku pôsobí šmykové trenie - t.j. dotyčnicová reakcia $T \leq f_s \cdot N$. Znamená to, že pri - určitej - dostatočne veľkej dotyčnicovej reakcii T dochádza k prekonaniu trecích síl a nastáva valenie valca po podložke.

V skutočnosti sa však vplyvom síl $\mathbf{F}$ a $\mathbf{G}$ valec aj podložka vzájomným kontaktom deformujú a preto je normálová reakcia $\mathbf{N}$ posunutá v smere pôsobenia sily $\mathbf{F}$ o tzv. **rameno valivého odporu** e . Vzniká tak odpor (momentový účinok $N \cdot e$) pôsobiaci proti zmyslu odvaľovania valca. Inak povedané, po zaťažení valca objemovou tiažovou silou $\mathbf{G}$ a akčnou silou $\mathbf{F}$, pôsobiacou v smere pohybu valenia, dochádza k lokálnej deformácii valca i podložky (obr.6.12a). Elementárne reakcie $d\mathbf{R}$ sú spojito rozložené po celej ploche styku telies a ich výsledný účinok je určený vektorom výslednice $\mathbf{R}$, prechádzajúcim konkrétnym bodom stykovej plochy – bod C (obr.6.12b). Poloha bodu C , je určená súradnicou e – **rameno valivého odporu** – a určuje sa pre rôzne materiály a zaťaženia opäť experimentálne.



Obr. 6.12

Ak nahradíme výsledné silové účinky odporu proti valeniu, pôsobiace v stykovej ploche telies, vyjadrené ich výslednicou $\mathbf{R}$ (pôsobí v bode C) sústavou vnútorných silových účinkov $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{M}_v$ (obr.6.12c), kde veličina $\mathbf{M}_v$ predstavuje už spomenutý **moment valivého odporu**. Takýto otáčavý účinok predstavuje pasívny odpor pri valení telesa a pôsobí vždy proti zmyslu jeho valenia. Platí

$$M_v = N \cdot e, \quad (6.18)$$

kde veličina e je už uvedené rameno valivého odporu (často uvádzaný aj ako súčiniteľ valivého odporu).

Pri rovnomernom pohybe valca musí sústava síl spĺňať základné podmienky rovnováhy (obr.6.12c)

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 & : F - T = 0 & \Rightarrow F = T \\ \sum F_{iy} = 0 & : N - G = 0 & \Rightarrow N = G \\ \sum M_{i0} = 0 & : M_v - F \cdot a - T \cdot r = 0 & \Rightarrow N \cdot e - F \cdot a - F \cdot r = G \cdot e - F \cdot (a + r) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{odkiaľ z 3. rovnice pre veľkosť sily } \mathbf{F} \text{ potrebnej pre zaistenie valenia dostaneme } F = T = \frac{G \cdot e}{a + r}. \quad (6.19)$$

Aby uvedená bilancia pasívnych účinkov pri valení platila, musí byť splnená tzv. **podmienka valenia**

$$T \geq N \cdot f_k, \quad (6.20)$$

kde f_k je už známy súčiniteľ šmykového (kinematického) trenia [-].

Pri splnenej podmienke valenia - tzn. ak platí $T > N \cdot f_k = G \cdot f_k$, valec sa bude odvaľovať (neprekľzuje), ak $T < N \cdot f_k$, valec bude na podložke preklzovať. Ak pre vzdialenosť a - t.j. rameno akčnej sily $\mathbf{F}$ vzhľadom k osi valca (tzv. bod valenia O) platí $a = 0$, t.j. potom podľa (6.19) pri $r > e / f_k$ **nastáva začiatok valenia**. Ak rameno $a < e / f_k - r$ bude sa **valec po podložke klzať**, resp. ak platí $a > e / f_k - r$ bude sa **valec po podložke odvaľovať**.

Súčinitele valivého odporu Tabuľka 6.3

Experimentálne určené hodnoty súčiniteľov valivého odporu e pre vybrané dvojice materiálov sú pre zaujímavosť uvedené v tabuľke 6.3.

Materiál telies	e [mm]
ocel' na oceli	0,5
drevo na kameni	0,5

Príklad 6.3: Určite súčiniteľ valivého odporu materiálu valca a podložky, keď bremeno hmotnosti m klesá stálou rýchlosťou (obr. 6.13). Zadané: $m=300\text{ kg}$, $G_v=2\text{ kN}$, $r=0,5\text{ m}$, $\alpha=30^\circ$.

Riešenie:

Valec sa po naklonenej rovine pohybuje rovnomerne smerom nahor účinkom sústavy síl, pre ktorú platia podmienky rovnováhy v tvare

$$\sum F_{ix} = 0: -G_v \cdot \sin \alpha + F - T = 0 \Rightarrow T$$

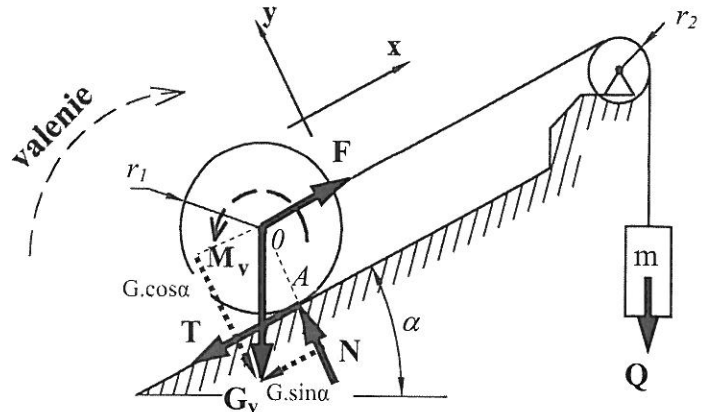
$$\sum F_{iy} = 0: N - G_v \cdot \cos \alpha = 0 \Rightarrow N$$

$$\sum M_{i0} = 0: M_v - T \cdot r_1 = 0 \Rightarrow M_v$$

Z toho dostávame: $F = Q = m \cdot g = 3\text{ kN}$

$$T = F - G_v \cdot \sin \alpha, \quad N = G_v \cdot \cos \alpha$$

$$M_v = T \cdot r_1 = (F - G_v \cdot \sin \alpha) \cdot r_1.$$



Obr. 6.13

Pre valivý odpor a jeho vyjadrenie preto môžeme písať $M_v = N \cdot f_k = N \cdot e = G_v \cdot \cos \alpha \cdot e$. Z rovnosti dvoch ekvivalentných vyjadrení momentu valenia potom dostaneme

$$M_v = M_v \Rightarrow (F - G_v \cdot \sin \alpha) \cdot r_1 = G_v \cdot \cos \alpha \cdot e.$$

Odtiaľ pre súčiniteľ valivého odporu e dostaneme $e = \frac{F - G_v \cdot \sin \alpha}{G_v \cdot \cos \alpha} \cdot r_1$. Po dosadení pre rameno

$$\text{valivého odporu dostaneme } e = \frac{3 - 2 \cdot \sin 30^\circ}{2 \cdot \cos 30^\circ} \cdot 0,5 = \frac{0,5}{0,8666} \Rightarrow e = 0,577.$$

Príklad 6.4: Valec s hmotnosťou M leží polomerom r_1 na rovine, naklonenej pod uhlom α (Obr. 6.14). Na vonkajšom polomere r_2 valca je navinuté lano, ktoré je zaťažené bremenom hmotnosti m . Väzbu medzi lanom a valcom považujeme za ideálnu. Určite podmienky pre rovnováhu síl na valci, ak je zadaný súčiniteľ šmykového trenia f_s medzi valcom a naklonenou rovinou. Rameno valivého odporu je známe. Zadané: $M=200\text{ kg}$, $r_1=0,4\text{ m}$, $r_2=0,5\text{ m}$, $e=0,05\text{ m}$, $f_s=0,12$, $g=10\text{ m.s}^{-2}$, $\alpha=45^\circ$.

Riešenie:

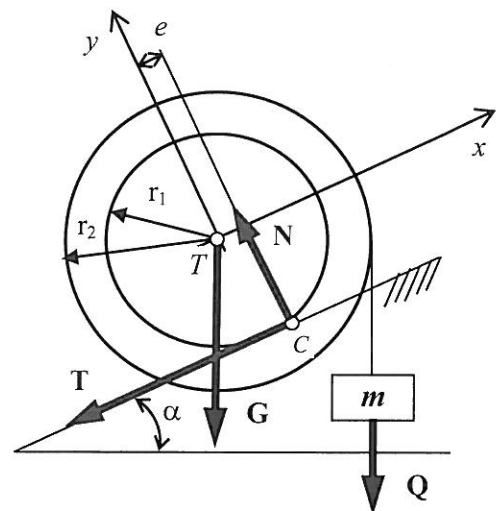
Uvažujme úlohu ako rovinnú. Po uvoľnení valca a nahradení všeobecnej väzby medzi valcom a podložkou reakciami vo valivej väzbe – t.j. zložkou normálovou N , posunutou o rameno e a zložkou tangenciálnou T . Uvažujeme tiež so silou vlastnej tiaže valca $G = M \cdot g = 2000\text{ N}$ a tiaže od zaveseného bremena $Q = m \cdot g$. Je zrejmé, že na valec pôsobí všeobecná rovinná sústava síl, pre ktorú môžeme písať 3 rovnice rovnováhy. Dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0: -T - G \cdot \sin \alpha - Q \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: N - G \cdot \cos \alpha - Q \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_{iT} = 0: -T \cdot r_1 + N \cdot e - r_2 \cdot Q = 0$$

Ako neznáme v nich vystupujú parametre reakcií N a T a hmotnosť bremena m (určuje zaťažujúcu silu Q).



Obr. 6.14

Úpravou z prvých dvoch rovníc dostaneme $T = -(Q + G) \cdot \sin \alpha$ a $N = (Q + G) \cdot \cos \alpha$.

Dosadením rovníc do momentovej rovnice a jej úpravou pre veľkosť hmotnosti bremena dostaneme

$$m = M \cdot \frac{r_1 \cdot \sin \alpha + e \cdot \cos \alpha}{r_2 - r_1 \cdot \sin \alpha - e \cdot \cos \alpha} = 200 \cdot \frac{0,4 \cdot \sin 45 + 0,05 \cdot \cos 45}{0,5 - 0,4 \cdot \sin 45 - 0,05 \cdot \cos 45} = 200 \cdot \frac{0,318}{0,182} \Rightarrow m = 349,5 \text{ kg}.$$

Spätným dosadením do rovníc pre **T** a **N** môžeme určiť zostávajúce neznáme parametre a platí

$$T = -(Q + G) \cdot \sin \alpha = -(349,5 \cdot 10 + 200 \cdot 10) \cdot \sin 45 \Rightarrow T = -3885 \text{ N},$$

$$N = (Q + G) \cdot \cos \alpha = (3495 + 2000) \cdot \cos 45 \Rightarrow N = 3885 \text{ N}.$$

Pri riešení úloh s uvažovaním valivého odporu je nutné skontrolovať aj podmienku valenia, t.j. či platí nerovnosť $|T| \leq f_s \cdot |N|$. Ak do uvedenej podmienky valenia dosadíme vzťahy pre sily **T** a **N**, jej úpravou získame podmienku valenia pre zadaný prípad a pre kontrolu valenia dostaneme

$$|\tan \alpha| \leq f_s.$$

Ak sa zadaná podmienka potvrdí môžeme povedať, že valec sa po naklonenej rovine iba odvaluje, tzn. pri jeho pohybe nedochádza k prešmykovaniu. Po dosadení dostaneme

$$|\tan \alpha| \leq f_s \Rightarrow \tan 45^\circ \leq f_s \Rightarrow 0,707 \geq 0,12 \quad - \quad \text{podmienka splnená nie je.}$$

Záver: Pri pohybe valca po naklonenej rovine bude dochádzať k jeho zošmykovaniu po podložke. Je zrejmé, že uhol sklonu roviny $\alpha = 45^\circ$ je príliš veľký.

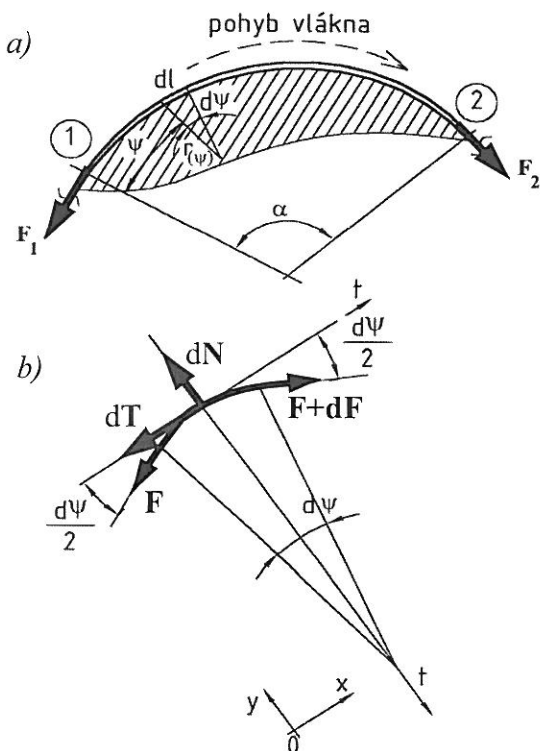
6.4. Trenie vlákien (pásov)

Prenos síl medzi telesami je v technickej praxi často uskutočňovaný aj prostredníctvom ohybných prvkov, akými sú laná, remene, oceľové pásy a pod. Práve princíp trenia medzi nimi a telesami, ktoré obopínajú je často využívaný na prenos silových účinkov. Podľa praktického využitia takýto prenos silových účinkov charakterizujú 2 hlavné prípady a to: *dotykové plochy sú v relatívnom pokoji* (napr. remeňové prevody) alebo *sa navzájom šmykajú* (napr. brzdové systémy).

Pri šmykaní oceľových pásov, lán, remeňov, reťazí a pod. (ďalej iba *vlákna*), po povrchu telies s drsnou valcovou alebo inak všeobecne zakrivenou plochou, vzniká špecifický prípad šmykového trenia, ktoré budeme nazývať *pásové trenie* (inak aj *trenie vlákien*).

Pri analýze pásového trenia predpokladáme, že vlákno je dokonale ohybné, nehmotné a je nepredlžiteľné (nenatáhuje sa). Osové sily, pôsobia vo vláknach v smere dotyčnice k zadanej obopínanej (obvykle valcovej) ploche.

Základnou úlohou je určenie vzťahu medzi veľkosťou síl F_1 a F_2 na oboch koncoch vlákna, najčastejšie v prípade pohybujúceho sa vlákna. Predpokladajme, že vo výpočtovom modeli (obr.6.15a) je vlákno vedené okolo zakrivenej vypuklej plochy telesa (napr. hnacie koleso), je namáhané – napínané – silami F_1 , F_2 a pohybuje sa v naznačenom smere pohybu valca, t.j. vlákno sa voči valcovej ploche pohybuje v smere pôsobenia sily F_2 .



Obr. 6.15

Ak sú povrchy vlákna i telesa dokonale hladké ($f = 0$), zrejme by platilo aj $F_1 = F_2$ a teda aj v prierezoch ① a ②, vymedzených **uhlom opásania** α , budú tangenciálne sily rovnaké ($T_1 = T_2$). Pri styku skutočného telesa a vlákna ($f \neq 0$), v smere pohybu vlákna jeho zaťaženie od miesta ① k miestu ② narastá a to v dôsledku existencie šmykového trenia medzi valcom a vláknom (tzn. platí $T_2 > T_1$).

Na uvoľnený element vlákna (Obr.6.15b) pôsobia reakcie telesa dN a dT . Ak je vo vlákne na ľavej strane elementu sila F , na pravej strane musí byť sila $F + dF$, aby mohol byť odpor proti pohybu telesa (trecia sila dT) prekonaný. Sily pôsobiace na vybraný element s dĺžkou dl (obr.6.15b) tvoria zväzok síl a jeho rovnice rovnováhy môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: & (F + dF) \cdot \cos \frac{d\psi}{2} - F \cdot \cos \frac{d\psi}{2} - dT = 0 \\ \sum F_{iy} = 0: & dN - (F + dF) \cdot \sin \frac{d\psi}{2} - F \cdot \sin \frac{d\psi}{2} = 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

K uvedeným rovniciam, rovnako ako u iných druhov pasívnych odporov, pristupuje aj ďalšia rovnica - pre šmykové trenie medzi vláknom a telesom - v tvare $dT = f_k \cdot dN$. Pre relatívne malý uhol $d\psi/2$ platí $\cos d\psi/2 \cong 1$, $\sin d\psi/2 \cong d\psi/2$ a preto môžeme rovnice rovnováhy (6.21) zjednodušiť na tvar

$$dF = f_k \cdot dN \quad \text{a} \quad F \cdot d\psi + dF \cdot \frac{d\psi}{2} = dN. \quad (6.22)$$

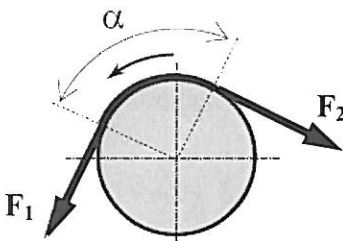
Po zanedbaní malých veličín vyššieho rádu (tzn. diferenciálov vyšších rádov, napr. $dF \cdot (d\psi/2)$) a po dosadení za dN z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$\frac{dF}{F} = f_k \cdot d\psi.$$

Integrovaním $\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = f_k \cdot \int_0^\alpha d\psi$ dostaneme $\ln \frac{F_2}{F_1} = f_k \cdot \alpha \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = e^{f_k \cdot \alpha} = \exp(f_k \cdot \alpha)$. Pri konštantných

hodnotách f_k a uhla α môžeme získať tzv. **Eulerov vzorec**, definovaný v tvare

$$\frac{F_2}{F_1} = e^{f_k \cdot \alpha} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot e^{f_k \cdot \alpha}, \quad (6.23)$$



Obr. 6.16

kde F_1 je veľkosť ťahovej hnacej sily [N], F_2 je veľkosť ťahovej hnanej sily [N], f_k je súčiniteľ šmykového kinematického trenia [-] a α je tzv. **uhol opásania** kolesa alebo valca vláknom [°] (Obr.6.16).

Z uvedeného vzťahu pre trenie vlákna po valcovej ploche vyplýva, že pri pohybe vlákna v naznačenom smere bude $F_2 > F_1$. Zo vzťahu (6.23) vidíme, že pomer oboch síl vôbec nezávisí na tvare plochy, rozhodujúce sú iba dve charakteristiky a to: uhol opásania α a súčiniteľ šmykového trenia f_k . Z uvedeného vyplýva tvrdenie:

Pomer síl F_2 / F_1 (vzťah medzi ťahovými účinkami vo vlákne) nezávisí na tvare zakrivenia plochy telesa, ale iba na veľkosti súčinu uhla opásania α a súčiniteľa šmykového trenia f_k .

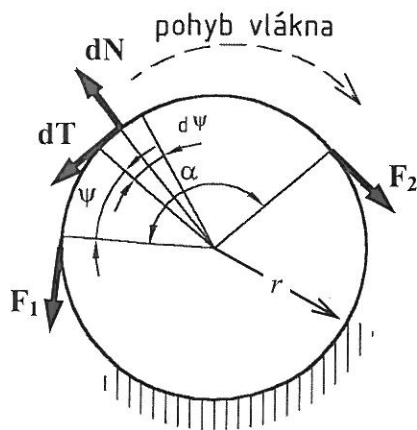
Ak sa vlákno po valci s polomerom r (obr.6.17) kľže, je prenášaný trecí moment M_t veľkosti

$$M_t = \int dT \cdot r = \int f_k \cdot dN \cdot r = \int f_k \cdot r \cdot dT \cdot d\psi = f_k \cdot r \cdot \int_0^\alpha dT \cdot e^{f_k \cdot \psi} \cdot d\psi$$

$$M_t = F_1 \cdot r \cdot (e^{f_k \cdot \alpha} - 1)$$

odkiaľ využitím rovnice (6.23) a po úprave výrazu pre jeho veľkosť dostaneme

$$M_t = r \cdot (F_2 - F_1). \quad (6.24)$$



Obr. 6.17

V prípade, ak sa vlákno nepohybuje, postupujeme pri odvodzovaní vzťahu medzi silami F_1 a F_2 pôsobiacimi vo vlákne, analogicky.

V podmienkach rovnováhy (6.21) bude však namiesto trecej sily T vystupovať dotyčnicová reakcia T_0 a rovnicu v tvare $dF = f_k \cdot dN$ nahradíme nerovnosťou $dT_s \leq f_s \cdot dN$. Po úpravách môžeme dostať podmienku pre relatívny pokoj medzi vláknom a valcom v tvare

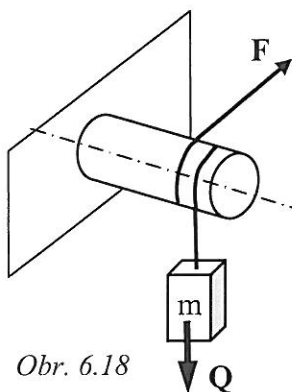
$$\frac{F_2}{F_1} \leq e^{f_s \cdot \alpha}, \quad (6.25)$$

z ktorej vyplýva, že pri zadanej sile F_1 môže mať sila F_2 na druhom konci vlákna pri zachovaní rovnováhy silových účinkov maximálnu veľkosť, definovanú vzťahom v tvare

$$F_{2\max} = F_1 \cdot e^{f_s \cdot \alpha}. \quad (6.26)$$

Záverom je potrebné ešte uviesť, že vzťahy (6.23) a (6.24) platia aj pre uhol opásania $\alpha > 2\pi$, t.j. pre prípad niekoľko násobného ovinutia vlákna okolo valca.

Príklad 6.5: Okolo pevného valca je namotané lano, na ktorom je zavesené bremeno neznámej hmotnosti m (obr.6.18). Pri zdvíhaní bremena pôsobí sila F_z a pri spúšťaní sila F_s . Vypočítajte hmotnosť bremena m a hodnotu súčiniteľa trenia f_k medzi lanom a valcom. Zadané: $F_z = 3 \text{ kN}$, $F_s = 0,48 \text{ kN}$, $\alpha = 5/2 \cdot \pi$.



Riešenie:

Teleso s hmotnosťou m vyvoláva v lane tiažovú silu $Q = m \cdot g$.

1. **Pre zdvíhanie bremena** - závislosť medzi akčnou silou F_z a bremenom Q definujeme podľa (6.23) v tvare $F_z = Q \cdot e^{f_k \cdot \alpha}$.

Po dosadení dostaneme $F_z = m \cdot g \cdot e^{f_k \cdot \alpha} \Rightarrow 3 = m \cdot 9,81 \cdot e^{f_k \cdot \frac{5}{2}\pi}$.

2. **Pre spúšťanie bremena** - závislosť medzi silou F_s a bremenom Q je určená rovnicou (6.23) v tvare $Q = F_s \cdot e^{f_k \cdot \alpha}$.

Po dosadení dostaneme $m \cdot g = F_s \cdot e^{f_k \cdot \alpha} \Rightarrow m \cdot g = 0,48 \cdot e^{f_k \cdot \alpha}$.

Po vyjadrení hodnoty $e^{f_k \cdot \alpha}$ z jednej rovnice a jej dosadení do rovnice druhej bude možné určiť hmotnosť bremena. Dostaneme $m = \frac{\sqrt{F_z \cdot F_s}}{g} = \frac{\sqrt{3000 \cdot 480}}{9,81} \Rightarrow m = 122,3 \text{ kg}$.

Odvodenie: $F_z = m \cdot g \cdot e^{f_k \cdot \alpha} \Rightarrow e^{f_k \cdot \alpha} = \frac{F_z}{m \cdot g}$. Uvedený výraz dosadíme do vzťahu $m \cdot g = F_s \cdot e^{f_k \cdot \alpha}$ a

dostaneme $m \cdot g = F_s \cdot \frac{F_z}{m \cdot g}$. Prenásobením rovnice $(m \cdot g)$ získame $(m \cdot g)^2 = F_s \cdot F_z \Rightarrow m \cdot g = \sqrt{F_s \cdot F_z}$

a pre hmotnosť platí $m = \frac{\sqrt{F_s \cdot F_z}}{g}$. Uhol opásania je $\alpha = 5/2 \cdot \pi$. Napr. z rovnice pre zdvíhanie môžeme

vyjadriť $e^{f_k \cdot \alpha} = \frac{3}{m \cdot g} \Rightarrow e^{f_k \cdot \alpha} = \frac{3000}{122,3 \cdot 9,81} = 2,5$, odkiaľ $f_k = \frac{\ln 2,5}{\alpha} = \frac{0,9162}{5/2 \cdot \pi} \Rightarrow f_k = 0,12$.

Záver: Hmotnosť bremena je $m = 122,3 \text{ kg}$ a súčiniteľ šmykového trenia medzi lanom a valcom je $f_k = 0,12$.

Príklad 6.6: Určite, koľkokrát je potrebné namotať lano na nepohyblivý valec, aby sme pomocou sily F udržali v rovnováhe bremeno hmotnosti m , pôsobiace na druhej strane lana (Obr.6.19). Súčiniteľ šmykového trenia medzi lanom a valcom je f_s . Zadané: $F = 100 \text{ N}$, $m = 50 \text{ kg}$, $f_s = 0,15$.

Riešenie:

Bremeno hmotnosti m pôsobí na lano silou s veľkosťou $Q = m \cdot g$.

Uhol opásania je $\alpha = 2\pi \cdot p + \pi = \pi \cdot (2p + 1)$, kde p je počet plných otočení lana okolo valca. Podľa Eulerovho vzťahu (6.23) pre pomer síl v lane platí

$$Q = F \cdot e^{f_s \cdot \pi \cdot (2p + 1)}.$$

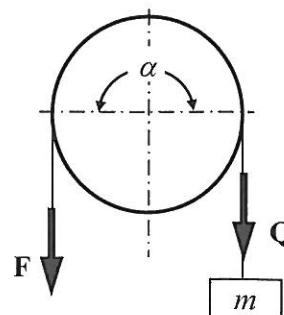
Po matematických úpravách (vyjadrenie neznámej p z rovnice) dostaneme vzťah pre potrebný počet otočení lana v tvare

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln Q - \ln F}{f_s \cdot \pi} - 1 \right).$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostaneme: $Q = 50 \cdot 10 = 500 \text{ N}$,

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln Q - \ln F}{f_s \cdot \pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 500 - \ln 100}{0,15 \cdot \pi} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6,215 - 4,605}{0,471} - 1 \right) \Rightarrow p = 1,209.$$

Záver: Potrebný počet otočení lana s rezervou bezpečnosti je $p = 2$.



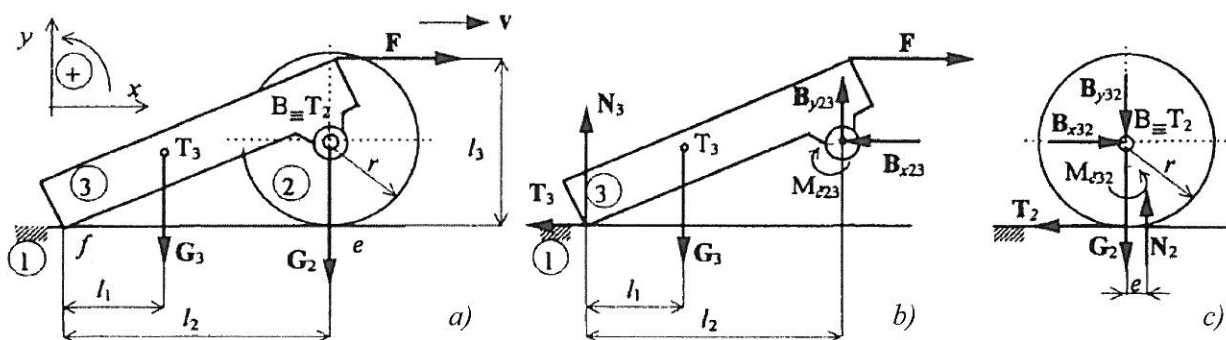
Obr.6.19

6.5. Sústavy telies s uvažovaním pasívnych odporov

Metodika riešenia statickej rovnováhy sústav telies s uvažovaním pasívnych odporov je zhodná s riešením sústav telies s ideálnymi väzbami. Vzťah na posúdenie statickej určitosti sústavy telies s pasívnymi odporami je rovnaký ako pre sústavy telies s ideálnymi väzbami. Rozdiel v riešení je iba v tom, že je potrebné uvažovať reálne väzby medzi telesami, ktoré nahrádzame príslušnými reakciami. Ku štandardným rovniciam rovnováhy, zostaveným pre uvoľnené telesá, je potrebné však definovať aj ďalšie - doplnkové rovnice, zohľadňujúce druh pasívneho odporu, pôsobiaceho v sústave telies. Základný postup riešenia takýchto reálnych sústav telies si ukážeme na ilustračnom príklade.

Príklad 6.7: Určite veľkosť sily F tak, aby sa zadaná sústava telies (Obr.6.20a) pohybovala konštantnou rýchlosťou. V dotyku kola (3) s rámom (1) uvažujeme s valivým odporom a v styku telesa (3) s podložkou (1) uvažujeme so šmykovým trením. Zadané: m_3 , m_2 , l_1 , l_2 , l_3 , r , f_k , f_s , r_s , e .

Riešenie:



Obr.6.20

Sila $\mathbf{F}$ pôsobí na *Teleso 3*, ktorého tiaže $\mathbf{G}_3$ je známa. *Teleso 3* je na jednej strane voľne opreté o podložku (1) a šmyká sa po nej (súčiniteľ šmykového trenia je $f = f_k$ a je zadany). Na druhej strane je *Teleso 3* spojené v bode B s kolesom (2), pohybujúcim sa po vertikálnej podložke (1). Pre čap (bod B) je známy polomer r_c a koeficient čapového trenia je f_c .

Na Obr.6.20b sú uvoľnené telesá zadanej sústavy telies s vyznačenými zaťažujúcimi silami a reakciami. Orientáciu reakcií sme zvolili. Smer pohybu predpokladáme v smere vektora rýchlosti $\mathbf{v}$ (t.j. zľava doprava). Pre zvolený súradnicový systém môžeme podľa Obr.6.20b napísať podmienky rovnováhy sústavy telies ako 11 algebrických rovníc v tvare

Teleso 2:

$$\begin{aligned}(1) \quad \sum F_{ix} &= 0: -T_2 + B_{32x} = 0 \\(2) \quad \sum F_{iy} &= 0: -B_{32y} + N_2 - G_2 = 0 \\(3) \quad \sum M_{iB} &= 0: N_2 \cdot e - T_2 \cdot r + M_{c32} = 0\end{aligned}$$

Teleso 3:

$$\begin{aligned}(4) \quad \sum F_{ix} &= 0: -T_3 - B_{23x} + F = 0 \\(5) \quad \sum F_{iy} &= 0: B_{23y} + N_3 - G_3 = 0 \\(6) \quad \sum M_{iB} &= 0: -N_3 \cdot l_2 - T_3 \cdot r - M_{c32} - F \cdot (l_3 - r) + G_3 \cdot (l_2 - l_1) = 0\end{aligned}$$

Rovnice vyplývajúce z princípu akcie a reakcie:

$$\begin{aligned}(7) \quad B_{32x} &= B_{23x} \\(8) \quad B_{32y} &= B_{23y} \\(9) \quad M_{c32} &= M_{c23}\end{aligned}$$

Rovnice vyplývajúce z uvažovania pasívnych odporov:

$$\begin{aligned}(10) \quad M_{c23} &= f_c \cdot r_c \cdot \sqrt{B_{23x}^2 + B_{23y}^2} \\(11) \quad T_3 &= f_k \cdot N_3\end{aligned}$$

Definovali sme celkom 11 rovníc s 11 neznámymi parametrami – veľkosť zaťažujúcej sily $\mathbf{F}$ a väzbové reakcie $\mathbf{B}_{32x}, \mathbf{B}_{23x}, \mathbf{B}_{32y}, \mathbf{B}_{23y}, \mathbf{M}_{32c}, \mathbf{M}_{23c}, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$, ktoré môžeme určiť matematickými úpravami.

Pri vyšetrovaní rovnomerného pohybu zadanej sústavy telies je nutné ešte skontrolovať, či je vôbec pohyb sústavy fyzikálne možný. Znamená to kontrolu toho, či platia podmienky v tvare:

- $N_2 > 0$ - kontrola, aby sa teleso 2 neoddelilo od podložky,
- $N_3 > 0$ - kontrola, aby sa teleso 3 neoddelilo od podložky,
- $T_2 > f_k \cdot N_2$ - kontrola, aby koleso vykonávalo po podložke iba valivý pohyb, t.j. aby nedošlo k prešmykovaniu kolesa po podložke.

? Určite potrebnú veľkosť sily F pre sústavu telies podľa Obr.6.20. Zadané: $m_3 = 100 \text{ kg}$, $m_2 = 200 \text{ kg}$, $l_1 = 0,4 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$, $l_3 = 0,8 \text{ m}$, $r = 0,4 \text{ m}$, $f_k = 0,3$, $f_c = 0,7$, $r_c = 5 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ cm}$.

Záverčné poznámky:

V úlohách, riešených v predchádzajúcich kapitolách učebného textu, sme výhradne uvažovali idealizované hmotné objekty – t.j. dokonale tuhé objekty s dokonale hladkými väzbami a s reakciami v smere normály na dotykovú plochu. Všetky reálne hmotné objekty majú však povrch drsný, môžu sa čiastočne deformovať a preto sa v skutočnosti musí určitá časť mechanickej energie vynaložiť na prekonanie takýchto „odporových silových účinkov“.

Napríklad mechanické sústavy – stroje, strojné zariadenia – sú schopné vyvíjať vlastnú pracovnú činnosť až po prekonaní pasívnych odporov medzi jednotlivými, navzájom sa stýkajúcimi, členmi sústavy

Silové účinky, brániace vzájomnému pohybu dotýkajúcich sa telies nazývame **pasívne odpory**. Takéto odporové sily pôsobia vždy proti smeru relatívneho pohybu dotýkajúcich sa telies a v dôsledku ich pôsobenia nastáva rovnováha hmotných objektov pri iných silových pomeroch ako v prípadoch, keď s nimi neuvažujeme. Pasívne odpory sú vyvolané najmä drsnosťou a väzbami atómov v dotykových plochách (šmykové a čapové trenie, trenie vlákien), plastickou a elastickou deformáciou vo väzbách (odpor pri valení) a ich vzájomnou kombináciou. Z ich podstaty je teda zrejmé, že takéto silové účinky bránia vzájomnému pohybu telies v kontakte alebo pôsobia proti smeru ich relatívneho pohybu. ***Za reálne väzby teda považujeme také spojenia telies, ktoré rešpektujú v mieste styku aj pasívne odpory.***

Uvažovanie pasívnych odporov v sústavách telies je vzťahované k sústavám telies v pohybe. Pre riešenie rovnováhy konkrétnej sústavy telies uvažujeme s jej rovnomerným pohybom a obvykle preto musíme najskôr vyjadriť veľkosť niektorého prídavného parametra – potrebného na dosiahnutie rovnovážneho stavu sústavy síl, pôsobiacich na hmotné objekty.

Sústavy telies v rovnováhe t.j. v pokoji, sú pri uvažovaní pasívnych odporov prakticky vždy staticky neurčité. Pri pohybe je situácia z pohľadu riešiteľnosti jednoduchšia, pretože v dotykových plochách so šmykovým trením sa dotyčnicové reakcie T_0 rovnajú trecím silám T , ktoré sú určené normálovými reakciami N a príslúchajúcim súčiniteľom trenia f . Pri telesách s valivým odporom sa rešpektuje príslušná normálová reakcia vysunutá o rameno valivého odporu e . V ložiskách sa uvažuje s momentom čapového trenia f_c a pod.

Kontrolné otázky:

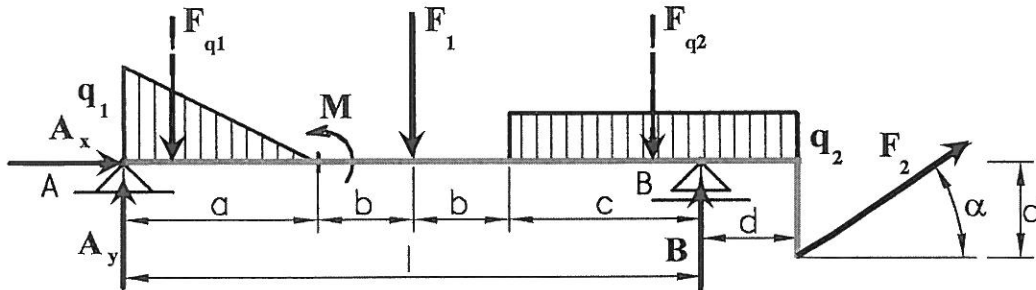
1. Definujte pojem pasívny odpor, uveďte ich praktický význam a zdôvodnite, kedy je potrebné s nimi uvažovať.
2. Uveďte základné druhy pasívnych odporov a ako sa v skutočných sústavách telies prejavujú.
3. Objasnite princíp šmykového trenia, charakteristické veličiny, spôsob určovania, súvis medzi trením a adhéziou.
4. Uveďte rozdiely medzi statickým a kinematickým trením a charakterizujte súvis medzi súčiniteľmi f_s a f_k .
5. Úloha o naklonenej rovine – objasnite úlohu a spôsob jej riešenia pri zdvíhaní telesa po naklonenej rovine.
6. Úloha o naklonenej rovine – objasnite úlohu a spôsob jej riešenia pri spúšťaní telesa po naklonenej rovine.
7. Charakterizujte proces čapového trenia, uveďte rozdiel medzi axiálnym a radiálnym čapom a objasnite vzťah pre výpočet momentu čapového trenia M_c u radiálneho čapu.
8. Objasnite vzťah pre výpočet momentu čapového trenia axiálneho čapu, zdôvodnite potrebu uvažovania zabehaného a nezabehaného čapu a uveďte, aký má určovanie M_c praktický význam.
9. Charakterizujte valivý odpor, objasnite hlavné veličiny ovplyvňujúce jeho veľkosť a uveďte vzťah pre určenie veľkosti valivého odporu M_v .
10. Objasnite pojem rameno valivého odporu a jeho súvis so súčiniteľom valivého odporu, uveďte a zdôvodnite podmienku valenia.
11. Uveďte príklady praktických aplikácií pri ktorých dochádza k treniu vlákien, uveďte hlavnú úlohu pri riešení pásového trenia.
12. Objasnite Eulerov vzťah pre závislosť medzi silami na oboch koncoch vlákna. Uveďte na čom veľkosť síl na koncom pásu závisí a ako je možné znížiť trenie medzi vláknom a valcom.

Vzorové zadanie na semestrálnu skúšku

Príklad 1: (1 bod)

Na nosníku zaťaženom silami F_1 , F_2 , momentom M a spojitými zaťažieniami q_1 , q_2 určite:

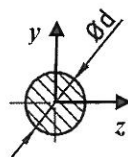
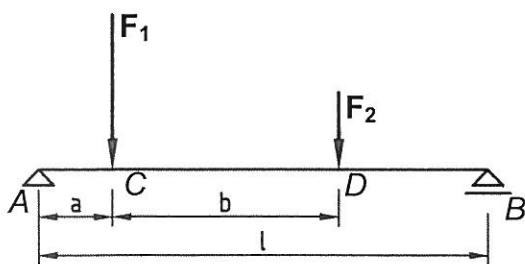
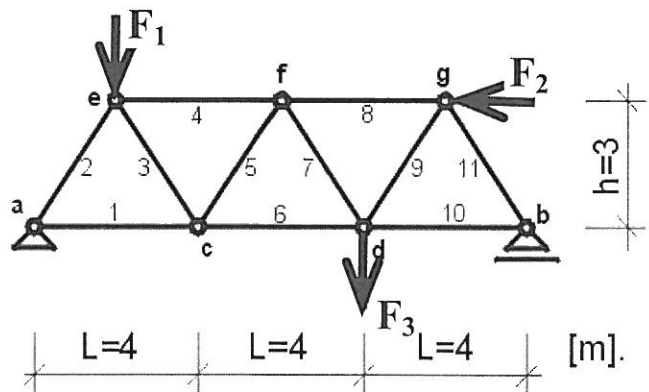
- väzbové reakcie A_x , A_y , B a správnosť výsledkov overte kontrolnou podmienkou.
 - veľkosť vnútorných silových veličín N , T , M_o v bode X , vzdialenom 2,5 m napravo od bodu A .
- Zadané: $F_1=25$ kN, $F_2=50$ kN, $M=20$ kN.m¹, $q_1=100$ kN.m⁻¹, $q_2=50$ kN.m⁻¹, $a=c=4$ m, $b=d=2$ m.



Príklad 2: (1 bod)

Pre prútovú sústavu podľa obrázku vykonajte:

- určite statickú určitosť PS a väzbové reakcie.
- metódou rezu vypočítajte veľkosť osových síl v prútoch 6 a 7. Výsledky overte postupnou uzlovou metódou. Zadané: $F_1=200$ kN, $F_3=300$ kN.



Príklad 3: (1 bod)

Pre zadaný nosník vykonajte:

- určite väzbové reakcie na nosníku a zakreslite priebeh N , T a M_o po celej dĺžke nosníka.
- pre zadaný materiál (známe σ_{dov}) navrhnete optimálny priemer ϕd

nosníka kruhového prierezu. Zadané: $F_1=50$ kN; $F_2=40$ kN; $a=1$ m; $b=4$ m; $l=8$ m; $d=50$ mm, $\sigma_{dov}=150$ MPa.

Teoretické otázky: (každá otázka za 0,2 bodu)

- Podmienky rovnováhy pre RZS pri výpočtovom riešení, uviesť slovne a matematicky.
- Varignonova momentová veta pre všeobecnú sústavu síl – vzťah, objasniť. Uviesť vzťahy pre výpočet výslednice (veľkosť, miesto, zmysel, poloha - parametre p , q a h) sústavy síl.
- Jednotka napätia a jej rozmer v základných jednotkách SI. Premeňte hodnotu 10,25 MPa na Pa a hodnotu 1257 Pa na MPa.
- Závislosť akých veličín vystihuje Hookeov zákon pre ťah/tlak, vzťah, jednotky a objasniť ho.
- Objasnite pojem absolútne predĺženie, nákres, označenie, výpočtový vzťah a rozmer. Objasnite pojem pomerné predĺženie, nákres, označenie, výpočtový vzťah, jednotky.

ZÁVER

Predložené skriptum obsahuje objasnenie najdôležitejších princípov a poznatkov zo statiky nosných konštrukcií a jeho hlavným poslaním je spracovanie ucelenej študijnej podpory pre prvú časť predmetu „*Základy mechaniky pevných telies*“. Ide o študijnú literatúru vhodnú nielen pre zvládnutie teoretickej, ale najmä pre prax dôležitejšej výpočtovej časti predmetovej skúšky a študijnú podporu pre zvládnutie určených požiadaviek a požadovaných znalostí pre úspešné absolvovanie predmetu. Skriptum obsahuje základné teoretické poznatky statickej analýzy, zamerané na zvládnutie riešenia rovnováhy silových účinkov na nosníkoch s priamou a lomenou osou a na nosníkoch priehradových. Všetky kapitoly obsahujú aj primerané množstvo riešených príkladov, ktoré podporujú možnosť hlbšieho pochopenia riešeného problému.

Statika sa zaoberá predovšetkým podmienkami rovnováhy vzájomného silového pôsobenia hmotných objektov, ktorá priamo súvisí aj s problematikou *stability polohy telies*. To má priamy súvis aj oblasťami rizikového a krízového manažmentu, pretože platí, že každý krízový dej alebo jav je v podstate narušením rovnovážneho stavu systému, t.j. dochádza k narušeniu rovnováhy účinkov na systém pôsobiacich. Statika vo všeobecnosti však rieši iba prípady, keď sa hmotné objekty nachádzajú v stave pokoja a vychádza z predpokladu, že všetky hmotné objekty sú tzv. dokonale tuhé (nedeformovateľné). V skutočnosti však každý reálny hmotný objekt, vystavený dostatočne veľkému účinku vonkajších zaťažení alebo iných fyzikálnych účinkov (napr. zmena teploty), svoj tvar a rozmery mení – hovoríme, že *sa deformuje*.

S ohľadom na obsahovú náplň predmetu verím, že v dohladnej dobe sa podarí spracovať aj pokračovanie tohto študijného textu, zaoberajúceho sa mechanikou pevného, ale už deformovateľného telesa – t.j. odborom, ktorý objasňuje pojmy ako mechanické napätie a deformácia, ktoré sú najčastejšie vyvolané pôsobením vonkajšieho zaťaženia na reálne hmotné objekty. Pôjde najmä o otázky súvisiace s pevnosťou a pružnosťou reálneho telesa a preto túto časť mechaniky telies v aplikovanej technickej forme nazývame *náukou o pevnosti a pružnosti prvkov konštrukcií* (st. názov *elastostatika*), aj keď ani toto pomenovanie plne nevystihuje jeho obsahovú rozmanitosť riešených problémov. Zaoberá sa javmi, ktoré charakterizujú pevnosť a elasticitu prvkov skutočných konštrukcií a poskytuje metódy vhodné pre *návrh* (dimenzovanie) alebo *overenie* (posudzovanie) prvkov rozličných technických systémov. Nedostatočné rešpektovanie takýchto javov a súvislostí vedie často ku vzniku negatívnych javov, s ktorými sa v oblastiach záujmu bezpečnostného inžinierstva stretávame (napr. zrútené budovy, mosty, havarované lietadlá, vykoľajené vlaky, ale aj zosuvy pôdy, snehové kalamity, záplavy a pod.).

Zostáva iba veriť, že preložený učebný text bude vhodnou študijnou podporou pre pochopenie zásadných princípov a poznatkov z oblasti statiky. Bez pochopenia základných pojmov, princípov a spôsobov statickej analýzy nie je možné dostatočne pochopiť základné pojmy a zvládnuť hlavné princípy a súvislosti uvažované v aplikáciách mechaniky poddajných telies. Jedná sa najmä o pochopenie pojmov ako zaťaženie, vonkajšie a vnútorné silové účinky, pretvorenie a z neho vyplývajúce mechanické napätie a napätosť, súvislosti medzi deformáciou, napätím a napätosťou, objasnenie základných druhov namáhania poddajných telies a vzťahy pre analýzu a kvantifikáciu základných parametrov ich napätosti a pretvorenia. Všetky uvedené poznatky tvoria nutný teoretický aparát pre používané princípy a spôsoby navrhovania a posudzovania (kontroly) prvkov mechanických konštrukcií, predovšetkým s ohľadom na posúdenie miery ich bezpečnosti a prevádzkovej spoľahlivosti.

Zoznam použitej literatúry

1. Chasák, V., Navrátil, O.: *Technická mechanika. Díl 1: Statika a kinematika rovinného pohybu*. [Skriptum]. 1.vyd., Brno: Vojenská akademie, 1990. 354 s.
2. Kovačík, J., Beniač, M.: *Statika pre špeciálne inžinierstvo*. [Skriptum]. 2.vyd., Žilina: Fakulta špeciálneho inžinierstva ŽU v Žiline, 2005. 127 s. ISBN 80-8070-077-X.
3. Mudrik J., Labašová E., Pekárek F. Nad', M.: *Mechanika tuhých telies*. [e-skriptum]. 2.vyd., Trnava: Materiálovo-technologická fakulta STU, 1999.
4. Nad', M., Labašová, E.: *Mechanika tuhých telies: Návod na cvičenia*. [e-skriptum]. 1. vyd. Trnava: Alumni Press, 2008. 194 s. ISBN 978-80-8096-050-6.
5. <http://www.zbynekvlk.cz/vyuka/index.html>

Zoznam odporúčanej literatúry

6. Feranec, V.: *Teoretická mechanika*. Učebnica. 1.vyd. Žilina: Stavebná fakulta, 1999. 190 s., ISBN 80-7100-558-4.
7. Sapietová, A., Vaško, M., Hyčko, M., Dekýš, V.: *Zbierka príkladov zo statiky*. Skriptum. 1.vyd., Žilina : Žilinská univerzita - Strojnícka fakulta, 2013. 186 s. ISBN 978-80-554-0664-0.
8. Šimčák, F. [et al.]: *Statika v príkladoch*. Skriptum. 1. vyd. Košice : Strojnícka fakulta TU, 2012. 249 s.. ISBN 978-80-553-1379-5.
9. Ivančo, V., Novotný, L.: *Mechanika*. Skriptum. 1.vyd. Košice: Strojnícka fakulta TU, 2010. 184 s. ISBN 978-80-553-0604-9.

Odkazy na zaujímavé internetové zdroje

10. <http://kmech.elf.stuba.sk/examples/kmech/index.html>
11. http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/Tech_mech_I.pdf
12. <http://www.spssol.cz/~vyuka/ucitele/ja/Mechanika/skripta%20hof%c3%8drek/statika/1.statika.pdf>
13. <http://www.kts.tul.cz/mod/>
14. http://www.student.chytrak.cz/mater_stat/sbirka.pdf
15. http://www.fisica.net/mecanicaclassica/introduction_to_statics_and_dynamics_by_rudra_pratap.pdf
16. <http://ruina.tam.cornell.edu/Book/RuinaPratap1-31-11.pdf>
17. <http://www.adina.com/index.shtml>
18. <http://lences.cz/studium/>

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Zdeněk Dvořák, PhD.

Autor doc. Ing. Bohuš Leitner, PhD.

Názov **MECHANIKA TELIES PRE BEZPEČNOSTNÉ INŽINIERSTVO : Statika**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve ŽU v auguste 2014
ako svoju 3778. publikáciu

Vydanie prvé

Náklad 250 výtlačkov

AH/VH 19,43/19,95

ISBN 978-80-554-0900-9

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.
www.edis.uniza.sk

