



Základy mechaniky pevných telies

Téma 5:

ROVINNÉ SÚSTAVY TELIES

- rovinné prúťové sústavy, statická určitosť PS, metódy riešenia rovnováhy síl na PS

Sústava telies (ST) – je tvorená telesami navzájom pohyblivo spojenými, t.j. je možný ich vzájomný pohyb (ktorý je od ST buď požadovaný alebo uvažujeme iba s určitým relatívnym vzájomným pohybom). V takýchto mechanických sústavách je obvykle viac telies spojených (podopretie, uchytenie) nielen so vzťažným priestorom (zemský povrch, iné telesá a pod.), ktoré nazývame **rám, základ**, ale aj medzi sebou navzájom.

Sústavy telies obvykle rozdeľujeme na sústavy: **nepohyblivé** alebo **pohyblivé** (tzv. mechanizmy, riešené v kinematike).

Väzby môžu byť definované medzi :

- telesami sústavy a rámom - tzv. **vonkajšie väzby**,
- telesami sústavy telies navzájom - tzv. **vnútorné väzby**.

V rámci rovinných sústav telies je zaťaženie aj väzby také, že silové účinky na sústavu pôsobiace tvoria rovinnú sústavu síl.

Cieľ statického riešenia sústav telies: vyriešenie rovnováhy vonkajších, ale aj vnútorných silových účinkov – t.j. určenie väzbových reakcií a vnútorných síl - v rámci sústavy telies.

U pohyblivých sústav je navyše nutné určiť aj tzv. **prídavné vonkajšie silové účinky**, potrebné pre zaistenie rovnováhy síl v sústave telies (za účelom obmedzenia ich pohybu).

Pri statickom riešení sústav telies sú opäť ich **skutočné tvary a prierezy** nepodstatné. Pre ST je preto možné, rovnako ako pre telesá, vytvárať ich zjednodušené fyzikálne modely, modely ich vzájomných väzieb a ich integráciu do jediného mechanického modelu (obr.5.1) .

Väzba (často nazývaná aj ako kinematická dvojica) je obvykle tvorená dvomi geometrickými prvkami, v ktorých dochádza ku styku dvoch telies a ktoré vymedzujú vzájomný pohyb telies.

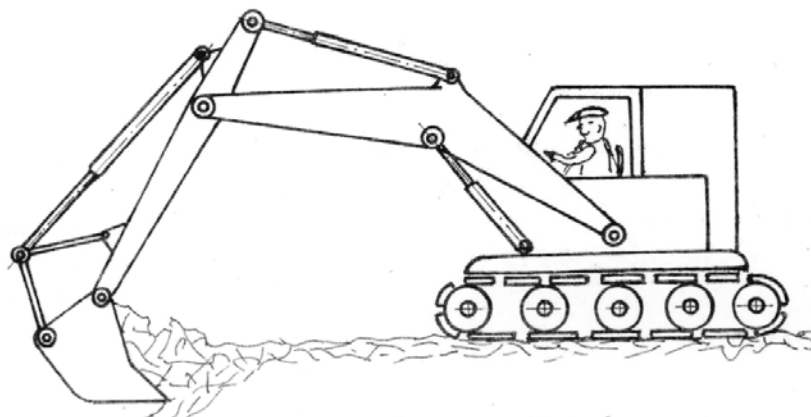
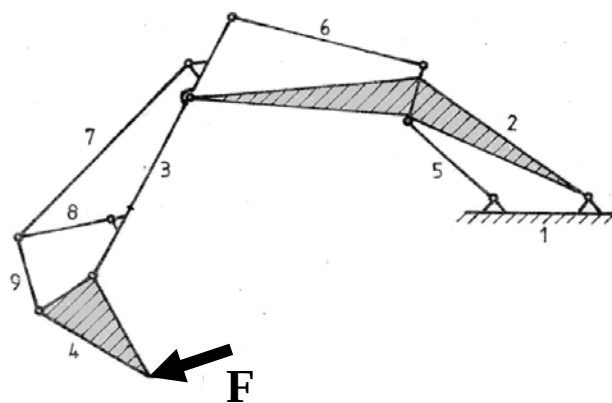


Schéma pohyblivej sústavy - rýpadlo



Výpočtový model rýpadla

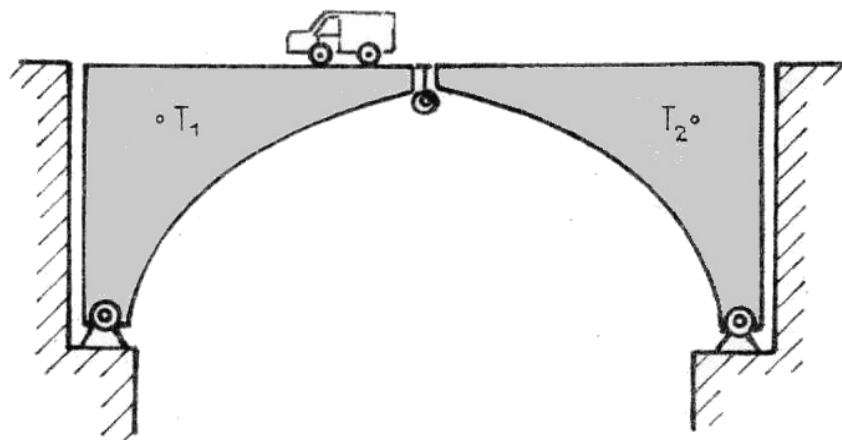
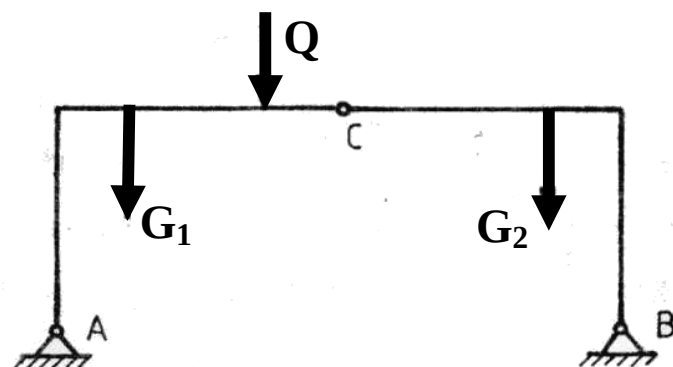


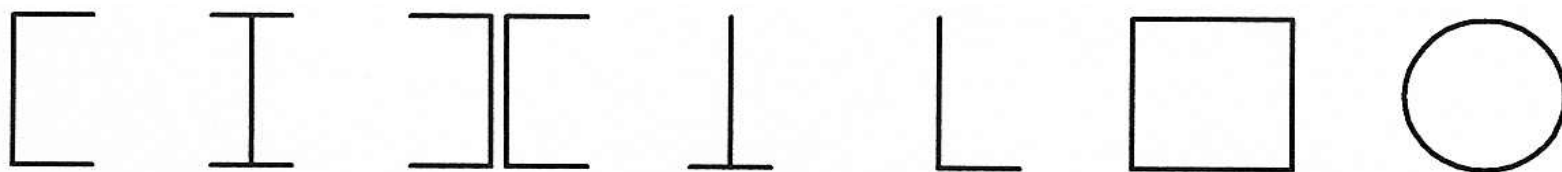
Schéma nepohyblivej sústavy - most



Výpočtový model mosta

Medzi najvýznamnejšie nepohyblivé sústavy telies zaradujeme tzv. **priehradové konštrukcie** (priehradový nosník).

Prvky priehradových konštrukcií - zvislice, diagonály (priečky), pásy, styčnickové telesá (plechy) a ďalšie sú obvykle z valcovaných profilov rôzneho tvaru (obr. 5.2) a usporiadania.



Obr.5.2

Prierez (*prierezová plocha*) prvkov môže byť rôzny, čo do veľkosti a tvaru, ale po dĺžke konkrétneho prvku priehradovej konštrukcie je obvykle konštantný a preto **nemá na jej statický výpočet významný vplyv**.

Na Obr.5.3 sú príklady priehradových konštrukcií (vn stožiar, nosná a strešná konštrukcia štadióna a mostná konštrukcia).



Obr. 5.3

5.1 Rovinné prútové sústavy

5.1 Prútová sústava = mech. model priehradovej konštruk.

Najjednoduchší výpočtový model **priehradovej konštrukcie** predstavuje tzv. **prútová sústava (PS)**.

Prútová sústava = špeciálna sústava telies, využívaná hlavne pri navrhovaní alebo posudzovaní veľkorozmerných nosných konštrukcií v mostovom a pozemnom stavitel'stve a konštrukcií rozličných nosných, zdvíhacích a manipulačných zariadení.

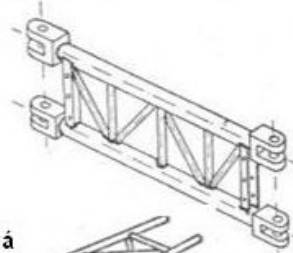
Hlavné aplikácie sú v oblastiach konštrukcie mostov, stožiarov a strešných konštrukcií z dôvodu ekonomickej nenáročnosti použitia priehradových konštrukcií v porovnaní s rámovými, alebo betónovými konštrukciami. **Jedná sa hlavne o stožiare vysokého napätia, rozličné veže, rampy, strešné a mostné konštrukcie, anténne systémy, výložníky žeriavov apod.**

5.1 Rovinné prútové systémy



Přhradová konstrukce

rovinná

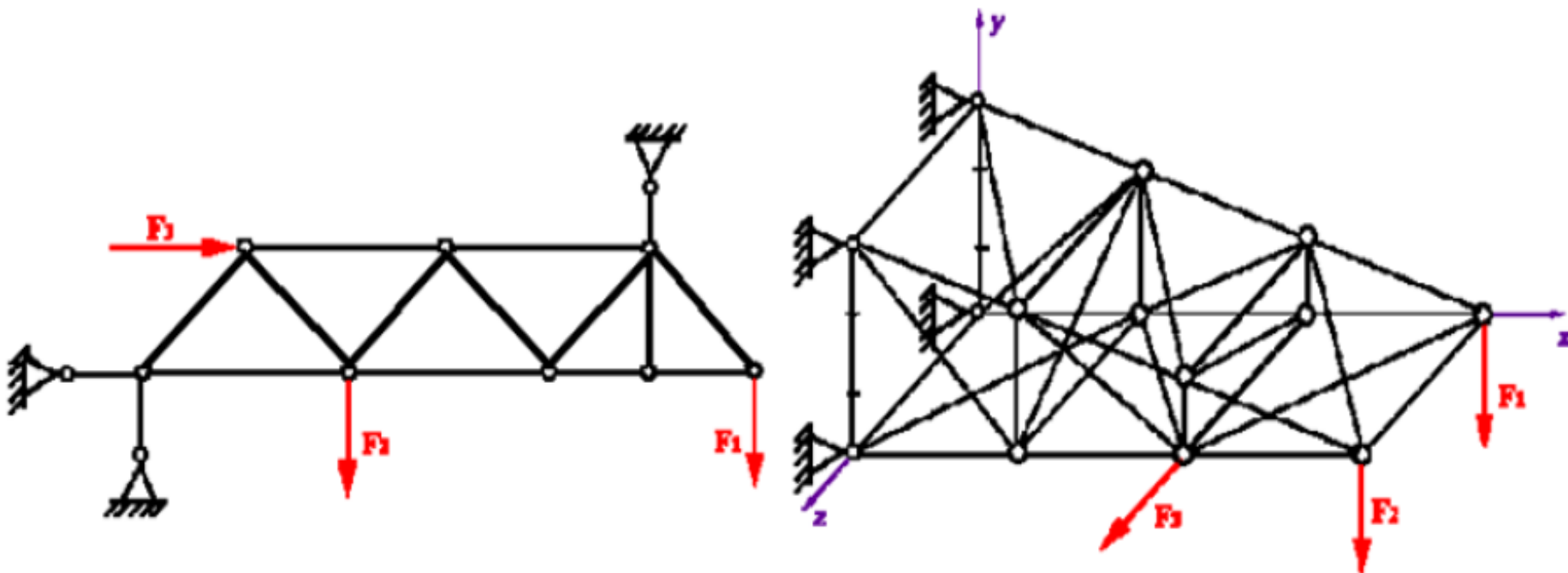


prostorová



5.1 Rovinné prútové sústavy

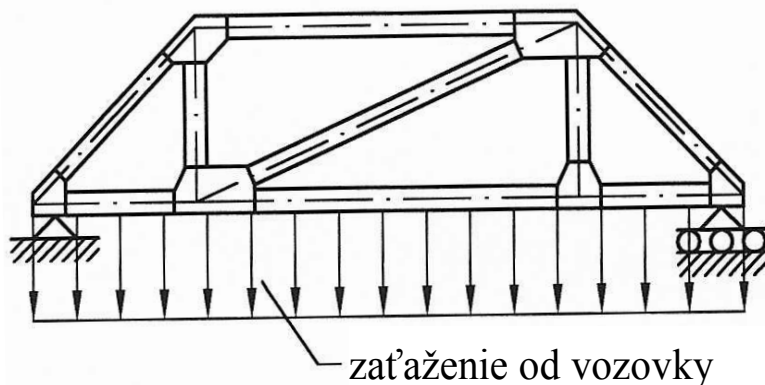
Podľa usporiadania prútov delíme prútové sústavy na **rovinné** a **priestorové** (obr.5.4). Konštrukčné prvky (prúty) a zaťaženia v rovinatej prútovej sústave ležia v jednej rovine, usporiadanie priestorovej prútovej sústavy vytvára priestorový útvar.



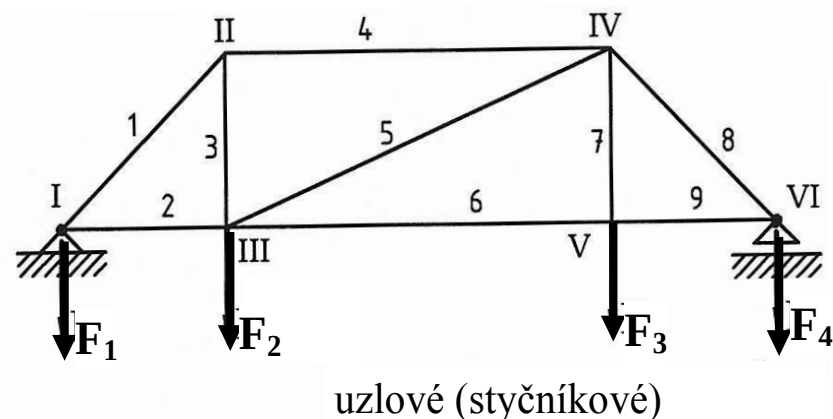
Obr.5.4

5.1 Rovinné prútové sústavy

Na obrázkoch 5.5 a 5.6 sú príklady priehradových konštrukcií. Tieto sú najčastejšie tvorené **trojuholníkovými jednotkami** a ich prislúchajúce fyzikálne modely nazývame prútová sústava.



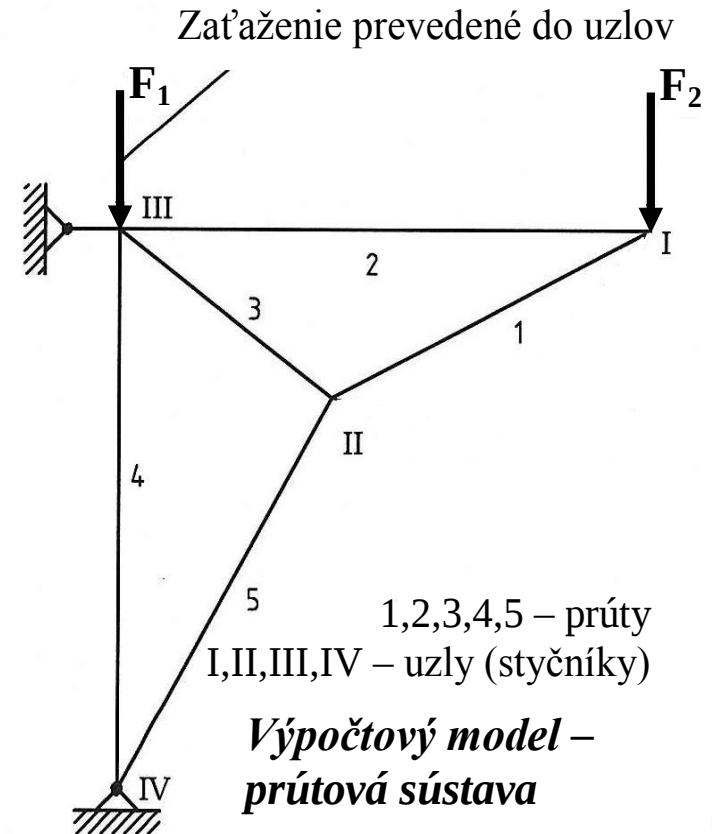
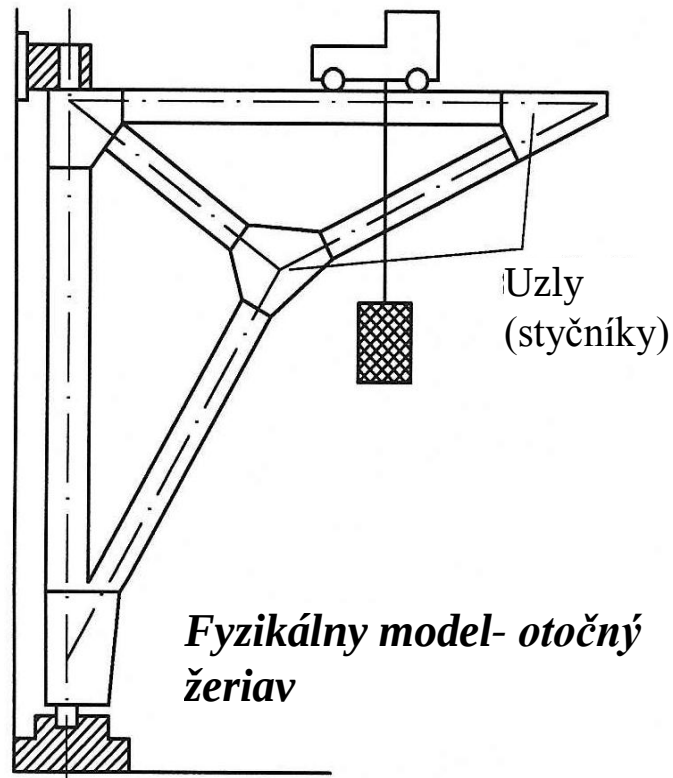
Fyzikálny model - mostný priehradový nosník



Výpočtový model - prútová sústava

Obr.5.5

5.1 Rovinné prútové sústavy



Obr.5.6

Prútová sústava – sústava telies zložená z nehmotných, binárnych členov s 2 rotačnými (rovinný kĺb) príp. sférickými (priestorový kĺb) väzbami, ktoré nazývame **prúty**.

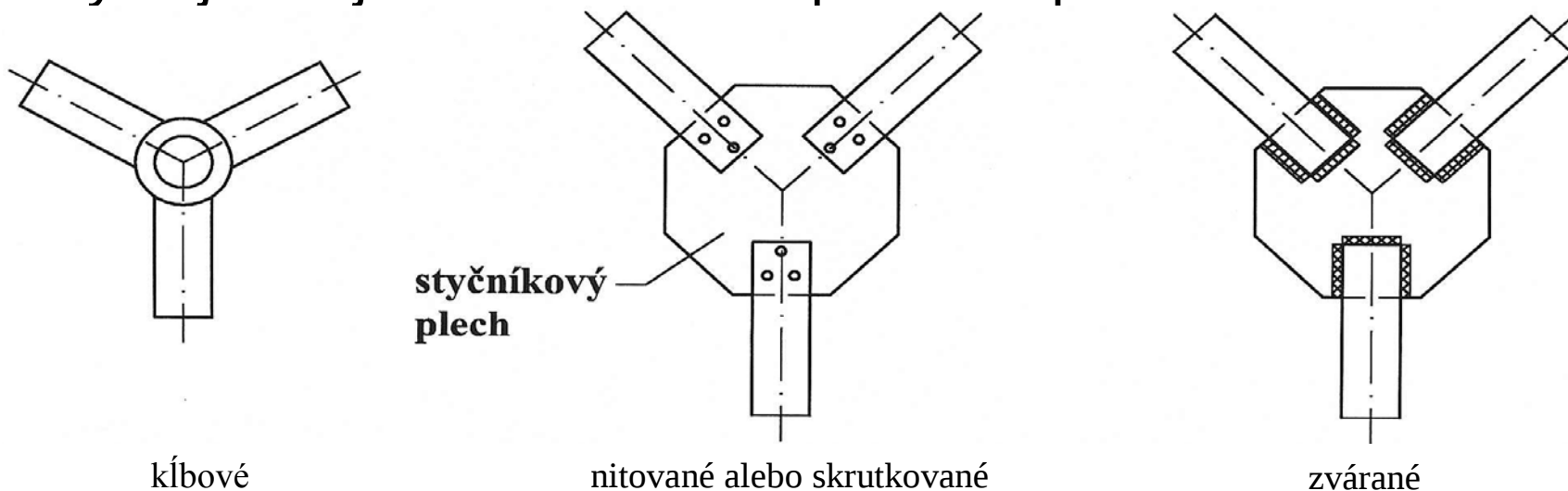
Prút je jednorozmerné modelové teleso, jednoznačne určené svojou strednicou (ako spojnicou ťažísk priečných priereзов). V prípade PS budeme uvažovať výhradne s **priamymi prútmi**.

Spojením viacerých prútov v spoločných bodoch – **uzloch**, vzniká prútová sústava = tzv. nepohyblivé prútové teleso.

- **Prúty** sú tzv. dokonale štíhle (okrem dĺžky sú ďalšie rozmery zanedbateľné) priame prvky, obvykle nahradené iba strednicou.
- **Uzly** (kĺby, styčníky) sú miesta **spojenia prútov**. V uzloch PS uvažujeme s možnosťou (iba čiastočného) pootočenia prútov.
- **Zaťaženie** je v PS zásadne **uvažované iba v uzloch** (tzn. vonkajšie zaťaženia transformujeme iba do uzlov).

5.1 Rovinné prúťové sústavy

Konštrukčné prevedenie uzlov (styčníc) býva pre rovinné úlohy najčastejšie realizované spôsobmi podľa obr. 5.7:

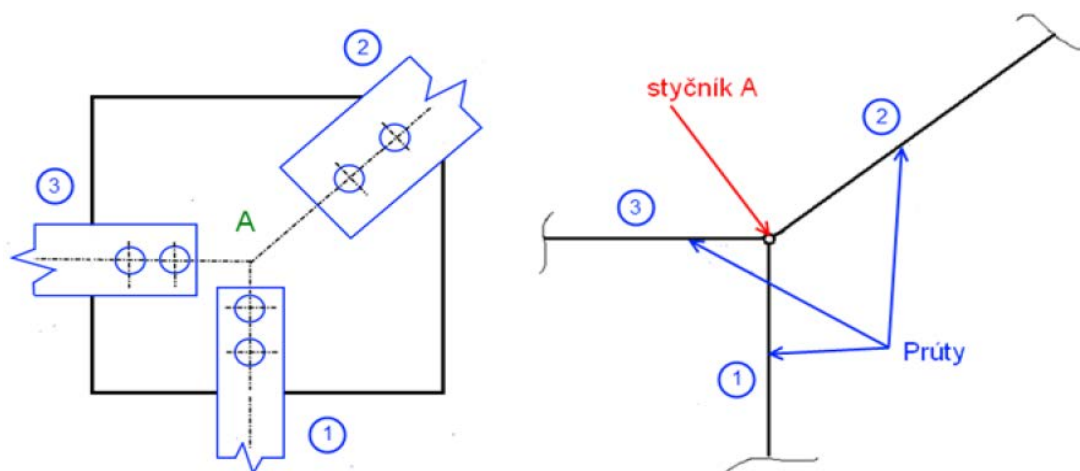


Obr. 5.7



5.1 Rovinné prútové sústavy

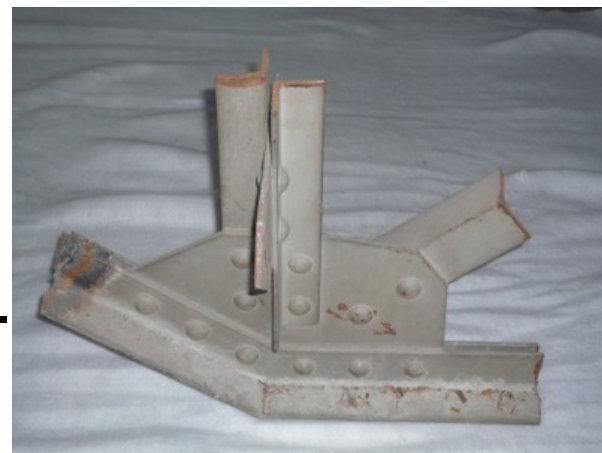
Na obr.5.8 je často využívané spojenie prútov priehradovej konštrukcie prostredníctvom skrutiek / nitov a jeho teoretický model (s uvažovanou klbovou väzbou).



Obr.5.8

Základná podmienka:

Osi prútov sa pretínajú v jedinom bode (t.j. umožňujú iba vznik osových síl). Tie v uzle predstavujú **usporiadanie síl ako RZS**).

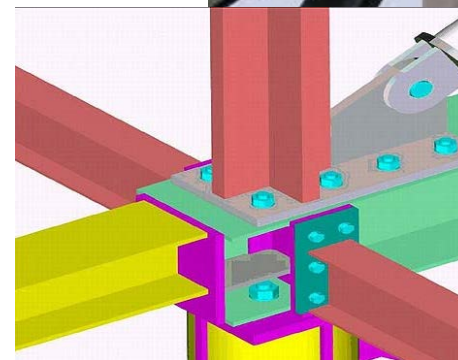
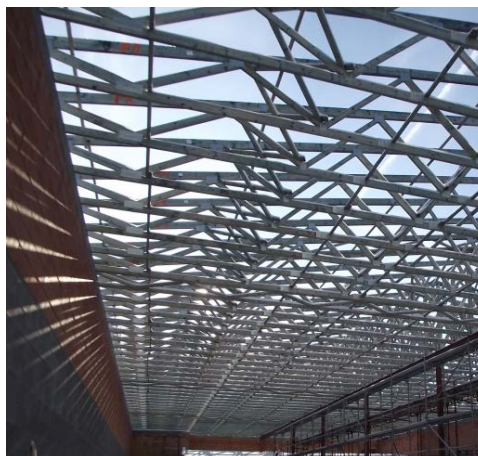


5.1 Rovinné prútové sústavy

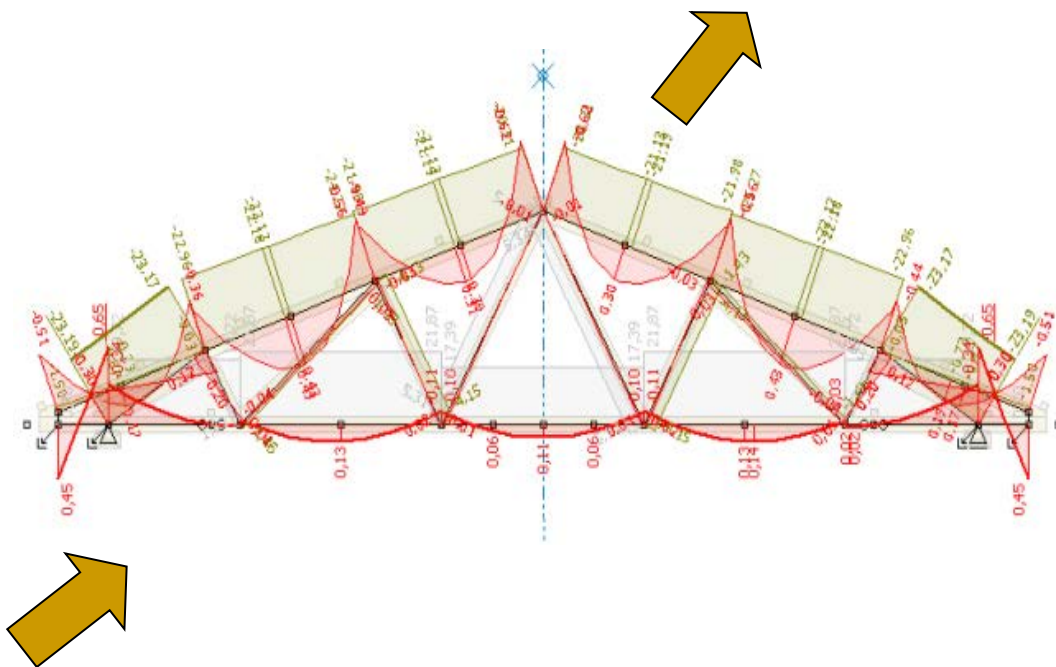
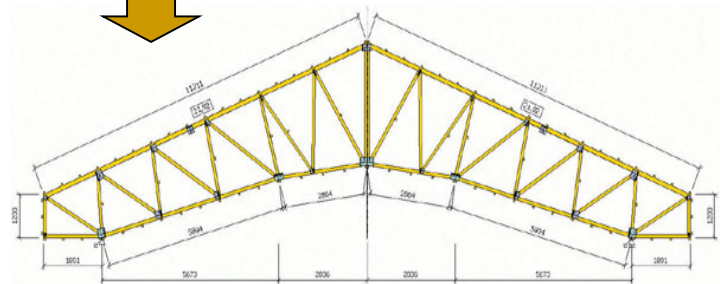
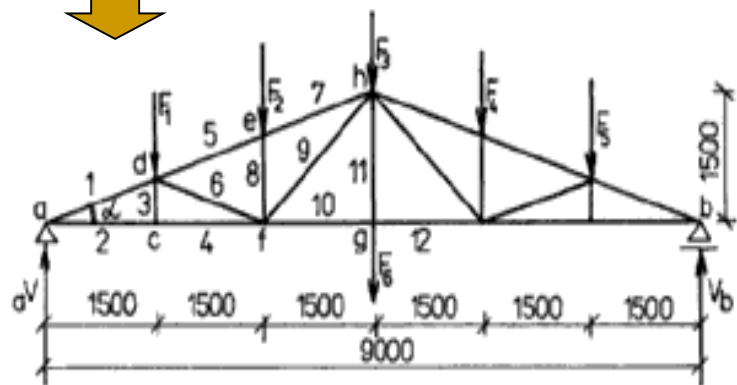
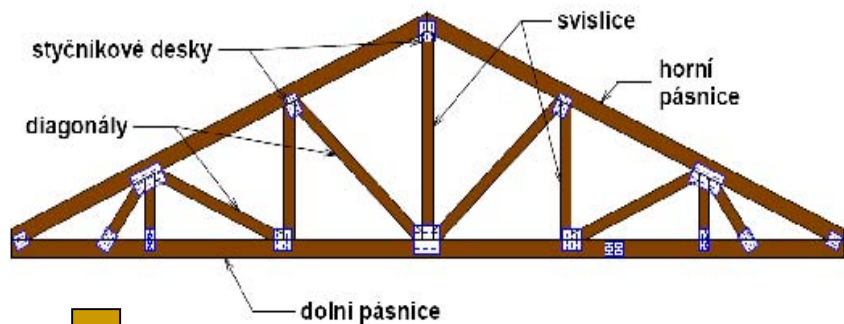
Prútovú sústavu, ako výpočtový model priehradovej konštrukcie, vytvárame na základe nasledovných predpokladov:

- Jednotlivé telesá sú štíhle a preto ich môžeme uvažovať ako jednorozmerné prvky - **prúty**.
- **Uzol**, ako miesto spojenia prútov (prienik osí prútov) uvažujeme ako **kĺbové spojenie**, tzn. neprenáša otáčavé účinky od osových síl do uzla vstupujúcich. Uzol preto môžeme považovať za pôsobisko zväzku síl $\Rightarrow$ **Uzol = pôsobisko RZS**.
- **Zaťaženie uvažujeme iba v uzloch** (styčný bod, kĺb).
- Osi prútov, prechádzajú ťažiskami prierezov ich profilu a pretínajú sa v jedinom bode. Prúty PS preto **prenášajú iba osové (normálové) sily** $\Rightarrow$ **silový účinok od vonkajšieho zaťaženia v prúte PS je iba ťahový / tlakový**.

5.1 Rovinné prútové systémy



5.1 Rovinné prútové systémy

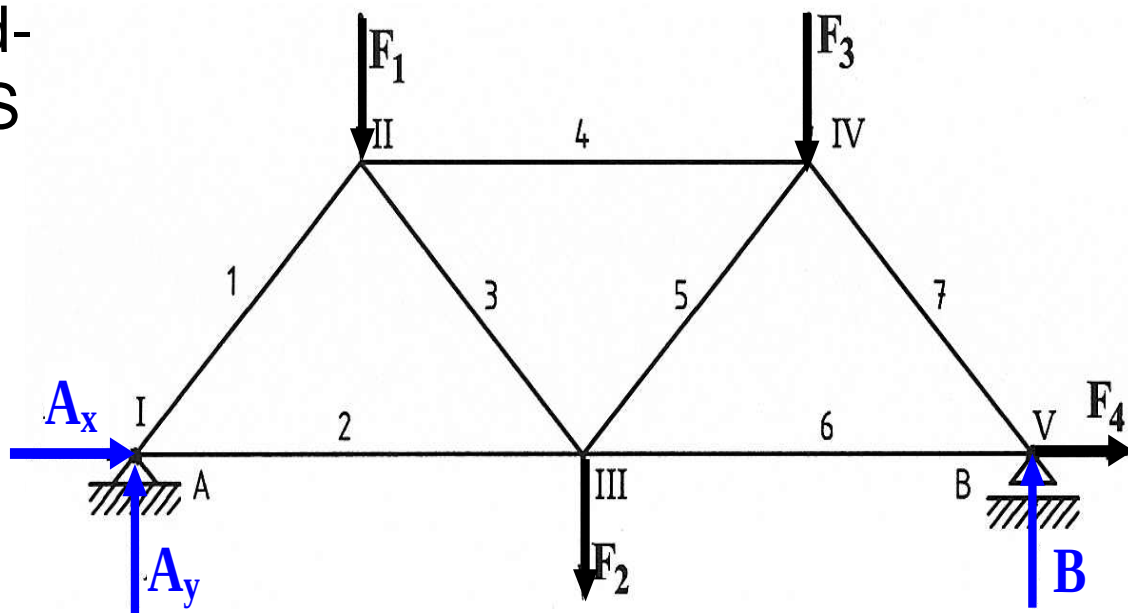


5.1.2 Namáhanie prútov v prútových sústavách

Z vymedzenia zjednodušujúcich teoretických predpokladov tvorby PS vyplýva, že prúty v rámci PS môžu byť namáhané iba **t'ahom**, **tlakom** alebo prípadne tzv. **vzperom**.

Vyplýva to najmä z predpokladu, že zaťaženie PS uvažujeme iba v uzloch.

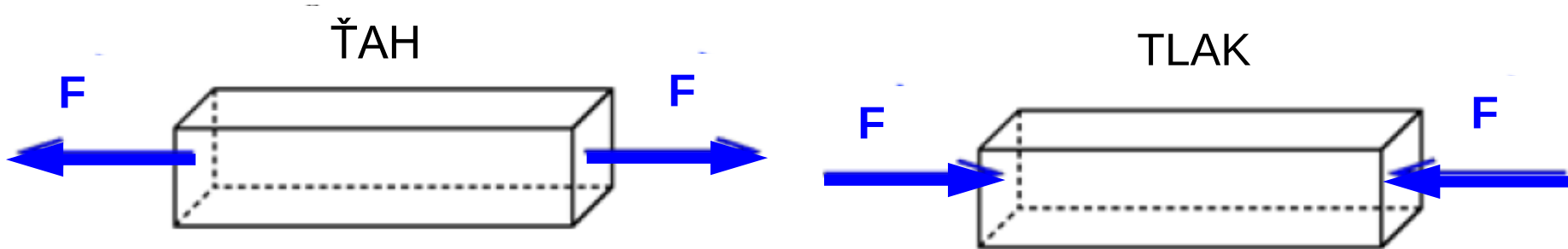
Ich zaťaženie sa potom prenáša výhradne cez osové (normálové) sily v prútoch, stýkajúcich sa práve v zaťažených uzloch.



1. Čistý (jednoduchý) ťah / tlak

Je namáhanie priameho prizmatického prúta (obr.5.9) ak platí:

- priečne prierezy sa vplyvom zaťaženia iba vzájomne oddaľujú (ťah) alebo približujú (tlak) a následne sa deformujú, t.j. mení sa veľkosť prierezu, ale nemení sa jeho tvar),
- jedinou nenulovou zložkou výslednice vnútorných silových účinkov je osová (normálová) sila $\mathbf{P}_x = \mathbf{N}$,
- deformácie sú z hľadiska statickej analýzy prúta nepodstatné a preto s nimi pri riešení rovnováhy síl u PS neuvažujeme.



Obr.5.9

2. Vzperná stabilita prúta

Z vymedzenia čistého tlaku vyplýva, že priečne prierezy sa vzájomne iba približujú alebo oddiaľujú.

Ak však tzv. tenkú tyč (t.j. pomer rozmeru priečneho prierezu k dĺžke prúta je malý) namáhame tlakom, tyč sa najskôr stláča (prierezy sa približujú), ale od istého okamihu – pri istej veľkosti zaťažujúcej sily F - sa tyč začne aj prehýbať. Podstatnou deformáciou sa stáva **ohyb**.

V počiatku zaťaženia prútov na vzperný tlak je podstatné stláčanie osi prúta a nepodstatné jej ohýbanie. Po zväčšení zaťaženia a prekročení tzv. **kritickej sily vzperu** sa podstatným stáva ohyb, nepodstatné je stláčanie. Rozhranie týchto stavov nazývame **medzný stav vzpernej stability**.

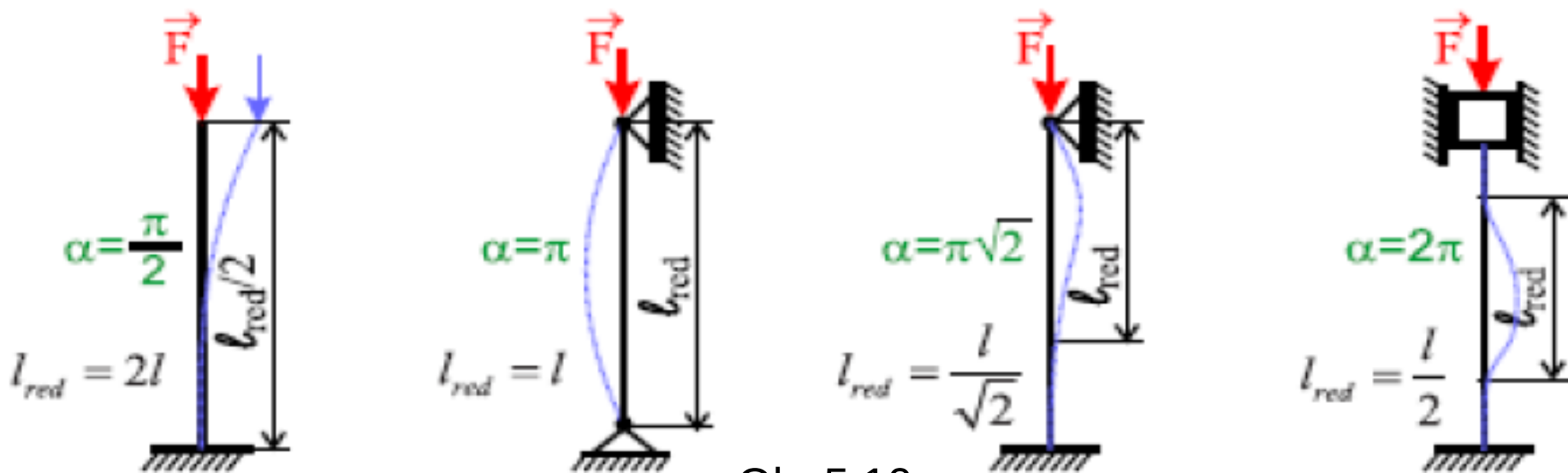
Medzný stav vzpernej stability je stav, v ktorom sa mení charakter podstatnej deformácie z tlaku na ohyb.

5.1 Rovinné prútové sústavy

Hodnota kritickej sily F_{kr} pri namáhaní prúta na vzperný tlak:

$$F_{kr} = \alpha^2 \cdot \frac{E.I}{l^2} \quad \text{alebo} \quad F_{kr} = \pi^2 \cdot \frac{E.I}{l_{red}^2} \quad (5.1)$$

kde α je hodnota určená uložením prúta (napr. voľný prút $\alpha = \pi$), redukovaná dĺžka l_{red} sa určuje na základe obr. 5.10.



Obr.5.10

Uvedené spôsoby uloženia prúta (tzv. Eulerove prípady vzperu, Obr.5.10) nie sú však pre priehradové konštrukcie typické a problémy stability a vzpernej pevnosti prútov budú preto detailnejšie analyzované až v náuke o PaP.

Základná úloha riešenia rovinných prútových sústav

Z uvedených úvah vyplýva, že každý prút PS budeme pri jej statickej analýze uvažovať ako prvok - **namáhaný iba normálovou (osovou) silou**. Dôsledok: ak zaťaženie a uloženie PS uvažujeme iba v uzloch, každý uzol predstavuje **zväzok síl**.

Platí teda, že ak je PS ako celok v pokoji, musí byť v pokoji aj každá jej časť, t.j. **bilancia vonkajších a vnútorných síl v každom uzle PS je nulová – silové účinky sú v rovnováhe**.

Analogicky platí: PS je v rovnováhe iba vtedy, ak je v rovnováhe každý jej uzol. Znamená to, že pre všetkých u uzlov PS musí byť u rovinnnej prútovej sústave splnených $2 \cdot u$ rovníc typu:

$$\sum_{i=1}^u F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^u F_{iy} = 0 \quad 5.2$$

5.1 Rovinné prútové sústavy

V rovniciach (5.2) sú zahrnuté už aj tri podmienky rovnováhy vonkajších síl pôsobiacich na rovinnú sústavu telies, potrebné pre určenie väzbových reakcií. **Voľných rovníc**, zostávajúcich k výpočtu osových síl, máme teda k dispozícii iba **$2u - 3$** .

Základné kroky riešenia PS:

- **posúdenie celkovej statickej určitosti PS,**
- **výpočet vonkajších väzbových reakcií (veľkosť a zmysel)**
- **určenie osových síl (veľkosť a zmysel - ťah / tlak) pôsobiacich v jednotlivých prútoch PS.**

Aby sme mohli PS, charakterizovanú sústavou $(2u-3)$ rovníc rovnováhy silových účinkov, metódami statiky jednoznačne vyriešiť, musí byť vždy analyzovaná PS nielen **staticky**, aj **tzv. tvarovo určitá**.

Posúdenie statickej určitosti u rovinných PS

Zvolený spôsob statického riešenia PS závisí najmä od miery ich statickej určitosti (t.j. možnosti riešenia PS v rámci postupov pre statické posudzovanie a návrh konštrukcií).

Obvykle rozlišujeme statickú určitosť:

- **vonkajšiu,**
- **vnútornú a**
- **celkovú.**

Prútová sústava je v stave celkovej statickej určitosti, ak spĺňa podmienku vnútornej, ako aj vonkajšej statickej určitosti.

V inom prípade sa jedná o staticky neurčité (preurčené alebo podurčené) prútové teleso. Pri jeho riešení je nevyhnutné uvažovať aj s prislúchajúcim počtom podmienok – **deformačných podmienok** - vychádzajúcich z analýzy pretvorenia.

1. Vonkajšia statická určitost' PS - vzťahuje sa k možnostiam určenia vonkajších väzbových (stykových) síl na uvoľnenom prútovom telese z použiteľných podmienok statickej rovnováhy. Musí analogicky s nosníkmi platiť

$$n = n_v - n_o \quad \Rightarrow \quad n_v = n_o \quad (5.5)$$

kde n_v je počet použiteľných statických podmienok rovnováhy (v rovine $n_v=3$, priestor $n_v=6$), n_o je počet väzbami odobraných $^{\circ}V$, t.j. neznámych parametrov vonkajších väzbových reakcií.

Rovinná PS je vonkajšo staticky určitá, ak platí $3 = 3$, inak ide o staticky neurčité uloženie.

2. Vnútna statická určitost' PS - vyjadruje možnosť úplného určenia osových síl vo všetkých prútoch PS. Podmienka je založená na tom, že počet použiteľných podmienok statickej rovnováhy je pre rovinnú sústavu (2.u), resp. pre sústavu priestorovú (3.u).

5.1 Rovinné prútové sústavy

Podmienka vnútornej statickej určítosti má potom tvar:

$$\begin{aligned} & 2u - n_v = p \quad (\text{rovinná sústava}), \\ \text{resp.} \quad & 3u - n_v = p \quad (\text{priestorová sústava}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde: u je počet uzlov PS, p je počet prútov PS a $m=n_v$ je počet možných podmienok rovnováhy (rovine $m=3$, priestor $m=6$).

3. Celková statická určítosť PS – vyjadruje možnosť určenia všetkých neznámych parametrov PS zo všetkých použiteľných podmienok statickej rovnováhy.

Z rozboru vonkajšej a vnútornej statickej určítosti je zrejmé, že celkovú podmienku statickej určítosti môžeme vyjadriť v tvare:

$$\begin{aligned} & 2u = p + n_v \quad (\text{rovinná sústava telies}) \\ \text{resp.} \quad & 3u = p + n_v \quad (\text{priestorová sústava telies}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Prútová sústava je staticky určítá, ak spĺňa podmienky vonkajšej, ako aj vnútornej statickej určítosti.

Podmienka riešiteľnosti PS v statike:

Určiť neznáme sily v prútoch PS od vonkajších (primárnych a sekundárnych) síl pôsobiacich na PS v jej uzloch môžeme metódami statiky len vtedy, keď je analyzovaná sústava **nielen staticky**, ale **aj tvarovo určitá**!

Rovinná PS: ak má byť PS s počtom prútov p **staticky aj tvarovo**, musia byť splnené nasledovné vzťahy:

- pre voľnú (pohyblivú) PS: $2u = p + 3$ (5.10)

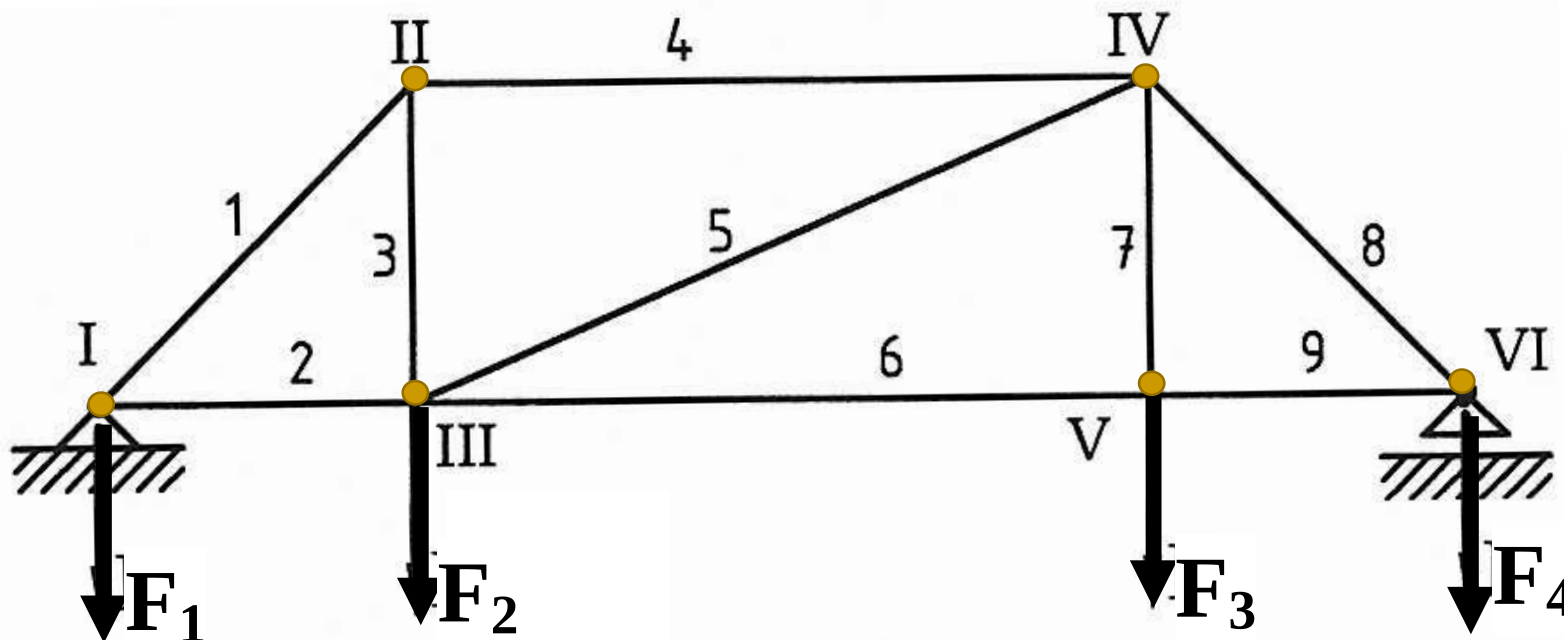
- pre viazanú (nepohyblivú) PS: $2u = p + 2p_2 + p_1$ (5.11)

kde p je počet prútov, u počet uzlov, p_2 počet väzieb, odoberajúcich viazanú PS 2^oV a p_1 počet väzieb odoberajúcich 1^oV.

5.1 Rovinné prútové sústavy

Je možné sa presvedčiť, že napr. mechanický model mostnej konštrukcie (Obr. 5.6) je staticky i tvarovo určitá sústava telies.

V tomto prípade platí: uzly $u = 6$, prúty $p = 9$, väzby typu 2 - $p_2=1$ a väzby typu 1 - $p_1=1$. Podľa vzťahu (5.11) pre viazanú sústavu telies dostaneme $2.6 = 9 + 2.1 + 1 \Rightarrow \mathbf{12 = 12}$.



V prípade zistenia **statickej neurčitosti sústavy telies**, je potrebné takto usporiadanú sústavu uvoľniť (rovnako ako staticky určitú), avšak z dôvodu nedostatočného počtu rovníc rovnováhy je nutné doplniť potrebný (chýbajúci) počet ďalších podmienok, vychádzajúcich podstaty pretvorenia (deformácie) telesa.

V takomto prípade je potrebné štandardné metódy statického riešenia PS doplniť o poznatky z mechaniky poddajných telies.

Otázka statickej určitosti a z nej vyplývajúcej riešiteľnosti sústav telies je zložitejšia ako u jediného telesa a je preto nutné rozboru statickej určitosti (či už nepohyblivých alebo pohyblivých) ST vždy venovať primeranú pozornosť.

5.2 Rozdelenie staticky určitých prútových sústav

5.2 Staticky určité prútové sústavy a ich rozdelenie

Osové sily v prútoch je možné určovať analytickými alebo grafickými postupmi. Voľba vhodnej metódy závisí iba na druhu analyzovanej staticky a tvarovo určitej PS.

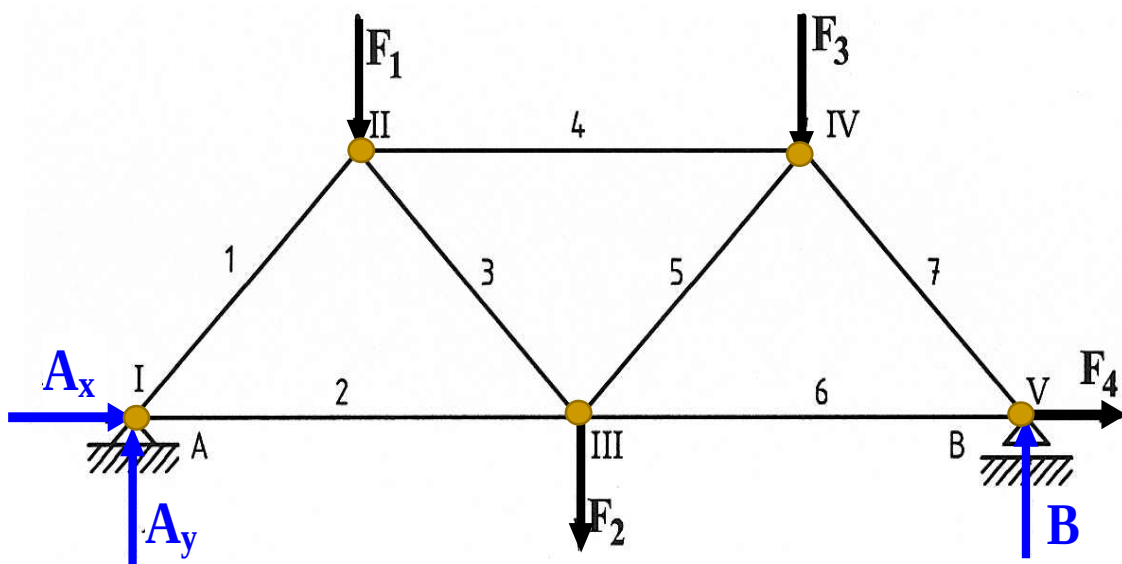
Rovinné, staticky i tvarovo určité, PS podľa usporiadania ich prútov najčastejšie delíme na: **jednoduché, zložené a zložené**.

5.2.1. Jednoduchá prútová sústava

Jednoduchá PS (obr.5.12) vznikne vtedy, keď k **základnému trojuholníku prútov**, je každý ďalší uzol PS pripojený najviac dvoma prútmi (ktoré nie sú totožné) a sústava obsahuje aspoň jeden tzv. **dvojný uzol**.

Dvojný uzol obsahuje iba 2 neznáme osové sily (= počet podmienok / rovníc rovnováhy v ňom definovaných).

5.2 Rozdelenie staticky určitých prútových sústav



Obr. 5.12

Overenie statickej určitosti:
 $u = 5$, $p = 7$, $p_2 = 1$, $p_1 = 1$.

Podľa (5.4) platí:

$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1$$

$$2 \cdot 5 = 7 + 2 \cdot 1 + 1$$

$\Rightarrow$ podmienka riešiteľnosti
metódami statiky **splnená!**

Riešenie začíname vždy v dvojnom uzle (t.j. uzol, v ktorom sú kĺbovo spojené max. 2 prúty, napr. uzly I alebo V na obr. 5.12).

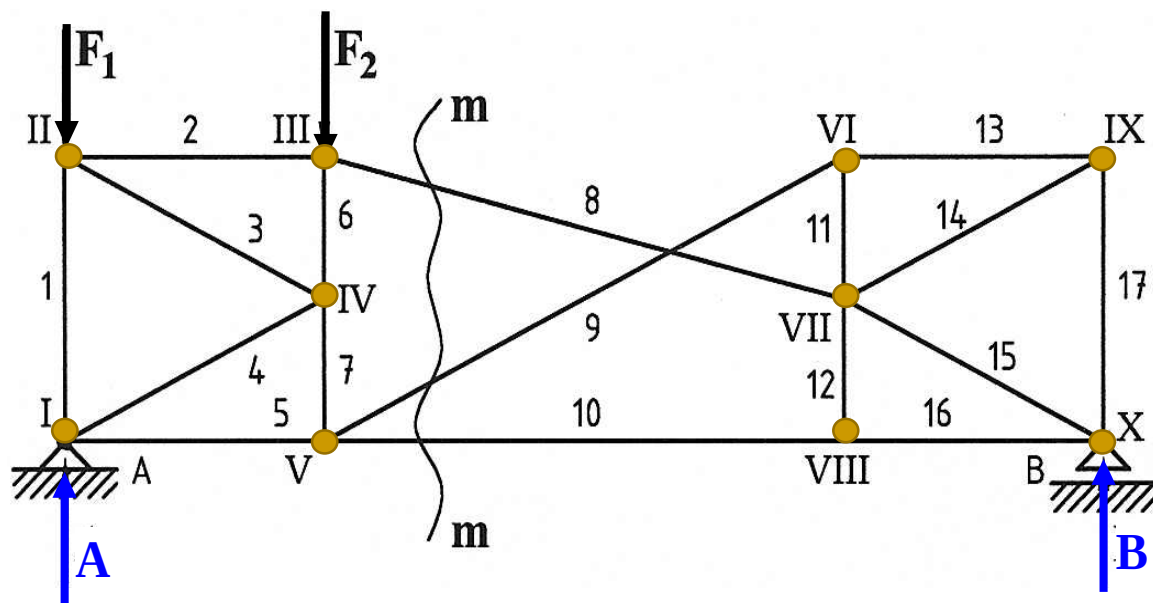
Analytické riešenie = **postupná uzlová metóda**, príp. jej univerzálna maticová verzia, tzv. **všeobecná uzlová metóda**.

Grafické riešenie = **grafická verzia postupnej uzlovej metódy** alebo tzv. **Cremonov obrazec**.



5.2.2 Zložená prútová sústava

Zložená prútová sústava (obr. 5.13) vznikne **spojením dvoch jednoduchých PS** prostredníctvom 3 prútov, ktoré sa nepretínajú v spoločnom bode a prútové teleso neobsahuje **žiadny dvojný uzol**.



Obr. 5.13

Overenie statickej určitosti:

$$u = 10, p = 17, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa (5.1) platí:

$$2.u = p + 2.p_2 + p_1$$

$$2.10 = 17 + 2.1 + 1$$

⇒ podmienka riešiteľnosti
splnená!

5.2 Rozdelenie staticky určitých prútových sústav

Riešenie zložených (ale aj jednoduchých) PS realizujeme najčastejšie pomocou tzv. **metódy rezu** (často aj priesečná metóda).

Analytické riešenie = **metóda rezu (Ritter)**

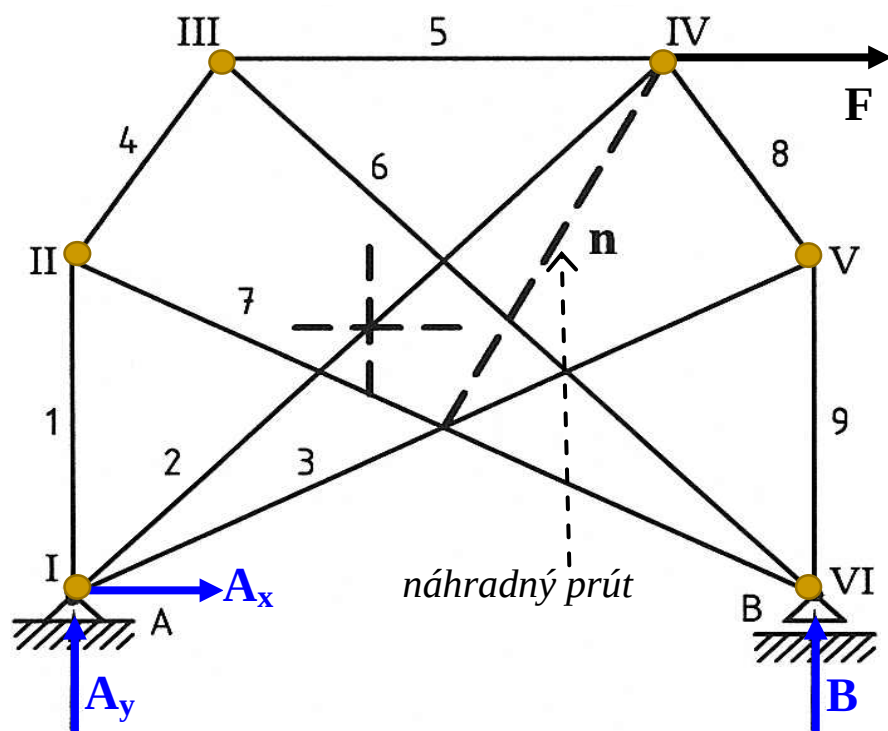
Grafické riešenie = **metóda rezu (Culmann)**

Ich použitie je potrebné a vhodné vtedy, ak PS neobsahuje žiadny dvojný uzol a je možné viesť taký fiktívny rez $m-m$, ktorý pretína maximálne 3 prúty PS (tie však nesmú tvoriť RZS, t.j. ich nositeľky sa nepretínajú v jednom spoločnom bode).



5.2.3 Zložitá prútová sústava

Zložitá prútová sústava (obr. 5.14) neobsahuje **žiadny dvojný uzol** a ani žiadnym rezom *m-m*, vedeným cez 3 prúty **nie je možné sústavu rozdeliť** na dve časti.



Obr. 5.14

Overenie statickej určitosti:

$$u = 6, p = 9, p_2 = 1, p_1 = 1.$$

Podľa (5.1) platí:

$$2 \cdot u = p + 2 \cdot p_2 + p_1$$

$$2 \cdot 6 = 9 + 2 \cdot 1 + 1$$

⇒ podmienka riešiteľnosti **splnená!**

Analytické riešenie = **metóda náhradného prúta (Hanneberg)**

Grafické riešenie = **metóda neurčitej mierky.**

5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

5.3.1 Princípy riešenia ST, metódy riešenia

Cieľom statického riešenia sústav telies je overenie statickej určitosti sústavy, výpočet vonkajších a vnútorných väzbových reakcií a určenie vnútorných silových veličín v jednotlivých telesách, tvoriacich ST. U pohyblivých ST – mechanizmov, určíme aj prídavné silové účinky, ktoré by boli potrebné pre zaistenie rovnováhy takejto pohyblivej sústavy.

Podstata riešenia statickej rovnováhy sústav telies:

Ak je sústava telies v pokoji, je v pokoji každé teleso, ako aj ľubovoľná skupina telies. Znamená to, že sily pôsobiace na každom telese / skupine telies sú v rovnováhe.

Pri riešení ST nie je nutné rozlišovať pohyblivé a nepohyblivé sústavy, pretože podstata ich statického riešenia pri uvažovaní tzv. ideálnych väzieb medzi telesami je rovnaká.

5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

Riešenie sústav telies je založené na týchto princípoch:

1. **Rovnováha centrálnych silových sústav**, ktoré pôsobia na jednotlivé uzly - **uzlová metóda** (známa tiež ako metóda styčných bodov), resp. grafická **Cremonova metóda**.
2. **Rovnováha síl, pôsobiacich na časť PS**, rozdelenej myseľným rezom – **metóda rezu** (známa aj ako priesečná metóda), resp. grafická verzia, **Culmannova metóda**.
3. **Superpozície vplyvov**, založenom na analýze jednotlivých vplyvov a ich výslednom sčítaní) a **proporcionality medzi vonkajším zaťažením a osovými silami v telese** - **metóda náhradných prútov**, resp. grafická **metóda neurčitej mierky**.

Zvolený spôsob riešenia sústav telies závisí predovšetkým od ich **geometrického usporiadania** a miery **statickej určitosti**.

5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

Pri statickom riešení budeme predpokladať, že **väzby medzi všetkými telesami sú ideálne** – t.j. počítame bez uvažovania vplyvu tzv. pasívnych odporov.

Voľba spôsobu statickej analýzy PS závisí na ich charaktere, spôsobe zaťaženia a na tom, aké spôsoby riešenia poznáme.

Vo všeobecnosti pri analýze ST môžeme použiť metódy:

- **experimentálne** alebo
- **výpočtové.**

Experimentálne metódy – ich princíp spočíva v pozorovaní a popise výsledkov skúmaných situácií a hľadani exaktných súvislostí medzi vstupnými a výstupnými veličinami.

Výpočtové postupy – princíp je založený na matematickom popise závislosti pôsobiacich silových účinkov a správania sa sústavy telies pod zaťažením.

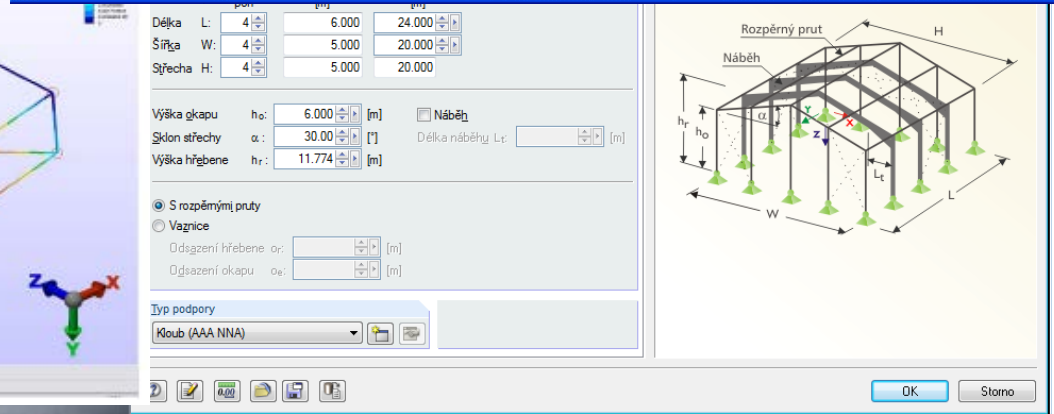
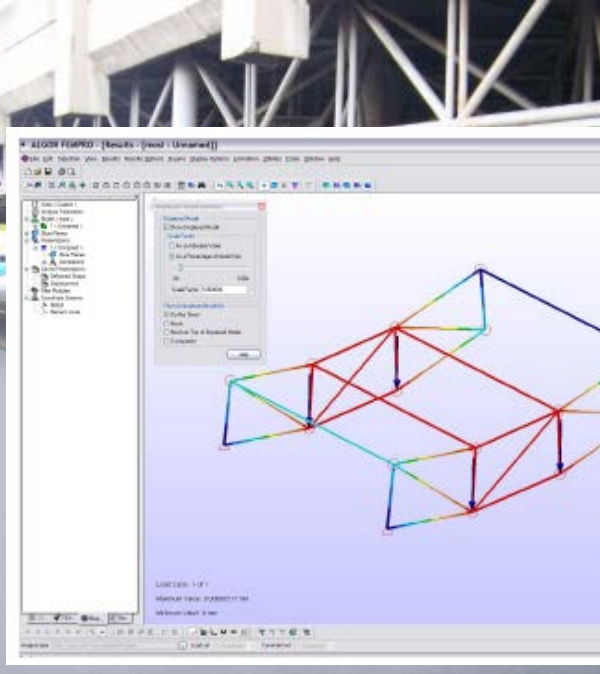
5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

Výpočtové metódy obvykle rozoznávame:

- **analytické,**
- **grafické a**
- **numerické.**

Analytické a grafické metódy: obvykle tvoria nástroj na prvotný pevnostný návrh konštrukcie, pre získanie primárnej predstavy týkajúcej sa prevádzkového namáhania ST. Je možné ich napr. využiť pri posudzovaní logickej správnosti a prípustnosti výsledkov získaných numerickým riešením.

Numerické riešenie je v súčasnosti v praxi najviac využívané, ale vyžaduje špecifickú softvérovú podporu, zručnosť pri jej praktickej aplikácii, ako aj pochopenie súvislostí a znalosti princípov riešenia sústav telies.



5.3.2 Všeobecný postup statického riešenia PS

Cieľ statického riešenia: určenie **veľkosti osových síl v prútoch PS a ich zmyslu (ťah / tlak)**. Bez posúdenia statickej určitosti, ako aj výpočtu parametrov vonkajších väzbových síl – väzbových reakcií, vnútorné sily však riešiť nevieme.

Riešenie PS pozostáva z niekoľkých krokov:

- 1. Definovanie sústavy telies, analýza a popis vonkajších a vnútorných väzieb v sústave, uvoľnenie ST.*
- 2. Posúdenie statickej, príp. aj tvarovej určitosti sústavy.*
- 3. Určenie reakcií vo vonkajších väzbách (t.j. reakčné sily, pôsobiace na sústavu v miestach jej uloženia),*
- 4. Riešenie vnútorných (osových) síl v ST vhodným analytickým, grafickým, príp. numerickým postupom.*
- 5. Interpretácia výsledkov.*

1. Analýza sústavy telies a rozbor pohyblivosti

Spočíva v identifikácii, či je ST pohyblivá alebo nepohyblivá. Definovanie vonkajších a vnútorných väzieb v rámci ST obsahuje analýzu usporiadania sústavy a analýzu väzieb medzi jej jednotlivými telesami.

Prútové sústavy v rovine uvažujeme ako rovinné ST - prútov - s uzlami vo forme rovinných kĺbov.

2. Statická určitosť prútových sústav

Pre statickú určitosť prútových sústav platí:

PS je staticky určitá, ak počet neznámych silových veličín (t.j. väzbové reakcie a osovú sily v prútoch) je rovný počtu použiteľných rovníc rovnováhy definovaných pre PS.

PS je možné vyriešiť metódami statiky iba vtedy, ak je sústava **staticky určito uložená**, a je aj tzv. **tvarovo určitá**.

5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

Ak má byť PS s počtom prútov p **tvarovo i staticky určitá**, musia byť splnené nasledovné vzťahy:

- Pre voľnú (pohyblivú) PS: $2 \cdot u = p + 3$
- Pre viazanú (nepohyblivú) PS: $2 \cdot u = p + 2p_2 + p_1$

kde p je počet prútov, u počet uzlov, p_2 počet väzieb, odoberajúcich viazanú PS 2^oV a p_1 počet väzieb odoberajúcich 1^oV.

3. Určenie reakcií vo vonkajších väzbách

Treťou fázou statickej analýzy PS je určenie sekundárnych vonkajších síl – t.j. reakcií vo vonkajších väzbách, ako dôsledku pôsobenia primárnych vonkajších síl v uzloch PS.

U rovinných PS musí platiť, že zaťaženia, väzbové reakcie, ako aj idealizovaný tvar (model) ST ležia v jednej rovine.

5.3 Metódy riešenia staticky určitých rovinných PS

Postup určenia väzbových reakcií u priehradových nosníkov je rovnaký ako u priamych / lomených nosníkov. Opäť je možné využiť podmienky rovnováhy VRSS v tvare:

a)	$\sum F_{ix} = 0$	b)	$\sum M_A = 0$	c)	$\sum M_A = 0$	(5.12)
	$\sum F_{iy} = 0$		$\sum M_B = 0$		$\sum M_B = 0$	
	$\sum M_A = 0$		$\sum F_{ix} = 0$		$\sum M_C = 0$	
	$\sum M_B = 0$		$\sum F_{iy} = 0$		$\sum F_{ix} = 0$	
KONTROLNÉ ROVNICE						

Pri riešení PS najčastejšie využívame tvar rovníc typu b).

Posuvné a otáčavé účinky výslednice reakcií $\sum R_j$ a výslednice sústavy primárnych zaťažujúcich síl $\sum F_i$ sa musia navzájom rušiť ($\sum R_j + \sum F_i = 0$) $\Rightarrow$ sústava telies je v statickej rovnováhe. 45

4. Riešenie osových síl v PS a interpretácia výsledkov

- **Analytické metódy** (a čiastočne aj grafické) sú vhodným nástrojom pre pochopenie podstaty teoretických postupov a princípu výpočtov prútových sústav.
- **Numerické metódy** sú aktuálne v praxi najpoužívannejšie, ale vyžadujú špecifickú softvérovú podporu, zručnosti v jej používaní, ako aj zvládnutie teoretických základov riešenia PS.

5. Interpretácia výsledkov

Po ukončení výpočtov v rámci analýzy PS je vhodné získané výsledky aplikovať pri posúdení únosnosti už využívaných, príp. dimenzovaní novo navrhovaných častí PS, voľbe vhodných spojení telies, príp. ďalších výpočtov v rámci PaP.

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

Metódami statiky je možné riešiť iba staticky určité PS. V tomto prípade je možné určiť nielen väzbové reakcie (= vonkajšie stykové sily), ale aj vnútorné (osové) sily v každom prúte PS.

Na vyjadrenie deformácie PS ako celku, resp. jej prvkov a tým i na riešenie staticky neurčitých úloh sústav telies, je nutné použiť vzťahy z oblasti mechaniky poddajných telies.

Analytické riešenie = **postupná uzlová metóda**, príp. jej univerzálna maticová verzia, tzv. **všeobecná uzlová metóda**.

Grafické riešenie = **grafická verzia postupnej uzlovej metódy** alebo tzv. **Cremonov obrazec**.

5.4.1 Postupná uzlová metóda (PUM)

Pri postupnej uzlovej metóde (je známych viac variantov) sa rieši rovnováha v každom uzle jednoduchej PS ako **rovnováha síl v rovinnom zväzku síl**.

Riešenie opäť začína posúdením statickej určitosti a **výpočtom reakcií**, ako vonkajších reakčných síl, ktoré vo všeobecnosti spoločne s akčnými (vonkajšími primárnymi) silami, predstavujú všeobecnú sústavu síl, pôsobiacu na uvoľnenú PS.

Vlastný **výpočet osových síl v prútoch** začíname vždy v tzv. **dvojnom uzle** (t.j. uzol iba s dvomi neznámymi osovými silami) a po vyriešení rovnováhy v tomto uzle PS, pokračujeme v riešení rovnováhy v ďalšom, novovzniknutom, dvojnom uzle. Tomu odpovedá aj postupné číslovanie uzlov, napr. I, II, III,

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

- Analytické riešenie :

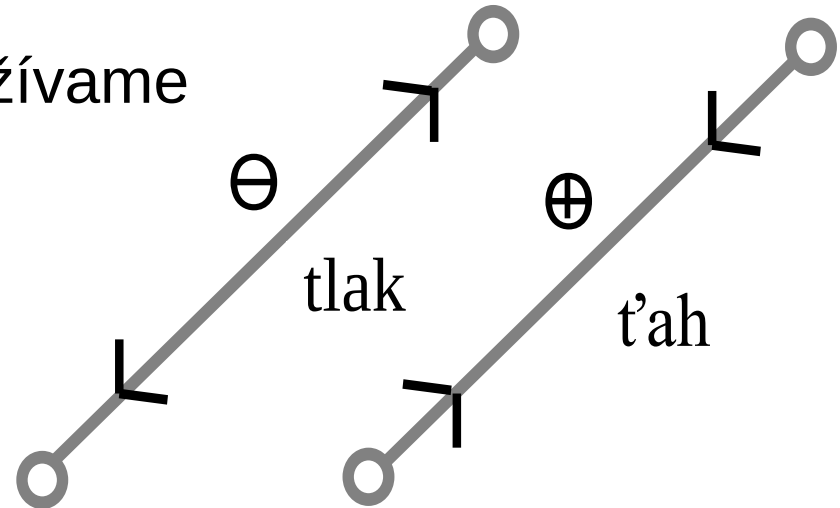
na začiatku **predpokladáme**, že všetky **zatiaľ neznáme osovú sily v prútoch sú ťahové (+)**, t.j. **pôsobia smerom von z uzla**. Vo výsledkoch rovnováhy síl v uzle sa tento predpoklad potvrdí – v prúte vzniká skutočne ťah (+) alebo nepotvrdí (bol nesprávny) a teda v prúte vzniká tlak (-).

Pre riešenie rovnováhy v uzle využívame známe rovnice rovnováhy u RZS:

$$\sum_{i=1}^u F_{ix} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^u F_{iy} = 0$$

Metódu často volíme aj na dorátanie osových síl v prútoch napr. po aplikácii iných metód analýzy PS.

Po vyriešení všetkých osových síl v uzle zakreslíme ich zmysly alebo u každého prúta označíme ťah (+) alebo tlak (-).



5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

- Princíp grafického riešenia

Grafický spôsob je názorný a princíp je založený na grafickej podmienke rovnováhy RZS, t.j na uzavretí silových obrazcov, vytvorených pre každý uzol PS a to buď samostatne alebo v jedinom obraze – tzv. Cremonova metóda.

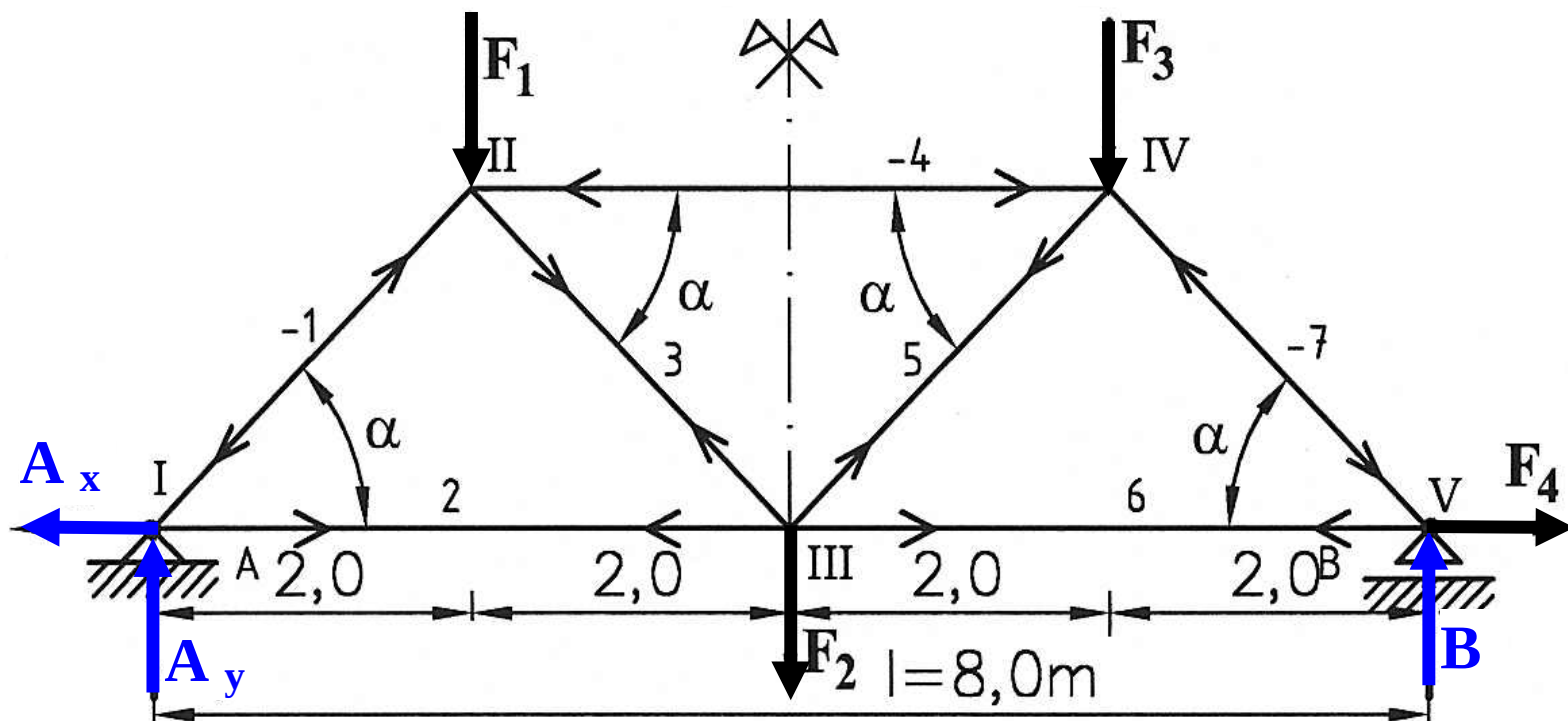
Hlavná myšlienka : dve silové podmienky pri analytickom riešení môžeme pri riešení grafickom nahradiť jedinou podmienkou – a to **uzavretím vytvoreného silového obrazca!**

Rovnako, ako pri analytickom riešení, aj tu musíme však začať **určením väzbových reakcií vznikajúcich vo väzbách.**

- Výhody: univerzálnosť a jednoduchosť; často volená na dorátanie osových síl pri využití iných metód riešenia PS.
- Nevýhody: pri zložitejších sústavách relatívne prácna; nutnosť postupovať postupne cez všetky uzly.

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

Príklad 5.1: V prútovej sústave (obr. 5.16) určite výpočtom aj graficky osovú silu S_i vo všetkých prútoch sústavy. Dané: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F = 20 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$.



Obr. 5.16

5.4.2 Všeobecná uzlová metóda (VUM)

Základ pre určenie osových síl v PS uzlovou metódou tvorí zostavenie rovníc rovnováhy pre všetky uvoľnené telesá naraz a ich následné vyriešenie (sústava $2u$ rovníc). Podstata spočíva v uvoľnení a vyriešení rovnováhy síl všetkých uzloch PS.

Vo všetkých prútoch zavedieme osové sily – zmysel na úvod predpokladáme ako **t'ahový** (t.j. pôsobia smerom von z uzla !!).

Ľubovoľnú, staticky určitú, rovinnú PS môžeme riešiť zostavením sústavy (2.u) lineárnych rovníc typu

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

pre všetky $i = 1, 2, \dots, u$, vytvorených pre každý jeden uzol PS.

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

V maticovom vyjadrení má takáto sústava 2.u rovníc tvar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.13)$$

kde $\mathbf{A}$ - štvorcová matica koeficientov pre $\underline{n}$ neznámych osových síl a reakcií (popisuje usporiadanie síl v PS, rozmer $2u \times 2u$; $\mathbf{x}$ - stĺpcová matica neznámych síl v prútoch PS a vonkajších väzbových reakciách, rozmer $2u \times 1$; $\mathbf{b}$ - stĺpcová matica vonkajších zaťažení v uzloch, rozmer $2u \times 1$ a $\mathbf{0}$ je nulová matica, $2u \times 1$.

Keď je matica sústavy $\mathbf{A}$ regulárna je hľadané riešenie určené vzťahom

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (5.14)$$

čo v maticovom zápise predstavuje vyjadrenie podstaty tzv. **všeobecnej uzlovej metódy**.

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

Pri zostavovaní sústavy rovníc rovnováhy je poradie uvoľňovania uzlov ľubovoľné a všetky neznáme takto možno určiť naraz. Použitie metódy pri riešení skutočných priehradových konštrukcií však vyžaduje využitie VT a vhodného softvérového vybavenia.

- Výhody:

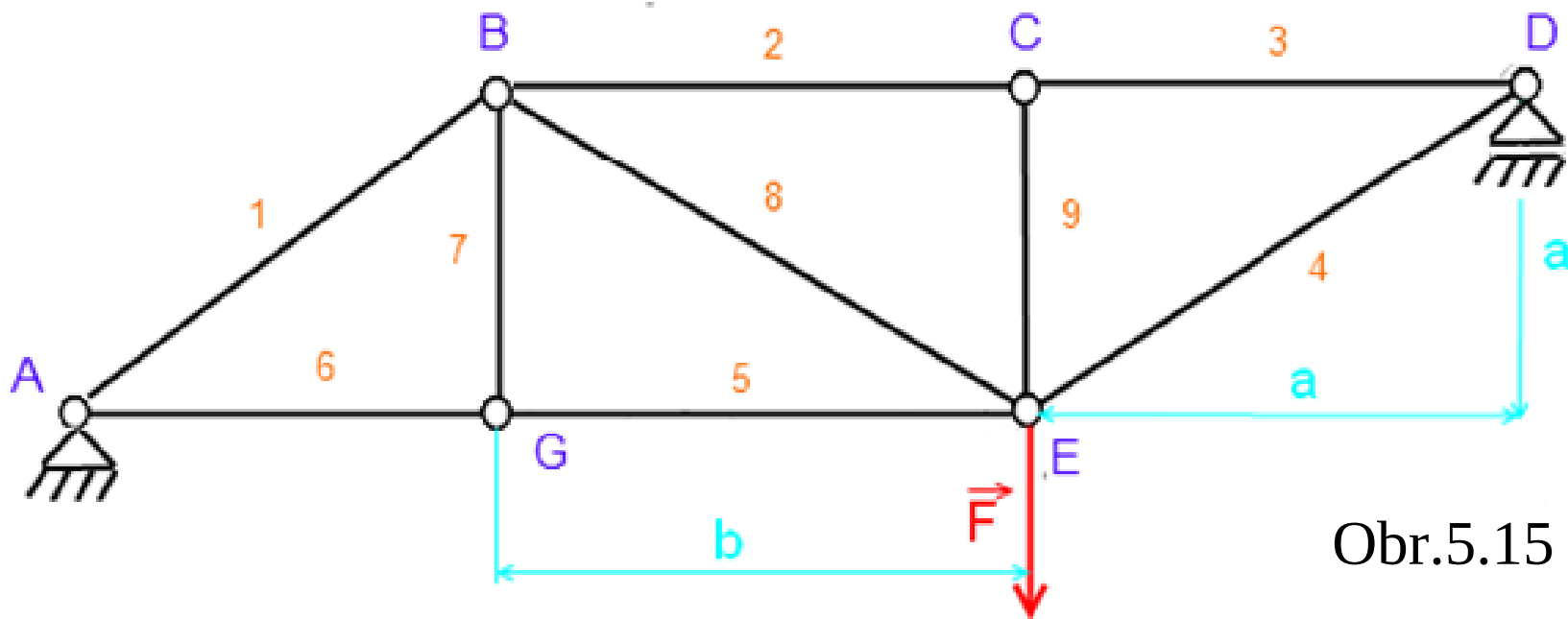
- univerzálnosť a relatívna jednoduchosť;
- často zvolená na dorátanie pri aplikácii iných metód pre PS;
- zostavené rovnice umožňujú jednoduchú analýzu statickej určitosti.

- Nevýhody:

- pri zložitejších sústavách môže byť výrazne prácna;
- nutnosť použitia výpočtovej techniky s vhodným softvérom (Mathematica, Matlab a pod.).

5.4 Metódy riešenia jednoduchých prútových sústav

Príklad 5.2: V zadanej prútovej sústave (Obr.5.15) určite osovú sily v prútoch pomocou všeobecnej uzlovej metódy. Dané: $F=2000\text{ N}$, $AG=BG=EC=CD=a$, uhol $GBE=60^\circ$.



Obr.5.15

5.5 Metódy riešenia zložených prútových sústav

5.5 Metódy riešenia zložených prútových sústav

Obvykle využívame tzv. **metódu rezu** (inak aj **priesečná met.**), známu v dvoch základných podobách:

- analytickej - tzv. **Ritterova metóda rezu** a
- grafickej - tzv. **Culmannova metóda rezu**.

Obomi uvedenými spôsobmi však môžeme riešiť vnútorné sily aj v jednoduchých PS.

Metódu rezu používame vtedy, ak nám postačuje určiť **osové sily iba v niektorých prútoch** alebo ak chceme vyriešiť sily vo všetkých prútoch PS a **nie je možné použitie uzlovej metódy**.

Princíp: uvoľníme časť PS tak, že myslený (uvoľňovací) rez vedieme práve cez prút, ktorého osovú silu chceme určiť. Hľadanú osovú silu (veľkosť a zmysel) potom jednoducho určíme riešením rovnováhy na vybranej uvoľnenej časti PS.

5.5.1 Ritterova analytická metóda (Ritterov rez)

Princíp: spočíva v definovaní a riešení podmienok statickej rovnováhy síl pôsobiacich na teleso, resp. jeho jednu, mysleným rezom $m-m$, odrezanú časť. Myslený rez zásadne vedieme cez max. tri prúty, ktoré sa nesmú pretínať v spoločnom bode.

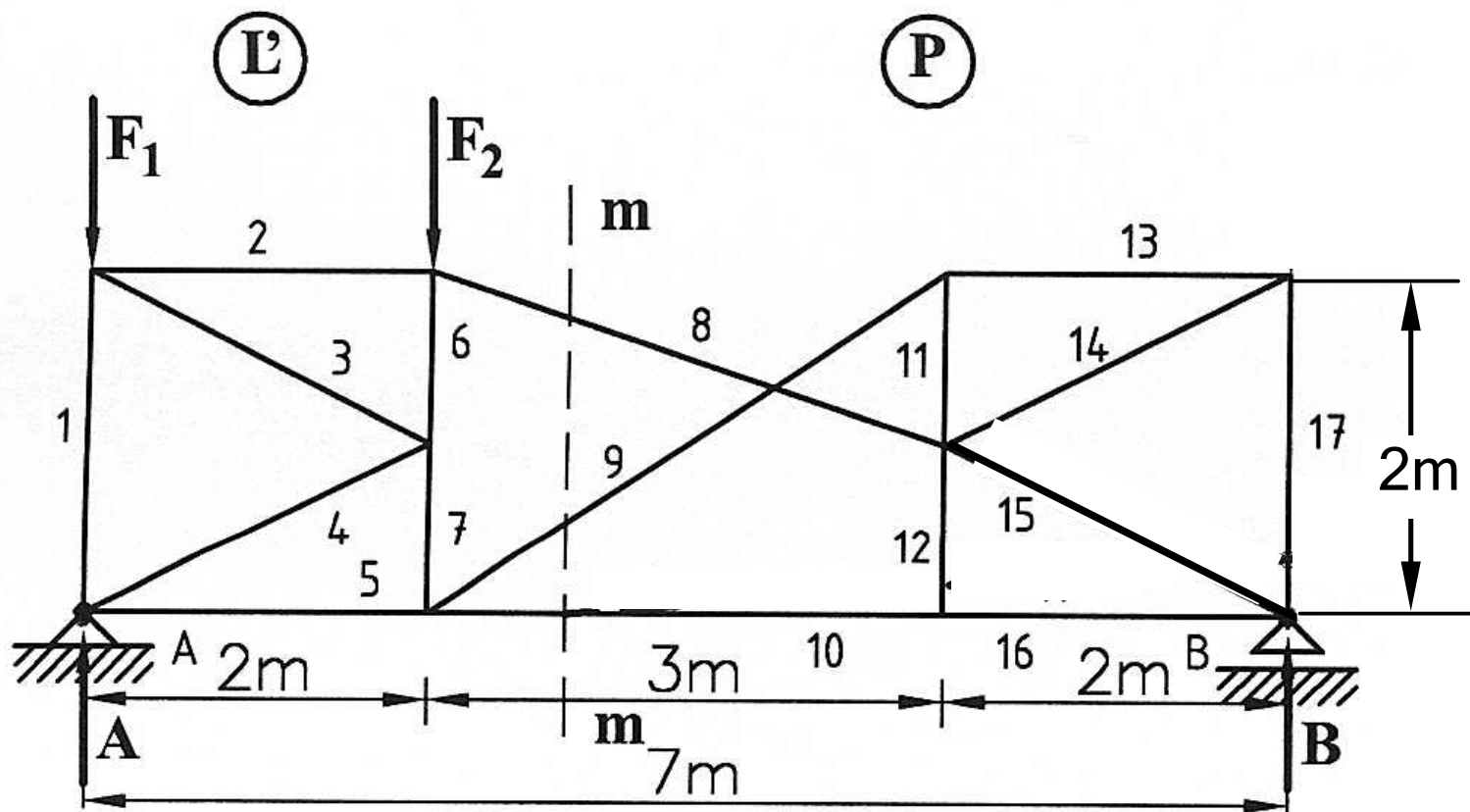
Po uvoľnení sústavy a jej prerušení mysleným rezom, musia byť osovú sily v prerezaných prútoch v rovnováhe s vonkajšími silami, pôsobiacimi na jednu z oddelených častí PS.

Najvhodnejšie sú podmienky rovnováhy momentové, obvykle definované vzhľadom k bodom, ktoré sú **priesečníkom nositeľiek osových síl niektorej dvojice z prerezaných prútov**.

- Výhoda metódy: rýchlosť, jednoduchosť, vhodná najmä vtedy ak stačí určiť iba niektoré osovú sily v PS.

5.5 Metódy riešenia zložených prútových sústav

Príklad 5.6: Analyticky určite osovú sily v zadanej prútovej sústave (obr. 5.18). Dané: $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$.

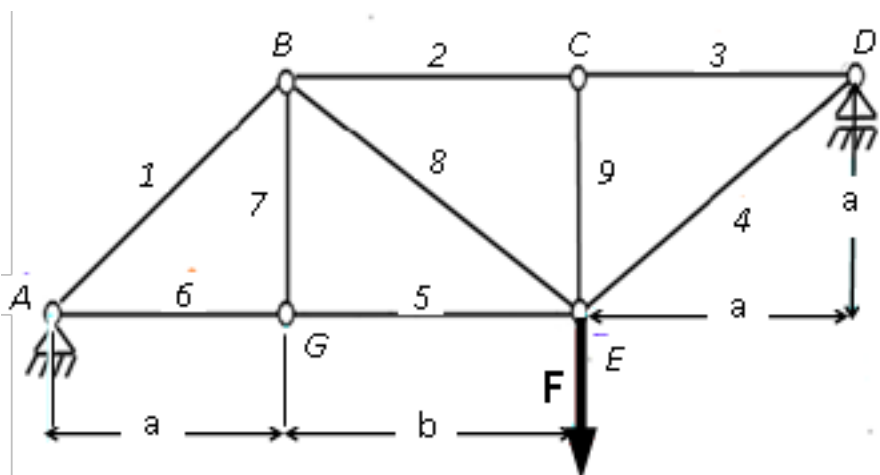


Obr. 5.18

5.7 Záverečné poznámky k riešeniu prútových sústav

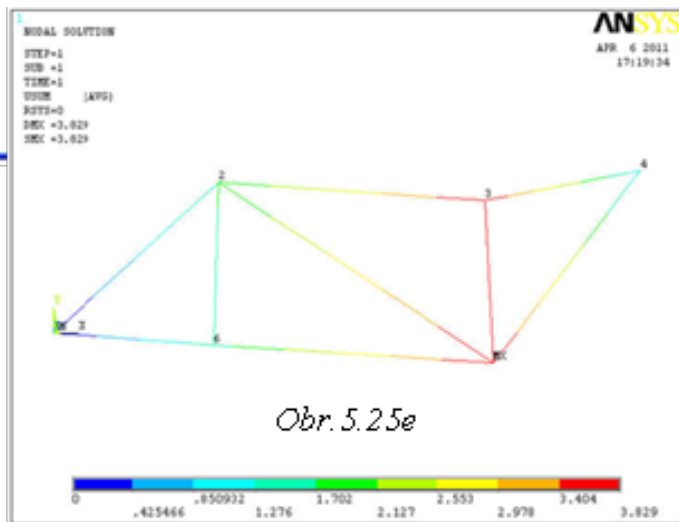
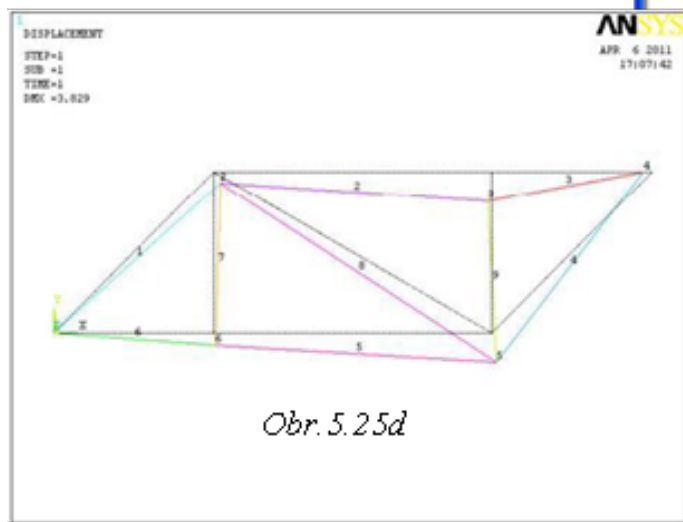
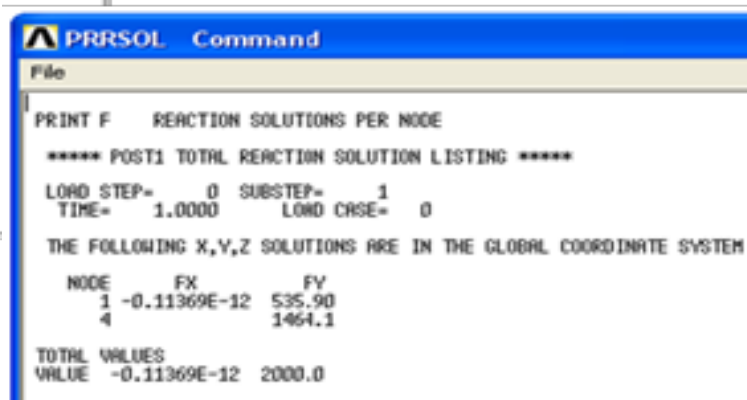
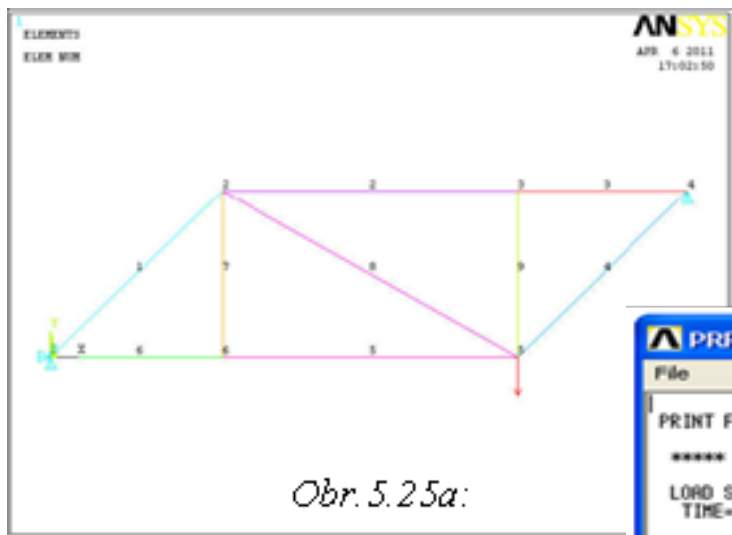
Aktuálne v mechanike telies dominujú postupy numerické. Z dostupných metód preto obvykle volíme numericky orientované postupy so softvérovou podporou, príp. všeobecnú uzlovú metódu (VUM). Jedným z nástrojov je produkt ANSYS [<http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Structural+Analysis/ANSYS+Mechanical>].

Príklad 5.8: Určite numericky, napr. v prostredí ANSYS, osovú silu v prútoch zadanej PS (Obr.5.25),



Obr. 5.25

5.7 Závěrečné poznámky k řešení prútových sústav



5.7 Záverečné poznámky k riešeniu prútových sústav

Na Obr.5.25d je uvedený tvar deformovanej a nedeformovanej sústavy a na Obr.5.25e je grafické zobrazenie sumárnych (celkových) posunutí jednotlivých uzlov a prútov.

Numerická analýza silových účinkov pôsobiacich na PS slúži iba na získanie hrubej predstavy o charaktere jej zaťaženia. Získané výsledky ďalej slúžia ako vstupné údaje pre realizáciu **napät'ovo – deformačnej analýzy** jej jednotlivých členov, ktorej výsledkom sú obvykle návrhy dĺžkových rozmerov prútov, tvaru a rozmerov ich prierezu, materiálových vlastností alebo ich posúdenie z hľadiska požadovanej miery bezpečnosti konštrukcie a jej prvkov.



Otázky???

Ďakujem za pozornosť

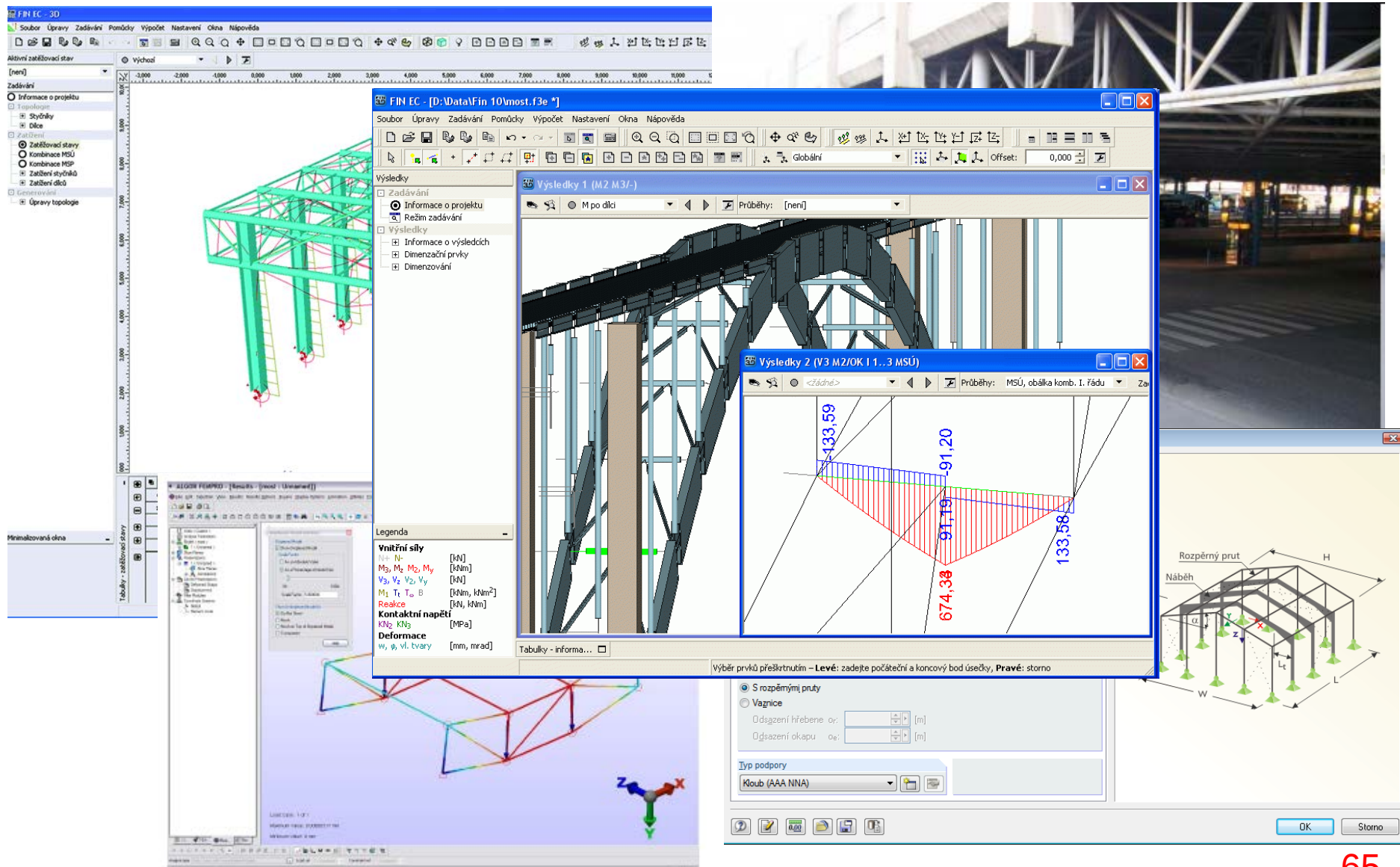
5.7 Záverečné poznámky k riešeniu prútových sústav



5.7 Záverečné poznámky k riešeniu prútových sústav



5.7 Závěrečné poznámky k řešení prútových sústav



5.7 Záverečné poznámky k riešeniu prúťových sústav

