



Základy mechaniky pevných telies

Téma 4:

PRIAME A LOMENÉ NOSNÍKY

- typy nosníkov, zaťaženie, väzby, výpočet nosníkov (statická určitosť, reakcie, vnútorné sily)

Nosné konštrukcie slúžia k prenosu silových účinkov od vonkajšieho zaťaženia do ďalších telies (napr. stavebný objekt a horninový masív, príp. prenos zaťaženia od činnosti pracovného ústrojenstva stroja na jeho nosný rám resp. zemský povrch).

Každá nosná konštrukcia sa skladá z jedného alebo viac konštrukčných prvkov, ktoré môžeme uvažovať ako:

- **jednorozmerné = prútový prvok** - prút, nosník, stĺp, páka, ..
- **dvojrozmerné = plošný prvok** - stena, doska, škrupina,
- **trojrozmerné = priestorový prvok** – teleso - rozmery, P,V.

Základné konštrukčné prvky nosných systémov majú podľa ich tvaru a spôsobu prevádzkového zaťaženia zaužívané názvy, ako napr. *nosník, stĺp, hriadel', páka, doska, stena, rám* a pod.

Hlavné nosné časti musia spĺňať podmienky dostatočnej **únosnosti, stability, primeranej deformácie, ale aj hospodárnosti.**

Základné konštrukčné prvky, takýchto, spravidla veľkorozmerných, mechanických systémov majú podľa tvaru a spôsobu ich prevádzkového zaťaženia zaužívané rôzne názvy.

Podľa tvaru a špecifických rozmerov prvky nosných konštrukcií rozdeľujeme na tri základné skupiny a to:

- **Prútové prvky** (prút, nosník, stĺp, trám, páka, hriadel').
- **Plošné prvky** (doska, stena, škrupina),
- **Priestorové prvky** (3D telesá).

Tvar a schematické znázornenie vybraných nosných prvkov sú pre ilustráciu uvedené na [Obr.4.1](#).

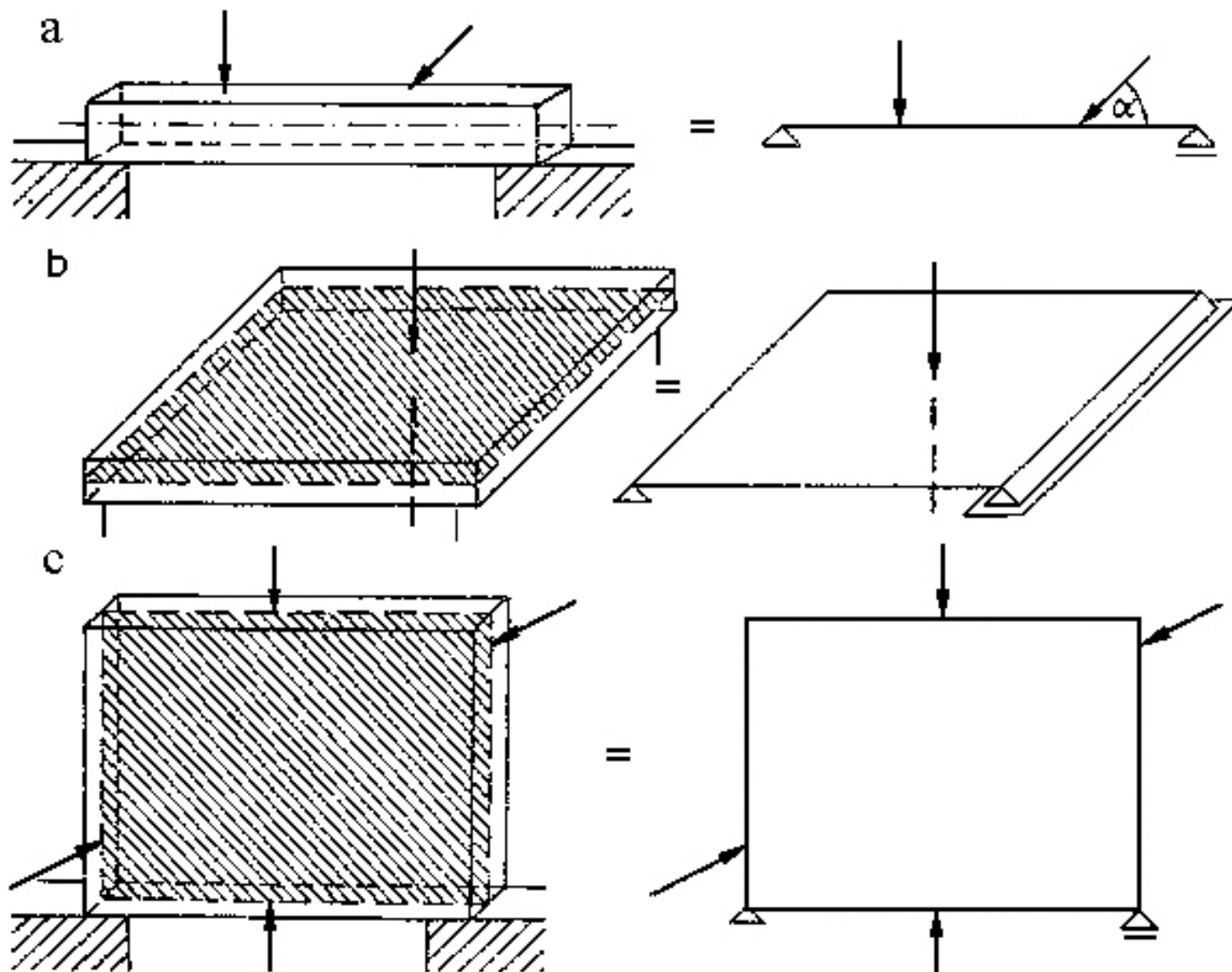
Úvod

Legenda:

a – *prút*

b – *doska*

c – *stena*



Obr.4.1

Úvod

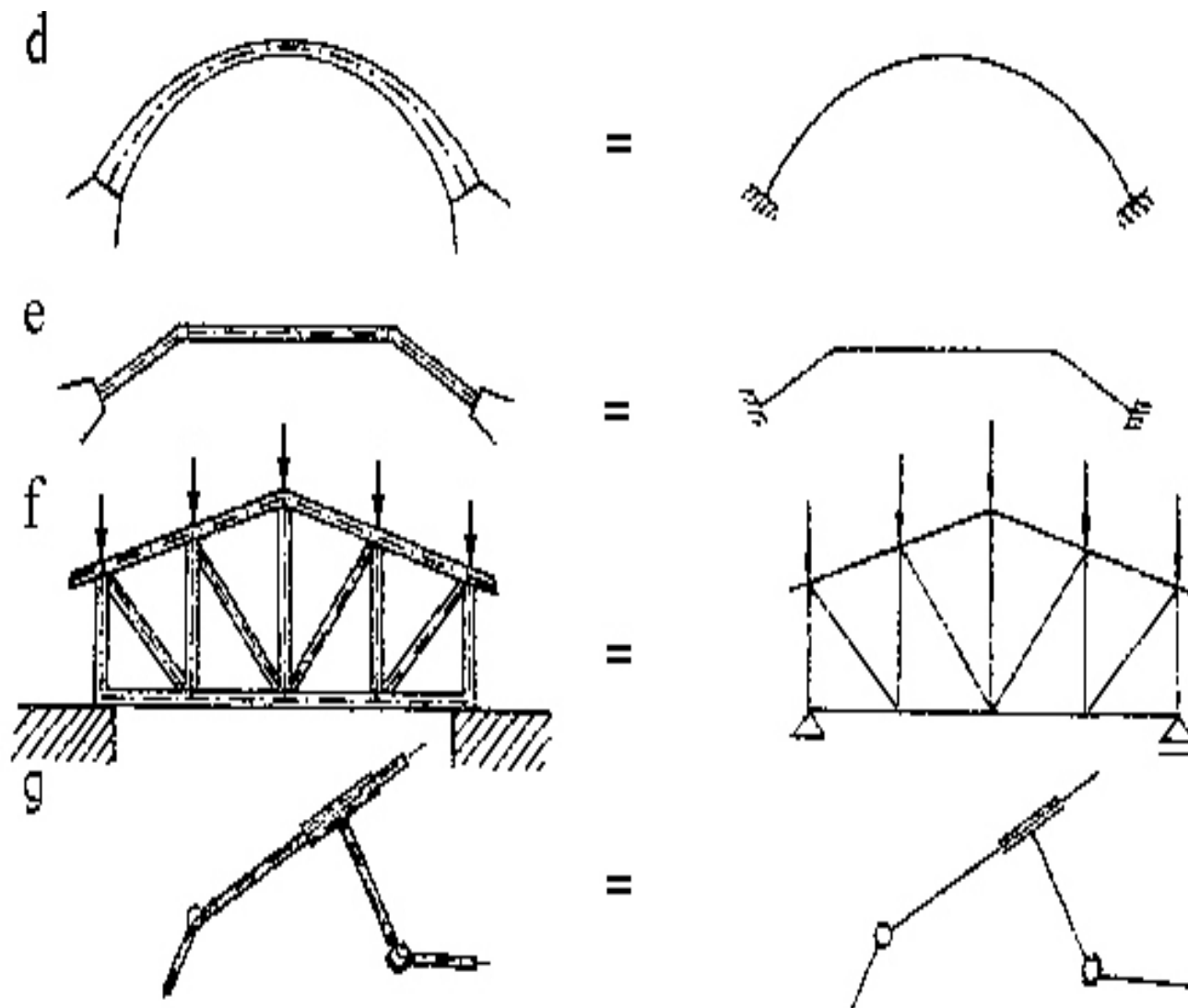
Legenda:

d – oblúk

e - lomená
(rámová)
konštrukcia

f - prúťová
(priehradová)
konštrukcia,

g – pohyblivá
konštrukcia
(mechanizmus)



Obr.4.1

Úvod



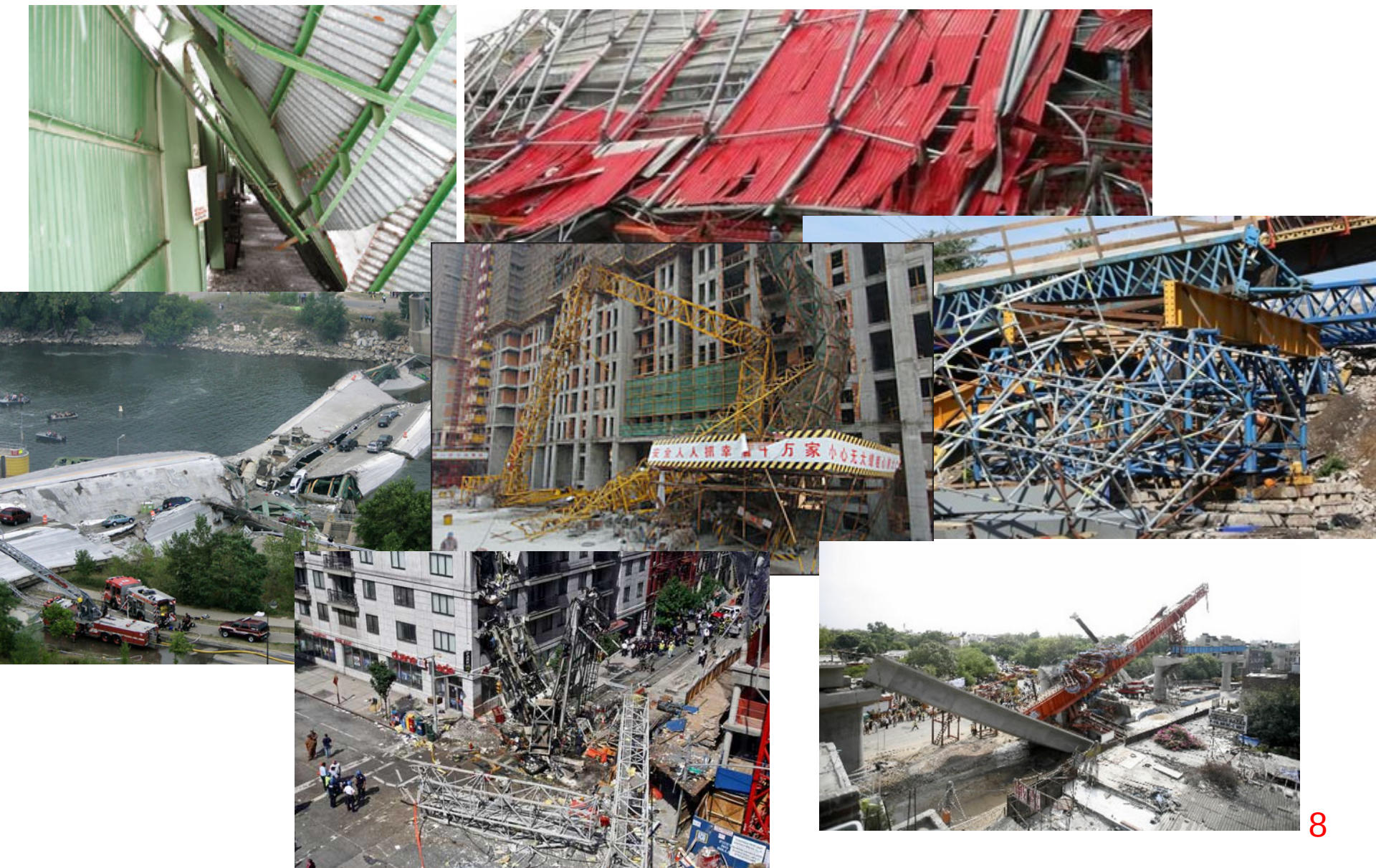
Požadovaná pevnosť, tuhosť a stabilita konštrukcie musí byť vopred preukázaná výpočtom.

Statická analýza hmotného objektu vždy obsahuje riešenie:

- 1. statickej určitosti problému a uvoľnenie objektu (telesu),**
- 2. rovnováhy vonkajších silových účinkov (akčných aj reakčných),**
- 3. rovnováhy vonkajších a vnútorných síl, určenie extrémnych hodnôt vnútorných silových veličín, určenie nebezpečných prierezov.**

V praxi sa najčastejšie vyskytujú konštrukcie, kde sú hlavné nosné časti tvorené **prútovými prvkami s priamou alebo lomenou osou**. Ak sú prúty primárne určené k prenosu silových účinkov od ich priečneho zaťaženia – nazývame ich **nosníky**.

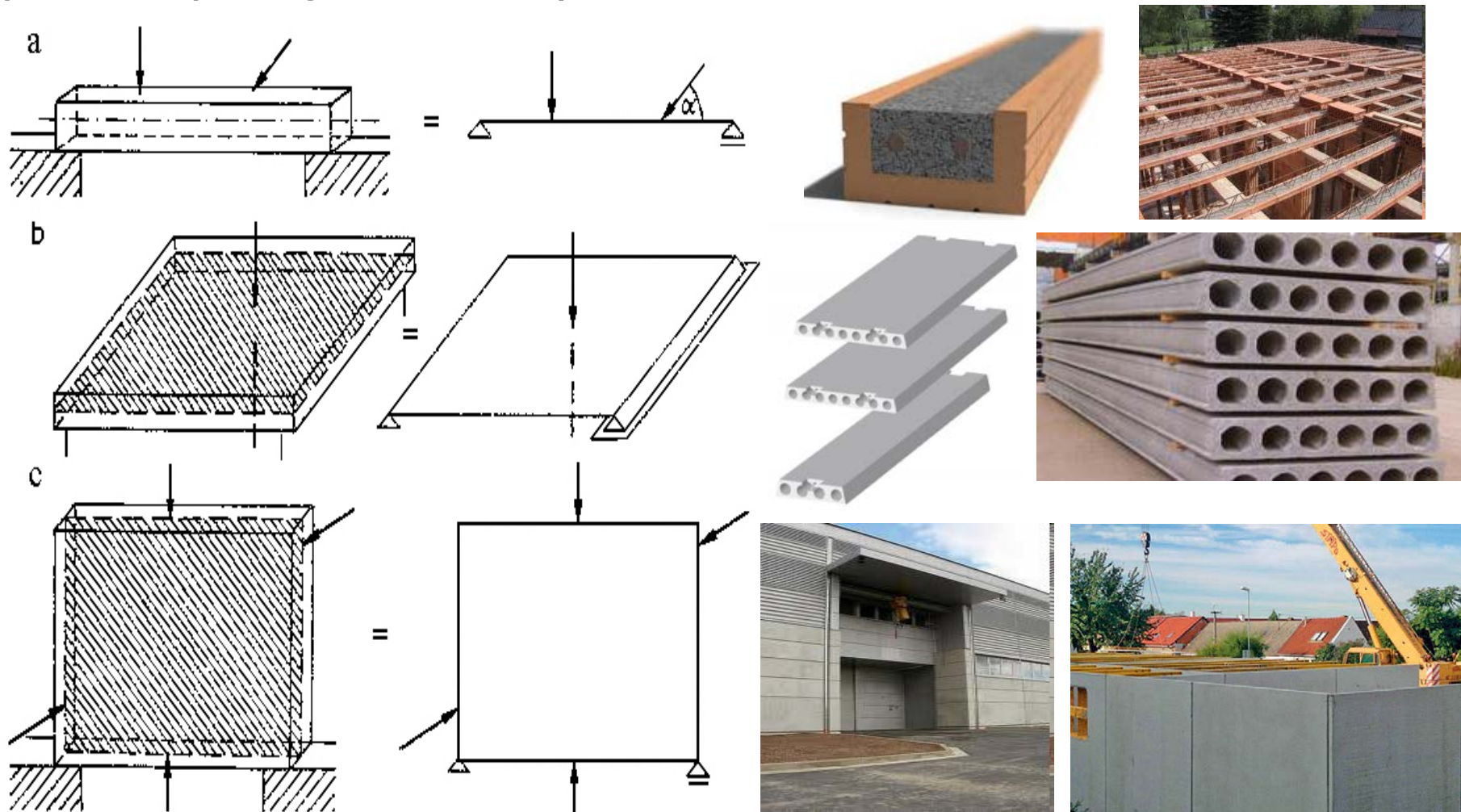
Úvod



Úvod

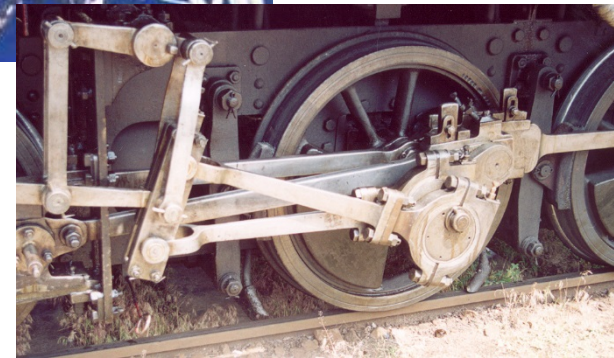
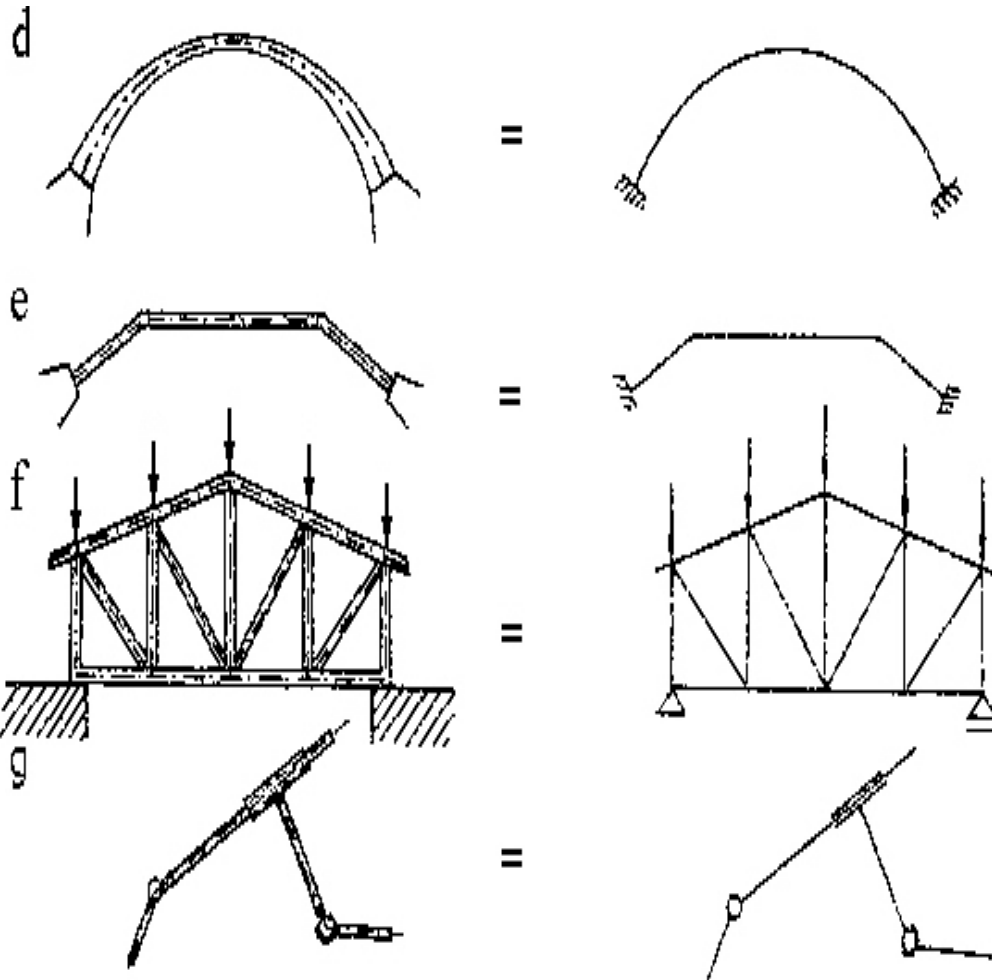


Tvar a schematické znázornenie vybraných nosných prvkov (Obr. 2.1). Legenda: a – prút, b – doska, c – stena,



Úvod

Legenda: d – oblúk, e – lomený nosník (rámová konštrukcia),
f – priehradová (prúťová) konštrukcia, g – mechanizmus.



Nosnú konštrukciu môže vo všeobecnom prípade tvoriť jediný konštrukčný prvok, obvykle však pozostáva z viac prvkov = **sústava telies, tvoriacich technické dielo – konštrukciu.**

Konštrukčné prvky sú navzájom spojené **vnútornými väzbami** a konštrukcia ako celok je spojená so zemským telesom, príp. rámom prostredníctvom **vonkajších väzieb**. Inak by sa konštrukcia vplyvom zaťažujúcich síl mohla začať pohybovať.



1. Prútový prvok (prút, nosník) – dĺžka prvku je výrazne väčšia ako dva ďalšie (priečne) rozmery. Znázorňuje sa ako **dokonale tuhá čiara**. Je charakterizovaná umiestnením a rozmerom); tvar čiary môže byť priamy alebo zakrivený.

2. Plošný prvok – hrúbka prvku je výrazne menšia ako ďalšie dva rozmery. Idealizácia je možná tzv. **rovinným** alebo v **priestore zakriveným plošným útvarom**. Napr. v stavebnej praxi sú plošné prvky: **steny** (zaťažené iba vo vlastnej rovine), **dosky** (zaťaženie kolmo k rovine) a **škrupiny** (zakrivený plošný prvok). Idealizuje sa najčastejšie zodpovedajúcim rovinným útvarom (charakterizovaný umiestnením, rozmermi a plochou).

3. Trojrozmerný prvok – idealizuje sa prostredníctvom **dokonale tuhého telesa** umiestneného v priestore (charakterizované umiestnením, rozmermi, objemom a tiažou).

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

4.1 Typy nosníkov, zaťaženie nosníkov

Nosník = prútový prvok – je nosný prvok technického diela, určený na prenos silových účinkov pôsobiacich na konštrukciu.

V statike sa obvykle jedná o prenos statického silového pôsobenia telies, uvažovanie dynamického (v čase premenlivého) zaťaženia je menej využívané.

Nosník je teleso, ktorého jeden rozmer (dĺžka) je oveľa väčší, ako ďalšie dva rozmery jeho prierezu (výška a šírka) a je uložený tak, že sa pri zaťažení ohýba.

Nosníky v stavebnej praxi : napr. *priečna vzpera, nosný stĺp, šikmá výstuha, horizontálne votknutá konzola* a pod., resp. v oblasti strojných zariadení, napr. *nosné rámy, pracovné ústrojenstvá a výložníky manipulačných a zdvíhacích strojov.*

A. Prúty s priamou osou (nazývané aj ako **priame nosníky**) sú najjednoduchšie a najčastejšie využívané prvky nosných konštrukcií. Podľa spôsobu ich uloženia (spojenia s ďalšími telesami) rozoznávame:

- **Jednoduchý (prostý) nosník**
- **Konzolový nosník**

Z uvedených základných druhov nosníkov boli v rámci rozmanitosti ich praktických aplikácií odvodené ďalšie typy, ako napr.

- ***spojitý nosník***
- ***nosník s vloženým klbom (Gerberov nosník),***
- ***nosník s previsnutým koncom*** a mnoho ďalších.

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie

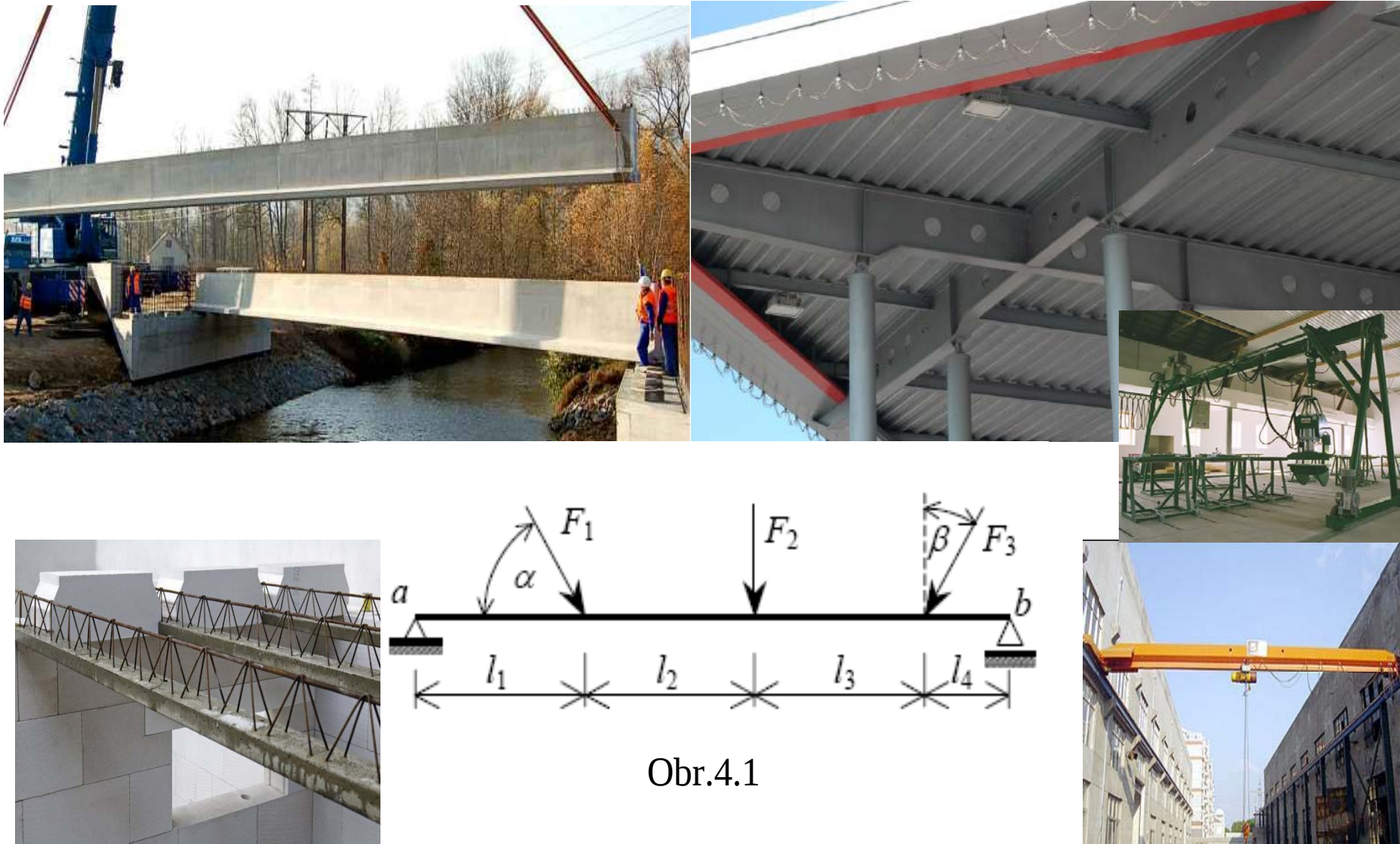
A1. Jednoduchý (prostý) nosník – je priamy prút, ktorý je na jednom okraji viazaný k okoliu dvojnásobnou väzbou (*napr. pevným kĺbom*) a na druhom konci jednoduchou väzbou (*napr. posuvným kĺbom alebo kyvným prútom*). Je teda vždy staticky určito uložený.

Podľa geometrického tvaru a usporiadania môžu byť takéto - jednoducho uložené - nosníky:

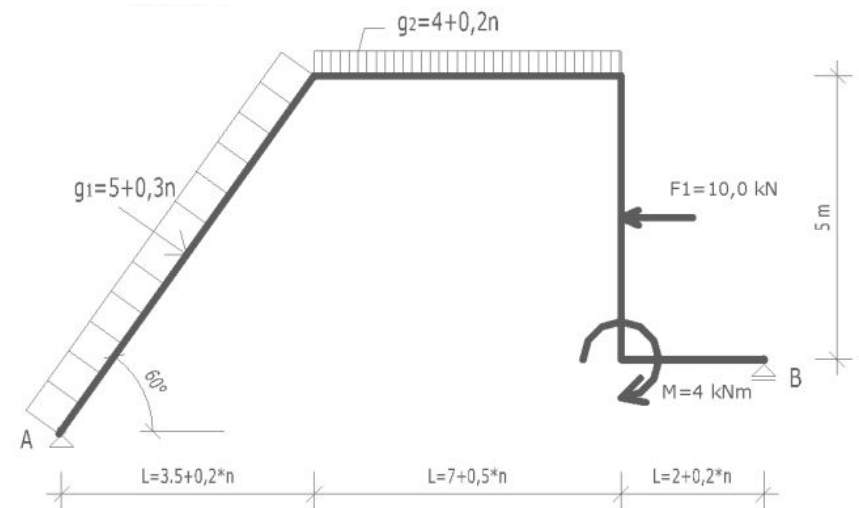
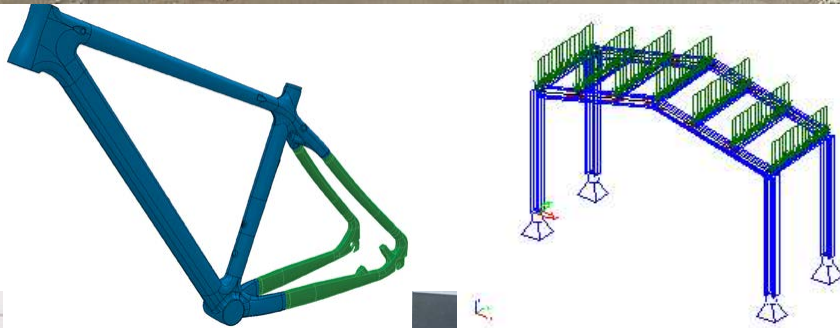
- **priame** alebo
- **lomené** (tzv. rámové konštrukcie, rámy).

Príklady jednoducho uložených nosníkov a fyzikálny model nosníka na dvoch podperách sú uvedené na obr.4.1.

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie

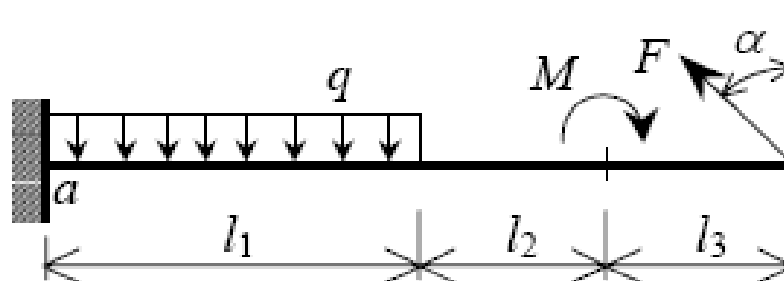


4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie



4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie

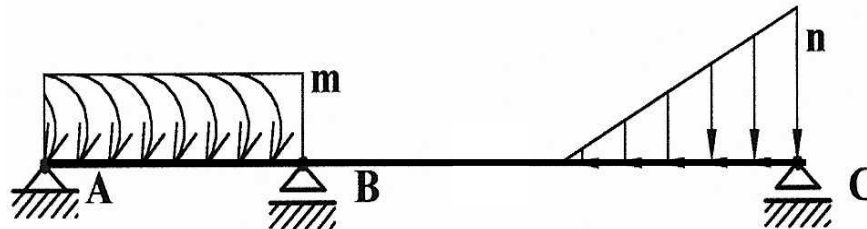
A2. Konzolový nosník – je priamy prút, ktorý je na jednom okraji viazaný k okoliu trojnásobnou väzbou (obvykle dokonalým votknutím) a na druhom okraji je voľný. Príklady konzolových nosníkov a fyzikálny model konzolového nosníka sú na obr.4.2.



Obr.4.2

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie

A3. Spojitý nosník - priamy nosník uložený na viac ako 2 podperách. Jedna podpera je pevná (pevný kĺb, dokonalé votknutie), ostatné sú posuvné (posuvný kĺb, klzné vedenie). Časť nosníka medzi dvoma susednými podporami nazývame **pole**, dĺžka poľa je **rozpätie**. Príklady použitia sú na Obr.4.3.

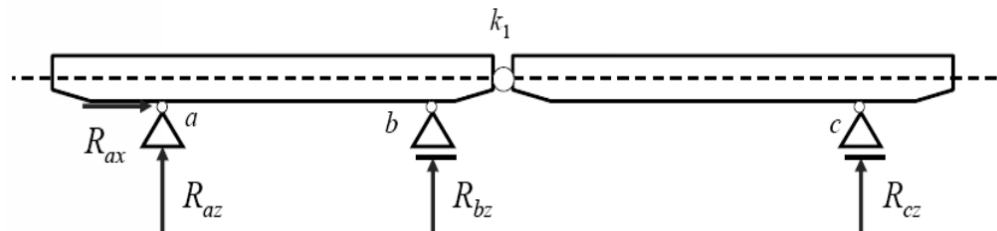


4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

A4. Spojitý nosník s vloženými kĺbmi – tzv. Gerberov nosník

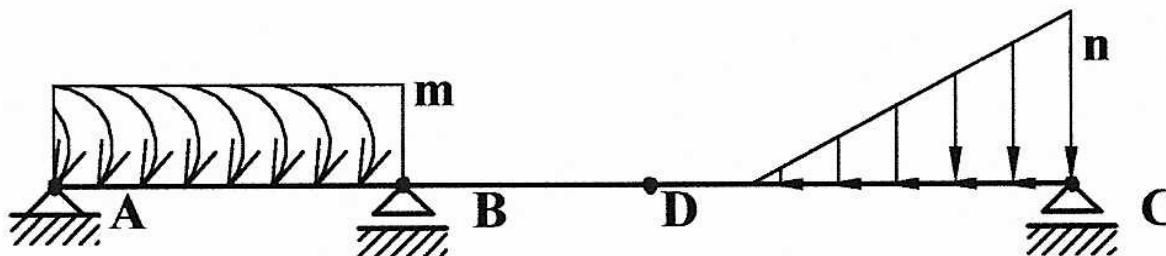
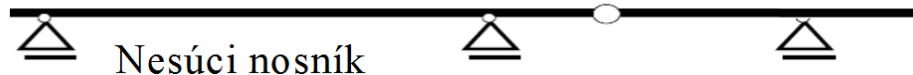


Vložením kĺbov medzi polia spojitého nosníka **nesmie** vzniknúť pohyblivý mechanizmus, iba rotačná väzba.



Nerovnosti terénu vložením kĺbu spôsobujú iba minimálne prídavné namáhanie nosníka nesúceho.

Nesený nosník

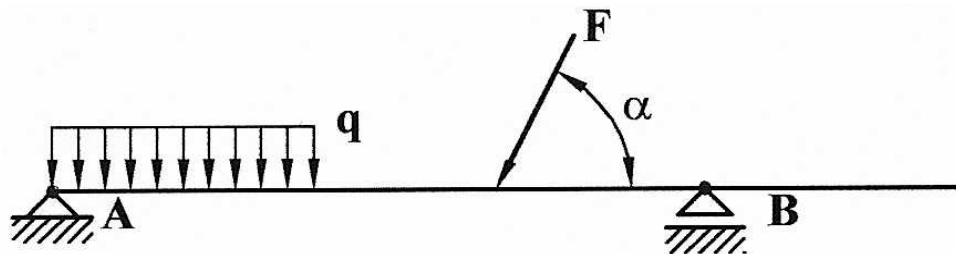


4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zat'azenie

A5. Spojitý nosník s previsnutým koncom



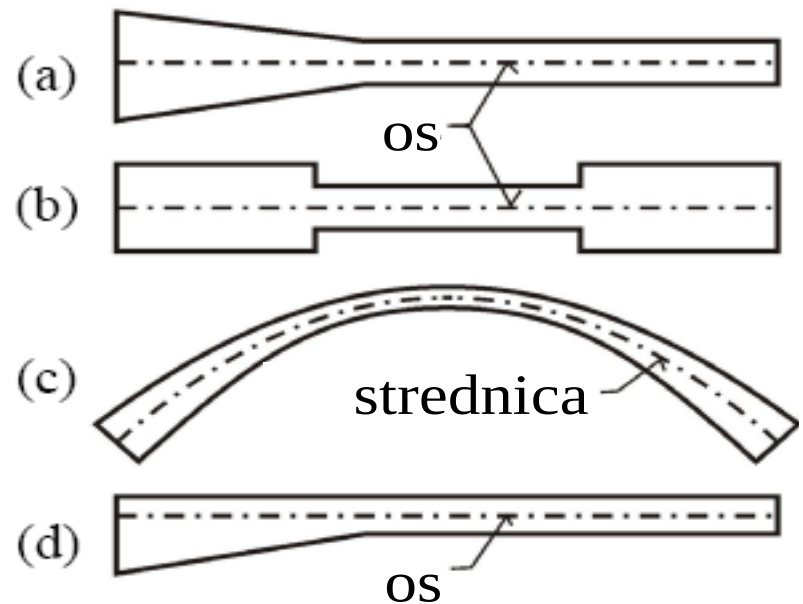
Previsnutý koniec jednoducho uloženého nosníka počítame podobne ako konzolu. Zaťaženie previsnutého konca zhora vyvoláva ťah v horných vláknach nosníka (t.j. záporný moment).



4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

Geometrický popis prútov:

V statike je založený iba na definovaní dĺžky prúta a tvaru jeho strednice. Prierezy prúta neuvažujeme. Obvykle prierez po celej dĺžke uvažujeme **konštantný** (prizmatický nosník) ale môže byť aj **premenlivý**. Príklady premenlivých prierezov sú na obr.4.4.



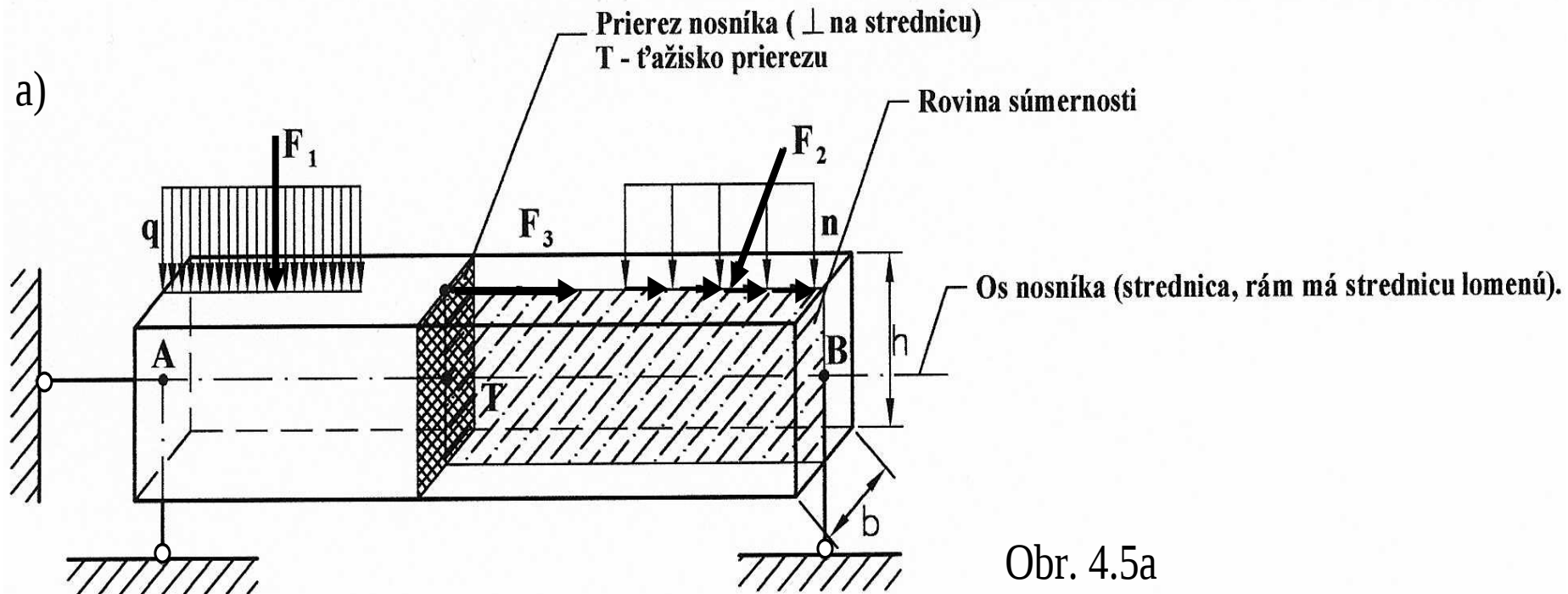
Obr.4.4

Zmena prierezu : **postupná** (a,c), **náhla** (b) alebo môžu byť v miestach podpier tzv. **nábehy** (d), kvôli zosilneniu konštrukcie v miestach uloženia. 23

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

Nosníky uvažujeme ako **viazané telesá**. Ich zaťaženie a uloženie v rovinnej statike = sústava primárnych (zaťažujúcich) síl, aj sústava sekundárnych síl (reakcií) tvoria rovinnú SS.

Prizmatický prút (s nemenným prierezom), zaťažенý a uložený na podperách v rovine symetrie (obr. 4.5a).



Obr. 4.5a

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

Najčastejšie väzby v praktických aplikáciách nosníkov (obr.4.6):

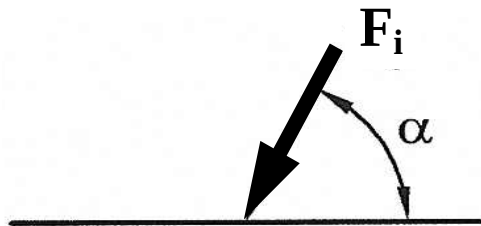
- | | | |
|---|--|---|
| 1. Kĺbové uloženie pevné (-2° V) |  | <i>odoberá 2° voľnosti
(vodorovný a zvislý posun),
zostáva otáčanie v kĺbe)</i> |
| 2. Kĺbové uloženie posuvné (-1° V) |  | <i>odoberá 1° voľnosti
(zvislý posun), zostáva otáčanie v
kĺbe a vodorovný posun)</i> |
| 3. Dokonalé votknuté uloženie (-3° V) |  | <i>odoberá 3° voľnosti
(vodorovný posun, zvislý posun,
otáčanie v kĺbe)</i> |
| 4. Votknuté uloženie posuvné (-2° V) |  | <i>odoberá 2° voľnosti
(zvislý posun a otáčanie v kĺbe),
zostáva vodorovný posun)</i> |

Obr.4.6

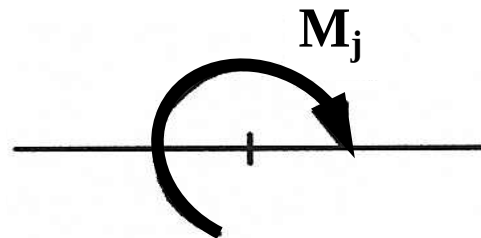
Na obr.4.7 sú uvedené najčastejšie využívané **druhy vonkajšieho zaťaženia** pri riešení nosníkov a rámových konštrukcií v praktických aplikáciách.

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

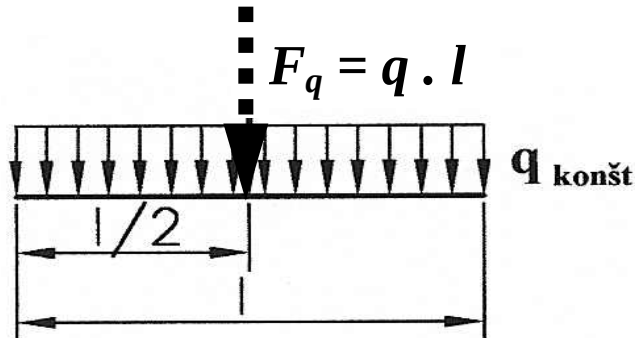
Prehľad základných druhov zaťaženia nosníkov v praxi:



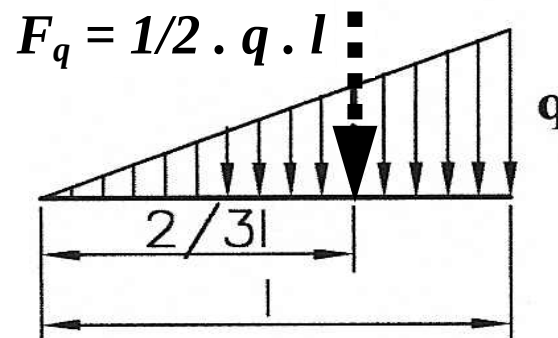
a) zaťaženie osamelou silou



b) zaťaženie osamelým momentom

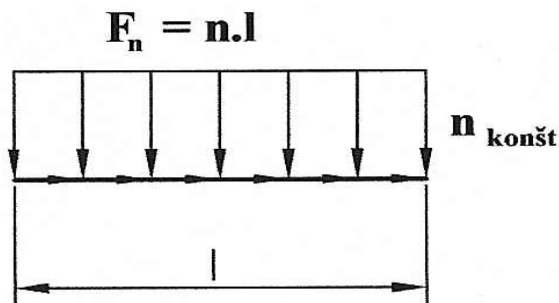


c1) spojité zaťaženie priečne - rovnomerné

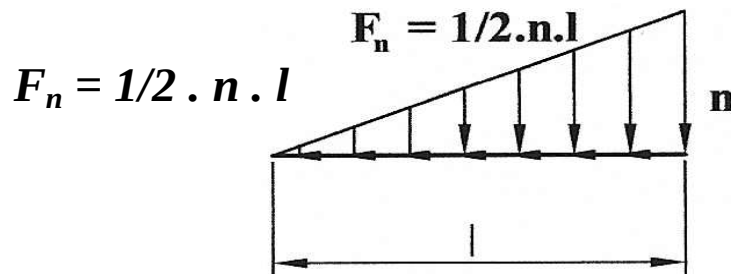


c2) spojité zaťaženie priečne –
nerovnomerné (napr. lineárne)

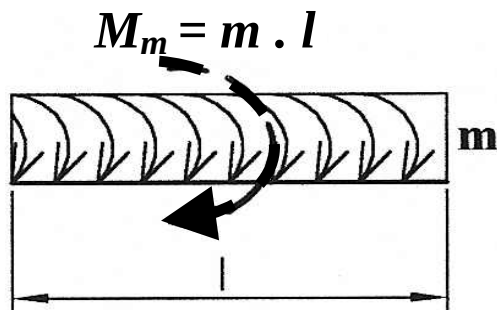
4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie



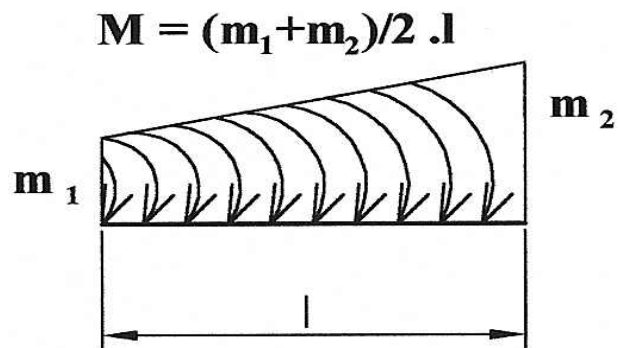
- d1) spojité zaťaženie osovú (normálové)
- rovnomerné



- d2) spojité zaťaženie osovú (normálové)
- nerovnomerné (napr. lineárne)



- e1) spojité zaťaženie momentové -
rovnomerné



- e2) spojité zaťaženie momentové -
nerovnomerné (napr. lineárne)

Obr.4.7b

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

Výpočtový model nosníka

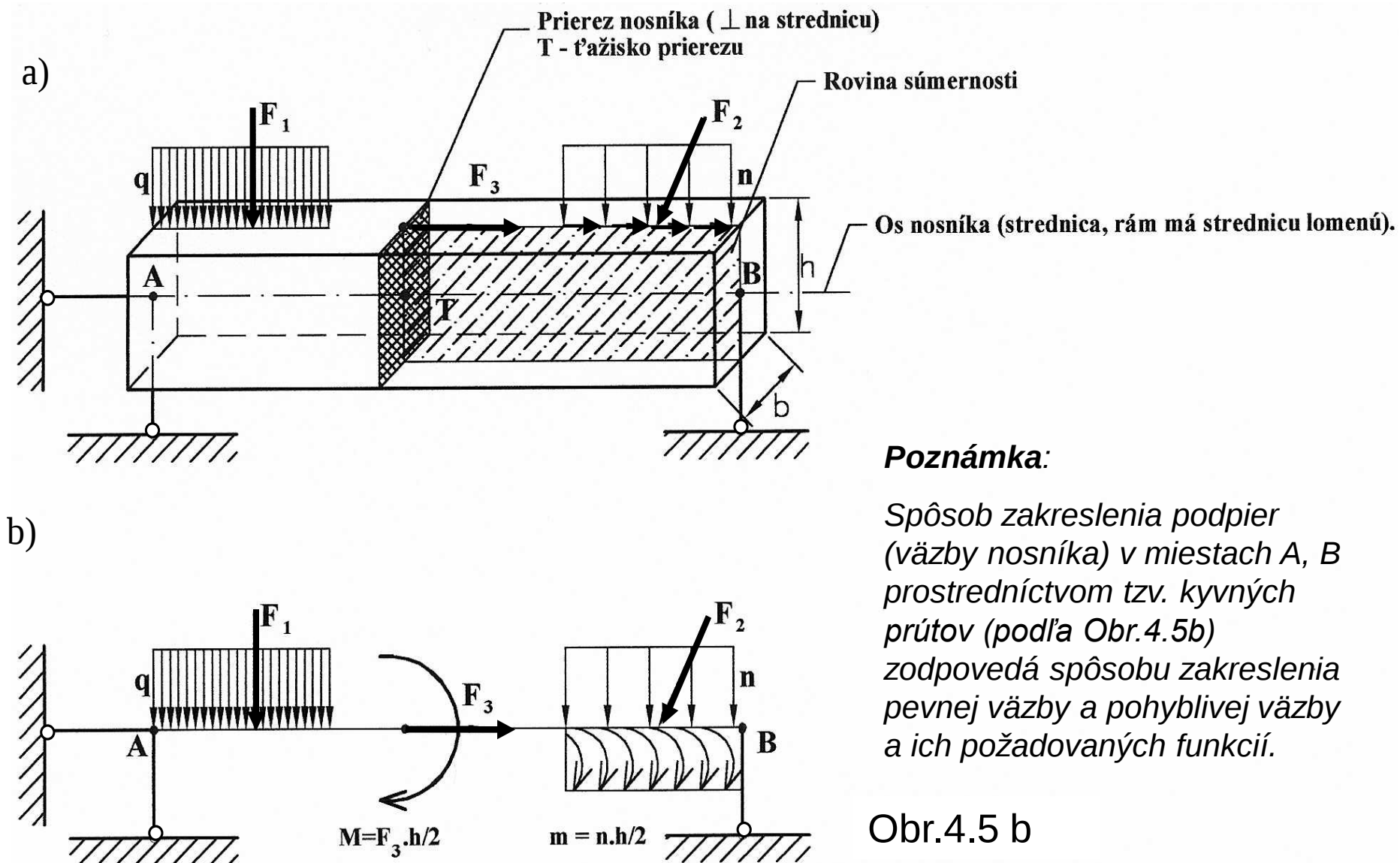
V zadanom nosníku (Obr.4.5a) sa vyskytujú zaťaženia vo forme osamelých síl F_1 , F_2 , F_3 , spojitého zaťaženia priečného q a tzv. spojitého zaťaženia osového n .

Výpočtový model nosníka, predstavovaný jeho osou (tzv. strednicou), prechádzajúcou ťažiskami T_i všetkých priečných rezov na nosníku, je uvedený na Obr.4.5b.

Po transformácii zaťažení na os nosníka je os zaťažená silami F_1 , F_2 , F_3 [N], spojitým zaťažením q , n [N.m⁻¹], ale už aj momentom M [Nm] a spojitým momentom m [Nm.m⁻¹] (vznikli pri preložení sily F_3 a osového zaťaženia n z povrchu nosníka do osi nosníka).

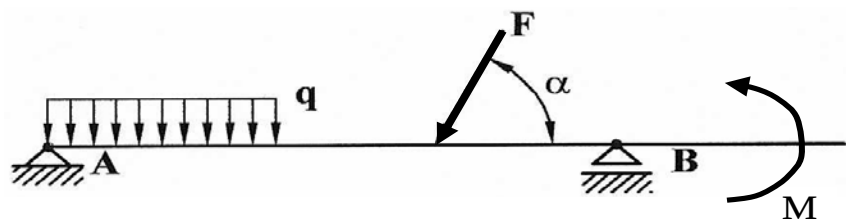
Z uvedeného vyplýva, že **všetky zaťaženia pôsobiace na nosník prenášame vždy na jeho strednicu (pozdĺžnu os).**

4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie

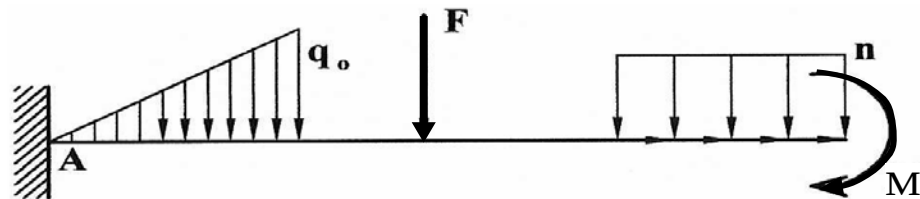


Obr.4.5 b

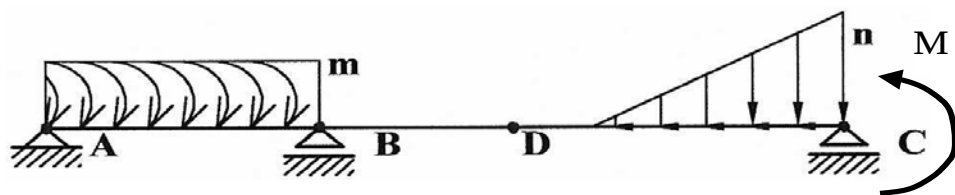
4.1 Typy nosníkov a rovinných rámov, vonkajšie zaťaženie



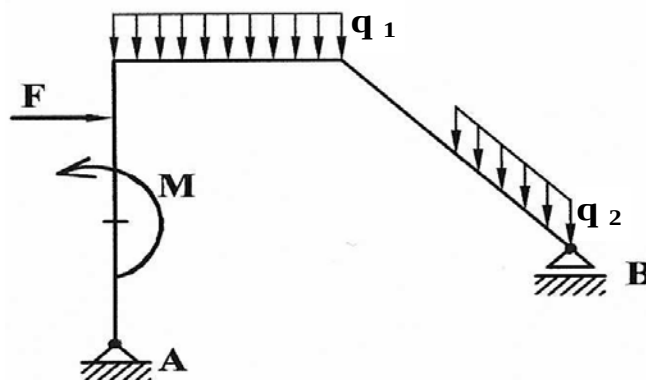
a) prostý nosník (s previsnutým, prečnievajúcim koncom)



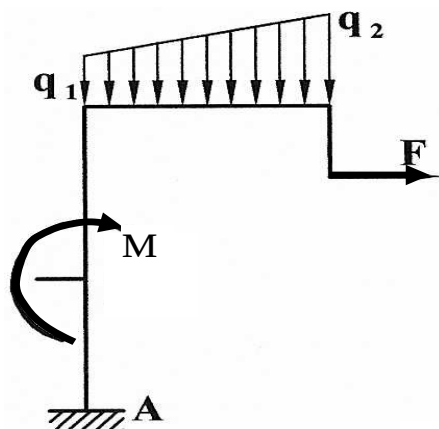
b) votknutý (konzolový) nosník



c) nosník s vloženým kĺbom (bod D)



d) rám (lomený nosník) prosto uložený



e) votknutý rám

Poznámka:

Ad b,c) Normálové sily kreslíme pre názornosť kolmo na strednicu, aj keď v skutočnosti pôsobia v jej smere.

Obr.4.6

Cieľ a úlohy statickej analýzy nosníkov

Statika je časťou mechaniky, zaoberajúca sa rovnováhou silových účinkov na dokonale tuhé telesá.

Objasňuje a definuje podmienky rovnováhy / ekvivalencie silových sústav, ako aj rovnováhy medzi vonkajšími a vnútornými silami, pôsobiacimi na nosné konštrukcie a ich prvky.

Hlavná úloha statického riešenia nosníkov spočíva v:

- *overení riešiteľnosti úlohy - posúdenie statickej určitosti,*
- *vyriešení statickej rovnováhy akčných a reakčných síl,*
- *vyriešení veľkosti, zmyslu a charakteru vnútorných silových účinkov v ľubovoľnom priereze na nosníku; t.j. určenie funkčnej závislosti priebehu vnútorných síl v jednotlivých úsekoch a ich zakreslenie po celej dĺžke nosníka.*

4.2 Výpočet sekundárných síl - reakcií

4.2 Výpočet sekundárných síl - reakcií

Prvou fázou statických výpočtov nosníkov a rámov je posúdenie statickej určitosti úlohy, vychádzajúcej z analýzy uloženia. Druhou fázou je určenie **sekundárných vonkajších síl – reakcií** vo väzbách, od účinku **vonkajších síl na nosník**.

Obmedzíme sa opäť iba na analýzu rovinných problémov, t.j. silové účinky zaťaženia, reakčné sily vo väzbách, ako aj idealizovaný tvar konštrukcie uvažujeme v jednej rovine.

Určovaniu statickej určitosti konštrukcií (kap.1) a výpočtu reakcií u staticky určito uložených sústav telies (kap.3) sme už venovali pozornosť v rámci predchádzajúceho výkladu.

Nakoľko sa vo všeobecnom prípade jedná o zaťaženie nosníka VRSS, podmienky rovnováhy, spoločne s kontrolnými rovnicami, môžu mať preto iba niektorý z nasledujúcich tvarov:

4.2 Výpočet sekundárných síl - reakcií

a)	$\sum F_{ix} = 0$	b)	$\sum M_A = 0$	c)	$\sum M_A = 0$
	$\sum F_{iy} = 0$		$\sum M_B = 0$		$\sum M_B = 0$
	$\sum M_A = 0$		$\sum F_{ix} = 0$		$\sum M_C = 0$
	$\sum M_B = 0$		$\sum F_{iy} = 0$		$\sum F_{ix} = 0$
KONTROLNÉ ROVNICE					

Tvar rovníc typ a) je základný a je vhodný najmä pre votknuté nosníky. Pri riešení jednoducho uložených nosníkov je vhodné využiť typ b). Rovnice typ c) sú vhodné najmä v prípadoch uloženia na 3 kyvných prútoch alebo posuvných podperách.

Musí však vždy platiť, že **posuvné a otáčavé účinky** výslednice sústavy sekundárných síl (reakcií) $\sum R_j$ a výslednice primárných síl $\sum F_i$ sa **musia navzájom rušiť** = t.j. teleso je v pokoji.

4.2 Výpočet sekundárnych síl - reakcií

Príklad 4.1: Určite reakcie na jednoduchom nosníku (obr. 4.9).

Zadané: F_1 , F_2 , F_3 , α , β , l_1 , l_2 , l_3 , l_4 .

Príklad 4.2: Určite reakcie na prostom nosníku (obr. 4.10).

Zadané: F , q , M , α , a , b , c .

Príklad 4.3: Určite reakcie a moment v bode votknutia pre votknutý rám (obr.4.11). Zadané: F , q_1 , q_2 , M , a , b , c , d .

Príklad 4.4: Určite reakcie v bodoch podopretia pre nosník s vloženým kĺbom (Gerberov nosník) podľa obr. 4.12. Zadané: F_1 , F_2 , q , M , α , a , b , c .

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Okrem štandardného **výpočtu reakcií**, ako sekundárnych silových účinkov, uvádzajúcich sústavu akčných síl do rovnováhy, môžeme v statike vykonať aj **analýzu vnútorných silových veličín** v ktoromkoľvek bode (priereze) telesa (nosníka, rámu).

Znamená to, že v ľubovoľne zvolenom priereze vieme určiť silové veličiny, charakterizujúce namáhanie telesa v tomto mieste.

Analyzovať vnútorné silové veličiny pre rôzne typy nosníkov a rámových konštrukcií, pri rôznych kombináciách ich uloženia a zaťaženia, **patrí medzi základné znalosti zo statiky**.

Získané poznatky z analýzy vnútorných silových účinkov (napr. metóda mysleného rezu, veľkosť vnútorných síl v priereze telesa a pod.) **budú tvoriť základ vedomostí pre ďalšiu časť predmetu venovanú podstate mechaniky poddajných telies**.

4.3 Vnútoré silové veličiny v priamych prútoch

Tieto znalosti budú potrebné najmä pre pochopenie základných súvislostí v oblasti **navrhovania (dimenzovania) a posudzovania (kontroly) skutočných (už nie ako v statike - idealizovaných) telies**.

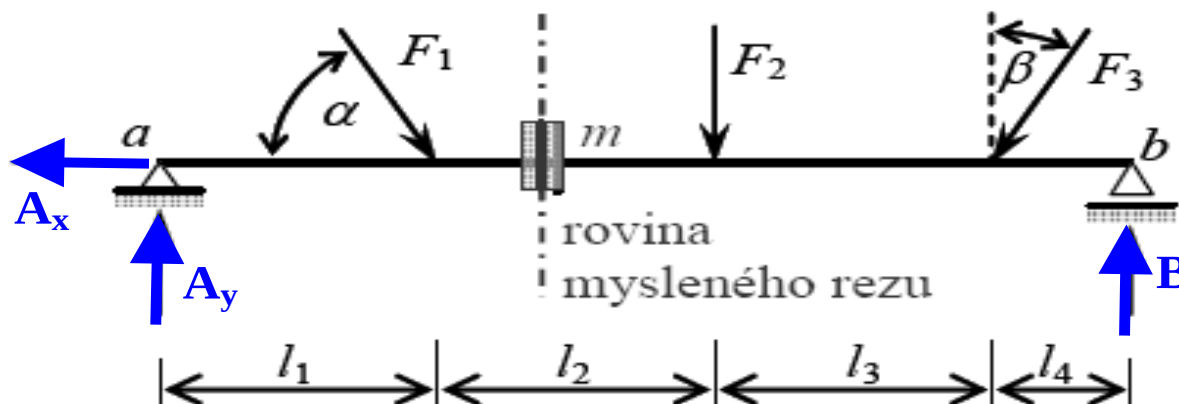
Pri analýze vnútorných síl na nosníkoch uvažovaných v rovine sú analyzované nasledovné **vnútorné silové veličiny**:

1. **osová (normálová) sila N ,**
2. **priečna (posúvajúca, tangenciálna) sila T ,**
3. **ohybový moment M_O .**

Základné úvahy, predpoklady a súvislosti

Nosník je spojité teleso a teda v ľubovoľne zvolenom priereze m , kde predpokladáme vedený fiktívny, tzv. **myslený rez**, na osi prúta nemôžu nastať žiadne relatívne posuny, ani vzájomné pootočené prierezov (prút je predsa homogénny, celistvý !!!).

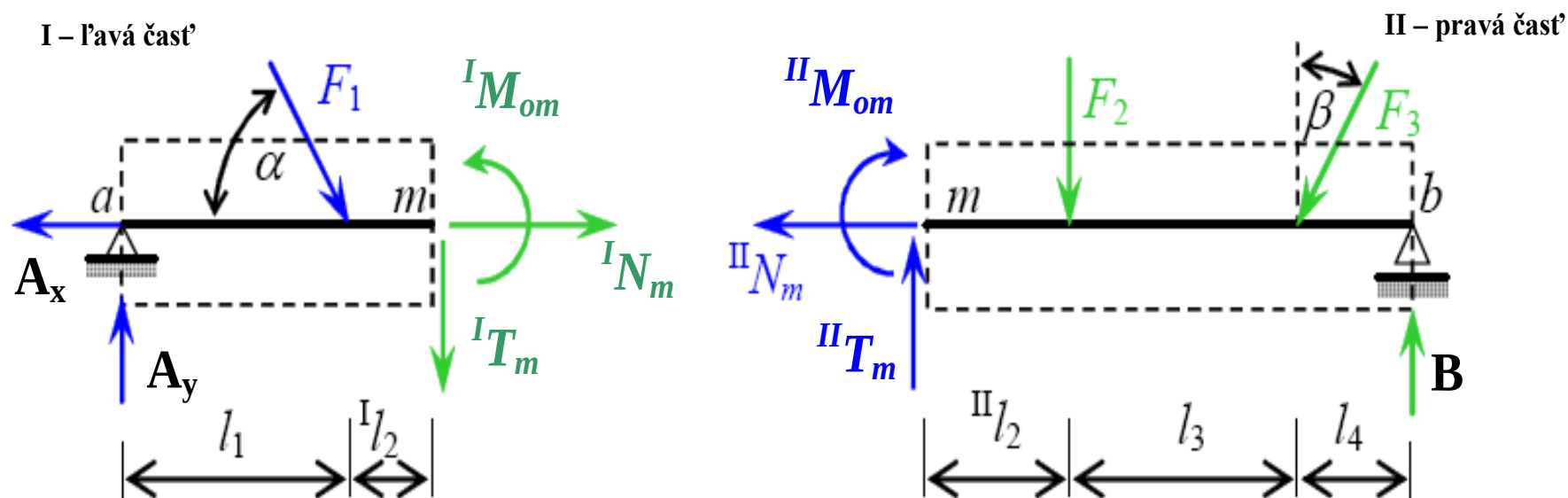
V priereze m preto predpokladáme (uvažujeme) existenciu vnútornej väzby, spĺňajúcu podmienky nulového pohybu (musí odoberať 3°V). To spĺňa iba väzba - **dokonalé votknutie** (obr. 4.20).



Obr.4.20

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Inak povedané: ak myslenným rezom m , vedeným cez uvažovaný prierez kolmo na os prúta, myslene prerušíme **vnútornú väzbu** v nosníku, jej účinok vyjadrený výslednicou vnútorných síl $\mathbf{R}_v$ môžeme nahradiť zodpovedajúcimi zložkami interakčných síl (obr. 4.21), rovnako ako prípad **dokonalého votknutia**, t.j. tromi zložkami – silami $F_x = \mathbf{N}_m$, $F_y = \mathbf{T}_m$ a momentom $M = \mathbf{M}_{om}$.



Obr.4.21

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Nakoľko predpokladáme, že sústava vonkajších síl (primárnych i sekundárnych), pôsobiaca na nosník, je pri statickom riešení v rovnováhe, **musia byť podmienky rovnováhy splnené aj pre každú jej myslenným rezom oddelenú časť**.

Zložky výslednice vnútorných síl, napr. $^I N_m$, $^I T_m$, $^I M_m$ môžeme teda určiť z podmienok rovnováhy formulovaných pre sily pôsobiace na ľavú časť nosníka (časť I). Naopak, zložky výslednice vnútorných síl $^{II} N_m$, $^{II} T_m$, $^{II} M_m$ musia vyhovovať podmienkam rovnováhy síl, pôsobiacich na časť II (vpravo).

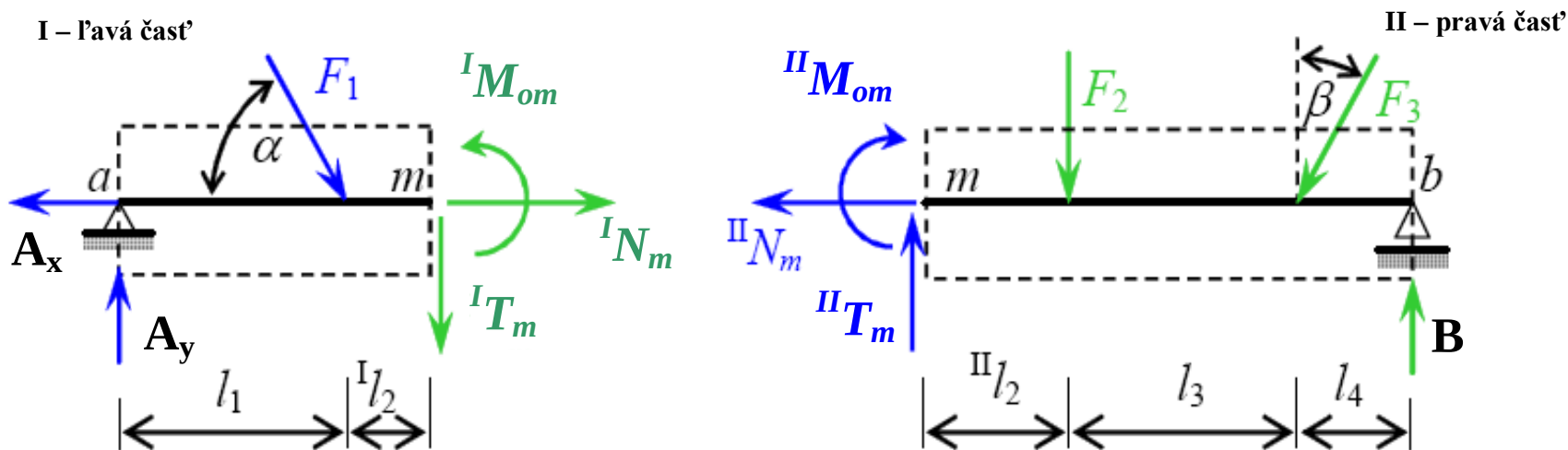
Hodnoty vnútorných síl na oboch častiach myslene rozdeleného telesa však musia byť rovnaké a preto musí platiť:

$$^I N_m = ^{II} N_m = N_m \quad , \quad ^I T_m = ^{II} T_m = T_m \quad , \quad ^I M_m = ^{II} M_m = M_m$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Z poznatkov o silových sústavách už vieme, že ak zmeníme orientáciu všetkých síl v jednej z dvoch ekvivalentných sústav síl, **sily obidvoch sústav budú v rovnováhe**.

V dôsledku toho sú zložky výslednice vnútorných síl $^{\text{II}}N_m$, $^{\text{II}}T_m$, $^{\text{II}}M_m$ ekvivalentné so sústavou vonkajších síl pôsobiacich na časť II a zložky výslednice vnútorných síl $^{\text{I}}N_m$, $^{\text{I}}T_m$, $^{\text{I}}M_m$ sú ekvivalentné so sústavou vonkajších síl, pôsobiacich na časť I.



Obr.4.21

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pri riešení praktických úloh to však neznamená, že musíme určovať vnútorné sily pre obidve časti nosníka (časť I aj časť II).

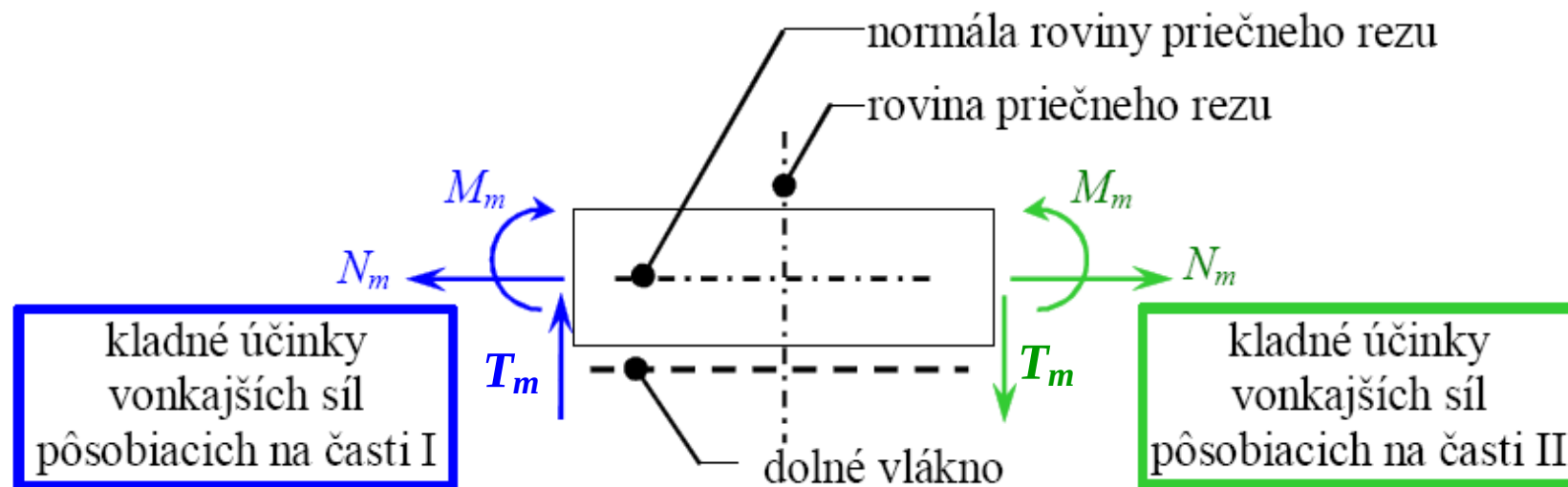
Pre výpočet obvykle volíme tú časť nosníka, ktorá obsahuje menej zaťažujúcich účinkov, príp. u ktorých druhov zaťaženia je transformácia na základný druh silového pôsobenia (náhradné bremeno) jednoduchšia.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

4.3.1 Výpočet vnútorných silových účinkov v priereze m

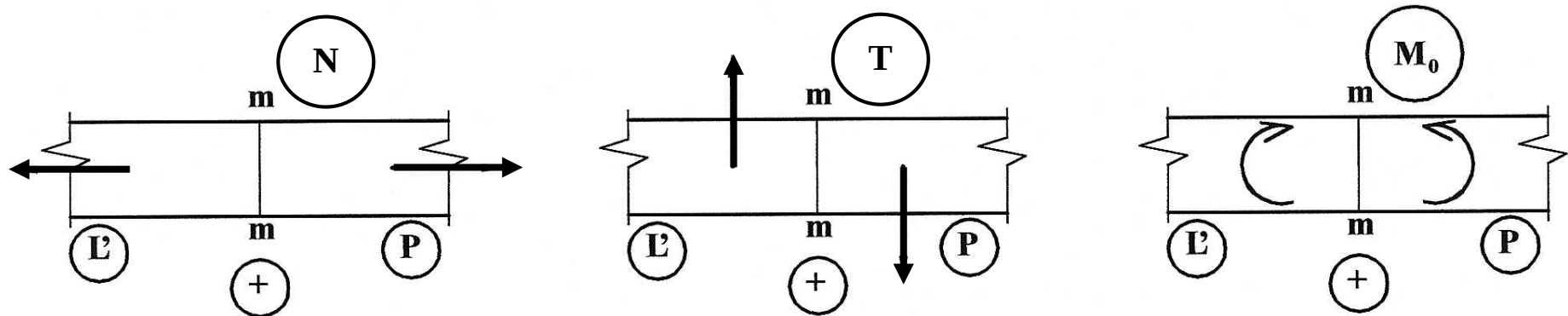
Hodnotu vnútorných síl v uvažovanom priereze m určíme ako **algebraický súčet (suma) zložiek všetkých vonkajších síl**, pôsobiacich na uvažovanú časť prúta „stanoveným“ spôsobom.

Znamienková dohoda: zmysel pôsobenia vnútorných síl považujeme za kladný, ak platia ich zmysly podľa obr. 4.22.



Obr.4.22

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



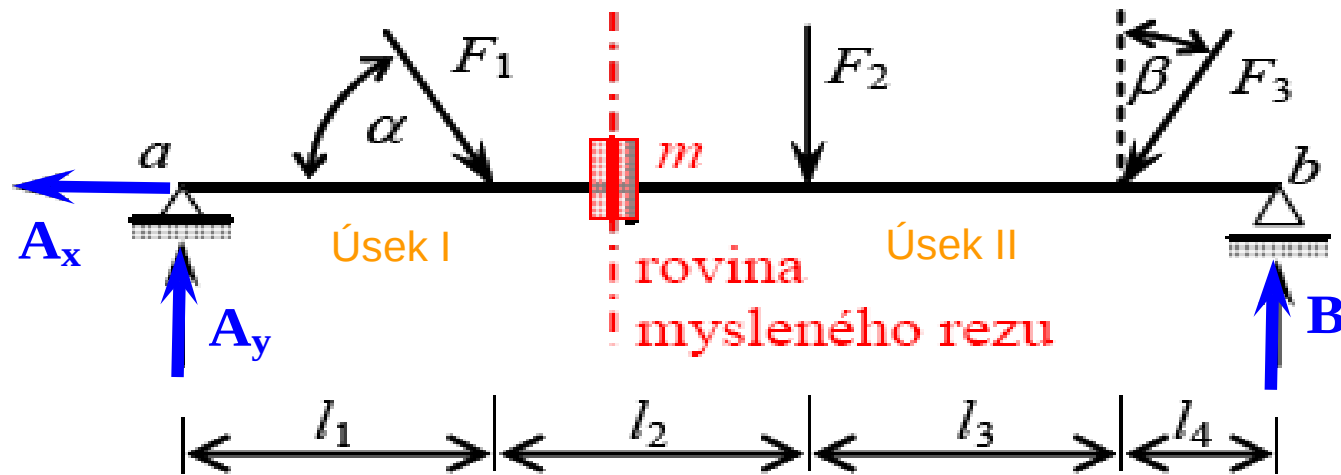
1. Normálová (osová) sila N

Zložka N_m pôsobí v smere normály roviny priečneho rezu m a preto sa nazýva aj ako **normálová sila**. Pre priamy prút je smer normály obvykle totožný so smerom osi prúta a preto je často zaužívané aj pomenovanie - **osová sila**.

Jej hodnotu v uvažovanom priereze m určíme ako **algebraický súčet zložiek všetkých vonkajších síl**, ktoré pôsobia na uvažovanú časť prúta v smere kolmom na rovinu priečneho rezu m , tzn. **v smere osi prúta**.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Napríklad, pre nosník na obr.4.20 vypočítame hodnotu normálovej sily N v reze m buď :



- uvažovaním pôsobenia iba zložiek vonkajších síl na časti I (úsek prúta $a-m$)

$$+\leftarrow N_m = \sum^I F_{ix} = A_x - F_1 \cdot \cos \alpha$$

- alebo pre sily pôsobiace na uvažovanej časti II (úsek prúta $b-m$) z rovnice

$$+\Rightarrow N_m = \sum^{II} F_{ix} = -F_3 \cdot \sin \beta$$

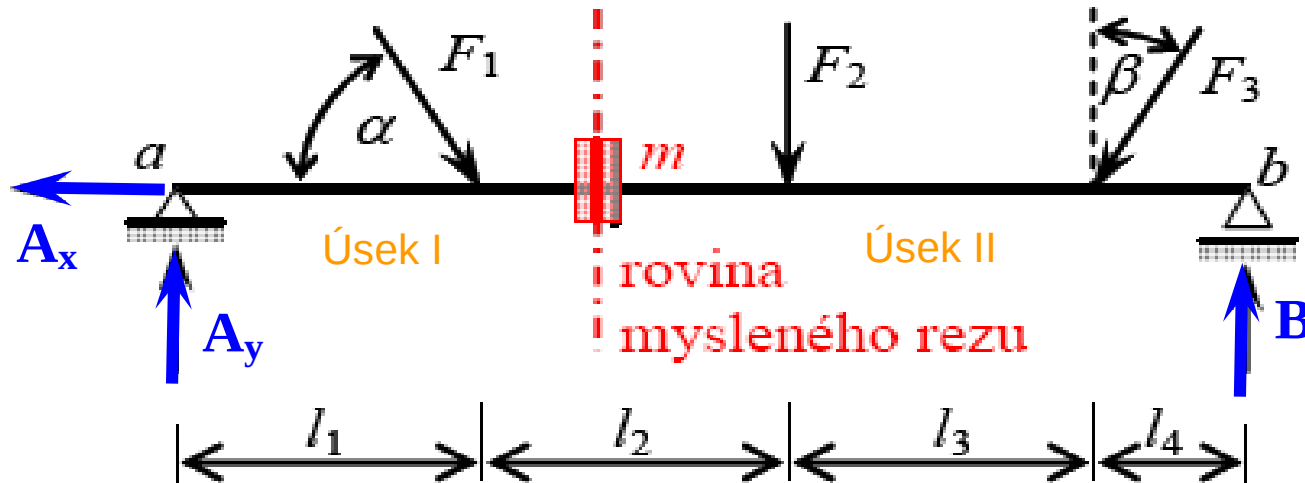
2. Pričná (posúvajúca, šmyková, tangenciálna) sila T

Vnútoraná silová veličina T_m pôsobí v smere roviny priečneho rezu m a preto ju obvykle nazývame **priečna sila**. Jej pôsobením majú okrajové prierezy dĺžkového elementu prúta tendenciu vzájomne sa posunúť a preto sa používa aj označenie **posúvajúca sila**.

Jej hodnotu v uvažovanom priereze m je možné určiť ako **algebraický súčet (suma) zložiek všetkých vonkajších síl**, pôsobiacich na uvažovanú časť prúta v smere roviny priečneho rezu, tzn. **v smere kolmom na os prúta**.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Napríklad, pre nosník podľa obr.4.20 určíme hodnotu priečnej sily T v mieste rezu m buď :



- uvažovaním pôsobenia zložiek vonkajších síl na časti I (úsek prúta $a-m$) zo zápisu

$$+\uparrow \quad T_m = \sum^I F_{iy} = A_y - F_1 \cdot \sin \alpha$$

- alebo pre sily pôsobiace na uvažovanej časti II (úsek prúta $b-m$) zo zápisu

$$+\downarrow \quad T_m = \sum^{II} F_{iy} = -B + F_3 \cdot \cos \beta + F_2$$

3. Momentový (ohybový) účinok M_o

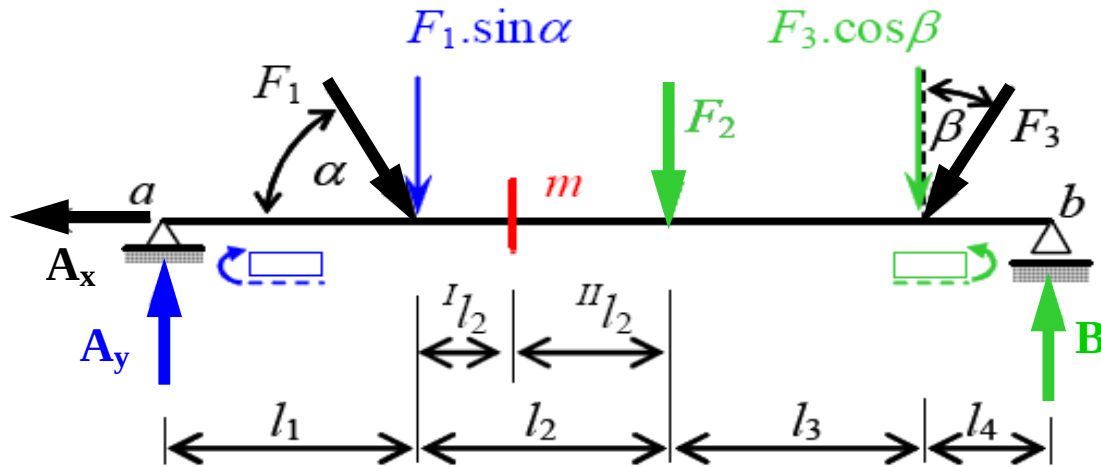
Vnútoraná veličina M_{om} vyjadruje otáčavý účinok výslednice vnútorných síl R_v , pôsobiacich v priereze m vzhľadom k zvolenému bodu na osi nosníka a nazýva sa **ohybový moment**.

Veľkosť ohybového momentu v uvažovanom priereze m môžeme určiť ako **algebraický súčet (sumu) statických momentov od všetkých vonkajších síl a silových dvojíc, pôsobiacich na uvažovanú časť prúta (I - ľavú alebo II - pravú)**.

Pre nosník podľa obr. 4.20 je pre riešenie momentových účinkov lepšie využiť znázornenie podľa obr. 4.23.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Veľkosť ohybového momentu v reze m môžeme určiť uvažovaním otáčavých účinkov od vonkajších síl (Obr.4.23) buď:



Obr.4.23

- na časti I (úsek prúta $a-m$) zo zápisu

$$+ \curvearrowright M_m = \sum^I M_{ib} = A_y \cdot (l_1 + {}^I l_2) - F_1 \cdot \sin \alpha \cdot {}^I l_2$$

- alebo pre sily pôsobiace na uvažovanej časti II (úsek prúta $b-m$) zo zápisu

$$+ \curvearrowright M_m = \sum^{II} M_{ia} = B \cdot ({}^{II} l_2 + l_3 + l_4) - F_3 \cdot \cos \beta \cdot ({}^{II} l_2 + l_3) - F_2 \cdot {}^{II} l_2$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Poznámky:

Vieme, že v statike s pretvorením konštrukcie vôbec neuvažujeme (všetky telesá uvažujeme ako DTT). V statických výpočtoch preto vplyv **pretvorenia konštrukcie na zmenu pôsobísk primárnych silových účinkov neuvažujeme** (t.j. zmenu pôsobiska zaťažujúcich účinkov vplyvom deformácie zanedbávame).

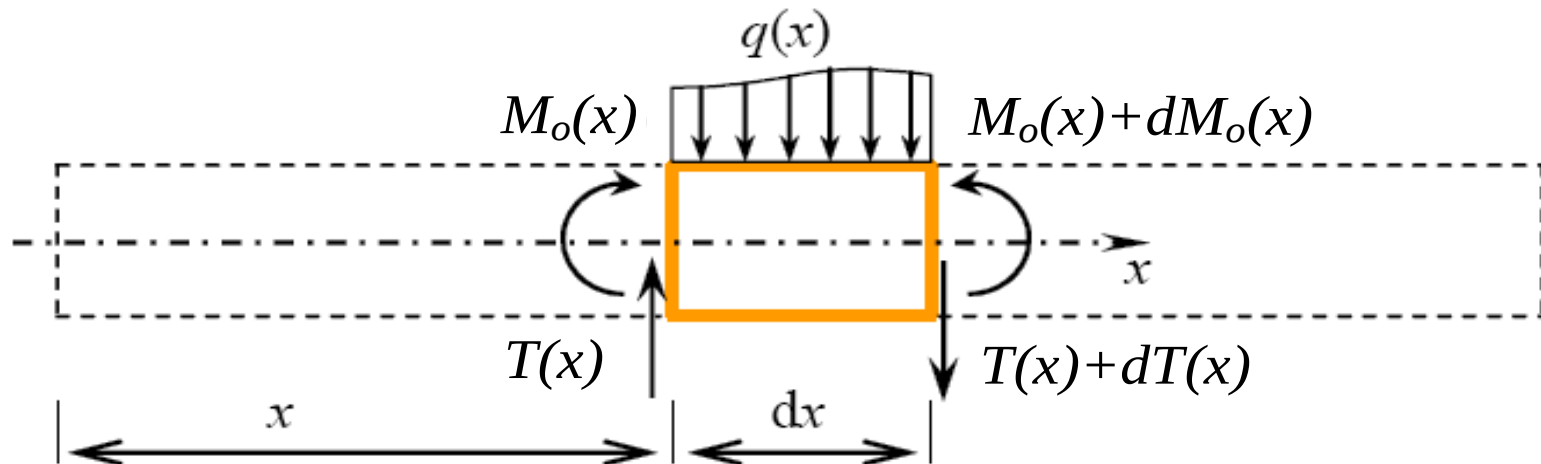
V praktických úlohách statiky sú rozmery konštrukcie zvyčajne „rádovo“ väčšie ako hodnoty pretvorenia $\Rightarrow$ posunutie pôsobísk zaťaženia vplyvom deformácie telesa je úplne zanedbateľné.

Reálne konštrukcie však nie sú dokonale tuhé a preto sa pôsobením vonkajšieho zaťaženia pretvárajú (deformujú). Aby však bola konštrukcia reálne použiteľná, musia byť jej **pretvorenia v porovnaní s jej rozmermi menšie rádovo** (napr. geometrické rozmery konštrukcie v [m], pretvorenia v [mm]).

4.3 Vnútorné silové veličiny v priamych prútoch

4.3.2 Funkčná závislosť medzi priečnym zaťažením q , priečnou silou T a ohybovým momentom M_o

Vyberme z prúta, na ktorý pôsobí sústava síl v rovnováhe, v jeho ľubovoľnom priereze x , element dĺžky dx (obr.4.25). Uvažujme, že na element dx pôsobí iba spojité priečne zaťaženie (kolmo na os prúta) s intenzitou $q(x)$. Odstránené časti prúta môžeme nahradiť vnútornými silovými účinkami – priečnou silou T a ohybovým momentom M .



Obr.4.25

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Osovú silu $\mathbf{N}$ v prípade zaťaženia spojitým priečnym zaťažením $q(x)$ neuvažujeme, nakoľko jej vplyv na závislosť medzi priečnym zaťažením q a vnútornými účinkami $\mathbf{T}$ a $\mathbf{M}_o$ sa neprejaví.

Platí: ak je prút v rovnováhe - podmienky rovnováhy musia platiť i pre každú jeho časť. Vieme, že spojité zaťaženie na elementárnom úseku dx môžeme aproximovať elementárnym náhradným bremenom $F_q = q(x) \cdot dx$ s pôsobiskom v strede úseku dx .

1. Silová (súčtová) podmienka rovnováhy síl pre element dx

$$T(x) - [T(x) + dT(x)] - q(x) \cdot dx = 0$$

Po úprave získame závislosť medzi priečnym zaťažením q a priečnou silou $\mathbf{T}$ v tvare

$$T(x) - T(x) - dT(x) - q(x) \cdot dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad (4.9)$$

4.3 Vnútoré silové veličiny v priamych prútoch

2. Momentová podmienka rovnováhy, formulovaná napr. k pravému okraju elementu $(x+dx)$ je

$$-M(x) - T(x).dx + q(x).dx.\frac{dx}{2} + [M(x) + dM(x)] = 0$$

$$dM(x) - T(x).dx + q(x).\frac{dx^2}{2} \Rightarrow T(x).dx = dM(x) + q(x).\frac{dx^2}{2}$$

Ak zanedbáme posledný člen na ľavej strane rovnice (obsahuje tzv. infinitezimálne - takmer nekonečne) malú veličinu druhého rádu $(q(x).\frac{dx^2}{2})$, po úprave dostaneme vzťah

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \quad (4.10)$$

Vzťahy (4.9 a 4.10) sú známe ako **Schwedler-Žuravského vety**, ktoré slovne môžeme vyjadriť nasledovne:

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

1. Spojité zaťaženie $q(x)$ predstavuje zápornú hodnotu prvej derivácie posúvajúcej sily $T(x)$.

2. V uvažovanom priereze sa hodnota funkcie priečnej sily T rovná hodnote derivácie funkcie ohybového momentu M_o .

Praktický význam S-Ž viet:

- pri známom priečnom zaťažení $q(x)$ môžeme v danom priereze alebo úseku, určiť charakter priebehu priečnej sily T , ako aj ohybového momentu M_o .
- z vlastnosti derivácie funkcie vyplýva, že v poradí veličín q , T , M_o sa jedná vždy o funkciu (krivku) **o jeden rád vyššiu**.

Odvođené závislosti (4.9) a (4.10) sú za predpokladu - spojitosti funkcie zaťaženia - platné nielen pre elementárny úsek dx , ale aj pre ľubovoľný úsek konečnej dĺžky. V tomto prípade budú na vyšetrovanom úseku spojité aj funkcie vnútorných síl (Obr.4.26)

4.3 Vnútorné silové veličiny v priamych prútoch

$q \dots \text{nulový} \Rightarrow T \dots \text{konšt.} \Rightarrow M_0 \dots \text{lineárny}$

$q = 0$

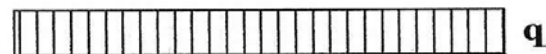


T - konštantné



M_0 - lineárny

$q \dots \text{konšt.} \Rightarrow T \dots \text{lineárny} \Rightarrow M_0 \dots \text{kvadratický}$



q - konštantné



T - lineárne



M_0 - kvadratická parabola

$q \dots \text{lineárny} \Rightarrow T \dots \text{kvadratický} \Rightarrow M_0 \dots \text{kubický}$



q - lineárne



T - kvadratická parabola



M_0 - kubická parabola

Obr. 4.26

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Poznámka:

Je možné si všimnúť, že všetky druhy pôsobiacich zaťažení - silové účinky vo forme $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{F}_q$, $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{M}_m$ rozdeľujú strednicu priamych aj lomených nosníkov na úseky.

V týchto úsekoch pôsobia, napr. iba osamelé sily $\mathbf{F}_i$ alebo osamelé momenty $\mathbf{M}_j$, spojité zaťaženia typu $\mathbf{q}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ sú rovné nule alebo rôzne od nuly a pritom môžu byť uvažované ako zaťaženia statické (konštantné) alebo po dĺžke úseku premenné (t.j. definované vo forme funkcie $\mathbf{q}(x)$, $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{m}(x)$).

Od druhu a spôsobu zaťaženia úsekov je vo veľkej miere závislá nielen veľkosť, ale aj tvar funkcie priebehu vnútorných silových veličín, na analyzovanom úseku.

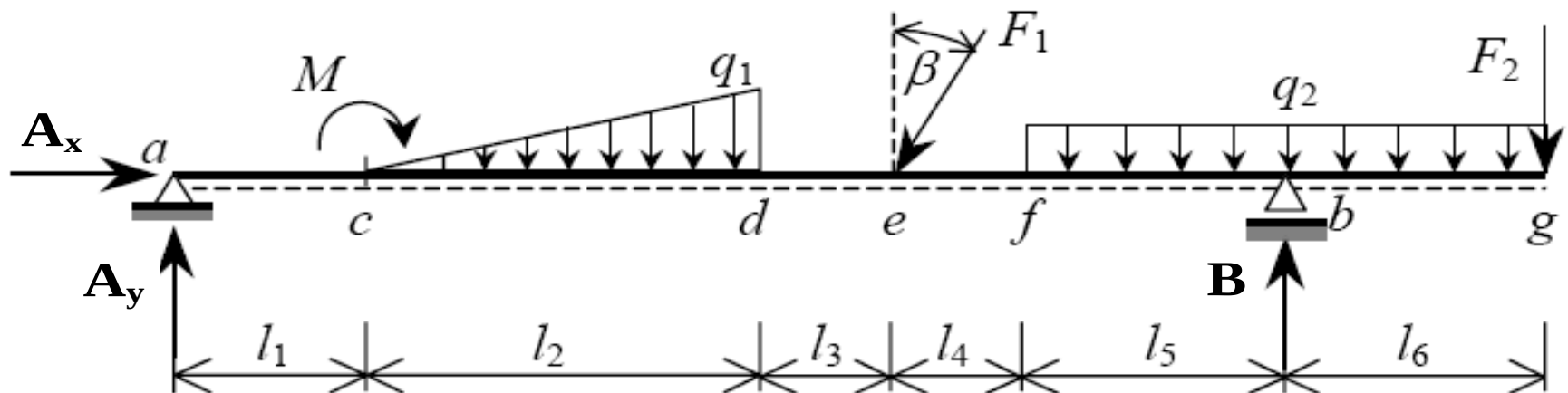
Znamená to, že na každom úseku nosníka platia všetky dôsledky vyplývajúce z podstaty Schwedler - Žuravského vety. 55

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

4.3.3 Priebehy vnútorných veličín pre vybrané zaťaženia

Každý statický model, u ktorého sú vonkajšie sily v rovnováhe (napr. obr.4.27), je možné myslennými rezmi rozdeliť na:

- **úseky**, ktoré sú po celej ich dĺžke zaťažené buď iba spojitými účinkami (c-d, f-g) resp. nie sú zaťažené (a-c, d-e, e-f) a na
- **body** (kvázi úseky s takmer nulovou dĺžkou), definované v miestach podopretia (a,b), ako aj v pôsobiskách osamelých síl (e,g) a silových dvojíc - momentov (c).



Obr.4.27

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pri objasňovaní závislosti priebehu vnútorných síl na úsekoch s rôznym druhom zaťaženia vychádzame z predpokladov:

- ak sú vonkajšie sily, pôsobiace na teleso v rovnováhe, musí byť v rovnováhe aj každá jeho časť;
- hodnoty vnútorných síl na začiatku alebo na konci úseku sú už známe z predchádzajúcich krokov riešenia;
- polohu miesta rezu m na osi prúta udáva súradnica x .

Zásady pre zakresľovanie priebehov vnútorných síl:

- kladné hodnoty N , T vynášame na stranu horných vlákien, záporné hodnoty T na stranu dolných;
- kladné hodnoty M_o vynášame na stranu dolných (naťahovaných) vlákien, záporné na stranu horných (stláčaných) vlákien.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

a) Prierez, v ktorom pôsobí osamelá sila

Ak v zadanom priereze prúta pôsobí osamelá sila $\mathbf{F}$ (obr. 4.28), myslenými rezmi, vedenými tesne okolo prierezu, vyberieme z nosníka elementárny úsek prúta ($l-n$), s dĺžkou limitne sa blížiacou nule.

Predpokladáme aj, že hodnoty vnútorných síl na začiatku / konci úseku sú už známe z predchádzajúcich krokov riešenia.

Neznámu hodnotu **normálovej sily** N určíme ako:

$$+\leftarrow \boxed{N_{m-n} = N_{m-l} + F \cdot \sin \beta} \quad \text{alebo} \quad +\Rightarrow \boxed{N_{m-l} = N_{m-n} - F \cdot \sin \beta}$$

Neznámu **priečnu silu** T určíme ako

$$+\uparrow \boxed{T_{m-n} = T_{m-l} - F \cdot \cos \beta} \quad \text{alebo} \quad +\downarrow \boxed{T_{m-l} = T_{m-n} + F \cdot \cos \beta}$$

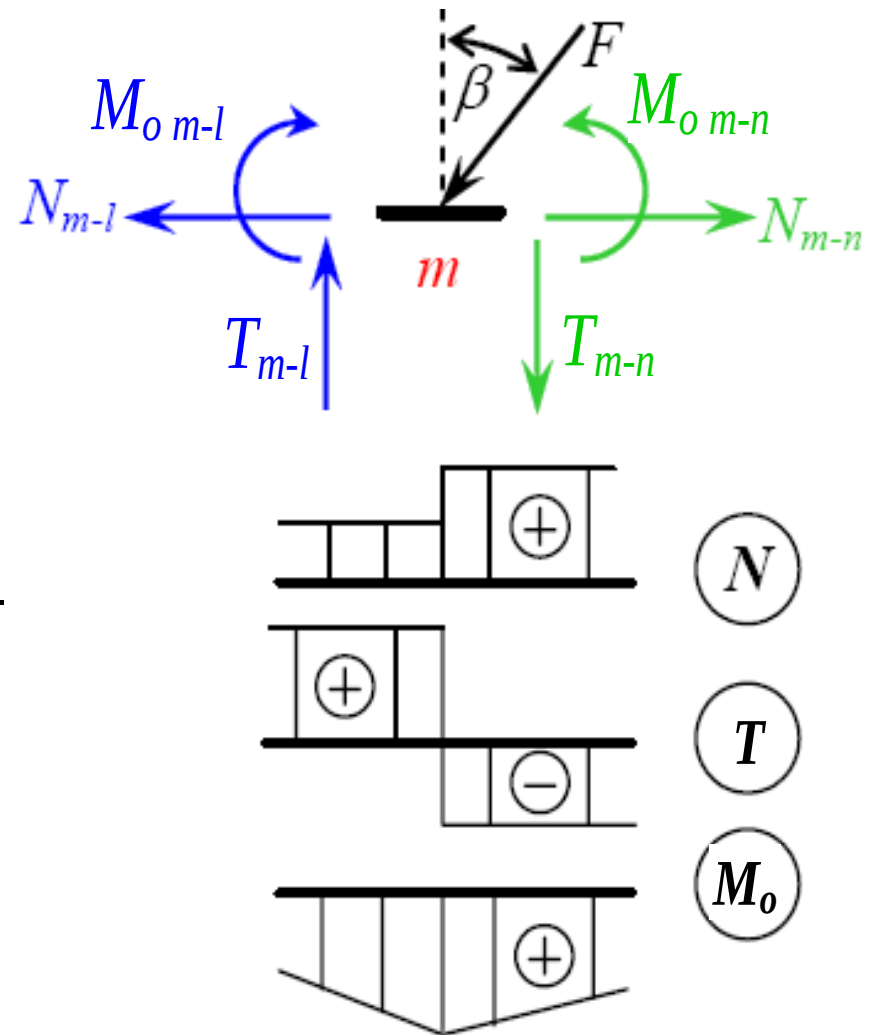
4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Hodnoty ohybových momentov **M** sú rovnaké a platí

$$+ \curvearrowright \boxed{M_{m-n} = M_{m-l}} + \curvearrowleft .$$

V grafickom zobrazení sa pôsobenie sily **F** prejaví (obr. 4.19) :

- „skokom“ v priebehu **N** a **T**
- „zlomom“ v priebehu **M**.

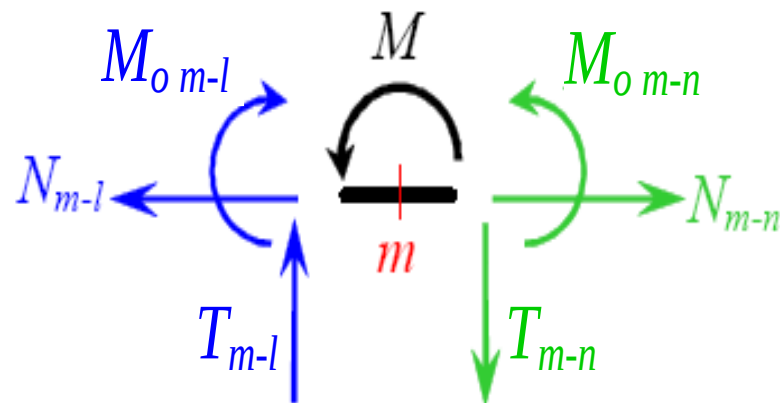


Obr.4.28

b) Prierez, kde pôsobí osamelá silová dvojica - moment

Pôsobenie osamelého momentu M v niektorom priereze priameho prúta **nemá** na priebeh normálových, ani osových síl žiadny **vplyv**. Ich hodnoty sú rovnaké a platí

$$N_{m-n} = N_{m-l} \quad \text{a} \quad T_{m-l} = T_{m-n}$$

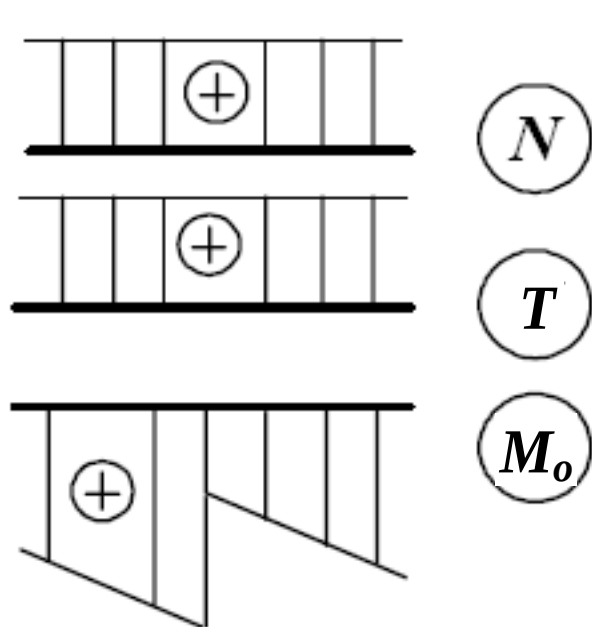
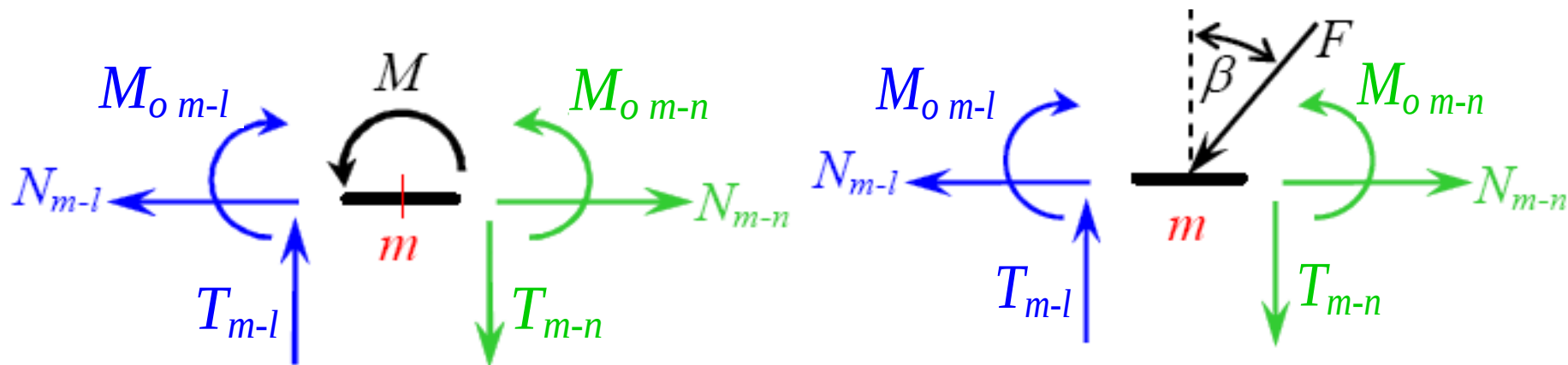


Pre určenie hodnoty ohybového momentu M_o platia vzťahy

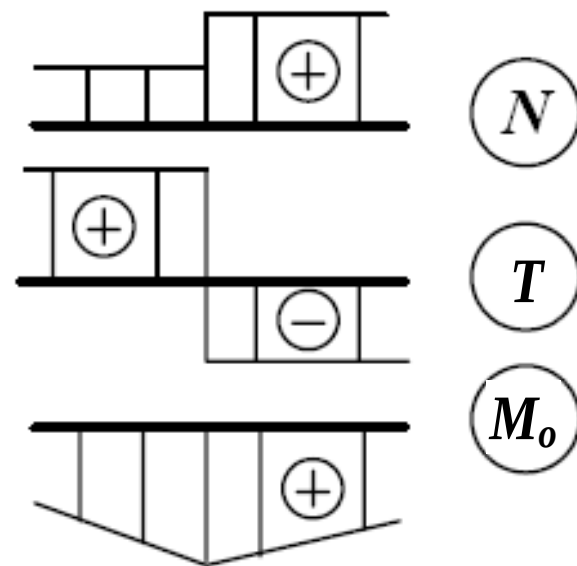
$$+ \curvearrowright \quad M_{m-n} = M_{m-l} - M \quad \text{alebo} \quad + \curvearrowleft \quad M_{m-l} = M_{m-n} + M .$$

V grafickom znázornení bude v priebehu M „skok“ (obr.4.29).

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



Obr.4.29

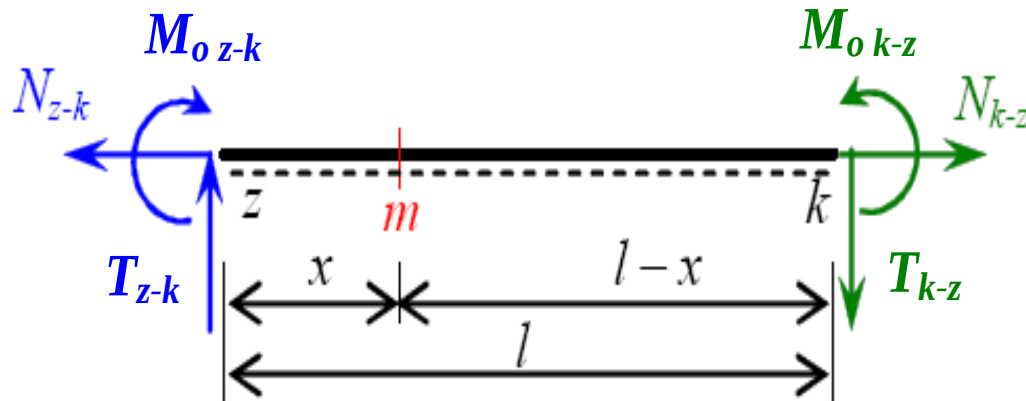


Obr.4.28

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

c) Nezaťažený úsek prúta

Majme ľubovoľný nezaťažený úsek priameho prúta, definovaný v lokálnych súradniciach so začiatkom v bode z .



Normálová sila N má v každom priereze úseku konštantnú hodnotu, vyjadrenú podľa dohody znamienok (obr.4.15) v tvare

$$+\leftarrow \boxed{N(x) = N_{z-k}} \quad \text{alebo} \quad +\Rightarrow \boxed{N(x) = N_{k-z}}$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Priečna sila T má taktiež v každom priereze úseku konštantnú hodnotu, vyjadrenú podľa konvencie (obr.4.15) v tvare

$$+\uparrow \boxed{T(x) = T_{z-k}} \quad \text{alebo} \quad +\downarrow \boxed{T(x) = T_{k-z}}$$

Funkciu priebehu ohybového momentu M_0 v uvažovanom priereze x vyjadríme zápisom podľa dohody (obr. 4.15) v tvare

$$+\curvearrowright \boxed{M(x) = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x} \quad \text{alebo} \quad +\curvearrowleft \boxed{M(x) = M_{k-z} - T_{k-z} \cdot (l - x)}$$

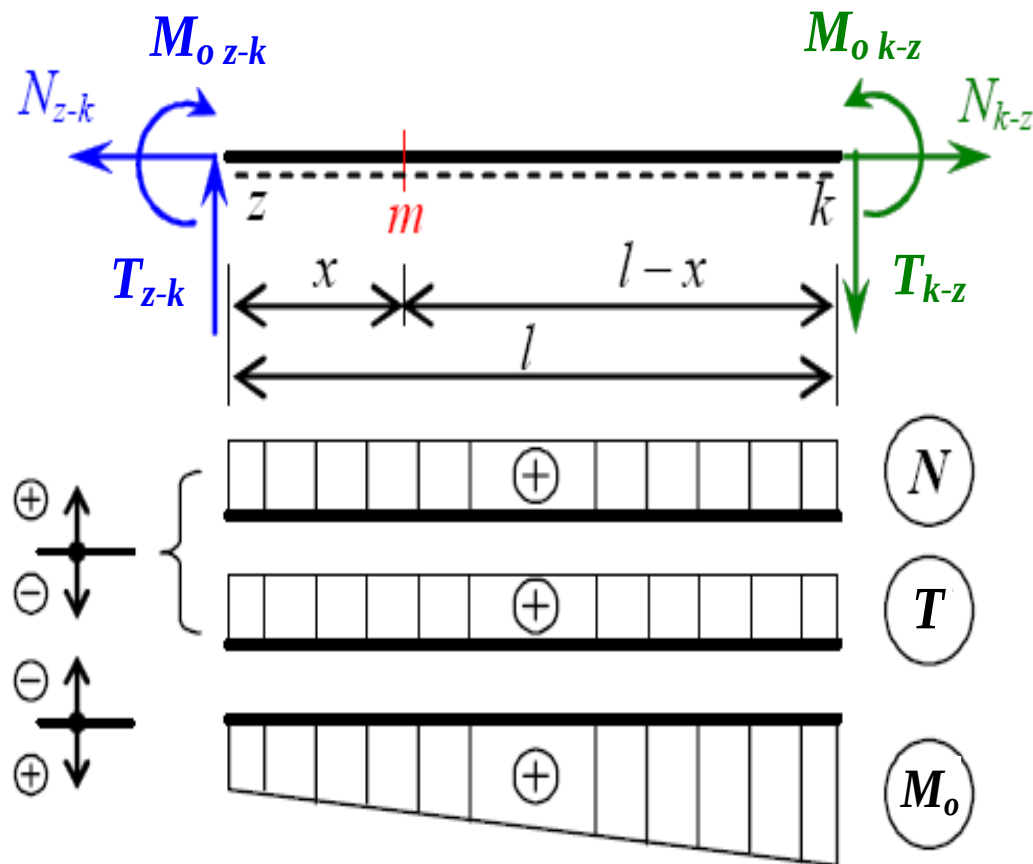
*z ktorého je zrejмый **lineárny priebeh** (zmena) hodnôt ohybového momentu vzhľadom na premennú x , udávajúcu polohu uvažovaného prierezu.*

- Na zobrazenie lineárnej funkcie stačí poznať dve jej hodnoty. Ak už poznáme hodnoty vnútorných síl na začiatku úseku (bod z), stačí preto dourčiť iba hodnotu M_0 na konci úseku (bod k).

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pre ľubovoľný nezaťažený úsek musí byť zachovaný charakter priebehu tak, ako je znázornené napr. na obr. 4.32.

- kladné hodnoty **N** a **T** vynášame na stranu horných vlákien, záporné na stranu dolných a sú pre celý úsek **konštantné**;
- kladné hodnoty **M_o** vynášame na stranu dolných vlákien, záporné na stranu horných vlákien a priebeh funkcie **M_o** je **lineárny**.

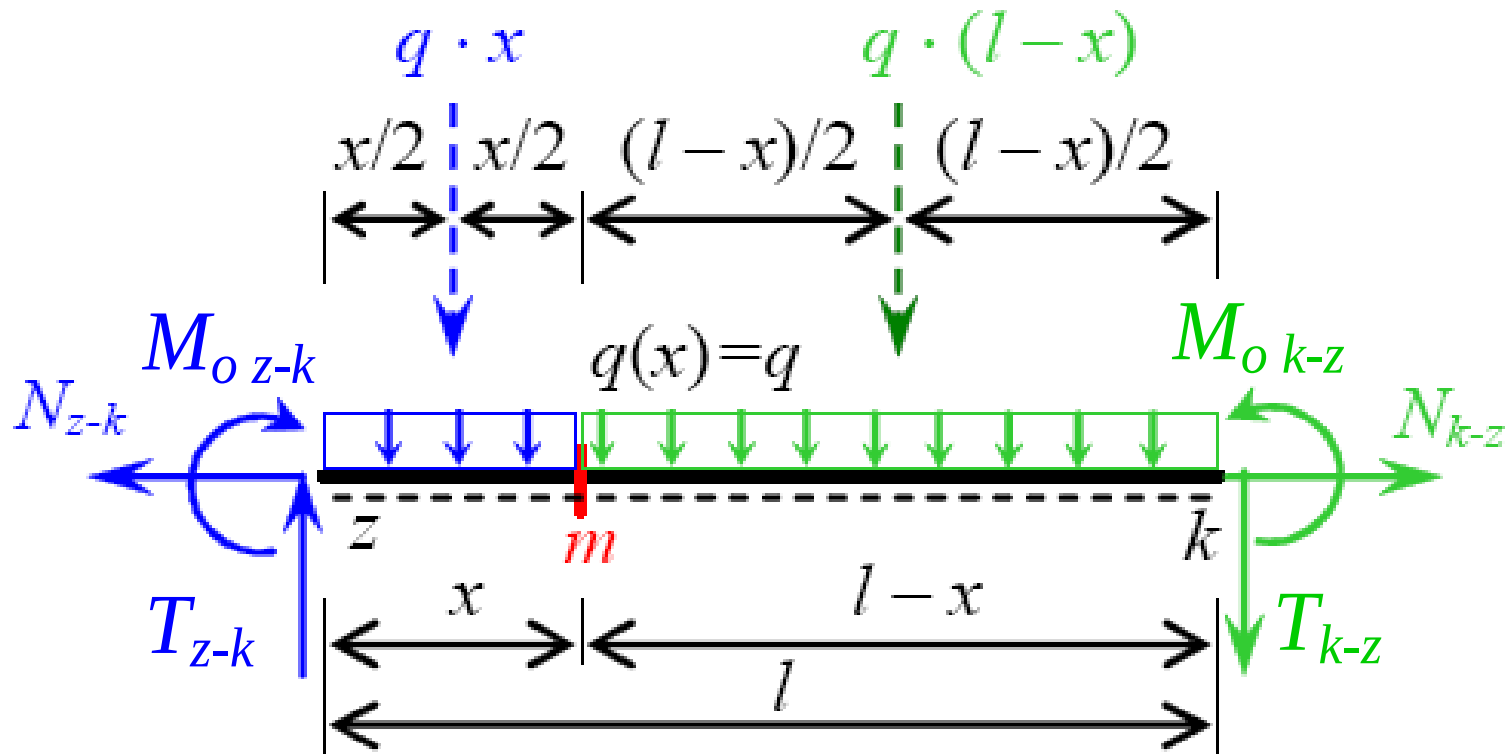


Obr.4.32

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

d) Úsek s rovnomerným spojitým priečnym zaťažením

Majme úsek priameho prúta so začiatkom v bode z .
Predpokladáme, že intenzita spojitého zaťaženia je konštantná
a vyjadrená funkciou v tvare $q(x) = q$.



4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Normálová sila N má v každom priereze úseku konštantnú hodnotu vyjadrenú zápisom podľa konvencie (obr. 4.15)

$$+\leftarrow \boxed{N(x) = N_{z-k}} \quad \text{alebo} \quad +\Rightarrow \boxed{N(x) = N_{k-z}}$$

Funkciu **priečnej sily T** v priereze m na analyzovanom úseku vyjadríme zápisom podľa konvencie (obr. 4.15)

$$+\uparrow \boxed{T(x) = T_{z-k} - q \cdot x} \quad \text{alebo} \quad \downarrow \boxed{T(x) = T_{k-z} + q \cdot (l - x)}$$

a jasne vyjadruje **lineárnu zmenu hodnôt priečnej sily T** podľa premennej x , udávajúcej polohu zvoleného prierezu na prúte.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Funkciu **ohybového momentu** M_0 v uvažovanom priereze m vyjadríme podľa konvencie (obr. 4.15) v tvare

$$+ \curvearrowright \boxed{M(x) = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}} \quad \text{alebo} \quad + \curvearrowleft \boxed{M(x) = M_{k-z} - T_{k-z} \cdot (l - x) - \frac{q \cdot (l - x)^2}{2}}$$

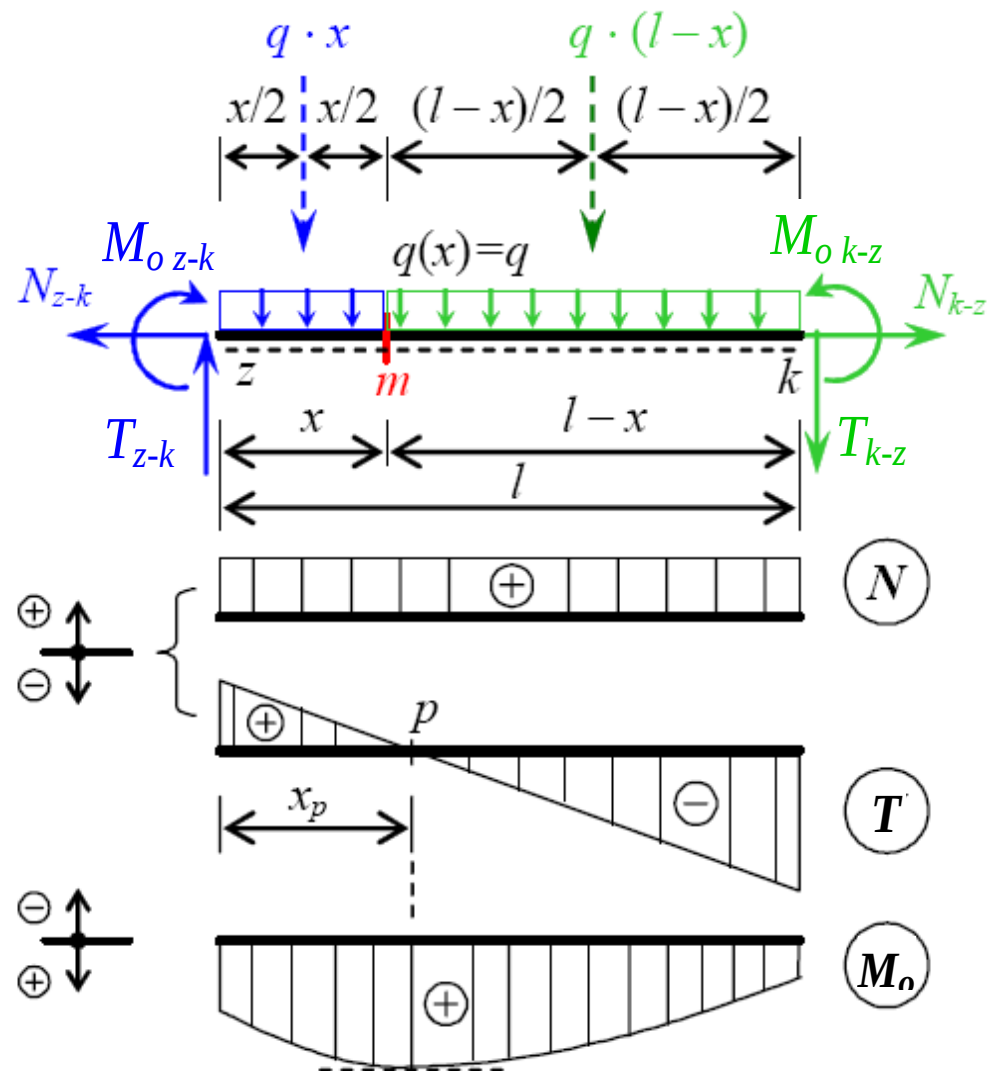
a vyjadruje **kvadratickú zmenu hodnôt ohybového momentu** M_0 pre premennú x , udávajúcu polohu uvažovaného prierezu.

- Pre zobrazenie funkcie 2. stupňa - **kvadratickej paraboly** je nutné poznať aspoň 3 funkčné hodnoty. Okrem hodnôt M_0 na začiatku (z) a konci (k) úseku je nutné určiť ešte hodnotu, prislúchajúcu ďalšiemu prierezu, napr. s (definovaný v strede úseku).

Priebehy vnútorných síl N , T , M_0 graficky znázorníme na základe vyčíslených hodnôt pre nosník ako celok.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pre ľubovoľný úsek prúta, zaťažený spojitým priečnym zaťažením s konštantnou intenzitou, musí byť zachovaný charakter priebehu vnútorných síl v súlade so znázornením na obr. 4.33.



Obr.4.33

Prechodový prierez

V závislosti od konkrétne riešeného problému môže (ale nemusí) nastať prípad, že v určitom priereze „ p “ je **hodnota priečnej sily T rovná nule ($T = 0$)**.

Takýto prierez nazývame **prechodový prierez** a je charakteristický tým, že práve v tomto mieste nosníka hodnota priečnej sily **T** mení svoje znamienko (pretína nulovú os).

Identifikácia prechodového prierezu je veľmi dôležitá. Pretože, práve v tomto mieste na nosníku bude funkcia **ohybového momentu M_0** dosahovať **extrémne hodnoty**.

Z matematiky je známe: Spojitá funkcia má v rozsahu skúmaného intervalu lokálny extrém (MAX / MIN) v tých bodoch, v ktorých jej prvá derivácia je rovná nule. Tu je zrejmá súvislosť a tiež aj dôsledok Schwedler – Žuravského viet.

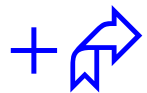
4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

- **Polohu prechodového prierezu p** , určenú súradnicou x_p zistíme tak, že do funkcie priebehu priečnej sily T dosadíme za $x=x_p$ a pre hodnotu priečnej sily $T_p = T(x = x_p) = 0$ a dostaneme

$$T_{z-k} - q \cdot x_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{T_{z-k}}{q} \text{ resp.}$$

$$T_{k-z} + q \cdot (l - x_p) = 0 \Rightarrow x_p = \frac{T_{k-z}}{q} + l.$$

- **Extrém ohybového momentu $M_{o \max}$** určíme pomocou parametra polohy prechodového prierezu x_p . Dosadíme za $x=x_p$ do funkcie ohybového momentu. Napr. pre zaťaženie $q=\text{konš.}$ platí:



$$M_p = M_{\max} = M(x = x_p) = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x_p - \frac{q \cdot x_p^2}{2}$$

alebo

$$M_p = M_{\max} = M(x = x_p) = M_{k-z} - T_{k-z} \cdot (l - x_p) - \frac{q \cdot (l - x_p)^2}{2}$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

e) Úsek s nerovnomerným spojitým priečnym zaťažením

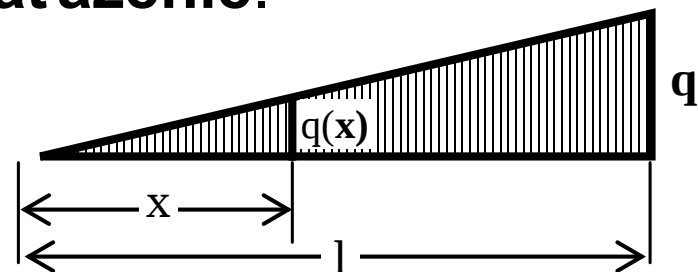
Majme ľubovoľný úsek priameho prúta (obr.4.34) so začiatkom v bode z. Lineárna zmena intenzity zaťaženia je vyjadrená funkciou v tvare

$$q(x) = \frac{q \cdot x}{l}$$

tzv. **trojuholníkové priečne spojité zaťaženie**.

Dôkaz:

$$\frac{q}{q(x)} = \frac{l}{x} \Rightarrow q(x) = \frac{q \cdot x}{l}$$

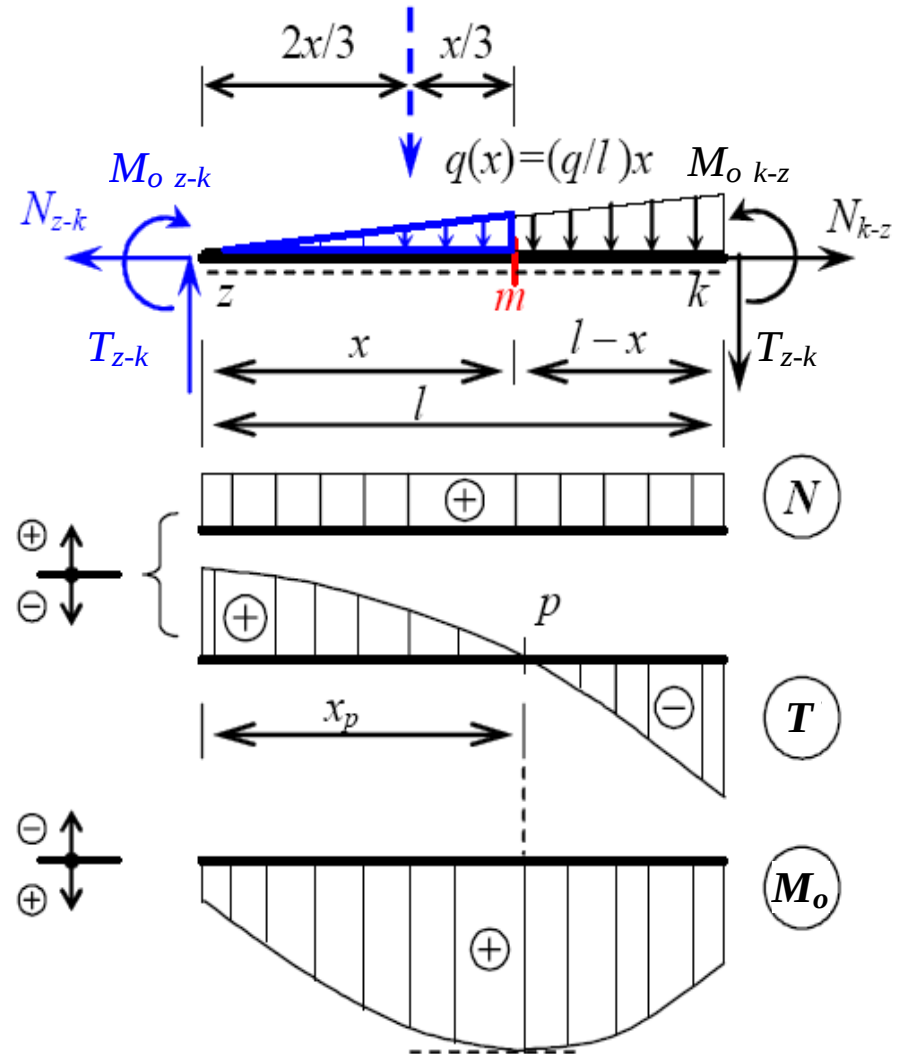


- **Normálová sila N** má v každom priereze úseku konštantnú hodnotu vyjadrenú podľa konvencie (obr. 4.15) v tvare

$$+\leftarrow \boxed{N(x) = N_{z-k}} \quad \text{alebo} \quad +\Rightarrow \boxed{N(x) = N_{k-z}} .$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pre ľubovoľný úsek prúta, zaťaženého lineárnym rastúcim alebo klesajúcim spojitým priečnym zaťažením, musí byť zachovaný charakter priebehu tak, ako je znázornený na obr. 4.34.



Obr.4.34

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

- Funkciu **priečnej sily** **T** v uvažovanom priereze *m* analyzovaného úseku určíme podľa znamienkovej konvencie v tvare

$$+ \uparrow \boxed{T(x) = T_{z-k} - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = T_{z-k} - \frac{q}{2l} \cdot x^2}$$

ktorý vyjadruje **kvadratickú zmenu hodnôt T** pre premennú *x*, udávajúcu polohu prierezu.

Vieme už, že pre zobrazenie funkcie druhého stupňa je nutné poznať **aspoň tri funkčné hodnoty**.

Okrem hodnôt priečných síl na začiatku (*z*) a na konci (*k*) úseku je preto nutné dourčiť aj tretiu hodnotu, napr. hodnotu priečnej sily **T_s**, prislúchajúcu prierezu *s*, definovanému napr. v strede úseku.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

• **Funkciu ohybového momentu M_0** v uvažovanom priereze m analyzovaného úseku je možné vyjadriť podľa konvencie znamienok a podľa obr.4.34 zápisom v tvare

+ 

$$M(x) = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{1}{3} x = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{q \cdot x}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x - \frac{q}{6l} \cdot x^3$$

a vyjadruje pre premennú x , udávajúcu polohu analyzovaného prierezu, **zmenu hodnôt ohybového momentu M vo forme funkcie tretieho stupňa**.

Pre zobrazenie funkcie tretieho stupňa (tzv. **kubickej paraboly**) je potrebné poznať aspoň štyri funkčné hodnoty.

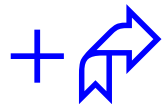
Preto je nutné okrem hodnôt M_0 na začiatku a konci úseku, určiť ešte ďalšie dve hodnoty, prislúchajúce napr. prierezom vo vzdialenostiach $x_1 = l / 3$, resp. $x_2 = 2.l / 3$ od začiatku úseku.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

- Polohu **prechodového prierezu** určenú súradnicou x_p zistíme tak, že do funkcie priečnej sily T dosadíme $x=x_p$. Pre známu hodnotu priečnej sily $T_p=T(x=x_p)=0$ v prípade nerovnomerného trojuholníkového priečného zaťaženia dostaneme vzťah v tvare

$$T_{z-k} - \frac{q}{2l} \cdot x_p^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_p = \sqrt{\frac{2 \cdot |T_{z-k}| \cdot l}{q}}$$

- **Hodnotu extrémneho ohybového momentu $M_{o \max}$** v prechodovom priereze p určíme dosadením za $x = x_p$ do funkcie pre M_o . Potom pre zadaný úsek nosníka podľa obr.4.34 platí

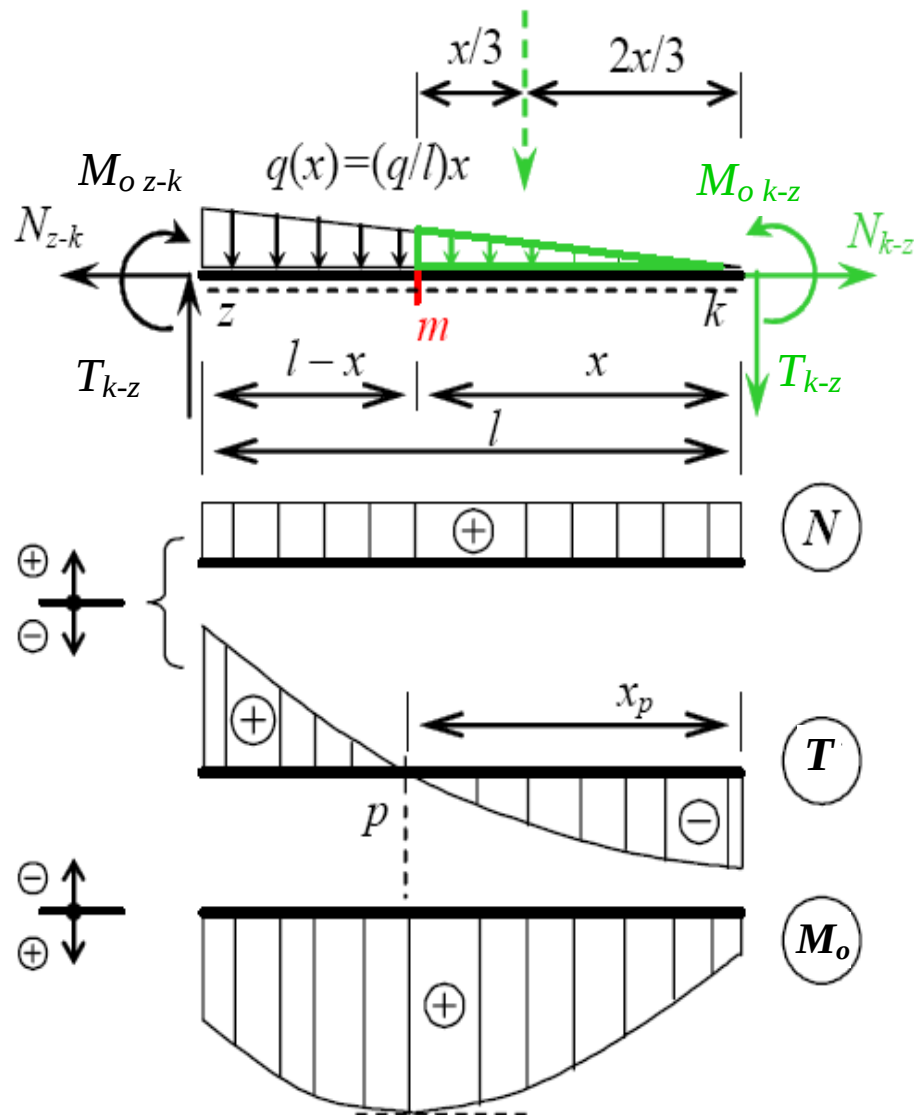


$$M_p = M_{\max} = M(x = x_p) = M_{z-k} + T_{z-k} \cdot x_p - \frac{q}{6l} \cdot x_p^3.$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Poznámka: Nerovnomerné klesajúce zaťaženie

Ak je spojité lineárne zaťaženie $q(x)$ úseku reprezentované funkciou, ktorej **priebeh zo začiatočnej hodnoty (z) klesá do nulovej hodnoty na konci úseku (k)**, výhodnejšie je zvoliť **začiatok lokálneho systému v bode k** (obr. 4.35), t.j. na strane nulovej hodnoty spojitého zaťaženia. Zjednoduší sa tým riešenie.



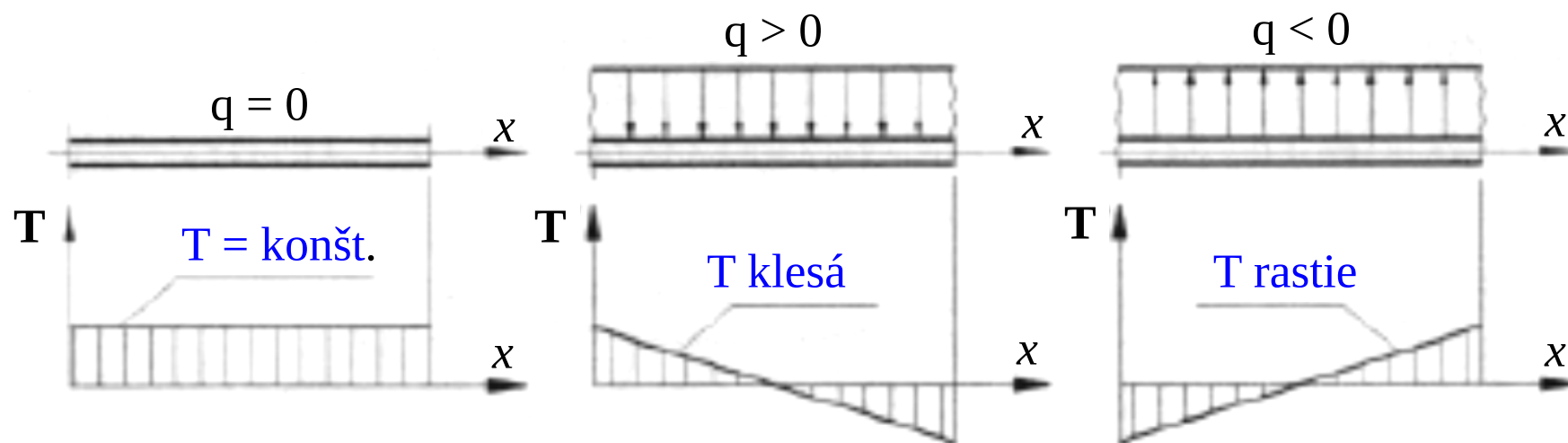
Obr.4.35

4.3.5 Záverečné poznámky k analýze vnútorných síl

S-Ž vety sú dôležité najmä v procese určovania priebehov vnútorných silových veličín T a M_o , ale aj pre kontrolu správnosti ich určenia.

Z 1.Š-Ž vety: $dT(x) / dx = -q(x)$ = spojité zaťaženie $q(x)$ predstavuje zápornú hodnotu prvej derivácie priečnej sily $T(x)$.

Ak na určitom úseku $q=0$, posúvajúca sila T bude na úseku konštantná $\Rightarrow q=0$; $T(x)=\text{konštanta}$.



4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Ak $q > 0$ ($\downarrow$ orientované nadol) - na úseku $T'(x) < 0 \Rightarrow T(x)$ klesá. Podobne, na úseku, kde $q < 0$ ($\uparrow$ orientované nahor), posúvajúca sila $T(x)$ narastá $\Rightarrow T(x)$ má stúpajúci priebeh.

Z 2.S-Ž vety: $dM_o / dx = T(x)$ je zrejmé, že $T(x)$ je prvou deriváciou $M(x)$. Ak je funkcia priebehu $M(x)$ známa, možno ju využiť pre určenie funkcie priebehu priečných síl $T(x)$.

Ak $T(x) > 0$, hodnota $M_o(x)$ rastie. Naopak, ak $T(x) < 0$, priebeh $M(x)$ klesá. V mieste, kde $T(x) = 0$, dosahuje ohybový moment extrém, t.j. lokálne max / min = **prechodový prierez**.

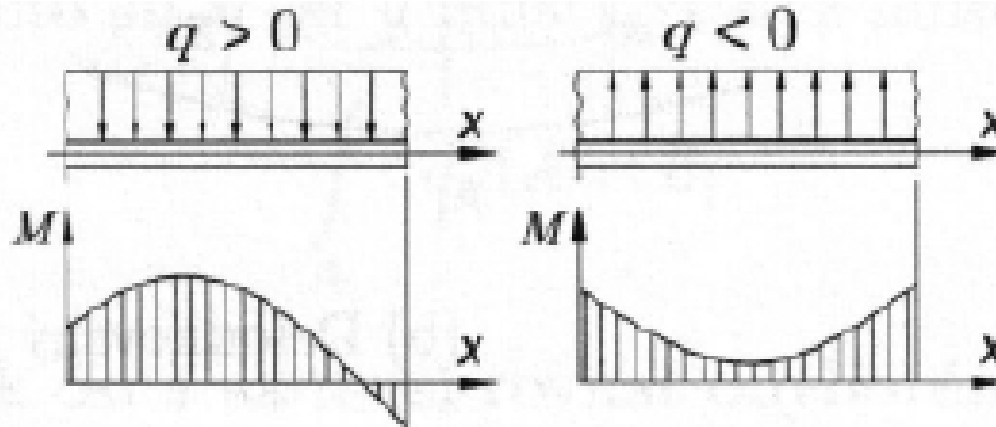
Ak do 2.S-Ž vety dosadíme za T z 1.vety dostaneme vzťah

$$-q(x) = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \quad (4.17)$$

a platí: $q(x)$ predstavuje zápornú hodnotu druhej derivácie $M(x)$.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pre $q > 0$ je preto $M''(x) < 0$ a krivka priebehu $M(x)$ je konkávna. Naopak, pre $q < 0$ je $M''(x) > 0$ a priebeh $M(x)$ je konvexný.

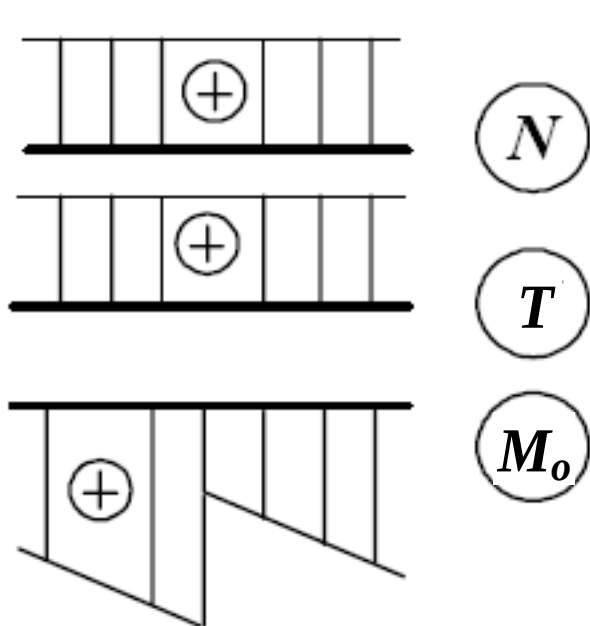
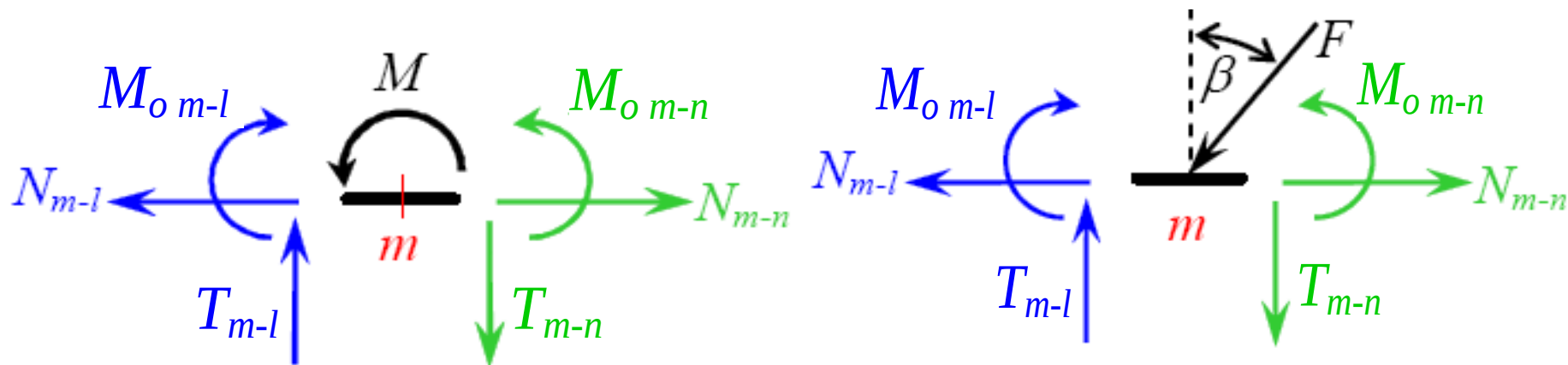


Uvedené úvahy platia iba v prípade postupu zľava doprava.

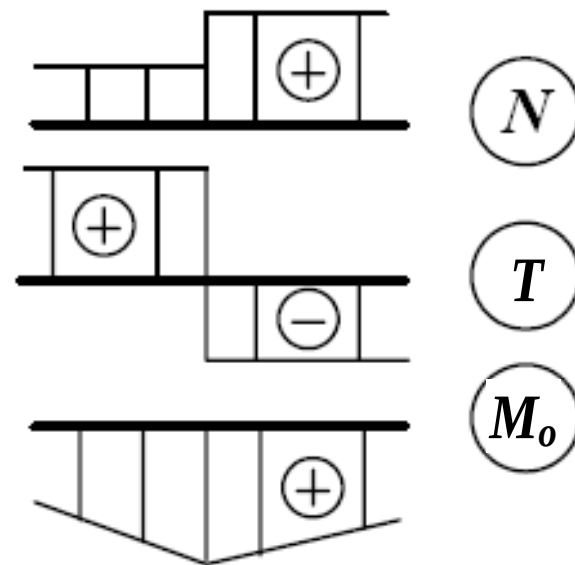
Pri opačnom postupe sa v rovniciach S-Ž viet zmenia znamienka, rovnica (4.17) sa však nemení.

Je nutné dodať, že S-Ž vety neplatia v miestach pôsobenia osamelých síl alebo momentov. V týchto prierezoch nastávajú v priebehoch silových veličín T a M_0 nespojitosti, obvykle vo forme zlomov alebo skokov (Obr.4.29 a 4.28).

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



Obr.4.29



Obr.4.28

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Príklad 4.5: Určite výpočtom veľkosť a priebeh vnútorných veličín N , T , M_O na prostom nosníku (obr.4.31) od osamelej sily F . Dané: $F=500$ N.

Príklad 4.7: Na zadanom nosníku určite výpočtom priebehy veličín N , T , M_O , vyvolané šikmou silou F (obr. 4.33). Dané: $F = 500$ N, $a = 2$ m, $b = 4$ m, $l = 6$ m, $\alpha = 30^\circ$.

Príklad 4.8: Určite výpočtom aj graficky veľkosť a priebehy vnútorných síl na prostom nosníku od spojitého rovnomerného zaťaženia (obr. 4.34).

Príklad 4.9: Určite výpočtom priebehy N , T , M_O na nosníku s osamelými silami (obr. 4.35). Dané: $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3$ kN, $F_3 = 2$ kN, $F_4 = 3$ kN, $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_3 = 45^\circ$, $\alpha_4 = 60^\circ$.



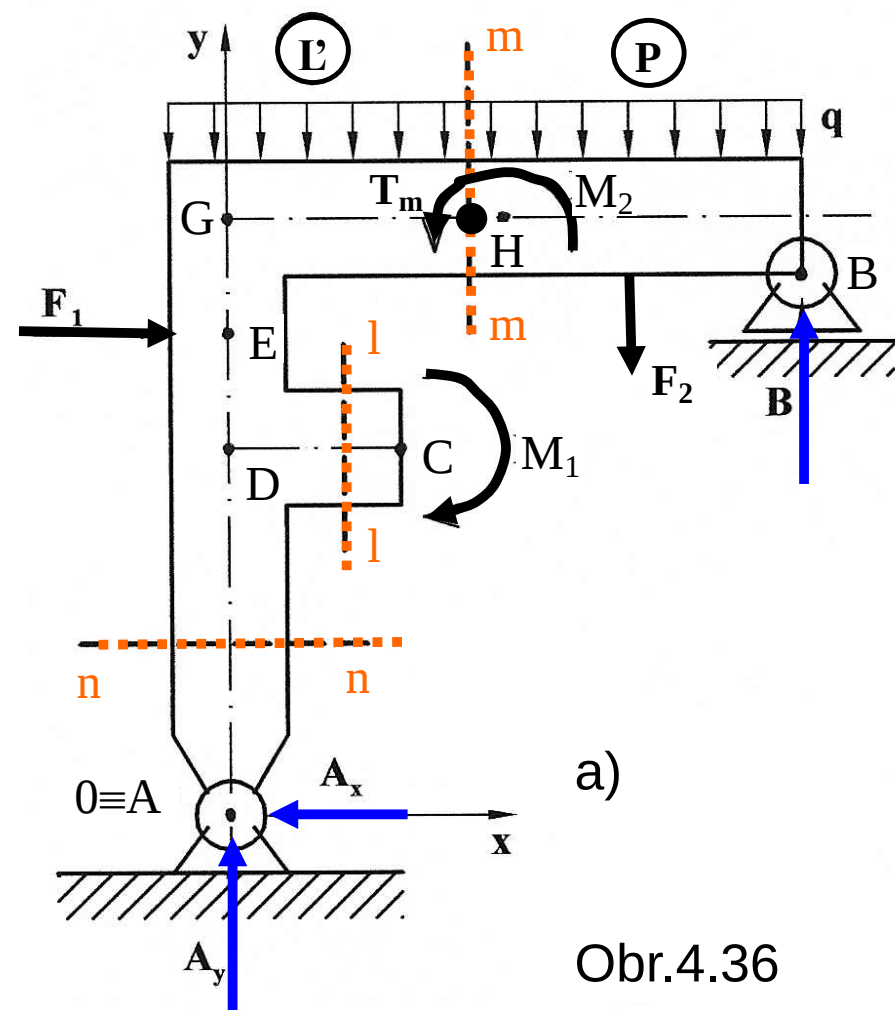
Otázky????

Ďakujem za pozornosť

Vnútorne veličiny na nosníku s lomenou osou - rámová konštrukcia

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

4.3.4 Vnútorne veličiny na rámovej konštrukcii



Majme zadaný lomený nosník - rám (obr.4.36a). Sily F_1 , F_2 , momenty M_1 , M_2 a spojité zaťaženie q - spoločne s reakciami A_x , A_y , B tvoria všeobecnú sústavu vonkajších síl, ktoré zadanú rámovú konštrukciu zaťažujú.

Už vieme, že všetky vonkajšie zaťaženia vyvolávajú v telese vznik tzv. **vnútorných silových veličín**, pôsobiacich vo všetkých prierezoch analyzovanej rámovej konštrukcie.

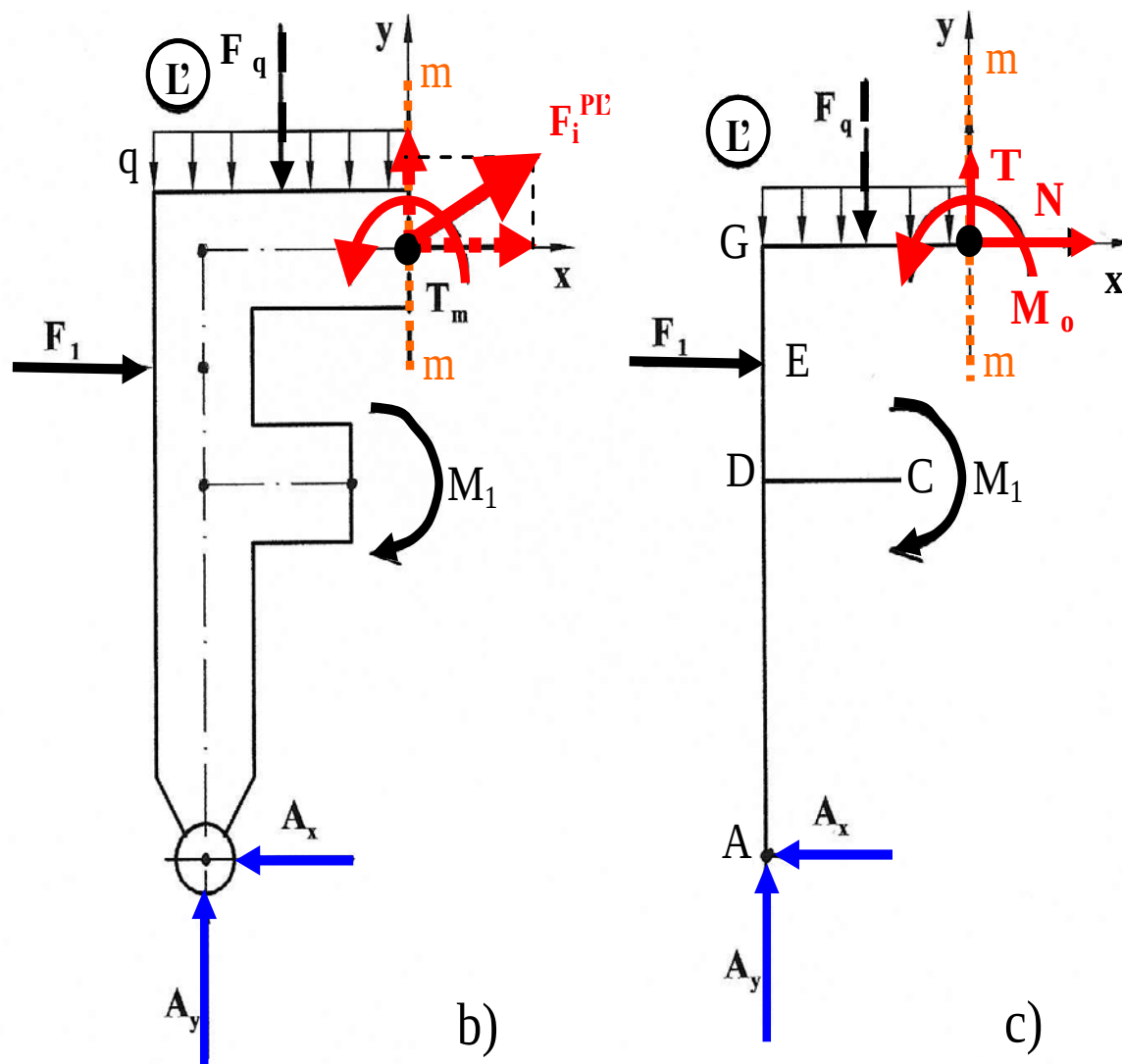
4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Rovnako ako na priamych nosníkoch, aj na rovinných rámových konštrukciách vnútorné sily zisťujeme v prierezoch kolmých na os (strednicu) rámu (napr. rezmi $m-m$, $n-n$, $l-l$ atď.).

Na vyriešenie vnútorných síl v zadanej rámovej konštrukcii použijeme napr. ľavú časť telesa, myslene (fiktívne) oddelenú rezom $m-m$ od pravej časti rámovej konštrukcie (Obr.4.36b).

Nosník (prúťový prvok) v statike považujeme **za dokonalé tuhé (spojité) teleso** a teda predpokladáme, že v ľubovoľnom reze na osi prúta nemôžu nastať žiadne, ani relatívne posuny, ani vzájomné pootočené prierezov. V každom priereze prúta predpokladáme preto existenciu vnútornej väzby – typu **dokonalé votknutie** (obr. 4.36c). V mieste mysleného rezu preto nahradzame účinok fiktívne odobratej časti konštrukcie celkom 3 veličinami – sily **N**, **T** a moment **M_o**.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



b)

c)

Obr.4.36

Zaťaženie:

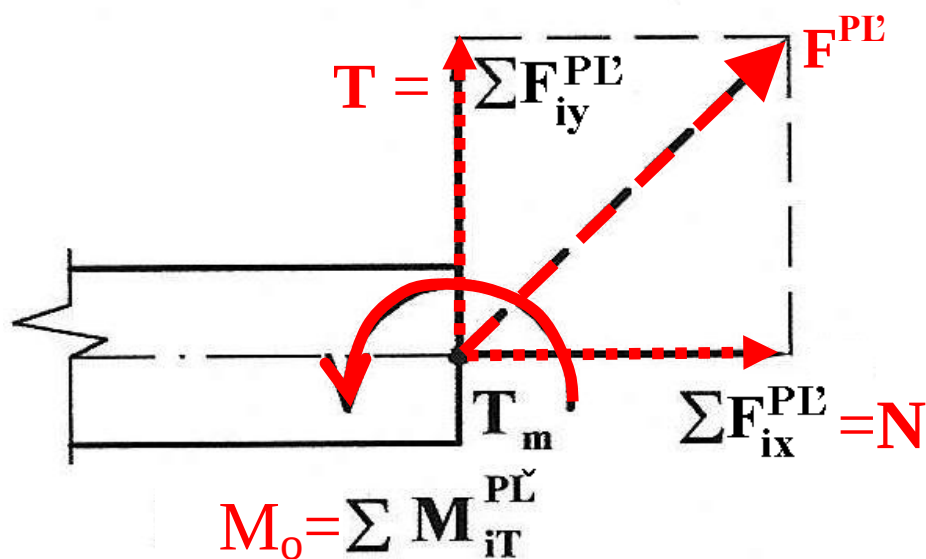
• vonkajšie sily:

F_1 , $q=F_q$, A_x , A_y , M_1

• vnútorné sily:

F^{PL} , ako výslednica síl, ktorými v priereze $m-m$ pôsobí pravá (P) časť myslene rozdeľného rámu sa časť ľavú (L'), aby po odpojení pravej časti zostalo teleso stále v stave statickej rovnováhy.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



Obr.4.36 d

Keď vykonáme naznačenú redukciu vnútorných síl a určenú výslednicu $\mathbf{F}^{PL}$ presunieme z povrchu prúta do ťažiska prierezu T_m (tzn. na strednicu prúta - obr.4.36d) je možné v použitej súradnicovej sústave x, y zdefinovať tzv. **vnútorné silové veličiny**, vznikajúce v priereze $m-m$.

$$\sum F_{ix}^{PL} = F_x^{PL} = N \quad \dots \text{osová (normálová) sila}$$

$$\sum F_{iy}^{PL} = F_y^{PL} = T \quad \dots \text{priečna (tangenciálna) sila} \quad \text{v priereze } \overline{mm}$$

$$\sum M_{iT}^{PL} = M^{PL} = M_o \quad \dots \text{ohybový moment}$$

Obr.4.27d

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Výpočet vnútorných veličín N , T , M_o pre rámovú konštrukciu

Spôsob určenia vnútorných silových účinkov, vyjadrených prostredníctvom veličín N , T a M_o vyplýva opäť z podmienok rovnováhy síl. Pre časť (L') potom platí :

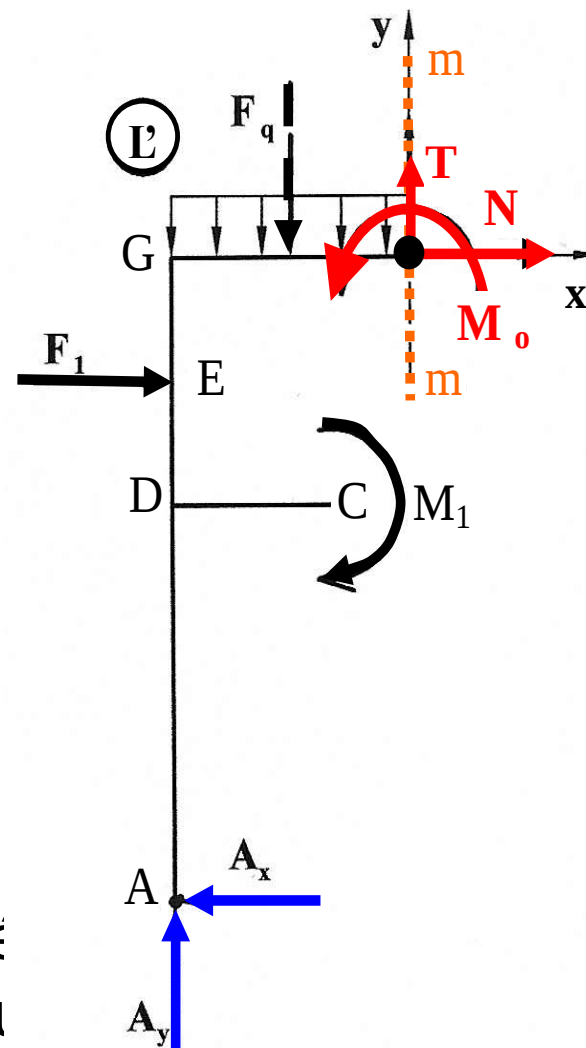
$$\sum F_{ix}^L + N = 0$$

$$\sum F_{iy}^L + T = 0$$

$$\sum M_{iT}^L + M_o = 0.$$

(4.11)

Analogicky by bolo možné napísať rovnaké rovnice rovnováhy aj pre riešenie pre pravi časť (P) rámu.



4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Nakoľko **vonkajšie** (primárne i sekundárne) **sily** na telese tvoria rovnovážnu sústavu, musia aj veľkosti silových veličín **N**, **T**, **M_o** na obidvoch stranách zvoleného prierezu tvoriť rovnovážnu sústavu síl. Musí teda platiť:

$$\mathbf{N} = \left| \sum \mathbf{F}_{ix}^L \right| = \left| \sum \mathbf{F}_{ix}^P \right|, \quad \mathbf{T} = \left| \sum \mathbf{F}_{iy}^L \right| = \left| \sum \mathbf{F}_{iy}^P \right|, \quad \mathbf{M}_o = \left| \sum \mathbf{M}_{iT}^L \right| + \left| \sum \mathbf{M}_{iT}^P \right|.$$

- **Osová (normálová) sila N** je v ľubovoľnom priereze telesa rovná algebraickému súčtu (sume) priemetov všetkých síl pôsobiacich po jednej strane od zvoleného rezu v smere osi (v smere normály) prierezu a platí:

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{F}_{ix}^L \quad \text{resp.} \quad \mathbf{N} = \sum \mathbf{F}_{ix}^P \quad (4.12)$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

- **Priečna (posúvajúca, tangenciálna) sila T** je v ľubovoľnom priereze telesa rovná algebraickému súčtu (sume) priemetov všetkých síl pôsobiacich po jednej strane od zvoleného rezu ***smerujúcich do roviny rezu*** (do prierezu) a platí:

$$\mathbf{T} = \sum \mathbf{F}_{iy}^L \quad \text{resp.} \quad \mathbf{T} = \sum \mathbf{F}_{iy}^P \quad (4.13)$$

- **Ohybový moment M_o** je v ľubovoľnom priereze telesa rovný algebraickému súčtu (sume) statických momentov všetkých síl a silových dvojíc pôsobiacich po jednej strane od zvoleného rezu vzhľadom k zvolenému bodu telesa (t.j. k bodu strednice) a platí:

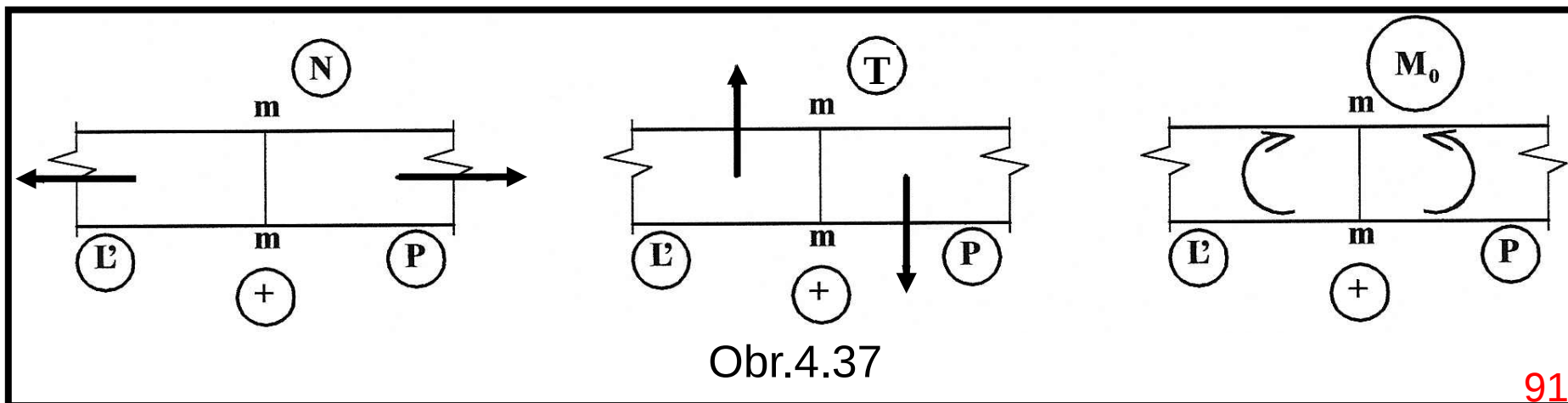
$$M_o = \sum \mathbf{M}_{iT}^L \quad \text{resp.} \quad M_o = \sum \mathbf{M}_{iT}^P \quad (4.14)$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Pre určenie veľkosti vnútorných síl teda vo všeobecnosti platí:

Veľkosť vnútorných silových veličín N , T a M_0 v ľubovoľnom priereze telesa sa rovná algebraickému súčtu (sume) prislúchajúcich účinkov po jednej strane vyšetřovaného prierezu.

Pri algebraickom sčítaní po jednej strane prierezu musíme brať ohľad aj na zmysel pôsobenia vnútorných síl v súlade s dohodnutou **znamienkovou konvenciou**, podľa obr.4.37.



4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

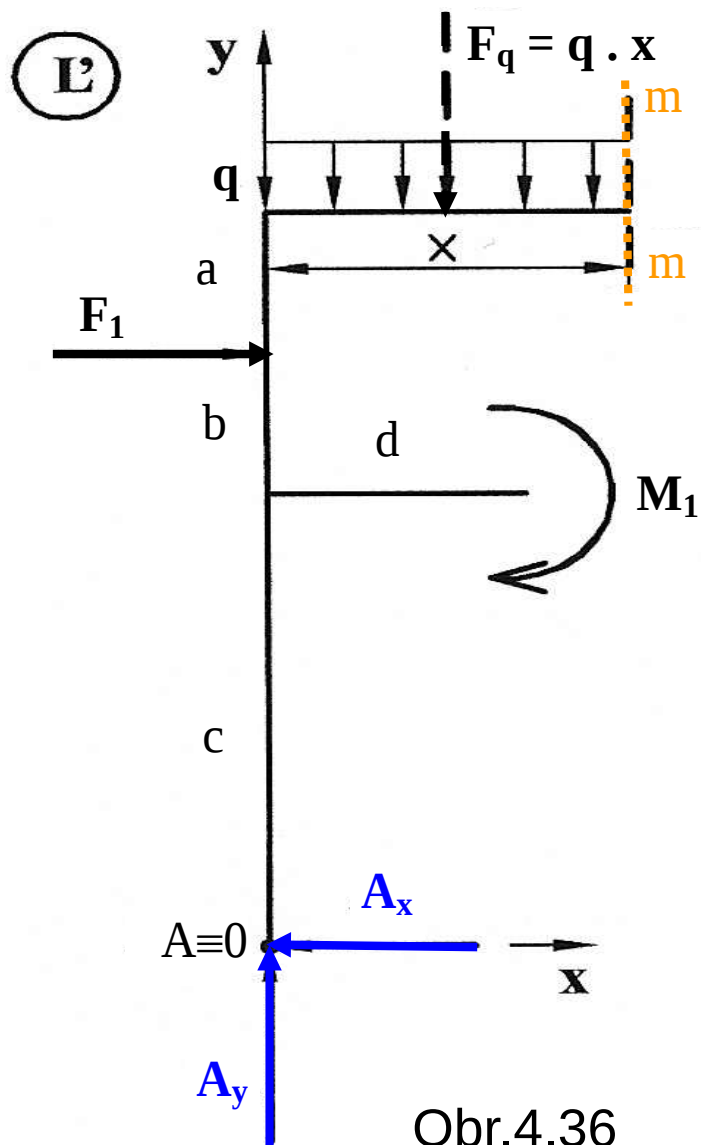
Pôsobenie vnútorných síl a momentov v opačnom zmysle, ako je uvedená dohoda podľa obr.4.37 označujeme znamienkom mínus (-) .

Poznámka: Znamienková dohoda závisí na orientácii telesa, t.j. na určení jeho ľavého a pravého konca, resp. v prípade momentu na horných a dolných vláknach priečneho rezu. Pri inej než vodorovnej polohe nosníka (napr. zvislici rámu) potom nemusí byť tento dohovor vždy jednoznačný.

Vieme však, že či určujeme vnútorné sily z pravej alebo z ľavej strany vyšetrovaného prierezu, **výsledné veľkosti a zmysly vnútorných síl musia byť rovnaké.**

Vo zvolenom priereze $m-m$ (obr.4.36) bude po označení jednotlivých úsekov strednice v statickom modeli rámu s ohľadom na znamienkovú konvenciu veľkosť vnútorných síl určená z podmienok rovnováhy vonkajších a vnútorných síl v tvare:

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



$$N = \sum F_{ix}^L = A_x - F_1$$

$$T = \sum F_{iy}^L = A_y - F_q = A_y - q \cdot x$$

$$M_{o_{mm}} = \sum M_{iT}^L = \overrightarrow{A_x} \cdot (a + b + c) + \overrightarrow{A_y} \cdot x - \overleftarrow{F_1} \cdot a - \overleftarrow{F_q} \cdot \frac{x}{2} + \overrightarrow{M_1} =$$

$$= \overrightarrow{A_x} \cdot (a + b + c) + \overrightarrow{A_y} \cdot x - \overleftarrow{F_1} \cdot a - q \cdot \frac{x^2}{2} + \overrightarrow{M_1}$$

Pri riešení praktických úloh dávame prednosť tej strane prierezu, na ktorej je menej vonkajších síl a teda výpočet je jednoduchší (aj rýchlejší).

Uvedeným spôsobom je možné určiť hodnoty **N**, **T** a **M_O** v ľubovoľnom mieste nosníka alebo rámu.

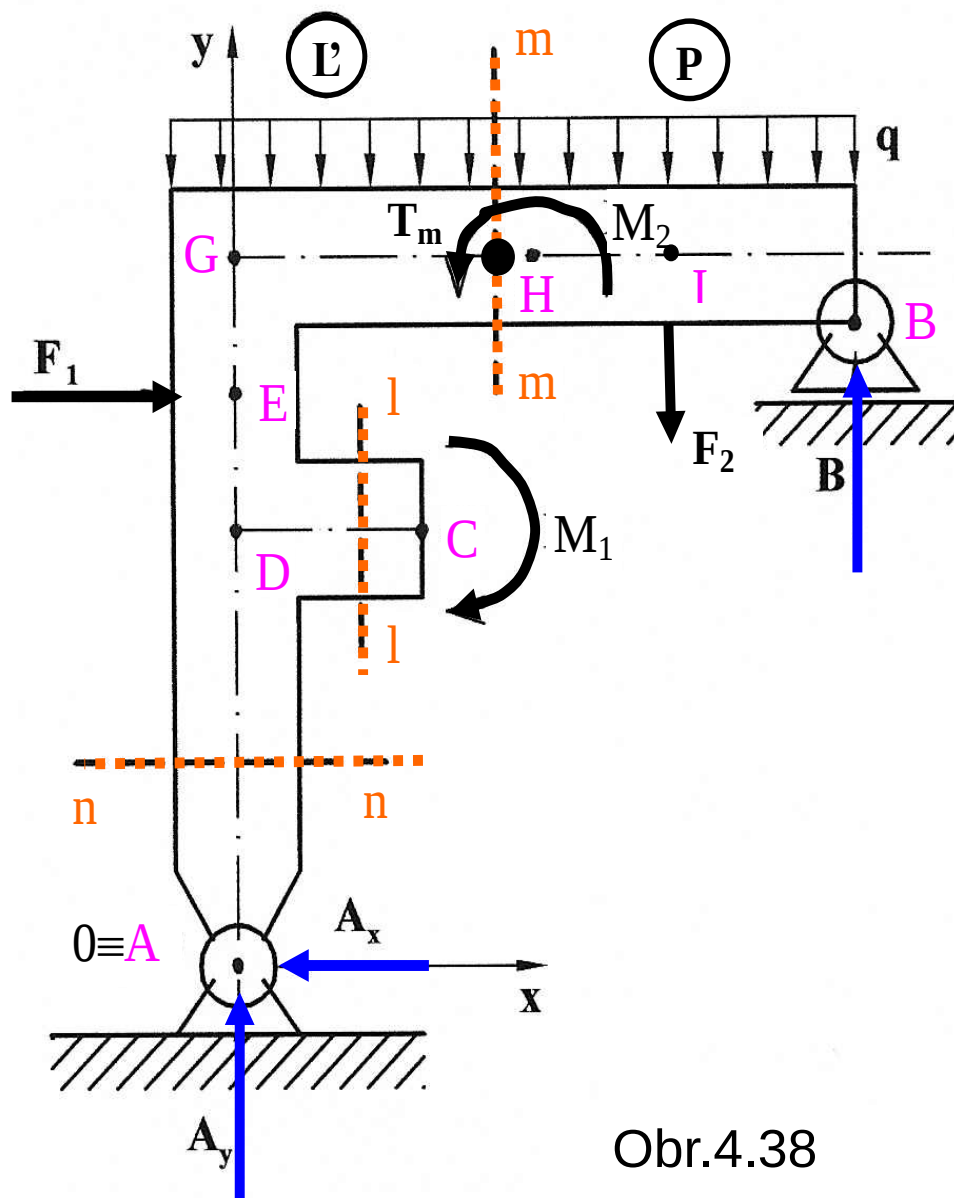
Priebehy vnútorných veličín N , T , M_O pre rámy

Pri vyšetrovaní namáhania, ako aj pretvorenia telies je nutné poznať nielen veľkosť vnútorných síl v ktoromkoľvek náhodne zvolenom priereze, ale aj ich priebeh po celej ich dĺžke telesa. Iba tak je možné určiť miesto pôsobenia a hodnotu maximálneho namáhania, čo v prípade nosníkov/rámov znamená určiť najmä **veľkosť a miesto pôsobenia maximálneho ohybového momentu M_{Omax}** .

Pri riešení týchto úloh nestačí však vyriešiť iba lokálne hodnoty veličín N , T a M_O , ale je potrebné nájsť a poznať aj **zákonitosti ich priebehu, ako funkcie jednej premennej**, napr. v závislosti na **charaktere primárneho zaťaženia** (obr.4.38) časti telesa.

Premenná x , najčastejšie reprezentuje vzdialenosť miesta „mysleného rezu“ od počiatku súradnicovej sústavy.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch



Obr.4.38

Teleso, ktoré analyzujeme, napr. rám podľa obr. 4.38 je možné rozdeliť na jednotlivé časti, zaťažené nasledovne:

- $\overline{AE}, \overline{EG}, \overline{DC} \rightarrow q = 0$
- $\overline{GH}, \overline{HB} \rightarrow q = \text{konšt.}$
- v bodoch A, B, E, I na osi rámu pôsobia osamelé sily A, B, F_1, F_2 ,
- v miestach strednice C, H pôsobia silové dvojice $\rightarrow$ osamelé momenty M_1, M_2 .

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Výpočet v priereze $m-m$, tzn. výpočet úseku G-H (kde $q=\text{konšt.}$) ukazuje, že v závislosti na mieste rezu x , je v tomto intervale vnútorná veličina :

$$N : N = A_x - F_1 \Rightarrow \text{konštantná (tzn. nezávislá na } x \text{)}$$

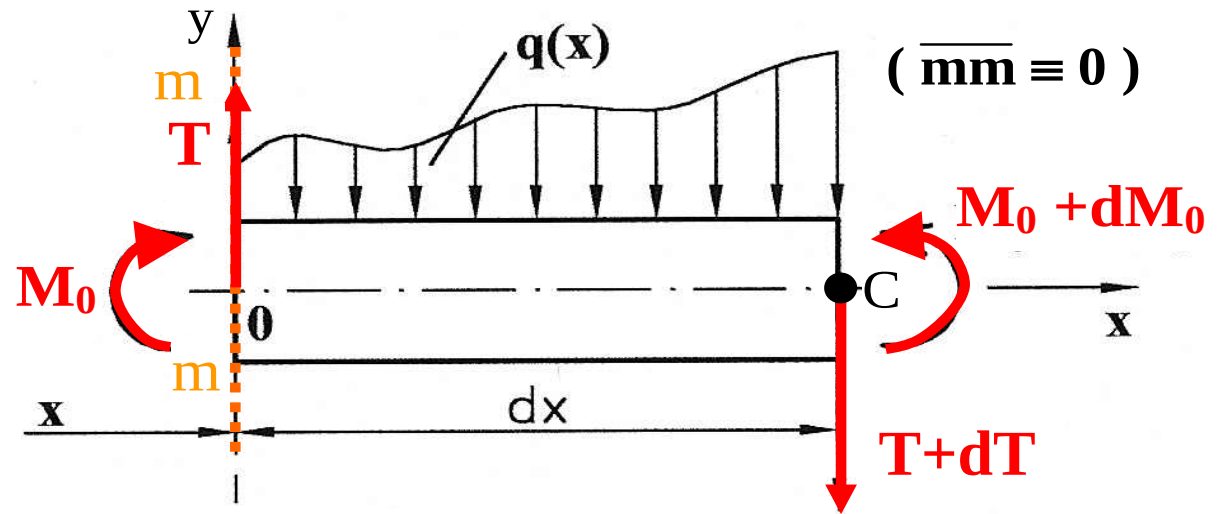
$$T : T = A_y - F_q = A_y - q \cdot x \Rightarrow \text{lineárna funkcia } x \text{ (} x^1 \text{)}$$

$$M_o : M_{o_{mm}} = A_x \cdot (b + c + a) + A_y \cdot x - F_1 \cdot a - q \cdot x^2 / 2 + M_1 \Rightarrow \text{kvadratická funkcia } x \text{ (} x^2 \text{)}$$

Nakoľko sa priame nosníky a rovinné rámy často vyšetrujú pri prípadoch ich priečneho spojitého zaťaženia $q(x)$, je vhodné poznať vzťahy a súvislosti umožňujúce určiť práve charakter priebehu $T(x)$ a $M(x)$ aj pre rozličné druhy spojitého zaťaženia nosníkov.

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Ak vyjmemme z telesa fiktívny elementárny prvok s dĺžkou dx , zaťažený spojitým priečnym zaťažením $q(x)$ (obr. 4.39), potom pre rovnice rovnováhy elementu, napr. k bodu C[x+dx] platí:



Obr.4.39

$$\sum F_{ix} = 0 : N = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 : T - (T + dT) - q(x).dx = 0 \Rightarrow T - T - dT - q(x).dx \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_{iC} = 0 : -M_0 - T.dx + (M_0 + dM_0) + q(x).dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \Rightarrow -T.dx + dM_0 \Rightarrow \frac{dM_0}{dx} = T$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Po ich úprave dostávame tzv. **Schwedlerove – Žuravského vety** (4.10) v tvare:

Z týchto diferenciálnych rovníc 1. rádu je **pri známom priečnom zaťažení** $q(x)$ môžeme v zadanom úseku prúta určiť aj **charakter priebehu** (tvar krivky) **veličín** T a M_o

$$\frac{dT}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM_o}{dx} = T$$

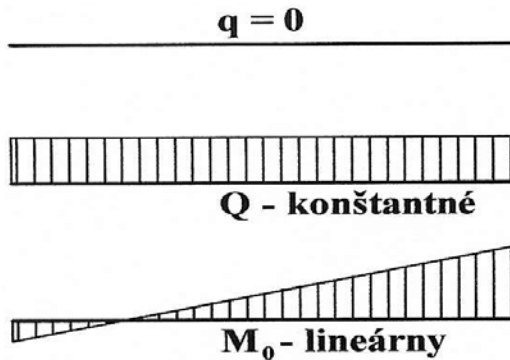
Z vlastnosti derivácie funkcie vyplýva, že v poradí veličín q , T , M_o sa jedná vždy o krivku rádovo vyššiu.

Z uvedeného vyplýva prakticky s výhodou využiteľné tvrdenie:

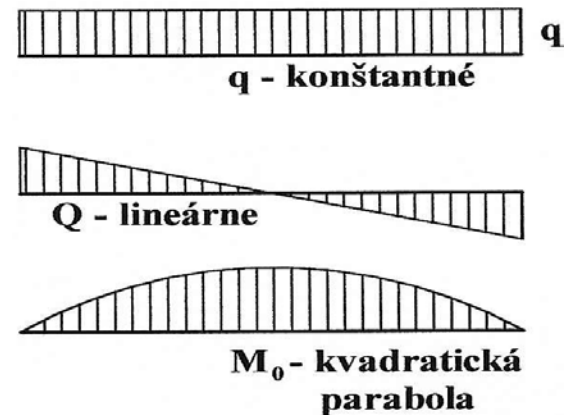
Pomocou priebehu $T(x)$ možno kontrolovať správnosť priebehu $M_{o(x)}$ a naopak (!)

4.3 Vnútoré silové veličiny v priamych prútoch

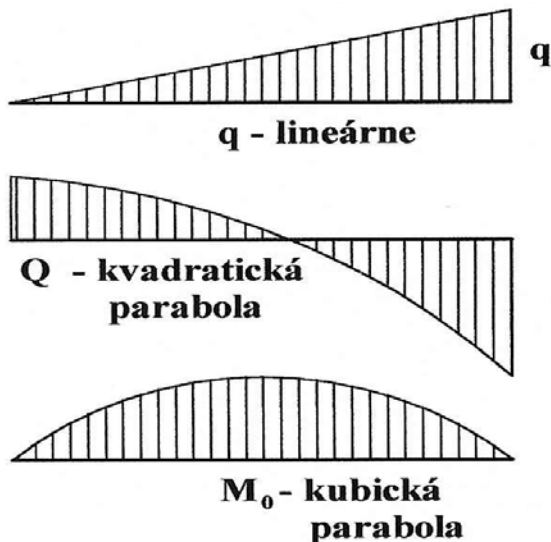
$q = 0 \Rightarrow Q \dots \text{konštantná} \Rightarrow M_O \dots \text{lineárny}$



$q = \text{konšt.} \Rightarrow Q \dots \text{lineárna} \Rightarrow M_O \dots \text{kvadratický}$



$q \dots \text{lineárne} \Rightarrow Q \dots \text{kvadratická} \Rightarrow M_O \dots \text{kubický}$



Obr.4.40

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Okrem vlastných priebehov vnútorných veličín T a M_o je často nutné určiť aj **polohu** takého rezu $p-p$, v ktorom je **ohybový moment M_o na celej konštrukcii maximálny**.

Úlohou je teda určenie **polohy tzv. prechodového prierezu** (x_p) a **veľkosti ohybového momentu** (M_{Omax}) v takto určenom priereze p).

Je zrejmé, že keď má ohybový moment M_o lineárny priebeh, je určenie polohy a veľkosti M_{Omax} z priebehu jednoznačné. Ak le-í M_{Omax} v úseku, kde je priebeh $M_o(x)$ krivka 2. alebo vyššieho stupňa, musíme jeho polohu a veľkosť určovať výpočtom.

Maximálny moment M_{Omax} je možné určiť z podmienky pre extrém funkcie jednej premennej v tvare

$$\frac{dM_o}{dx} = 0$$

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Z tejto podmienky je možné určiť také miesto x_p , pre ktoré platí

$$M_{O_{\max}} = M_O(x_p) \quad (4.15)$$

Z 2.Schwedler - Žuravského vety ($dM_O / dx = T$) platí, že extrém ohybového momentu je práve v mieste, kde $T = 0$ (tzn. priečna sila T mení svoje znamienko). Takéto miesto nazývame prechodový prierez.

Z uvedených skutočností tiež vyplýva, že v miestach na telese, kde pôsobia osamelé sily F_i sú v priebehoch veličín N a T skoky a v priebehu M_O zlomy (t.j. náhle zmeny hodnôt M_O).

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Ak sa vo vyšetrovanom úseku nosníka nachádzajú aj spojité zaťaženia typu - **spojité zaťaženie osovú - $n(x)$** , príp. **spojité zaťaženie momentové - $m(x)$** , potom vzťahy pre S-Ž vety budú v tvare

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad \text{resp.} \quad \frac{dM_o}{dx} = T - m(x) \quad (4.16)$$

s rovnakým významom použitia ako pre $q(x)$.

Pri kreslení priebehov na priamych nosníkoch platí:

- **kladné hodnoty N (ťah) a T ($\uparrow$ zdola nahor) vynášať nad osou,**
- **kladné hodnoty M_o na stranu nat'ahov. vlákien (pod os).**

Pri kreslení priebehov na rámoch platí:

- **hodnoty N a T vynášame ľubovoľne (ľub. stranu rámu),**
- **hodnoty M_o zakresľujeme na strane ťahaných vlákien.**

4.3 Vnútorne silové veličiny v priamych prútoch

Príklad 4.10: Určite priebehy N , T , M_O na pravouhlom rovinnom ráme (obr. 4.36). Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $q = 1 \text{ kN.m}^{-1}$. Mierka dĺžok : $m_L = 0,1 \text{ m.mm}^{-1}$.