



# Základy mechaniky pevných telies

## Téma 8:

### ROVINNÝ OHYB PRIAMYCH NOSNÍKOV

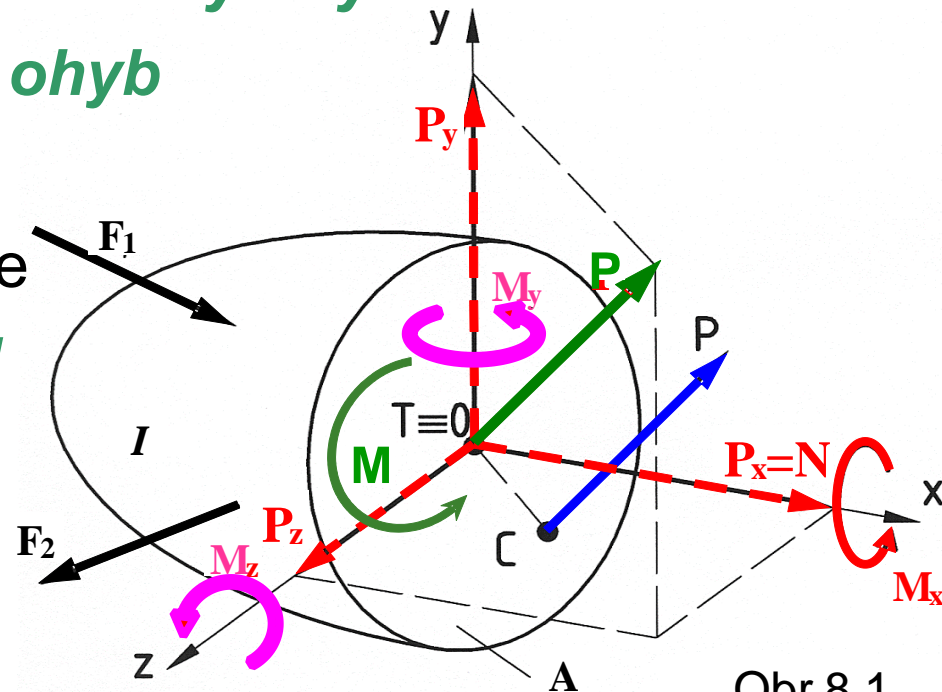
- základné prípady ohybového namáhania; rovinný ohyb a jeho charakteristika; napätosť pri namáhaní ohybom; deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

# Úvod

**Ohyb** je základný druh namáhania, pri ktorom je výslednicou vnútorných silových účinkov buď **priečna sila  $T$**  a / alebo **silová dvojica  $M_o$** , v rovine kolmej na priečny prierez nosníka.

Zo zložiek výslednice  **$P$**  vnútorných síl sú teda nenulové buď:

- zložky  $M_y$  alebo  $M_z$  samostatne = **čistý ohyb**
- zložky  $M_y$  a  $M_z$  naraz = **šikmý ohyb**
- súčasne s nimi aj priečne sily  $P_y=T_y$  a / alebo  $P_z=T_z$ , pôsobiace v priereze = **všeobecný prípad ohybu**.



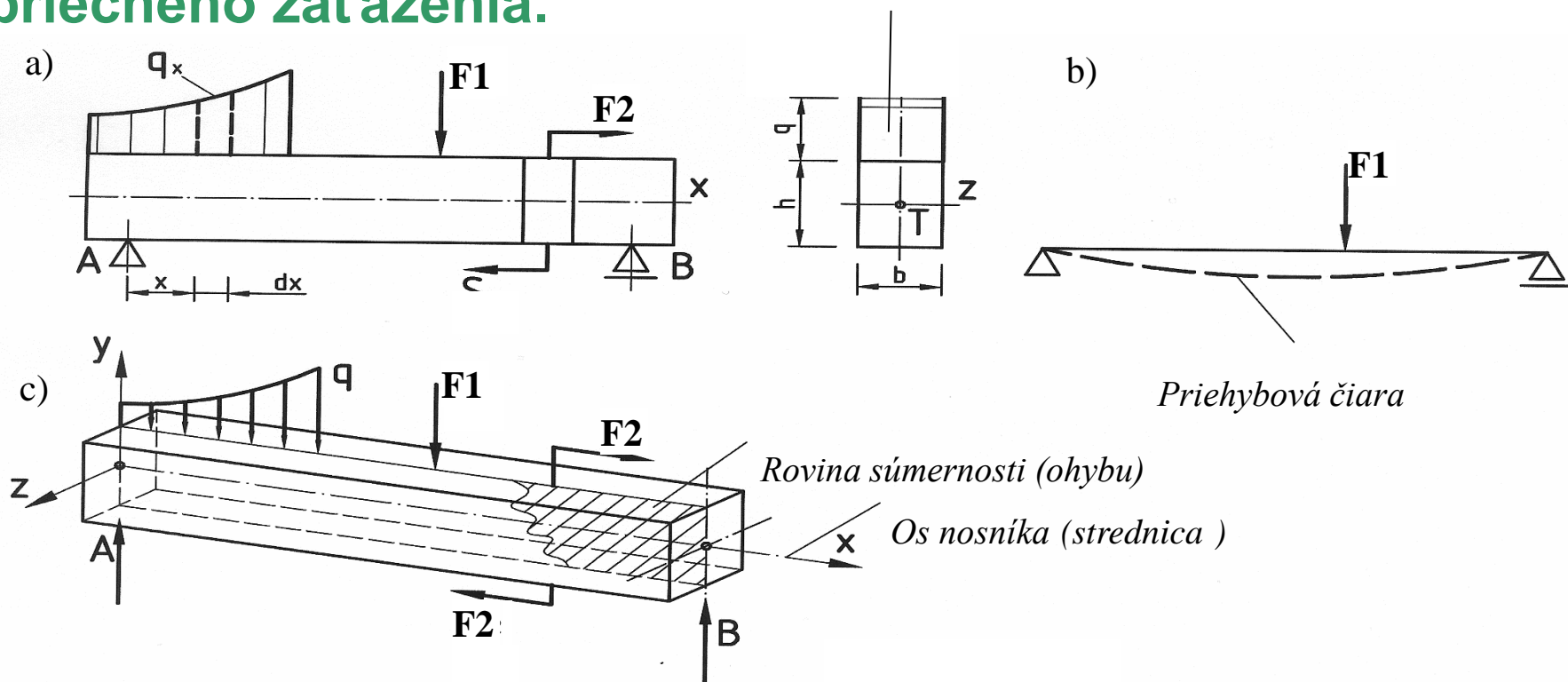
Obr.8.1

Ohybom sú najčastejšie namáhané prútové konštrukčné prvky – **nosníky**.

# Úvod

**Nosník** = prvok konštrukcie, zaťažený a uložený tak, že sa pri tom prehyba (obr.8.2). Predstavuje teleso, uložené na podperách alebo pevne votknuté, ktorého jeden rozmer je min. 15 – 20 násobne väčší ako rozmery priečného prierezu.

**Nosník = prvok nosných konštrukcií, určený k prenosu priečného zaťaženia.**



Obr.8.2

Riešenie nosníkov - rovnováhu vonkajších a vnútorných síl na nich (uvoľnenie telesa, statická určitosť, väzbové reakcie, veľkosti a priebehy vnútorných silových veličín na nosníkoch, nebezpečný prierez a pod.) - už bolo uvedené v rámci statiky.

## Rozdiel v prístupe:

**Statika:** nosník predstavoval dokonale tuhé teleso (DTT) a preto stačilo vyriešiť iba rovnováhu síl na nosníku.

**PaP:** nosník uvažujeme ako poddajné teleso (PDT) – t.j. platia všetky princípy riešenia statickej rovnováhy síl, navyše je však nutné riešiť aj problémy pretvorenia telesa a z neho vyplývajúcej napätosti.

**Statická analýza = nutný základ pre realizáciu analýzy pretvorenia a napätosti u PDT.**

## Opakovanie základných princípov a zásad riešenia statickej rovnováhy vonkajších a vnútorných síl na nosníkoch:

- teleso má: **v rovine 3°voľnosti, v priestore má 6°V,**
- statická určitosť nosníka v rovine: ak nosníku väzbami odobereáme **práve 3°V,**
- základné druhy väzieb: **kíbové uloženie (pevné, posuvné), dokonalé votknutie, posuvné votknutie, kyvný prút** a iné,
- ak väzby odoberajú nosníku viac ako 3 stupne voľnosti, nosník je tzv. **staticky neurčitý**  $\Rightarrow$  rovnice rovnováhy je nutné doplniť o rovnice vychádzajúce z pretvorenia nosníka – tzv. deformačné podmienky,
- základné druhy zaťaženia nosníkov: **osamelé sily  $F$ , silové dvojice  $M$**  (momenty), **spojito rozložené bremeno** (prične  $q(x)$ , osové  $n(x)$ , momentové  $m(x)$ ),

- väzbové reakcie určujeme zo statických podmienok rovnováhy uvoľneného nosníka; pre rovinné SS majú **statické podmienky rovnováhy** jeden z tvarov

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

$$R_x = \sum F_{ix} = 0$$

$$R_y = \sum F_{iy} = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

(8.1)

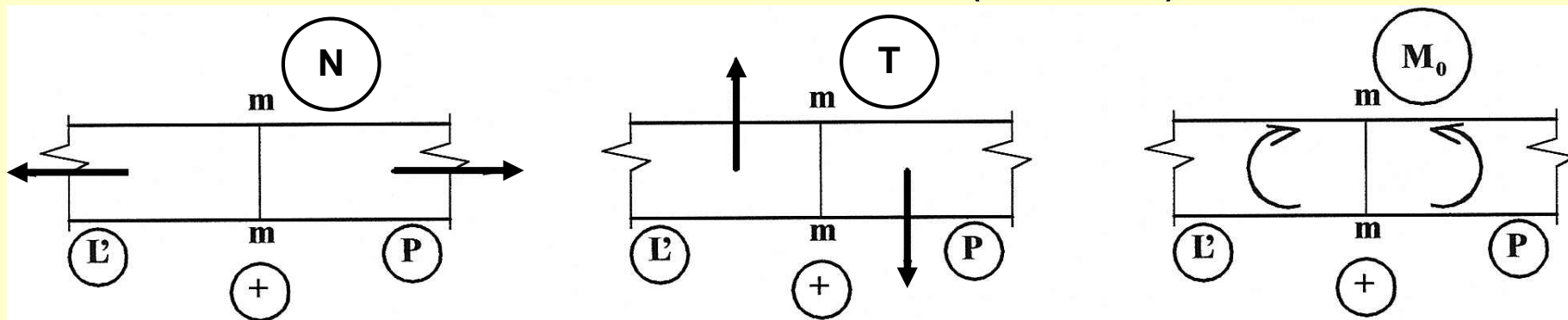
- v myslenom reze nosníka, ako reakcia na vonkajšie zaťaženie, vznikajú – tzv. **vnútorné silové veličiny**:

**1. osová sila  $N(x)$**  – výslednica (algebraický súčet) vonkajších síl pôsobiacich v smere osi nosníka z jednej strany mysleného rezu  $X$ . Kladný smer pôsobenia je von z rezu; pri zaťažení iba silami kolmými na os nosníka je osová sila  $N=0$ .

**2. priečna sila  $T(x)$**  - výslednica všetkých vonkajších silových účinkov pôsobiacich kolmo na os prúta z jednej strany rezu  $X$ . Kladný smer pôsobenia je určený otočením kladného smeru osovej sily o  $90^\circ$  v smere pohybu hodinových ručičiek.

**3. ohybový moment  $M_o(x)$**  – je určený algebrickým súčtom (sumou) momentových účinkov od všetkých vonkajších zaťažení z jednej strany rezu  $X$ . Kladný ohybový moment ohýba nosník tak, že horné vlákna prierezu stláča, dolné naťahuje.

- dohodnutá **konvencia znamienok**, podľa umiestnenia riešenej časti nosníka vzhľadom ku rovine rezu (Obr.8.3),



Obr.8.3

- **1. Schwedler – Žuravského veta:** súvis medzi priečnym zaťažením  $q$  a priečnou silou  $T$  je určený vzťahom

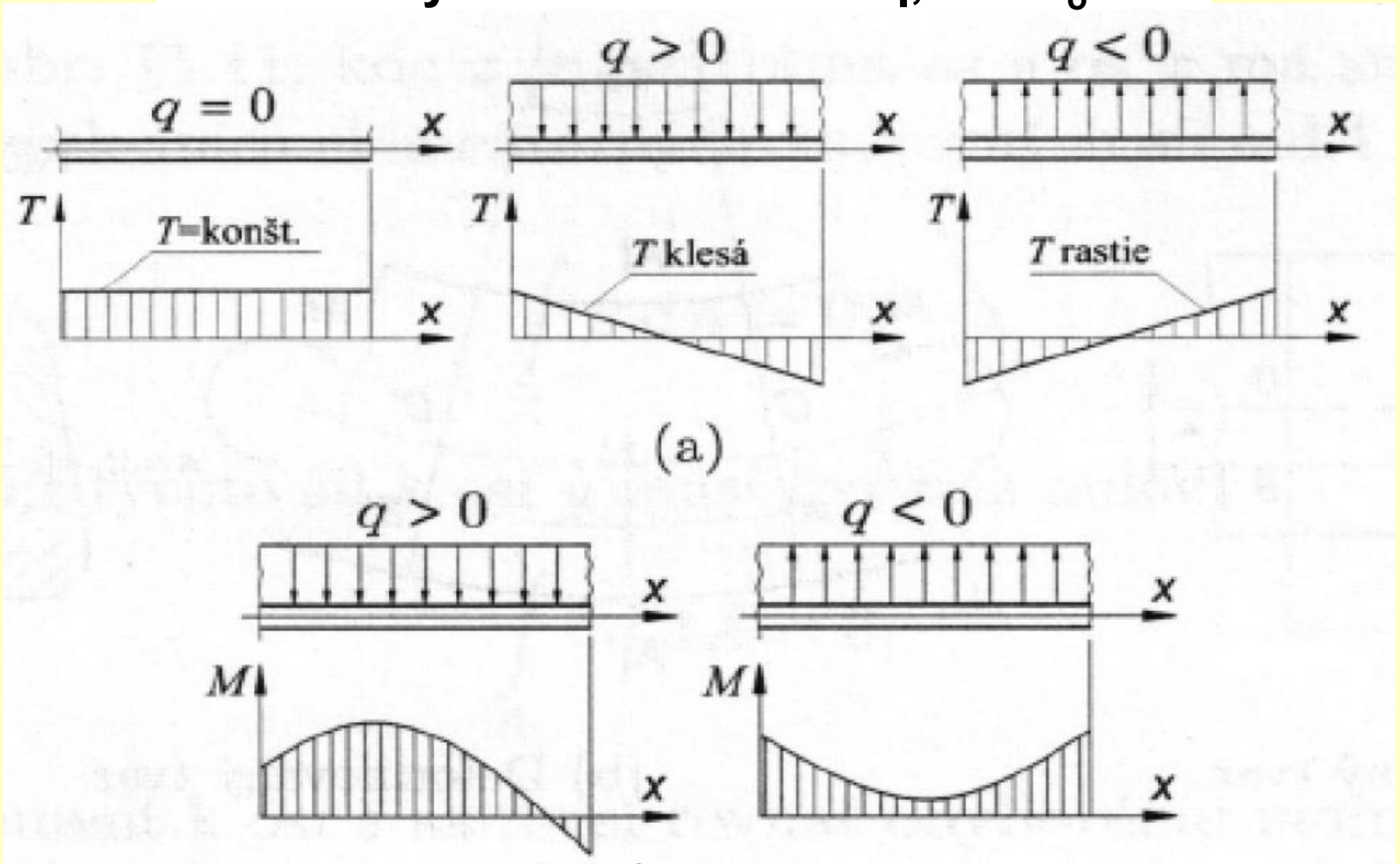
$$-q(x) = dT(x) / dx \quad (8.2)$$

tzn. spojité zaťaženie  $q(x)$  dostaneme derivovaním funkcie priebehu sily  $T(x)$  podľa súradnice  $x$ .

- Spojité zaťaženie  $q(x)$  predstavuje zápornú hodnotu 1. derivácie sily  $T(x)$ . Znamená to:
  - ak je na určitom úseku  $q(x)=0$ , sila  $T(x)=\text{konšt.}$
  - ak je na úseku  $q(x)>0$  ( $+q$  je orientované nadol),  $T'(x)<0$  a sila  $T(x)$  klesá.
  - na úseku kde je  $q(x)<0$  (t.j.  $q$  je orientované nahor), posúvajúca sila  $T(x)$  rastie (Obr.9.4).



Vzt'ahy medzi veličinami  $q$ ,  $T$  a  $M_o$



Obr.8.4

- **2. Schwedler – Žuravského veta:**

$$T(x) = dM(x) / dx \quad (8.3)$$

slúži na určenie súvisu medzi priebehmi priečnej sily **T** po celej dĺžke nosníka a ohybového momentu **M<sub>o</sub>(x)**.

- Podľa 2.S-Ž vety je **T(x)** prvou deriváciou **M<sub>o</sub>(x)**. Ak je teda **T(x)>0**, **M<sub>o</sub>(x)** rastie, naopak ak **T(x)<0** moment klesá. V mieste, v ktorom je **T(x)=0**, dosahuje ohybový moment **M<sub>o</sub>(x)** lokálny extrém (maximum alebo minimum).

- Ak dosadíme do  $-q(x) = dT(x) / dx$  za **T(x)** z rovnice pre 2.S-Ž

$T(x) = dM(x) / dx$  dostaneme

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad (8.4)$$

tzn. **q(x)** predstavuje zápornú hodnotu 2. derivácie **M<sub>o</sub>(x)**.

Preto pre:

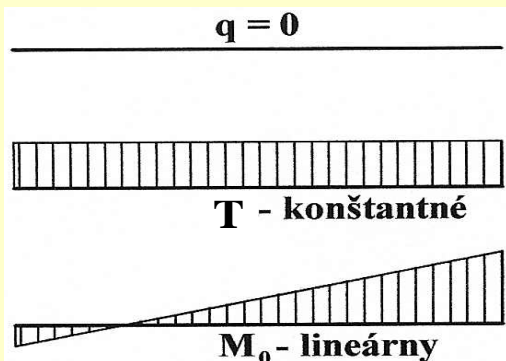
- $q > 0$  je  $\mathbf{M}_o''(x) < 0$  a krivka priebehu  $\mathbf{M}_o(x)$  je konkávna;
- $q < 0$  je  $\mathbf{M}_o''(x) > 0$  a krivka  $\mathbf{M}_o(x)$  je konvexná (Obr.8.4).

*Všetky uvedené úvahy platia pri postupe zľava doprava.*

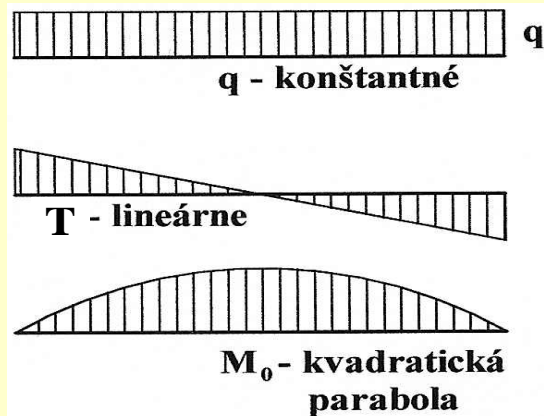
Pri opačnom postupe sa iba v rovniciach pre  $q$  a  $\mathbf{T}$  zmenia znamienka, rovnica druhej derivácie  $\mathbf{M}(x)$  sa nemení (Obr.8.4).

- Schwedler-Žuravského vety neplatia v miestach pôsobenia osamelých síl  $\mathbf{F}$  a momentov  $\mathbf{M}$ . V týchto bodoch nastávajú v priebehoch  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{M}_o$  nespojitosti (skoky, zlomy).
- Pre určenie tzv. **nebezpečného prierezu** nosníka je potrebné vyjadriť vzťahy pre  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$  a  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  v “určitom” mieste nosníka. Nebezpečný prierez sa nachádza práve v mieste najnepriaznivejšej kombinácie veľkosti oboch veličín ( $\mathbf{M}_o(\mathbf{x}) = \max$  a  $\mathbf{T}(\mathbf{x})=0$ ).

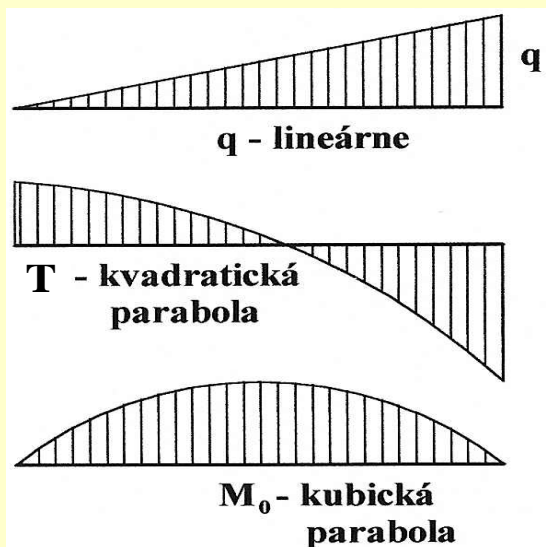
$q \dots \text{nulový} \Rightarrow T \dots \text{konšt.} \Rightarrow M_0 \dots \text{lineárny}$



$q \dots \text{konšt.} \Rightarrow T \dots \text{lineárny} \Rightarrow M_0 \dots \text{kvadratický}$



$q \dots \text{lineárny} \Rightarrow T \dots \text{kvadratický} \Rightarrow M_0 \dots \text{kubický}$



Obr.8.5

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

---

### Všeobecná charakteristika namáhania ohybom:

Po zaťažení nosníka (PDT) nastane jeho **pretvorenie** (prehnutie, ohyb). V objeme telesa vzniknú **doplnkové vnútorné sily**, brániace jeho pretvoreniu. Ich účinkom v objeme materiálu (ch. ako sústava hmotných bodov) vzniká **mechanické napätie**, vyjadrujúce intenzitu pôsobenia vnútorných silových účinkov. Vznikom napätosti sa nosník bráni jeho pretvoreniu.

Z pohľadu pretvorenia nastáva vplyvom priečného zaťaženia ( $F$ ,  $q$ ) **ohýbanie nosníka**. Strednica (os) prúta sa deformuje – zakriví sa a hovoríme o tzv. **priehybovej krivke**.

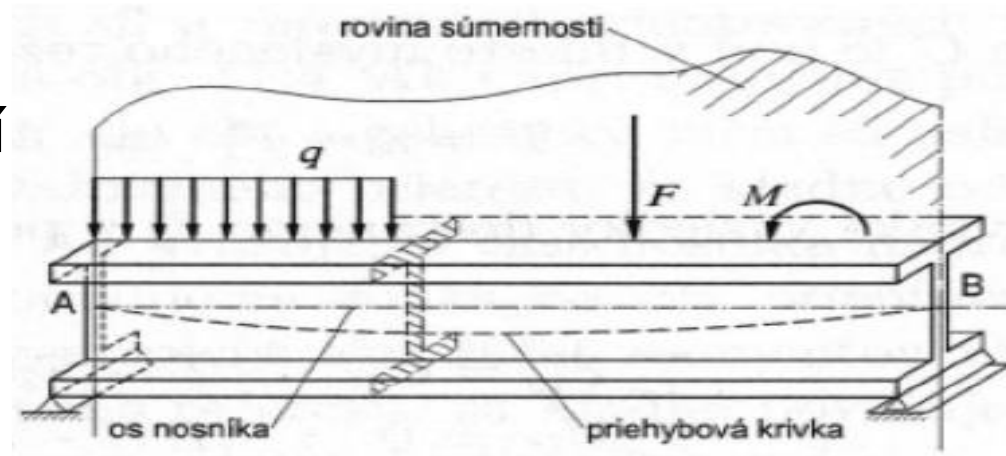
**Pretvorenie aj napätosť** u PDT namáhaných ohybom, okrem veľkosti a charakteru zaťaženia, priamo závisí aj od materiálových vlastností telesa, jeho rozmerov, ale aj tvaru a natočenia priečného prierezu – t.j. **vplyv má nielen veľkosť, ale aj tvar a natočenie prierezovej plochy**.

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

Podľa rozloženia zaťaženia v priestore rozoznávame:

### 1. Rovinný ohyb:

- vonkajšie zaťaženie pôsobí v rovine, v ktorej leží aj os symetrie priečného prierezu,
- os ohýbaného nosníka leží v tej istej rovine.



Obr.8.6

2. Priestorový (šikmý) ohyb: zaťaženie pôsobí v rôznych rovinách. Deformovaná os nosníka – *priehybová čiara* bude mať v tomto prípade tvar *všeobecnej priestorovej krivky*.

Podľa **zákona superpozície** možno prípad priestorového ohybu - *rozložiť na / zložiť z* - jednotlivých prípadov rovinného ohybu.

Pre pochopenie podstaty namáhania nosníkov ohybom v PaP preto začneme analýzou rovinného ohybu.

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

**1. Rovinný ohyb:** rovina pôsobenia ohybového momentu  $M_{(x)}$  je súčasne rovinou súmernosti (symetrie) prierezu.

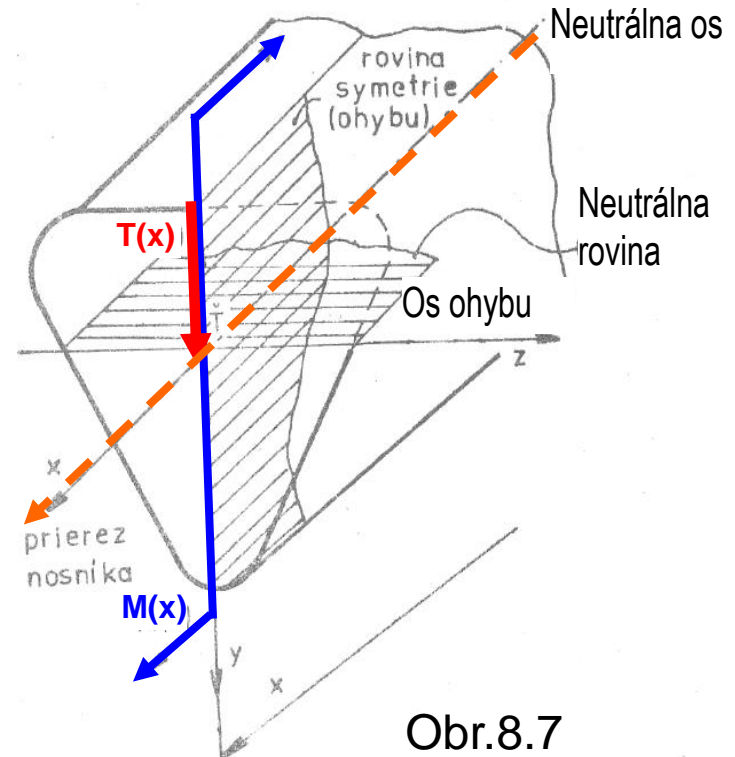
Vplyvom pôsobenia vonkajšieho zaťaženia sa nosník prehýba, pôvodne priama os (ako spojnica ťažísk prierezov) sa zakriví a deformácia nastáva v rovine pôsobenia zaťaženia - vyvoláva vznik  $T(x)$  a  $M_{(x)}$ .

Pri rovinnom ohybe (Obr.8.7):

- *horné vlákna sú stláčané,*
- *spodné vlákna sú naťahované,*
- *niektoré vlákna dĺžku nemenia.*

takéto vlákna nazývame **neutrálne** a vyplňajú tzv. **neutrálnu rovinu**.

Priesečnica roviny symetrie (ohybu) a neutrálnej roviny je **neutrálna os**.



Obr.8.7

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

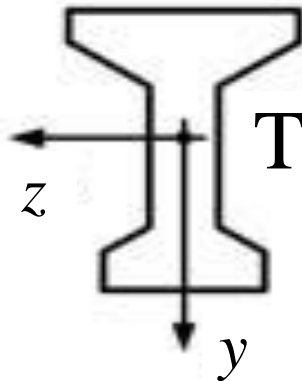
---

### Súradnicový systém a jeho orientácia:

Pri rovinnom ohybe najčastejšie využívame systém súradníc, pri ktorom je rovinou ohybu rovina  $x$ - $y$ .

Obvykle platí:

- pozdĺžna os prúta je os  $x$ , os  $+y$  je orientovaná smerom nadol (*kladný  $M_o$ , preto aj pri vykresľovaní priebehov  $M_o$  kreslíme priebeh pod nulovú os*). Os  $z$  je na rovinu  $x$ - $y$  kolmá,
- pri rovinnom ohybe prizmatického prúta (nemenný prierez) prechádza neutrálna os ťažiskom  $T$  prierezu.





## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

---

### 1.1. Rovinný ohyb - napätosť

V ľubovoľne vedenom myslenom reze telesom (rez  $x$ ) vznikajú od zaťaženia (pôsobí v rovine ohybu), vnútorné silové účinky a to: **ohybový moment  $M_o(x)$**  a / alebo **priečna sila  $T(x)$** .

V prípade ak:

- **$T(x) = 0$ ,  $M_o(x) \neq 0$**  – ide o tzv. **čistý (jednoduchý) ohyb**,
- **$T(x) \neq 0$ ,  $M_o(x) = 0$**  - ide o tzv. **čistý šmyk (strih)**,
- **$T(x) \neq 0$ ,  $M_o(x) \neq 0$**  - ide o **všeobecný rovinný ohyb**.

Ohybový moment  **$M_o(x)$**  a posúvajúca sila  **$T(x)$**  predstavujú vnútorné veličiny, charakterizujúce vplyv vonkajšieho zaťaženia na nosník v ľubovoľne uvažovanom priereze  $X$ .

Intenzitu pôsobenia týchto silových veličín v priereze vyjadrujeme ako - **normálové napätie  $\sigma$**  a **šmykové napätie  $\tau$** .

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

Platí:

- Ohybový moment  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$  pri rovinnom ohybe - pôsobí vždy v rovine kolmej na myslený rez a preto vyvoláva vznik **normálovej zložky** všeobecného napätia  $p$ , tzn. **normálové napätie**  $\sigma$  ( $\sigma = f(\mathbf{M}_o(\mathbf{x}))$ ).
- Priečna sila  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  pri rovinnom ohybe - leží vždy v rovine rezu (čistý šmyk) a preto vyvoláva vznik **tangenciálnej zložky** všeobecného napätia  $p$  – tzn. **šmykové napätie**  $\tau$  ( $\tau = f(\mathbf{T}(\mathbf{x}))$ ).

**Pri ohybe nosníkov sú napätia po priereze rozložené vždy nerovnomerne.**

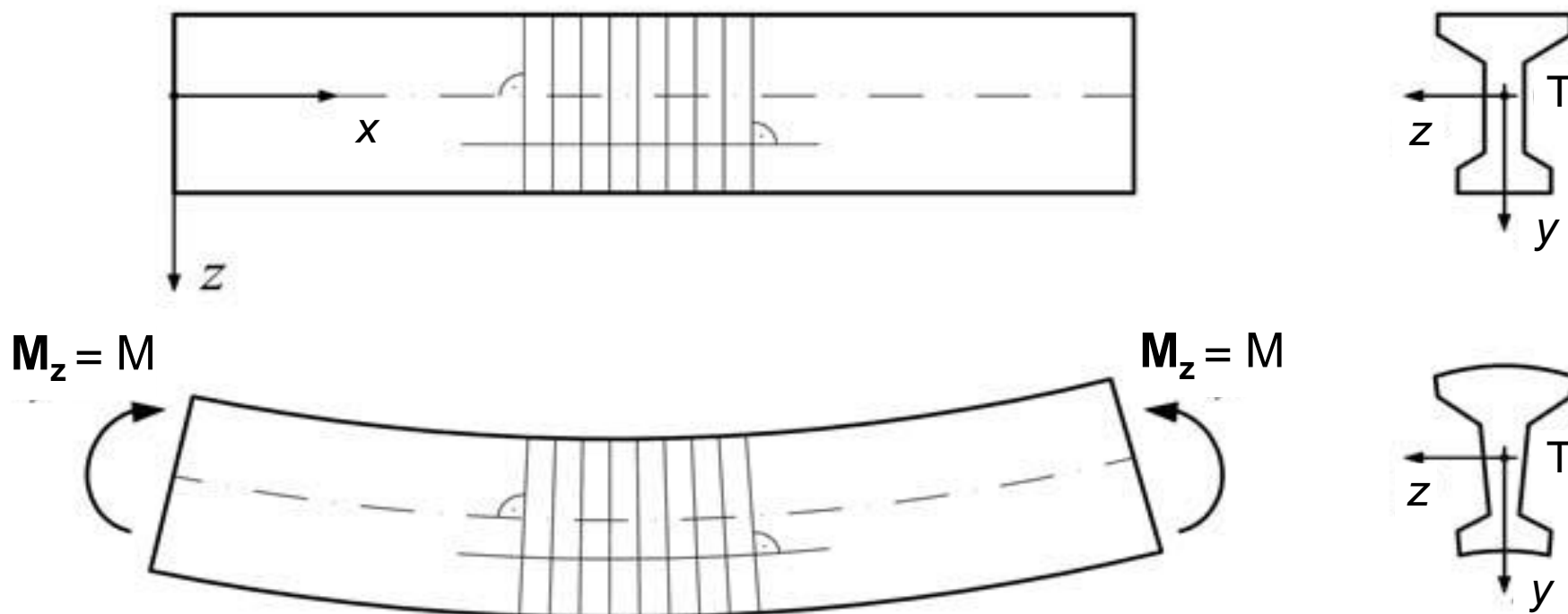
V praxi sa často vyskytujú tzv. **štíhle nosníky** ( $l > 15 \cdot h$ ), kde výrazne prevažuje vplyv vnútorného ohybového momentu  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$  na celkovú mieru ich pretvorenia a napätosti.

**U štíhlych prútoch vplyv od priečnej sily  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  zanedbávame.**

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

Uvedme najskôr iba prípad **čistého ohybu**.

**Čistý ohyb** = najjednoduchší prípad rovinného ohybu. Priečne sily v nosníku sú nulové  $\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ . Jedinou nenulovou zložkou vnútorných síl v priereze je ohybový moment  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{o(z)}$  (Obr.8.8).



Obr.8.8

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

V prípade čistého ohybu, napr. v rovine x-y platí

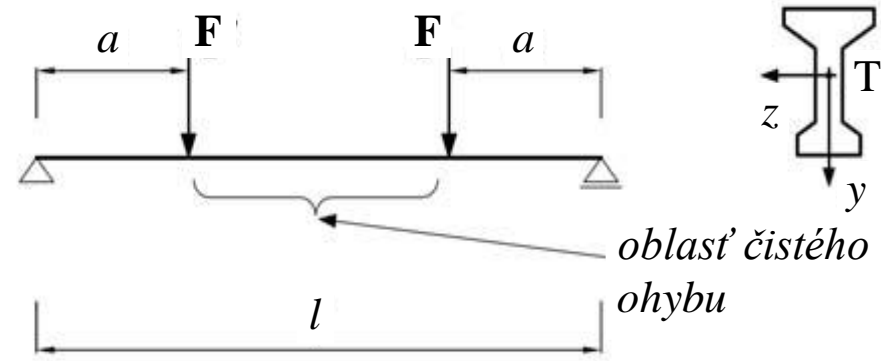
$$\mathbf{N} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T}_z = \mathbf{T}_y = \mathbf{0} \quad (8.5)$$

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_y = \mathbf{0} \quad \text{resp.}$$

$$\mathbf{M}_z \neq \mathbf{0}$$

Na obr.8.9 je vyznačená oblasť čistého ohybu ( $T_y = 0$ ).



$$\textcircled{M_z}$$



$F \cdot a = \text{konštantný moment } M_z$

$$\textcircled{T_y}$$



Obr.8.9

## 8.1 Rovinný ohyb a jeho charakteristika

Výpočtové postupy pri analýze čistého ohybu štíhlych prútov ( $l > 15 \cdot h$ ) vychádzajú z tzv. **Bernoulliho hypotéz.**

- *priečne prierezy, ktoré boli pred deformáciou rovinné, zostanú pri čistom ohybe ( $T_y = T_z = 0$ ,  $M_{o(z)} \neq 0$ ) rovinné aj po deformácii,*
- *pozdĺžne vlákna na seba netlačia a preto sa účinkom normálových napätí iba lineárne predĺžia alebo skrátia (v závislosti od ich polohy v priečnom reze - parameter  $y$ ),*
- *deformácia vlákien nezávisí od ich polohy v šírke prierezu (v smere osi  $z$ ) a preto normálové napätia, ktoré sa po výške prierezu (smer osi  $y$ ) menia, sú po šírke prierezu rovnaké,*
- *materiál nosníka vyhovuje podmienkam platnosti Hookeovho zákona, t.j. modul pružnosti materiálu v ťahu i tlaku je rovnaký.*

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

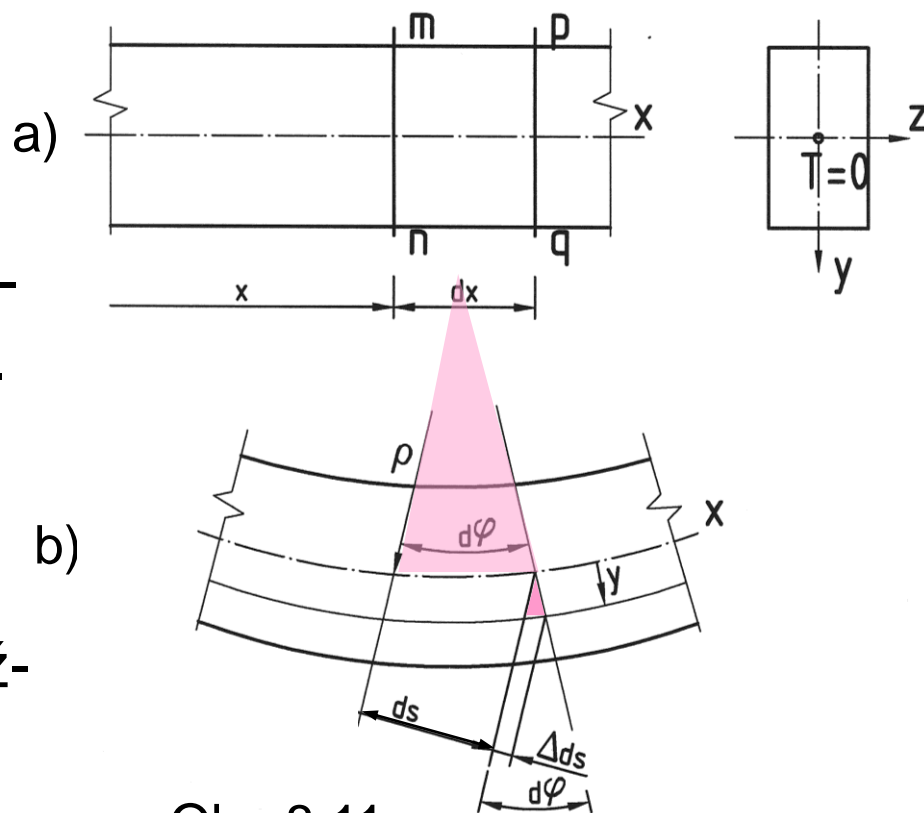
### 1.2. Normálové napätie v ohýbanom nosníku

Uvažujme iba časť nosníka (Obr.8.11). V myslenom reze ( $m-n$ ) pôsobí vnútorný ohybový moment  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$ , v reze ( $p-q$ ) pôsobí iný moment  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{M}_o(\mathbf{x}) + d\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$ .

Predpoklady:

- platia Bernoulliho hypotézy,
- na elementárnej dĺžke  $dx$  (obr. 8.11a) je zmena vnútorného ohybového účinku zanedbateľná, t.j. ( $d\mathbf{M}_o \cong \mathbf{0}$ ).

Pretvorenie časti nosníka je možné znázorniť podľa Obr.8.11b.



Obr. 8.11

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Myslené pozdĺžne vlákna sa pri naznačenom ohybe **na hornej strane nosníka skrátia**, vlákna **naspodu sa predĺžia** a niektoré vlákna svoju **dĺžku nezmenia** (vypĺňajú neutrálnu plochu).

Vybrané vlákno (leží vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi  $z$ ) sa predĺži o hodnotu  $\Delta ds$ .

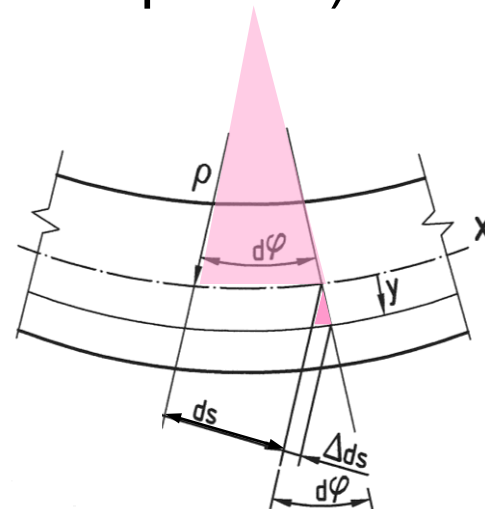
Z podobnosti trojuholníkov

$$\operatorname{tg} d\varphi = \frac{ds}{\rho}, \quad \operatorname{tg} d\varphi = \frac{\Delta ds}{y} \quad (9.6a)$$

porovnaním rovníc dostaneme pre pomerné predĺženie vlákna

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \operatorname{tg} d\varphi}{\rho \cdot \operatorname{tg} d\varphi} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}} \quad (9.6b)$$

kde  $\rho$  je tzv. **polomer krivosti** pozdĺžnej osi  $x$  prúta a  $y$  je vzdialenosť sledovaného vlákna od neutrálnej osi  $x$  nosníka.



## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Pri čistom ohybe sú vlákna namáhané iba ťahom / tlakom a preto je možné pomerné predĺženie ohýbaných vlákien určiť aj z Hookeovho zákona pre ťah / tlak

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (8.7a)$$

Porovnaním deformácií vlákna vo vzdialenosti „y“ podľa (8.7a) a (8.6b) získame rovnicu v tvare

$$\varepsilon = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = E \frac{y}{\rho}} \quad (8.7b)$$

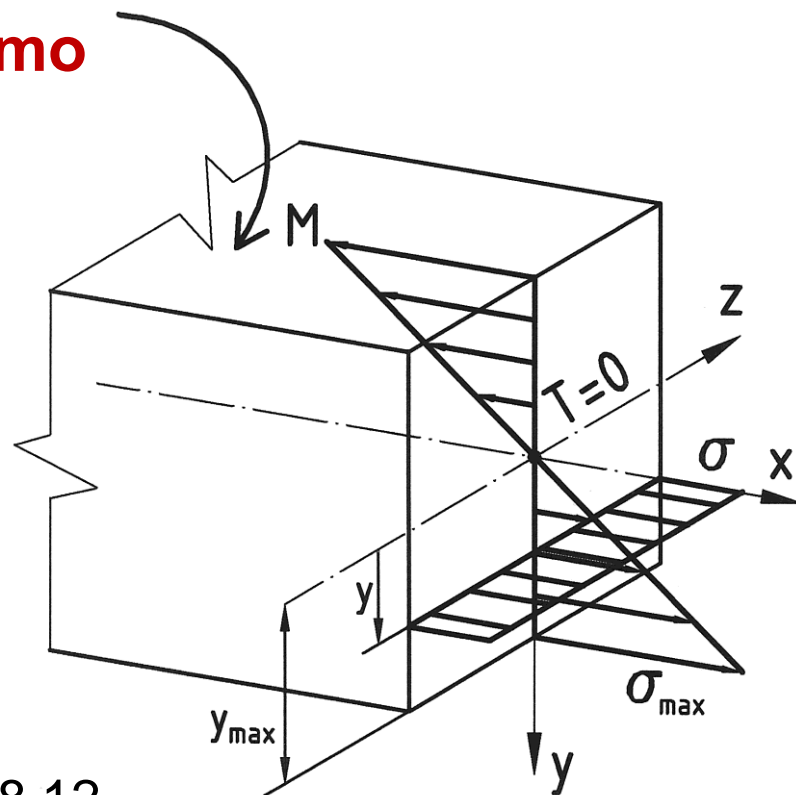
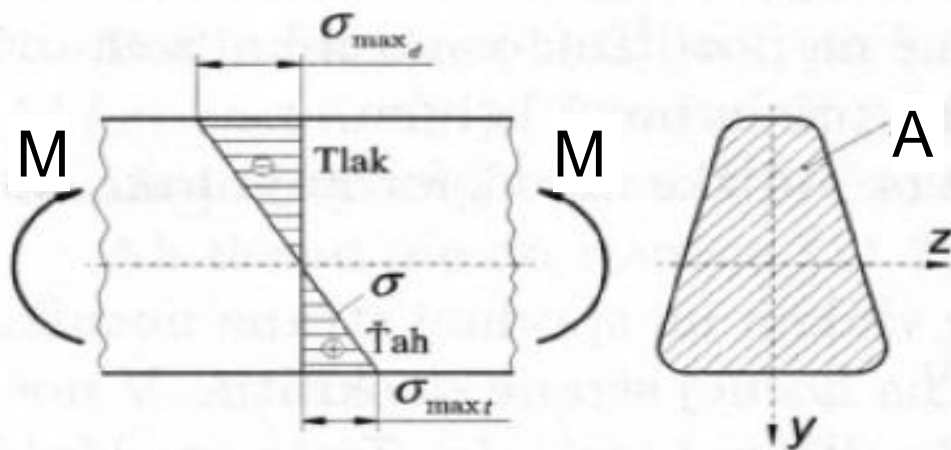
jednoznačne vyjadrujúcu **nerovnomernosť rozloženia normálového napätia  $\sigma$**  po priereze ohýbaného prúta (premenná  $y$ ).



## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Nakoľko  $E$ , aj  $\rho$  sú pre ľubovoľné vlákno konštantné, z (8.7b) vyplýva: **Pri čistom ohybe je nerovnomernosť rozloženia normálového napätia  $\sigma$  po ploche  $A$  prierezu určená lineárnou funkciou**, s premennou  $y$  (t.j. vzdialenosťou vybraného vlákna od neutrálnej osi - obr.8.12, príp.8.11).

**Normálové napätie v prúte je priamo úmerné vzdialenosti  $y$  vlákna od neutrálnej roviny (Obr.8.12) a jeho veľkosť nezávisí od súradnice  $z$ .**



Obr.8.12

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Rovnica (8.7.b) obsahuje parameter  $\rho$  - **polomer krivosti**.

Ten možno vyjadriť z úvahy, že pri čistom ohybe je výsledkom účinku vnútorných síl v každom priečnom reze iba moment  $\mathbf{M}_o(z)$ .

Pre veľkosť polomeru krivosti  $\rho$  nosníka platí

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_o}{E \cdot I_z} \Rightarrow \rho = \frac{E \cdot I_z}{M_o} \quad (8.8)$$

kde  $I_z$  je tzv. *kvadratický moment prierezu k osi z* [ $\text{m}^4$ ].

Z (8.8) vyplýva: **Krivosť nosníka je priamoúmerná veľkosti ohybového momentu  $M_o$  a nepriamoúmerná súčinu  $E \cdot I_z$ .**

Pre normálové napätie po dosadení do (8.7b) za  $\rho$  z (8.8) platí:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad \sigma = E \frac{y}{\frac{E \cdot I_z}{M_o}} = E \cdot \frac{M_o \cdot y}{E \cdot I_z} \Rightarrow \sigma = \frac{M_o}{I_z} \cdot y \quad (8.9)$$

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Ako vidieť, najväčšie hodnoty dosiahne napätie  $\sigma$  v miestach najviac vzdialených od neutrálnej osi. Je možné preto tvrdiť:

**Normálové napätie pri čistom ohybe závisí iba od vzdialenosti vlákna  $y$  od neutrálnej roviny (x-z). Maximálna hodnota normálového napätia je v najvzdialenejších vláknach od neutrálnej roviny prierezu, t.j. vo vzdialenosti  $y_{\max}$ .**

Podľa (8.7b) resp. (8.8) tiež platí

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{\rho} \cdot |y_{\max}| \quad \text{resp.} \quad \sigma_{\max} = \frac{M_o}{I_z} \cdot |y_{\max}| \quad (8.10)$$

Pre napätie  $\sigma$  v ľubovoľnom vlákne (vzdialenosť  $y$ ) potom platí

$$\frac{\sigma_{(y)}}{\sigma_{\max}} = \frac{y}{y_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{(y)} = \frac{\sigma_{\max}}{y_{\max}} \cdot y \quad (8.11)$$

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Pre prierezy súmerné vzhľadom k neutrálnej rovine x-z platí rovnosť  $|y_{\max}| = y_{\max}$  a rovnicu (8.10) potom možno zapísať aj ako

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{o \max}}{I_z} \cdot |y_{\max}| = \frac{M_{o \max}}{y_{\max}} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_{o \max}}{W_{0(z)}} \quad (8.12)$$

kde veličina

$$W_{0(z)} = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (8.13)$$

predstavuje **modul prierezu v ohybe**  $W_o$  [m<sup>3</sup>] a závisí nielen od veľkosti ( $y_z$ ), ale aj od tvaru a orientácie ( $I_z$ ) plochy prierezu.

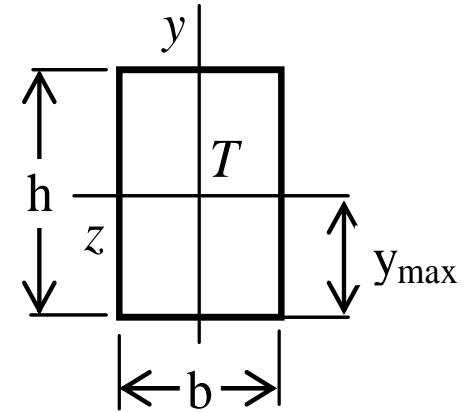
## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

### Napr: pre prierez v tvare obdĺžnika

(výška  $h$ , šírka  $b$ ) platí

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

a pre  $y_{\max} = h/2$ , prierezový modul v ohybe bude vzhľadom na os  $z$  ( $W_{o(z)}$ ) definovaný v tvare



$$W_{o(z)} = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} \Rightarrow \mathbf{W_{o(z)} = \frac{b \cdot h^2}{6}} \quad (8.14a)$$

Modul obdĺžnikového prierezu v ohybe, k osi  $y$  -  $W_{o(y)}$  potom je

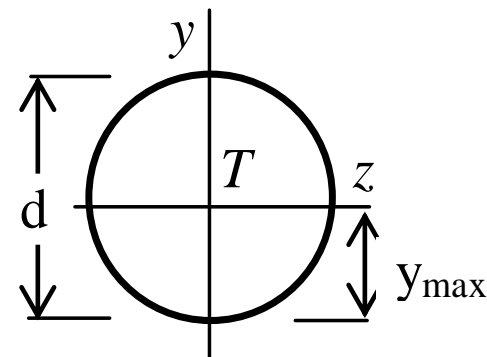
$$W_{o(y)} = \frac{I_y}{\frac{b}{2}} = \frac{\frac{h \cdot b^3}{12}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow \mathbf{W_{o(y)} = \frac{h \cdot b^2}{6}} \quad (8.14b)$$

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Napr. pre kruhový prierez, ako základný plne symetrický prierez, napr. kruh s priemerom  $d$  platí

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

a vzdialenosti do krajných vlákien sú  $y_{\max} = d/2$ .

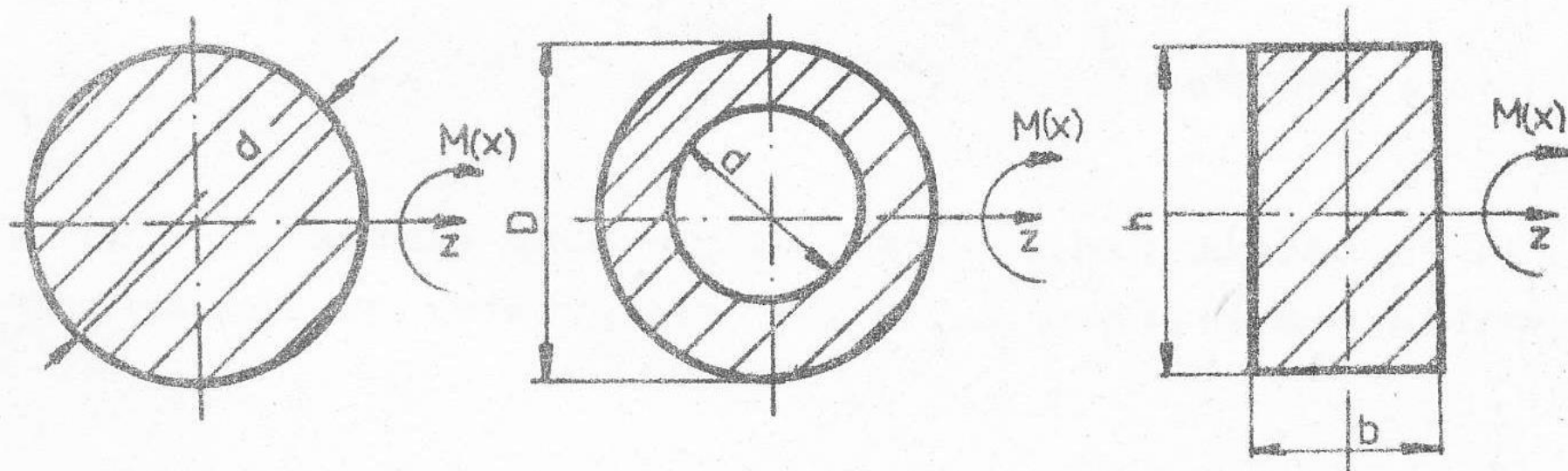


**Modul prierezu kruhového tvaru** v ohybe má potom tvar

$$W_{oy} = W_{oz} = \frac{I_z}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi}{64} \cdot d^4}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \mathbf{W_{oy} = W_{oz} = \frac{\pi}{32} \cdot d^3} \quad (8.14c)$$

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Prierezové moduly v ohybe pre vybrané základné prierezy:



$$W_o = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \doteq 0,1 \cdot d^3$$

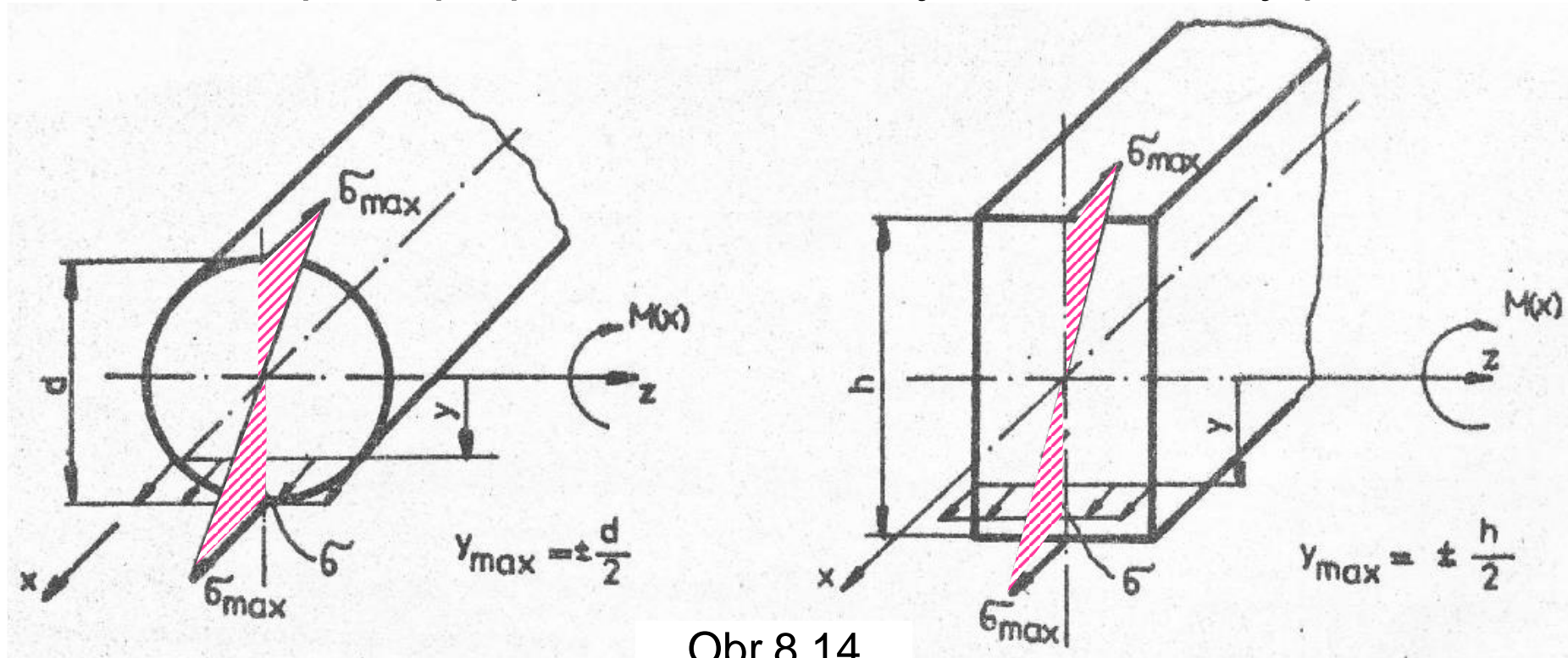
$$W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

$$W_o = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Obr.8.13

## 8.2 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Priebeh napätia po priereze - kruhový a obdĺžnikový prierez:



Z uvedených priebehov napätí vyplýva:

- **Vlákna najvzdialenejšie** od neutrálnej roviny sú pri namáhaní čistým ohybom **namáhané najväčším normálovým napätím  $\sigma_{max}$**  (ťah / tlak)



### Praktické závery z analýzy napätosti pri ohybe:

- **Vlákná v blízkosti neutrálnej roviny nie sú dostatočne využité** z hľadiska ich namáhania normálovým napätím.

Pri prvkoch namáhaných čistým ohybom je preto vhodné voliť také typy prierezov, kde je materiál nosníka sústredený ďalej od neutrálnej roviny (duté profily - napr. medzikruhový prierez, dutý obdĺžnikový profil, profily U, I, T a pod.).

- **Orientáciu nosníka je vhodné voliť tak**, aby bol ohýbaný okolo tzv. **hlavnej centrálnej osi prierezu** (t.j. okolo tej osi, ku ktorej nadobudne moment zotrvačnosti / väčšiu hodnotu).
- **Pevnostná podmienka** namáhania čistým ohybom:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{o \max}}{W_o} \leq \sigma_{DOV} \quad (9.15)$$

## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

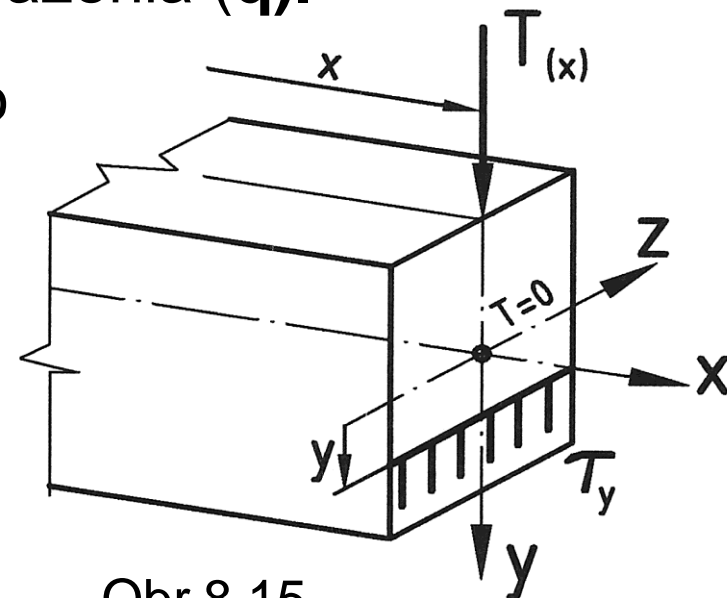
### 1.3. Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Doteraz sme uvažovali s prípadom **čistého ohybu**, t.j.  $T(x)=0$  a  $M_o(x)=\text{konšt.}$

V praxi sa čistý ohyb vyskytuje výnimočne. Na nosník okrem momentu  $M_o$  obvykle pôsobí aj priečna(tangenciálna) sila  $T$ .

Sila  $T$  vzniká buď od zvislo pôsobiaceho zaťaženia silami ( $F$ ) alebo od vplyvu spojitého priečného zaťaženia ( $q$ ).

Dôsledok: v priereze nosníka, pri jeho ohýbaní vplyvom osamelých ( $F$ ) resp. spojitro rozložených ( $q$ ) priečných zaťažení, vznikajú tangenciálne sily  $T$ , vyvolávajúce vznik **šmykového napätia**  $\tau$  (obr.8.15).



Obr.8.15

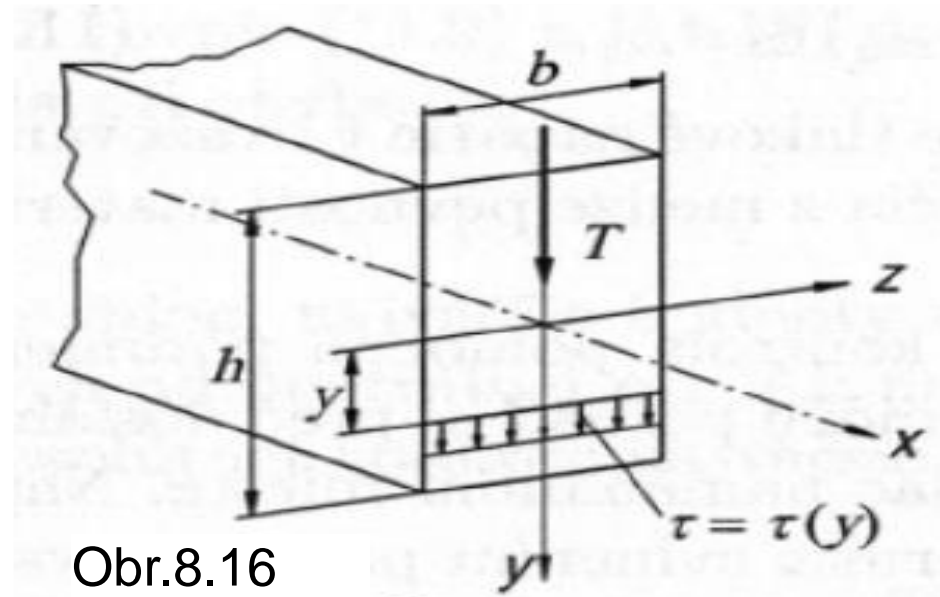
### 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Majme nosník s obdĺžnikovým prierezom napr. Obr.8.16.

Podľa Bernoulliho hypotézy o rozložení šmykových napätí v priereze je možné tvrdiť, že **šmykové napätia budú:**

- **rovnobežné** so smerom pôsobenia tangenciálnej sily  $T$ ,
- **rovnaké po celej šírke  $b$** , t.j. nebudú závislé na súradnici  $z$ .

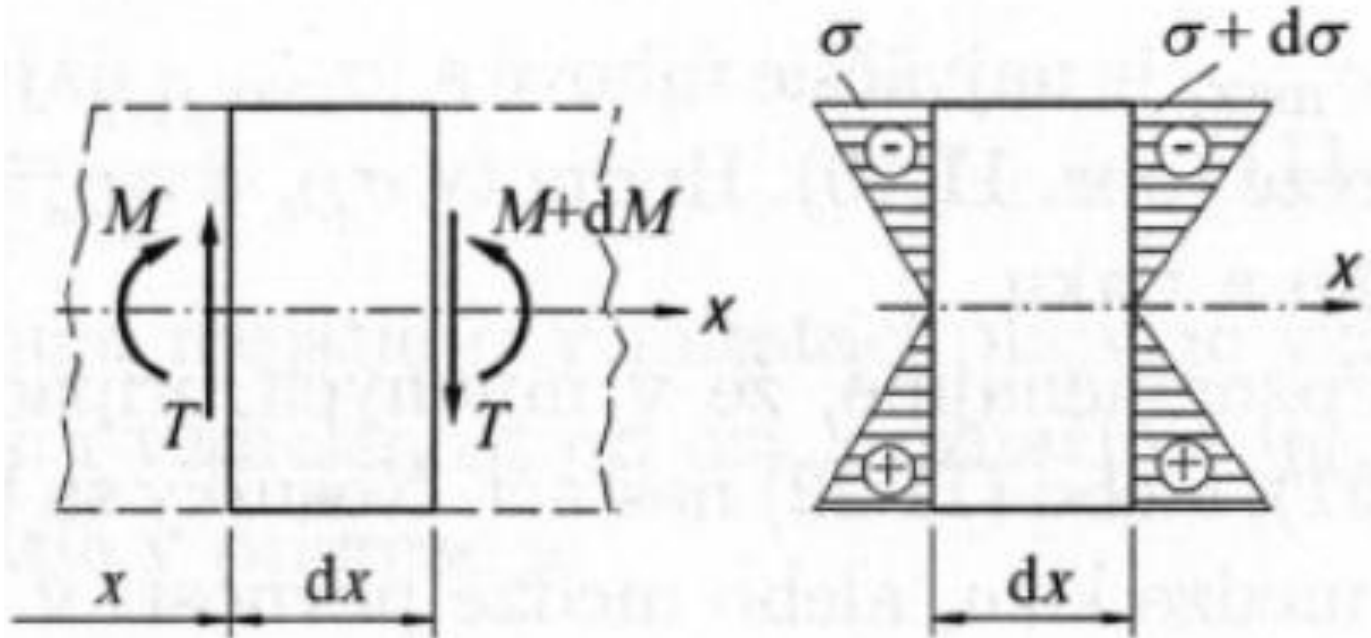
Záver: **Šmykové napätie pôsobiace na vláknoch vzdialených od neutrálnej roviny vo vzdialenosti  $y$  budú rovnaké.**



Obr.8.16

### 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

**Dôkaz vzniku šmykových napätí:** uvažujme element, vybraný z ohýb. Nosníka dvomi rezmi, vzdialenými o  $dx$ . (Obr.8.18).

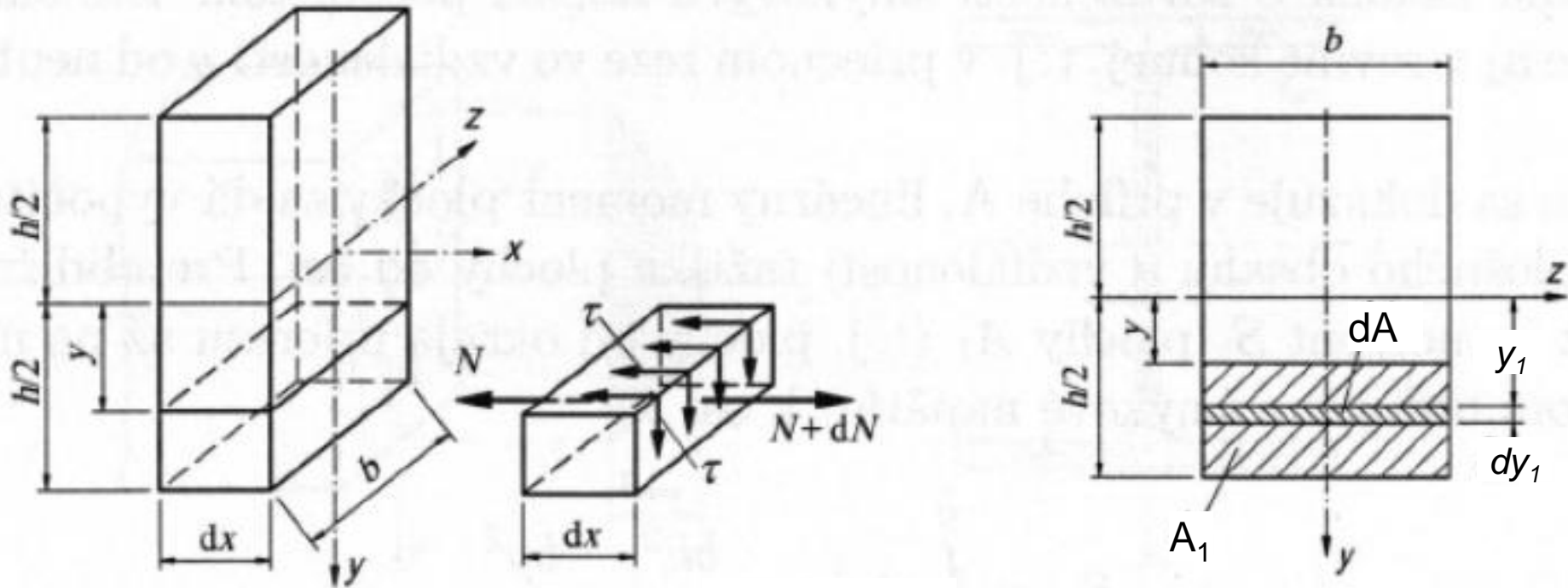


Obr.8.18

Pretože  $T \neq 0$ , ohybový moment  $M_0$  sa po dĺžke nosníka mení. Ak je v ľavom priereze ohybový moment  $M$ , v pravom priereze je ohybový moment  $M+dM$ , ktorým odpovedajú hodnoty normálového napätia  $\sigma$  (v reze naľavo) a  $\sigma+d\sigma$  (v reze napravo).

## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Z riešeného elementu ďalším rezom, vedeným vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej roviny  $x$ - $z$ , oddeľme časť uvedenú na Obr.8.19

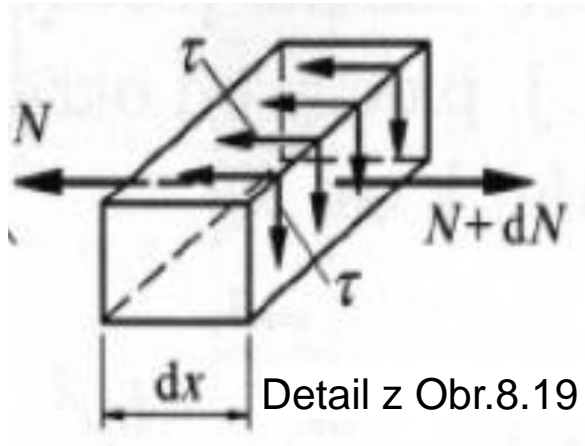


Obr.8.19

Výslednicou napätí  $\sigma$  pôsobiacich na ľavej stene je sila  $\mathbf{N}$ , výslednica napätí  $\sigma + d\sigma$  na pravej stene je sila  $\mathbf{N} + d\mathbf{N}$ . Tieto sily pri ohybe však v **rovnováhe nikdy nebudú** – odlišná veľkosť.

## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Znamená to: ak by na oddelenú časť pôsobili iba uvedené sily, rovnováha by nebola možná !!! Na element preto musí pôsobiť aj ďalšia silová veličina = **posúvajúca sila T**, ktorej intenzitu pôsobenia vyjadrujeme **šmykovým napätím  $\tau$** .



Šmykové napätie získame napr. z podmienky rovnováhy pre odrezanú časť elementu (Obr.9.19) a platí

$$\sum F_{ix} = 0 : (N + dN) - N - T = 0 \quad (8.16)$$

$$\sum F_{ix} = 0 : (N + dN) - N - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

Silu **N** možno určiť ako integrál zo súčinu  $\sigma \cdot dA$  po ploche  $A_1$  ľavej steny uvažovanej časti (Obr.8.19 vpravo) a platí

$$N = \int_{A_1} \sigma \cdot dA = \int_{A_1} \frac{M_o}{I_z} y_1 \cdot dA = \frac{M_o}{I_z} \int_{A_1} y_1 dA$$

## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Integrál  $\int y_1 dA = U_z$  predstavuje tzv. lineárny moment plochy  $A_1$  k neutrálnej rovine  $x$ - $z$  prierezu. Pre  $\mathbf{N}$  potom platí

$$N = \frac{M_o}{I_z} \cdot U_z$$

Analogicky je možné určiť aj  $N + dN = \frac{M_o + dM_o}{I_z} \cdot U_z$

Ak uvedené vzťahy dosadíme do rovnice rovnováhy (8.16) pre odrezanú časť elementu, po úprave dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0 \quad : \quad (N + dN) - N - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\frac{M_o + dM_o}{I_z} \cdot U_z - \frac{M_o}{I_z} \cdot U_z - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\frac{dM_o}{I_z} \cdot U_z - \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

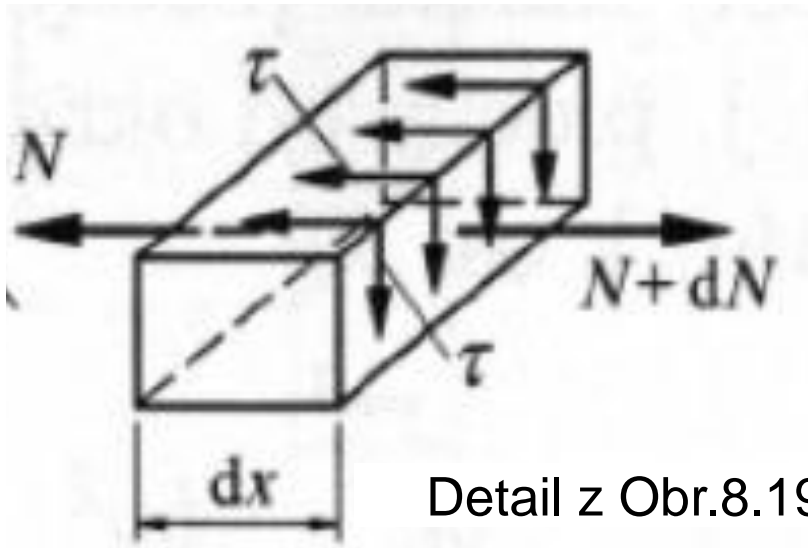
Úpravou dostaneme

$$\tau = \frac{dM_o}{dx} \frac{U_z}{I_z \cdot b}$$

Podľa 2. S-Ž vety platí  $\frac{dM_o}{dx} = T$

Pre šmykové napätie vo vzdialenosti  $y$  od neutrálnej osi obdĺžnikového prierezu potom platí

$$\tau = \frac{T \cdot U_z}{I_z \cdot b} \quad (8.17)$$



Detail z Obr.8.19

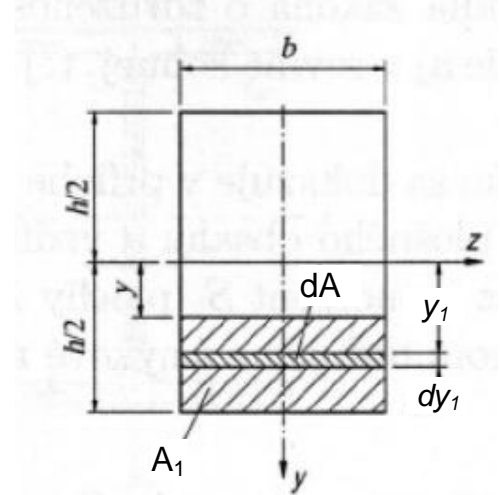
Podľa tzv. **zákona o združenosti šmykových napätí** musí pôsobiť rovnako veľké šmykové napätie aj v rovine kolmej, t.j. v bočnej stene odrezaného elementu (Obr.8.19).



## 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Napr. pre obdĺžnikový prierez: členy rovnice (8.17)

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$
$$U_z = \int_y^{\frac{h}{2}} y_1 \cdot b \cdot dy_1 = b \left[ \frac{y_1^2}{2} \right]_y^{\frac{h}{2}} \Rightarrow U_z = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



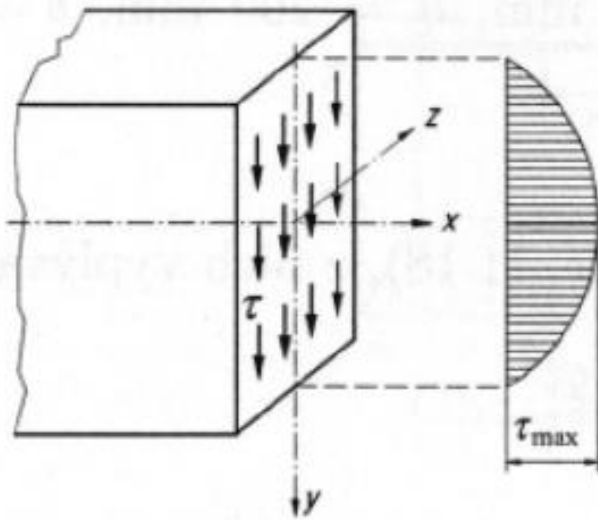
Ich dosadením do rovnice (8.17) a úprave výrazu dostaneme funkciu pre priebeh napätia  $\tau$  v priereze tvaru obdĺžnika. Platí

$$\tau_{\square} = \tau(y) = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \Rightarrow \tau_{\square} = \tau(y) = \frac{3T}{2 \cdot b \cdot h} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right] \quad (8.18)$$

Uvedený vzťah, pre obdĺžnikový prierez, predstavuje **funkciu druhého stupňa**, t.j. rovnicu paraboly.

### 8.3 Šmykové napätie v ohýbanom nosníku

Príklad charakteristického priebehu šmykového napätia pre prierez v tvare obdĺžnika je na obr.8.20.



Obr.8.20

**Najväčšie šmykové napätie pri ohybe pôsobí v neutrálnej rovine, tzn. pre  $y = 0$  (!).**

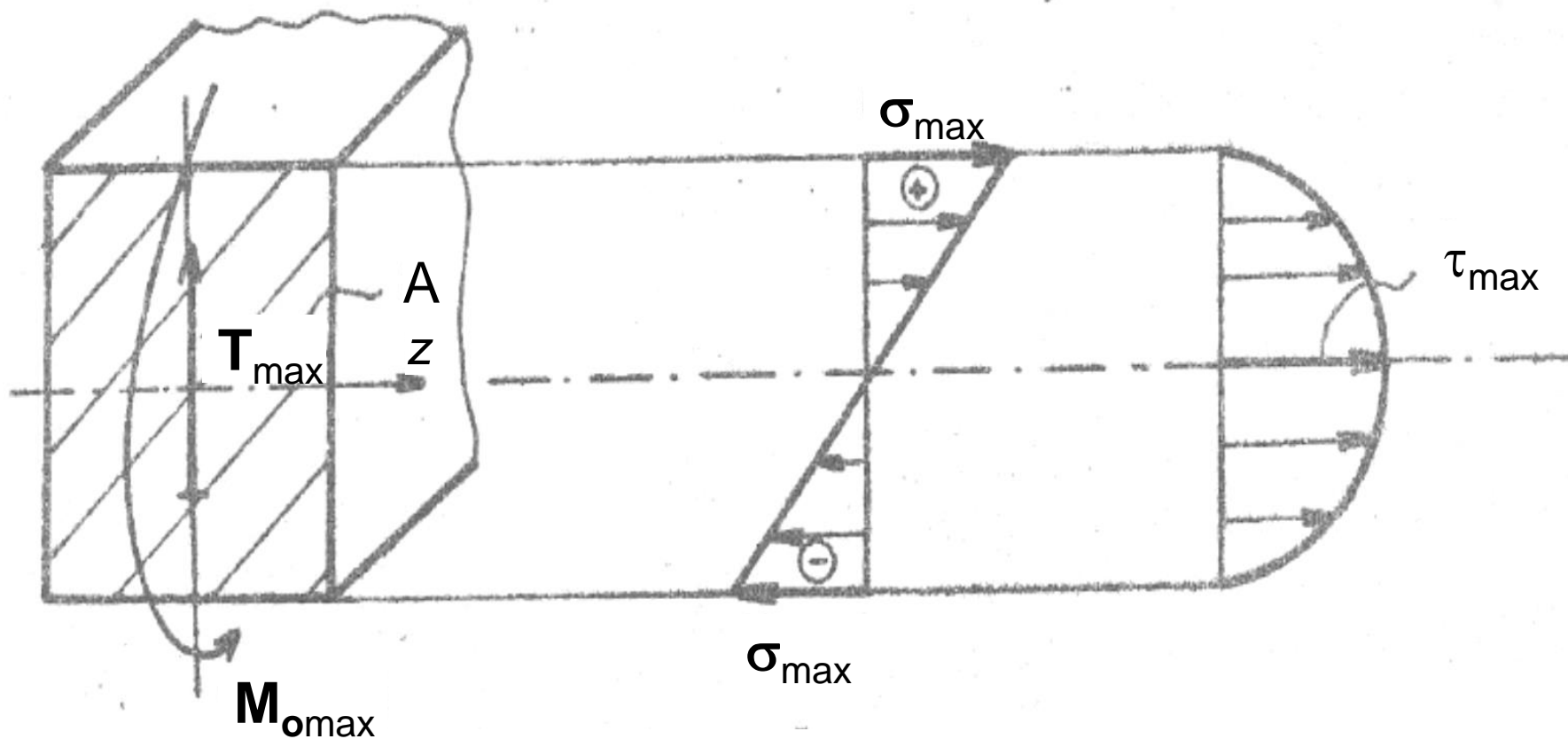
*Poznámka: v rovnici (8.18) je člen v okrúhlej zátvorke nulový a celý výraz v hranatej zátvorke dosiahne maximálnu možnú hodnotu (=1).*

Hodnota maximálneho šmykového napätia  $\tau$  na ohýbanom nosníku **s prierezom v tvare obdĺžnika** je

$$\tau_{\square \max} = \frac{3}{2} \frac{T}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot T}{2 \cdot A} \quad (8.19)$$

## 8.4 Podmienka pevnosti v ohybe

Dôsledok: **v prípade všeobecného rovinného ohybu nosníka vzniká v jeho prierezoch napätosť, určená normálovým napätím  $\sigma$  a šmykovým napätím  $\tau$  (Obr.8.21).**



Obr.8.21

## 8.4 Podmienka pevnosti v ohybe

---

Veľkosť  $\sigma$  a  $\tau$  pri ohybe závisí najmä na veľkosti vznikajúcich vnútorných síl: ohybového momentu  $\mathbf{M}_o(\mathbf{x})$  a priečnej sily  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ , ale aj *od polohy sledovaného miesta ( $y$ ) v priereze*.

Pri analýze rovinného ohybu štíhlych nosníkov (prierez oproti dĺžke je malý) vplyv od priečnej sily  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  obvykle zanedbávame a teda so vznikom šmykového napätia  $\tau$  neuvažujeme.

**Pevnostná podmienka pre ohyb** má v takomto prípade tvar

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{o\max}}{W_o} \leq \sigma_{DOV} \quad (9.20)$$

Znamená to, že maximálne normálové napätie v nebezpečnom priereze (t.j. v mieste, kde pôsobí  $M_{o\max}$ ) musí byť menšie ako hodnota dovoleného namáhania  $\sigma_{DOV}$  v ťahu / tlaku pre konkrétny materiál posudzovaného nosníka.

## 8.4 Podmienka pevnosti v ohybe

---

Z pevnostnej podmienky (podobne ako pre iné prípady namáhania) je pri znalosti určitých parametrov možné vykonať:

- **dimenzovanie** = určiť potrebné rozmery nosníka (ak poznáme materiál  $\sigma_{DOV}$  a zaťaženie nosníka),
- **posudzovanie** = či nedôjde k prekročeniu dovolenej úrovne namáhania (ak sú známe rozmery, materiál a zaťaženie prvku),
- **overovanie** = kvantifikácia prípustného zaťaženia nosníka (ak sú známe rozmery nosníka a materiál  $\sigma_{DOV}$ ).

## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

---

### 8.5. Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

Pôsobením účinkov od vonkajšieho zaťaženia sa pôvodne priama os nosníka pretvorí na tzv. *priehybovú čiaru (krivku)*. Takáto krivka je pri rovinnom ohybe rovinná (leží v 1 rovine) a priehyb môžeme popísať funkciou  $y = f(x)$  – *rovnica priehybu*.

Pri odvodzovaní rovnice priehybovej čiary **vplyv šmykových napätí  $\tau$  obvykle zanedbávame** (pri čistom ohybe sú napätia  $\tau$  nulové; u štíhlych prútov je zasa vplyv  $\tau$  na ich pretvorenie malý).

V takto zjednodušenom prípade je vzťah medzi krivosťou (polomerom krivosti  $\rho$ ) a ohybovým momentom  $M_o$  definovaný ako

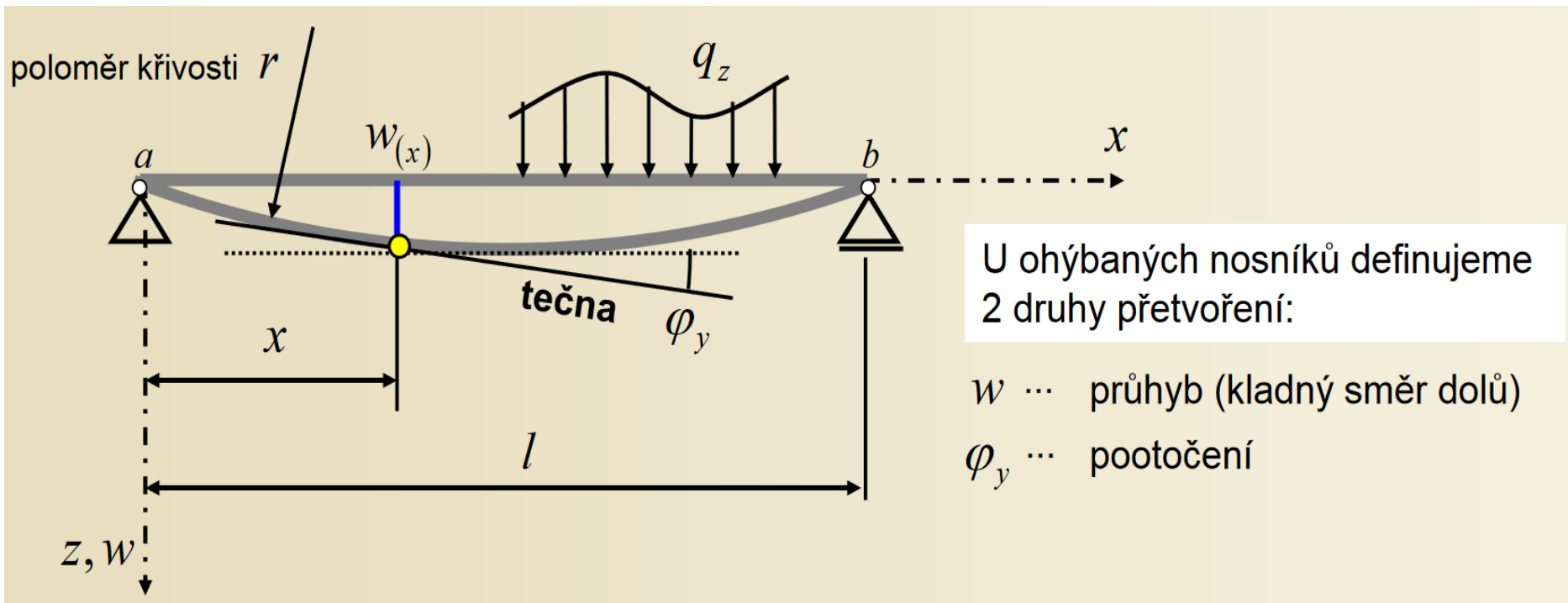
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_o}{E \cdot I_z}$$

$\Rightarrow$  krivosť nosníka  $\rho$  je priamoúmerná veľkosti ohybového momentu  $M_o$  a nepriamo úmerná súčinu  $E \cdot I_z$ .

## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

### Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary

Analyzovať deformáciu nosníka, obvykle znamená určiť **po-radnice priehybovej čiary**  $w_{(x)}$  (t.j. funkčné hodnoty priebehu krivky pre ktorýkoľvek bod  $x$  po celej dĺžke nosníka).



## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

---

### Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary

Vychádzajme opäť z predpokladu platnosti Hookeovho zákona a hypotézy malých deformácií (predpoklad“ priehybová čiara sa iba zanedbateľne líši od priamky - tzn. uhol sklonu  $\varphi$  dotyčnice ku priehybovej krivke je veľmi malý =  $tg \varphi \cong \varphi$ ).

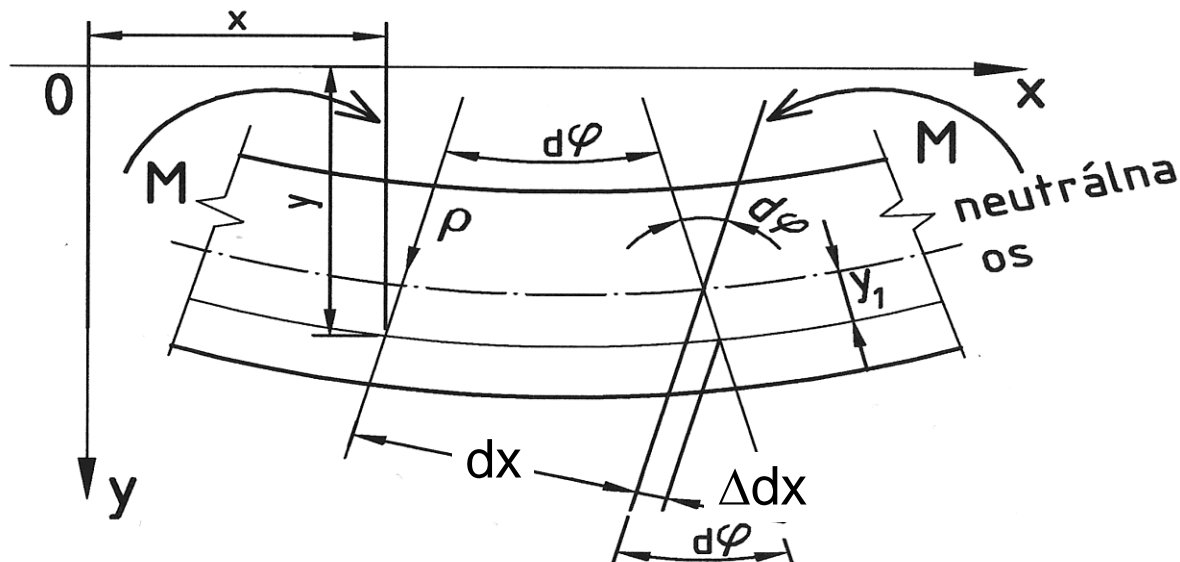
Rovnako, ako pri napätosti, aj pri výpočte pretvorenia ohýbaných nosníkov účinnok sily  $T(\mathbf{x})$  na ich deformáciu zanedbávame.

Uvedený predpoklad je však opäť opodstatnený iba u štíhlych nosníkov ( $h = L / 15$  až  $L / 20$ ) príp.  $L = \text{min. } 15 h$ .



## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

Uvažujme deformáciu nosníka namáhaného čistým ohybom



Obr. 8.21

Pomerné predĺženie vlákna vo vzdialenosti  $y_1$  od neutrálnej osi, resp. vo vzdialenosti  $y$  od osi  $x$  (Obr.8.21) je

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{y_1 d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y_1}{\rho}$$

$$\varepsilon = \sigma / E$$
$$\sigma = \frac{M_{o(x)}}{I_z} y_1$$

## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

---

Po ich dosadení do (8.18) a úprave výrazu dostaneme

$$\frac{y_1}{\rho} = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \frac{y_1}{\rho} = \frac{M_{o(x)}}{E \cdot I_z} \cdot y_1 \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_{o(x)}}{E \cdot I_z} \quad (8.19)$$

Pre polomer krivosti  $\rho$  pretvorenej osi prúta (pre nás hľadanej priehybovej čiary) platí z matematiky vzťah

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

kde  $y$  predstavuje funkčnú hodnotu krivky priehybovej čiary (v smere osi  $y$ ).

## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

---

Po dosadení za  $\rho$  do (10.19) a úprave výrazu dostaneme

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M_{o(x)}}{E.I_z} \quad (8.20)$$

Vzhľadom na to, že priehyby reálnych prvkov sú v porovnaní s ich rozmermi relatívne malé, možno člen výrazu  $y'^2$  zanedbať. Tým sa rovnica 8.20 výrazne zjednoduší a dostaneme základný tvar tzv. **približnej diferenciálnej rovnice priehybovej čiary**

$$y'' = - \frac{M_{o(x)}}{E.I_z} \quad (8.21)$$

**Poznámka:** znamienko + nie je v rovnici preto, aby vzhľadom na dohovor o zmysle pôsobenia kladných ohybových momentov, výpočet pre kladný zmysel ohybového momentu vždy viedol aj ku kladným hodnotám priehybu.

## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

---

Z rovnice (8.21) vyplýva, že funkciu priehybovej čiary môžeme z jedinej diferenciálnej rovnice určiť iba za predpokladu, že materiál nosníka je rovnaký ( $E=\text{konšt}$ ) a zmena momentu  $M_o(x)$  a kvadratického momentu prierezu  $I_z$  je po celej dĺžke nosníka spojitá.

Pre väčšinu prípadov nosných konštrukcií v technickej praxi nie je nutné poznať funkciu priehybovej čiary, ale stačí poznať iba jej sklon  $\varphi$ , príp. iba funkčnú hodnotu v určitom – významnom - mieste konštrukcie (napr. nebezpečný prierez a pod.).

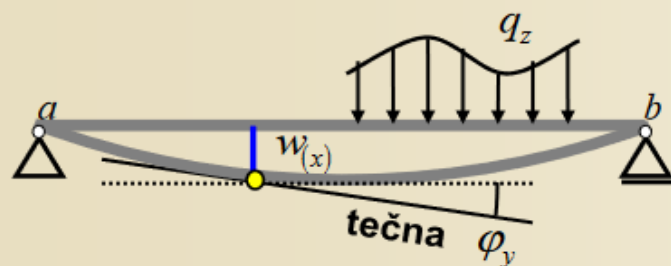
## 8.5 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

### 1) Přetvoření staticky určitého prutu

#### řešení přímou integrací ohybové čáry 2. řádu – silové zatížení

Při výpočtu přetvoření prutů v staticky určitých úlohách se vychází

z diferenciální rovnice ohybové čáry (II.řádu)  $M_y = -E.I_y \cdot w''$  [Nm]



$$EI \cdot w'''' = q \quad [\text{kNm}^{-1}],$$

$$EI \cdot w'''' = -V \quad [\text{kN}],$$

$$EI \cdot w'' = -M \quad [\text{kNm}],$$

$$w' = \varphi \quad [\text{rad}],$$

$$w = w \quad [\text{m}].$$

$$w(x) = ?$$

$$\varphi_y = ? = w'$$



$$M_y = -E.I_y \cdot w''$$

## 9.6 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

Silové zatížení:

### 1) Přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

Staticky určité případy ohýbaných nosníků – momentová funkce spojitá

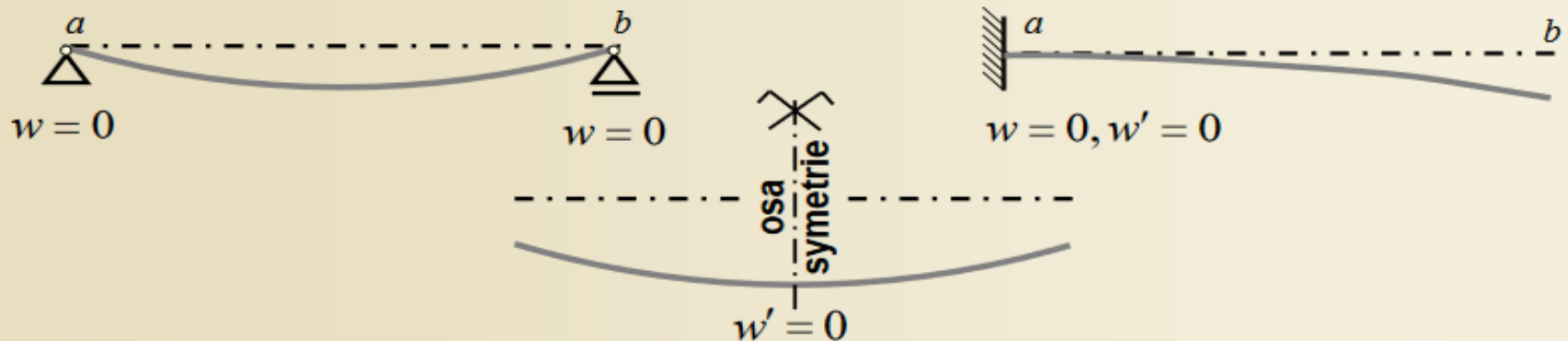
$$E.I_y \cdot w'' = -M_y$$

$$E.I_y \cdot w' = -\int M_y \cdot dx + C_1$$

$$E.I_y \cdot w = -\int \left[ \int M_y \cdot dx \right] dx + C_1 \cdot x + C_2$$

$C_1, C_2$  ... integrační konstanty

Integrační konstanty se určí z deformačních okrajových podmínek



## 9.6 Deformácia nosníkov pri rovinnom ohybe

Silové zatížení:

### Integrace diferenciální rovnice ohybové čáry 4.řádu

Diferenciální vztahy

$$w(x) = ?$$

$$\varphi_y = w'$$

$$M_y = -E \cdot I_y \cdot w''$$

$$V_z = -E \cdot I_y \cdot w'''$$

$$q_z = E \cdot I_y \cdot w^{IV}$$

$$E \cdot I_y \cdot w^{IV} = q(x)$$

$$E \cdot I_y \cdot w''' = \int q(x) + C_1 = -V_z$$

$$E \cdot I_y \cdot w'' = \iint q(x) + C_1 \cdot x + C_2 = -M_y$$

$$E \cdot I_y \cdot w' = \iiint q(x) + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3$$

$$E \cdot I_y \cdot w = \iiiii q(x) + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$$

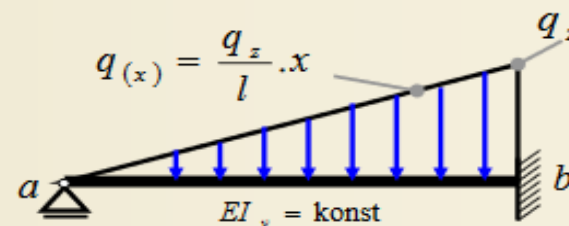
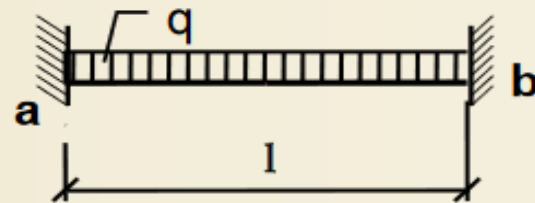
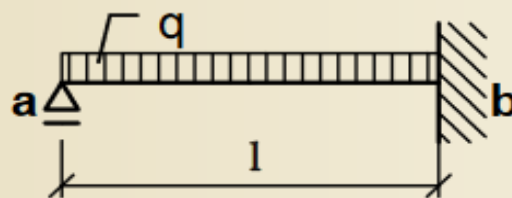
Řešení:

4 neznámé

$$C_1, C_2, C_3, C_4$$



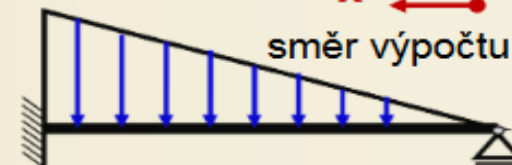
4 okrajové podmínky



Kladný směr osy x  
(lokální souřadný systém)

$x^+$

směr výpočtu



### Záverečné poznámky:

Okrem doteraz uvedených problémov riešenia napätosti a pretvorenia staticky určitých prípadov ohýbaných nosníkov je v praxi potrebné riešiť aj ďalšie prípady ohybového namáhania.

Jedná sa najmä o *riešenie ohybových účinkov od „pohyblivých zaťažení (bremien)“*, ako aj o transformáciu *staticky neurčito uložených konštrukcií namáhaných ohybom na úlohy staticky určité.*

S ohľadom na rozsah predmetu sa analýzou riešenia takto definovaných problémov pri ohybe nosníkov nebudeme zaoberať.





Otázky????

Ďakujem za pozornosť