

Vybrané vzťahy z lineárnej PaP:

1. Pozdĺžna deformácia:

- Absolútne predĺženie:

$$\Delta l = l_1 - l \quad [\text{m}]$$

- Relatívne predĺženie:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad [\%] \quad [-]$$

2. Priečna deformácia:

- Absolútne zúženie / rozšírenie:

$$\Delta l_y = \varepsilon_y \cdot l \quad \text{resp.} \quad \Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l \quad [\text{m}]$$

- Relatívne zúženie / rozšírenie:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-\varepsilon_x}{m} = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \quad [\%] \quad [-]$$

3. Teplotná dĺžková rozťažnosť:

- Absolútne predĺženie: $\Delta l_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l$ [m] a potom $l_1 = l + \Delta l$ [m]

alebo priamo dĺžka po pretvorení vplyvom teploty

$$l_1 = l \cdot (1 + \alpha_t \cdot \Delta t) \quad [\text{m}]$$

- Relatívne predĺženie: $\varepsilon_t = \alpha_t \cdot \Delta t$ [-]

Ďalšie možné vzťahy: $\alpha_t = \frac{\varepsilon_t}{\Delta t}$, $[\text{°C}^{-1}]$ $\sigma_t = \varepsilon_t \cdot E = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E$ [Pa]

4. Hookeov zákon:

- ťah / tlak: $\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{\Delta l}{l} \cdot E$ [Pa]

- šmyk: $\tau = \gamma \cdot G$ [Pa]

5. Podmienky bezpečnosti:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{DOV}, \quad \text{resp.} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{DOV},$$

kde: $\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_K}{k}$ alebo $\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_M}{k}$, resp. $\tau_{DOV} = \frac{\tau_K}{k}$, alebo $\tau_{DOV} = \frac{\tau_M}{k}$.

Čistý ťah / tlak:

1. Bez uvažovania vlastnej tiaže

- Normálové napätie: $\sigma = \pm \frac{N}{A}$ [Pa],

kde $N = \sum F_{ix}$ [N] je normálová sila pôsobiaca v priereze, A je prierezová plocha (m^2)

- Absolútne pretvorenie: $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$ [m]

- Pomerné pretvorenie: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E \cdot A}$ [-]

2. S uvažovaním vlastnej tiaže:

- Normálové napätie: $\sigma = \frac{N}{A} + \rho \cdot g \cdot l = \frac{N}{A} + \gamma \cdot l$ [Pa],

kde $\rho \cdot g = \gamma$ [N/m³]

$$N = N_F + N_G \Rightarrow N = \sum F_{ix} + (\rho \cdot g \cdot A \cdot l) \quad [N]$$

- Absolútne pretvorenie: $\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_G \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{2E} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2E}$ [m]

- Pomerné pretvorenie: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l}{2E}$ [-]

Úvod do náuky o PaP - príklady

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/kaderova.j/frvs/frvs.html>

Uvedené príklady pochádzajú z url:

<http://www.priklady.eu/cs/Fyzika/Deformace-pevných-latek.alej>

1. Čo je treba vedieť o deformácii pevných látok?

Riešenie:

Deformácia je zmena tvaru telesa pôsobením vonkajších síl. Deformácia môže byť:

- elastická – pružná, dočasná
- plastická – nepružná, trvalá

Môže byť spôsobená ťahom, tlakom, ohybom, šmykom, krútením alebo kombinovaným namáhaním.

Najjednoduchšia je deformácia ťahom:

Absolútne predĺženie:

$$\Delta l = l - l_0$$

Relatívne predĺženie:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} 100\%$$

Normálové napätie:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

Hookeov zákon:

Hookeov zákon: platí iba po medzu úmernosti.

Základ tzv. lineárnej pružnosti a pevnosti.

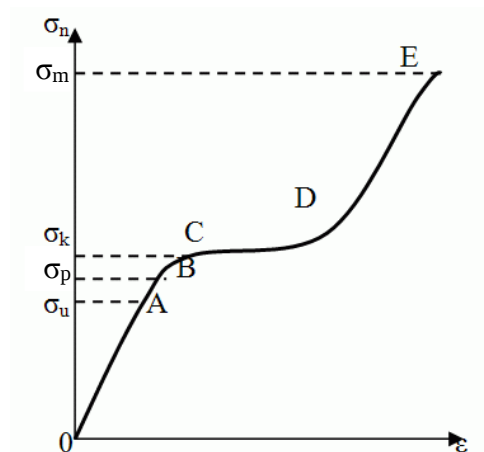
Krivka deformácie:

σ_u = medza úmernosti

$\sigma_p = \sigma_e = \sigma_d$ = medza pružnosti (dovolené napätie)

σ_k = medza klzu (C, D)

σ_m = medza pevnosti



2. Zistite, či sa pretrhne oceľový drôt s priemerom 2 mm, pokiaľ je napínaný silou 1 kN. Medza pevnosti materiálu drôtu je $\sigma_m = 314 \text{ MPa}$.

Riešenie: $d = 2 \text{ mm}$, $r = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, $F = 10^3 \text{ N}$, $\sigma_m = 314 \text{ MPa}$

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{\pi \cdot r^2}$$

$$\sigma_n = \frac{10^3 \text{ N}}{3,14(10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{10^3 \text{ N}}{3,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 318,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_n = 318,5 \text{ MPa}$$

Pretože $\sigma_n > \sigma_m$, oceľový drôt sa pretrhne.

3. Vypočítajte relatívne predĺženie lana pôvodnej dĺžky 10 m, pokiaľ sa pri deformácii predĺžilo o 40 mm.

Riešenie: $l_0 = 10 \text{ m}$, $\Delta l = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$

$$l_0 = 10 \text{ m}, \quad \Delta l = 40 \text{ mm} = 0,04 \text{ m}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{0,04 \text{ m}}{10 \text{ m}} 100\% = \frac{4}{10} \% = 0,4\%$$

$$\varepsilon = 0,4\%$$

Relatívne predĺženie lana je $\varepsilon = 0,4\%$.

4. Ako sa zmení normálové napätie drôtu, pokiaľ sa ťahová sila pôsobiaca na drôt zväčší 4 krát a priemer drôtu iba 2 krát?

Riešenie:

$$F_2 = 4 \cdot F_1, \quad d_2 = 2 \cdot d_1$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi d_1^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{4 \cdot F_1}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{16 \cdot F_1}{\pi (2d_1)^2} = \frac{16 F_1}{4 \pi d_1^2} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi d_1^2}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{4 \cdot F_1}{\pi d_1^2}}{\frac{4 \cdot F_1}{\pi d_1^2}} = 1$$

$$\sigma_2 = \sigma_1$$

Normálové napätie sa v drôte nezmení.

5. Aký musí byť polomer medeného drôtu, aby sa pôsobením sily 500 N nepretrhol.

Riešenie: $F=500\text{ N}$, $\sigma_m=2\cdot 10^8\text{ Pa}$, $r = ?$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$S = \frac{F}{\sigma}$$

$$\pi \cdot r^2 = \frac{F}{\sigma}$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot \sigma}}$$

$$r = \sqrt{\frac{500\text{ N}}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^8\text{ Pa}}} = \sqrt{0,796 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2} = 0,892 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

Polomer medeného drôtu musí byť rovný alebo väčší ako 0,892 mm.

$$r = 0,892\text{ mm}$$

$$r \geq 0,892\text{ mm}$$

6. Akú najväčšiu dĺžku môže mať

železný drôt zavesený vo vertikálnej polohe, aby sa vplyvom vlastnej tiaže nepretrhol?

Riešenie: $g = 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\rho_{\text{(Fe)}} = 7800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} = 7,8\cdot 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\sigma_m(\text{Fe}) = 314\cdot 10^6\text{ Pa}$

$$\sigma_m = \frac{F_g}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{\rho V \cdot g}{S} = \frac{\rho l \cdot S \cdot g}{S} = \rho l \cdot g$$

$$\sigma_m = \rho l \cdot g$$

$$l = \frac{\sigma_m}{\rho \cdot g}$$

$$l = \frac{314 \cdot 10^6\text{ Pa}}{7,8 \cdot 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 4,104 \cdot 10^3\text{ m} = 4104\text{ m}$$

Dĺžka drôtu môže byť maximálne 4104 m.

7. Akou veľkou silou je napnutá struna gitary dlhá 0,65 m s prierezom $0,325\text{ mm}^2$, ak sa pri napínaní predĺžila o 5 mm. ($E = 220\text{ GPa}$)

Riešenie: $l_0 = 0,65\text{ m}$, $\Delta l = 5 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, $S = 0,325 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$, $E = 220 \cdot 10^9\text{ Pa}$

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = S \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = 0,325 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot 220 \cdot 10^9\text{ Pa} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}\text{ m}}{0,65\text{ m}} = 550\text{ m}^2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 550\text{ N}$$

$$F = 550\text{ N}$$

Struna gitary je napnutá silou $F = 550\text{ N}$.

8. Drôt s pôvodnou dĺžkou 4,2 m a priemerom 1,1 mm sa pôsobením sily 0,23 kN predĺžil o 15,2 mm. Určte modul pružnosti v ťahu E – t.j. určte z akého materiálu pravdepodobne je?

Riešenie: $l_0 = 4,2 \text{ m}$, $r = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $F = 0,23 \cdot 10^3 \text{ N}$, $\Delta l = 15,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $E = ?$

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{F l_0}{S \Delta l}$$

$$E = \frac{0,23 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 4,2 \text{ m}}{\pi (0,55 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 15,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \frac{966 \text{ Nm}}{14,43772 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3} = 66,9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$E \doteq 67 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 67 \text{ GPa}$$

$$E(\text{Al}) = 67 \text{ GPa}$$

Modul pružnosti v ťahu je $E = 67 \text{ GPa}$, t.j. približne pre hliník platí $E(\text{Al}) = 67 \text{ GPa}$.

9. Na koniec ocelej tyče ($E = 220 \text{ GPa}$) s dĺžkou 1,5 m, umiestnenej vo vertikálnej polohe má byť zavesené závažie o hmotnosti 500 kg. Aký priemer tyče zvolíme, pokiaľ chceme, aby sa tyč po zavesení závažia nepredĺžila o viac ako 0,3 mm. (Vlastnú tiaž tyče neuvažujeme).

Riešenie: $l_0 = 1,5 \text{ m}$, $m = 500 \text{ kg}$, $\Delta l = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $E = 220 \text{ GPa} = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = S E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} E \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$4 F l_0 = \pi d^2 E \Delta l$$

$$d = \sqrt{\frac{4 F l_0}{\pi E \Delta l}} = \sqrt{\frac{4 m g l_0}{\pi E \Delta l}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 500 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1,5 \text{ m}}{3,14 \cdot 220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}}} = \sqrt{\frac{30000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2072,4 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{m}}} = \sqrt{0,0001447 \text{ m}^2} = 0,012 \text{ m}$$

$$d = 0,012 \text{ m} = 12 \text{ mm}$$

Kontrola jednotiek:

$$[d] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{Pa} \cdot \text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}}} = \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\frac{\text{N}}{\text{m}}}} = \sqrt{\text{m}^2} = \text{m}$$

Priemer tyče zvolíme minimálne $d = 12 \text{ mm}$.

10. Na oceľovom lane priečného prierezu 2 cm^2 je zavesené bremeno o hmotnosti 4000 kg . Aké je relatívne predĺženie lana?

Riešenie: $m = 4 \cdot 10^3 \text{ kg}$, $E = 220 \text{ GPa} = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $\varepsilon = ?$

$$F = m \cdot g$$

$$F = 4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m.s}^{-2} = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \wedge \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{F}{E \cdot S}$$

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ N}}{220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,0009$$

$$\varepsilon = 0,0009 \cdot 100\% = 0,09\%$$

$$\underline{\varepsilon = 0,09\%}$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{N}}{\text{Pa} \cdot \text{m}^2} = \frac{1}{\text{Pa}} \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{1}{\text{Pa}} \cdot \text{Pa} = 1$$

Relatívne predĺženie lana je $0,09\%$.

11. Oceľová skúšobná tyč o priemere 15 mm sa pretrhla pri sile $1,63 \cdot 10^5 \text{ N}$. Určte medzu pevnosti ocele.

Riešenie: $d = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $F = 1,63 \cdot 10^5 \text{ N}$, $\sigma_p = ?$

$$\sigma_p = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_p = \frac{1,63 \cdot 10^5 \text{ N}}{\frac{3,14 \cdot (15 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4}} = \frac{6,52 \cdot 10^5 \text{ N}}{706,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0,00922810^{11} \text{ Pa}$$

$$\underline{\sigma_p = 923 \text{ MPa}}$$

Medza pevnosti skúšanej ocele je $\sigma_p = 923 \text{ MPa}$.

12. Kabínu osobného výtahu o hmotnosti 500 kg držia 3 oceľové lana, každé s priemerom 1 cm. Vypočítajte veľkosť mech. napätia v každom lane. (Vlastnú tiaž lana zanedbajme).

Riešenie: $m = 500 \text{ kg}$, $d = 10^{-2} \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $\sigma = ?$

$$G = m \cdot g$$

$$G = 500 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} = 4905 \text{ N}$$

$$G' = \frac{G}{3} = \frac{4905 \text{ N}}{3}$$

$$\underline{G' = 1635 \text{ N}}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$S = \frac{3,14 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2}{4}$$

$$\underline{S = 0,785 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}$$

$$\sigma = \frac{G'}{S}$$

$$\sigma = \frac{1635 \text{ N}}{0,785 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 2083 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 20,83 \text{ MPa}$$

$$\underline{\sigma = 20,83 \text{ MPa}}$$

Napätie v oceľovom lane je 20,83 MPa.

13. Oceľový drôt s dĺžkou 3 m a prierezom $1,2 \text{ mm}^2$ sa pôsobením deformujúcich síl predĺži o 8 mm. Vypočítajte veľkosť deformujúcich síl.

Riešenie: $l_0 = 3 \text{ m}$, $S = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, $\Delta l = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $E = 220 \text{ GPa} = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $F = ?$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = S \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{3 \text{ m}} = 704 \text{ N}$$

$$\underline{F = 704 \text{ N}}$$

$$[F] = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{m}} = \text{m}^2 \cdot \text{Pa} = \text{m}^2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{N}$$

Deformujúca sila je 704 N.

14. Pri výrobe dielcov z predpätého železobetónu sa napínali oceľové prúty dlhé 6 metrov silou $F = 60\,000\text{ N}$. Vypočítajte predĺženie oceľových tyčí, ak majú priemer $d = 10\text{ mm}$.

Riešenie: $l_0 = 6\text{ m}$, $d = 10\text{ mm} \Rightarrow r = 5 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, $F = 6 \cdot 10^4\text{ N}$, $E_{\text{ocel}} = 220\text{ MPa} = 220 \cdot 10^9\text{ Pa}$, $\Delta l = ?$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{S \cdot E}$$

$$\Delta l = \frac{6 \cdot 10^4\text{ N} \cdot 6\text{ m}}{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-3}\text{ m})^2 \cdot 220 \cdot 10^9\text{ Pa}} = 0,0208\text{ m} = 20,8\text{ mm}$$

$$\underline{\Delta l = 20,8\text{ mm}}$$

$$[\Delta l] = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot Pa} = \frac{N}{m \cdot \frac{N}{m^2}} = \frac{1}{\frac{1}{m}} = m$$

Oceľové tyče sa predĺžia o 20,8 mm.

15. Mosadzný drôt dĺžky 1,1 m s prierezom $4 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$ bol natáhaný silou 80 N, čím sa predĺžil o 0,2 mm. Vypočítajte modul pružnosti mosadze.

Riešenie: $l_0 = 1,1\text{ m}$, $S = 4 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$, $\Delta l = 0,2 \cdot 10^{-3}\text{ m}$, $F = 80\text{ N}$, $E = ?$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{F \cdot l_0}{S \cdot \Delta l}$$

$$E = \frac{80\text{ N} \cdot 1,1\text{ m}}{4 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}\text{ m}} = 110 \cdot 10^9\text{ Pa} = 110\text{ GPa}$$

$$\underline{E = 110\text{ GPa}}$$

$$[E] = \frac{N \cdot m}{m^2 \cdot m} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Modul pružnosti mosadze je 110 GPa.

Tabuľka 2.1

Materiál	E (MPa)	G (MPa)	μ
Oceľ	$2,10 \cdot 10^5$	$8,04 \cdot 10^4$	0,30
Sivá liatina	$1,05 \cdot 10^5$	$4,20 \cdot 10^4$	0,25
Meď	$1,18 \cdot 10^5$	$4,41 \cdot 10^4$	0,35
Bronz	$1,08 \cdot 10^5$	$4,42 \cdot 10^4$	0,35
Mosadz	$9,81 \cdot 10^4$	$3,63 \cdot 10^4$	0,35
Hliník a jeho zliatiny	$6,86 \cdot 10^4$	$2,65 \cdot 10^4$	0,33
Horčíkové zliatiny	$3,43 \cdot 10^4$	$1,37 \cdot 10^4$	0,30
Zinok	$8,34 \cdot 10^4$	$3,24 \cdot 10^4$	0,27
Olovo	$1,67 \cdot 10^4$	$5,88 \cdot 10^3$	0,45
Sklo	$5,88 \cdot 10^4$	$2,45 \cdot 10^4$	0,23
Polystyrén	$3,34 \cdot 10^3$	$1,27 \cdot 10^3$	0,33

16. Oceľová tyč je na jednom konci upevnená. Ako sa zmení teplota tyče, pokiaľ na jej voľnom konci vyvoláme silovým pôsobením tlak 5 MPa?

Riešenie: $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $E = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, $\sigma = 5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, $\Delta T = ?$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad \wedge \quad \sigma = \frac{F}{S}$$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \frac{l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T}{l_0}$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\sigma}{E \cdot \alpha}$$

$$\Delta T = \frac{5 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} = 0,01894 \cdot 10^2 \text{ K} \approx 2 \text{ K}$$

$$\Delta T = 2^\circ \text{ C}$$

Oceľová tyč sa ohreje o približne 2° C .

17. Určte prácu, ktorú je potrebné vykonať, aby sa oceľová tyč ($E = 220 \text{ GPa}$) dĺžky 1 m s prierezom 1 cm^2 predĺžila pri pružnej deformácii v ťahu o 1 mm .

Riešenie: $l_0 = 1 \text{ m}$, $\Delta l = 1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $S = 1 \text{ cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $E = 220 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = S \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$W = F \cdot \Delta l$$

$$W = S \cdot E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \cdot \Delta l$$

$$W = \frac{S \cdot E \cdot (\Delta l)^2}{l_0}$$

$$W = \frac{10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 220 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{1 \text{ m}} = 220 \cdot 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 = 22 \frac{\text{Nm}^3}{\text{m}^2}$$

$$W = 22 \text{ Nm} = 22 \text{ J}$$

$$W = 22 \text{ J}$$

Aby sa oceľová tyč predĺžila je potrebné vykonať prácu $W = 22 \text{ J}$.

18. Dvojstĺpový hydraulický lis stláča materiál silou 600 kN . Stĺpy lisu sú oceľové a majú priemer 80 mm . Aké vzniká normálové napätie v stĺpe?

Riešenie:

$$F = 600 \cdot 10^3 \text{ N}, d = 80 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \sigma_n = ?$$

$$\sigma_n = \frac{F}{S'} \quad S' = 2 \cdot S$$

$$\sigma_n = \frac{F}{2 \cdot S}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \right)} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{2}} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

$$\sigma_n = \frac{2 \cdot 600 \cdot 10^3 \text{ N}}{3,14 \cdot (80 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ N}}{20096 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0,00006 \cdot 10^{12} \text{ Pa} = 60 \text{ MPa}$$

$$\underline{\sigma_n = 60 \text{ MPa}}$$

Normálové napätie je 60 MPa .

19. Viečko s priemerom 32cm treba pripevniť k otvoru tlakovej nádoby 24 skrutkami. Tlak plynu v nádobe je 6MJ. Aký plošný obsah prierezu skrutky treba zvoliť ak poznáme:

$$P = \frac{F}{S}$$

$$d = 32 \cdot 10^{-2} m, p = 6 \cdot 10^6 Pa, \sigma_{\text{skrutka}} = 50 \cdot 10^6 Pa$$

Nádoba:

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow S = \frac{3,14 \cdot (32 \cdot 10^{-2} m)^2}{4} = 803,84 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$p = \frac{F}{S}$$

$$F = p \cdot S \Rightarrow F = 6 \cdot 10^6 Pa \cdot 803,84 \cdot 10^{-4} m^2 = 4823,04 \cdot 10^2 N$$

$$F' = \frac{1}{24} \cdot F \Rightarrow F' = \frac{1}{24} \cdot 4823,04 \cdot 10^2 N = 200,96 \cdot 10^2 N$$

Skrutka:

$$\sigma_{\text{skrutka}} = \frac{F'}{S_0}$$

$$S_0 = \frac{F'}{\sigma_{\text{skrutka}}}$$

$$S_0 = \frac{200,96 \cdot 10^2 N}{50 \cdot 10^6 Pa} = 4 \cdot 10^{-4} m^2 = 4 cm^2$$

$$S_0 = 4 cm^2$$

Plošný obsah prierezu skrutky je 4 cm².

20. Pri meraní deformácie ťahom oceľového drôtu dĺžky 75 cm a priemere 1,9 mm bolo zistené, že pri dosiahnutí dĺžky 751,1 mm prestáva byť preťažovaný drôt úmerný sile ktorou naňho pôsobíme. Určite medzu úmernosti tohto materiálu.

Modul pružnosti v ťahu je $2,2 \cdot 10^{11}$ Pa.

$$l_0 = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}$$

$$l = 751,1 \text{ mm} = 0,7511 \text{ m}$$

$$r = 1,9 \text{ mm} : 2 = 0,8 \text{ mm} = 0,0008 \text{ m}$$

$$E = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\sigma_n = E \cdot \varepsilon$$

$$\Delta l = l - l_0 = 0,7511 - 0,75 = 0,0011 \text{ m a dosadíme:}$$

$$\sigma_n = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = 2,2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{0,0011}{0,75} = 322\,666\,667 \text{ Pa} = \mathbf{323 \text{ MPa}}$$

Medzu úmernosti oceľového drôtu je 323 MPa.

21. Medený drôt dĺžky 40 cm o priemere 1mm bol na jednom konci zavesený a na druhom konci mal zavesené teleso o hmotnosti 48 kg. Po zavesení telesa bola nameraná dĺžky drôtu 40,2 cm. Určte modul pružnosti v ťahu materiálu.

$$l_0 = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$l = 40,2 \text{ cm} = 0,402 \text{ m}$$

$$r = 1 \text{ mm} : 2 = 0,5 \text{ mm} = 0,0005 \text{ m}$$

$$m = 48 \text{ kg}$$

$$F_g = m \cdot g$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\sigma_n = E \cdot \varepsilon$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$\Delta l = l - l_0 = 0,402 - 0,4 = 0,002$$

$$\frac{m \cdot g}{\pi \cdot r^2} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$E = \frac{m \cdot g \cdot l_0}{\pi \cdot r^2 \cdot \Delta l}$$

$$E = \frac{48 \cdot 10 \cdot 0,4}{\pi \cdot 0,0005^2 \cdot 0,002} = 1,22 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 122 \text{ GPa}$$

1. Charakterizujte - teplotnú rozt'ažnosť pevných (kvapalných a plynných) látok.

Tepelná rozt'ažnosť je zmena rozmerov telesa spôsobená zmenou jeho teploty.

A.) Tuhé látky

1.) Dĺžková rozt'ažnosť.

$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$ α = součinitel teplotní dĺžkové rozt'ažnosti

$\alpha(\text{Cu}) = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $\alpha(\text{Al}) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $\alpha(\text{Fe}) = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$

relativní prodloužení:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} 100\%$$

2.) Objemová rozt'ažnosť:

$V = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \Delta t)$

$\rho = \rho_0 \cdot (1 - 3\alpha \cdot \Delta t)$

B.) Kapaliny

1.) Objemová rozt'ažnosť:

$V = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)$ β = součinitel teplotní objemové rozt'ažnosti

$\beta(\text{H}_2\text{O}) = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$, $\beta(\text{nafta}) = 1 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$,

$\rho = \rho_0 \cdot (1 - \beta \cdot \Delta t)$

C.) Plyny

1.) Objemová rozt'ažnosť:

$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta t)$ γ = součinitel rozt'ažnosti pro všechny plyny stejný

$$\gamma = \frac{1}{273.16 \text{K}} = 0,00366 \text{K}^{-1} = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$$

2. Medený drôt ($\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$) mal pri teplote -5°C dĺžku 21,55 m. Akú dĺžku má pri teplote 30°C . O koľko cm sa drôt predĺžil?

Riešenie: $l_0 = 21,55 \text{m}$, $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1} = 0,000017 \text{C}^{-1}$, $\Delta t = 30^\circ\text{C} - (-5^\circ\text{C}) = 35^\circ\text{C}$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

$$l = 21,55 \text{m} \cdot (1 + 0,000017 \cdot \text{K}^{-1} \cdot 35 \text{K}) = 21,55 \text{m} \cdot 1,000595 = 21,56 \text{m}$$

$$l = 21,56 \text{m}$$

$$\Delta l = l - l_0$$

$$\Delta l = 21,56 \text{m} - 21,55 \text{m} = 0,01 \text{m} = 1 \text{cm}$$

$$\Delta l = 1 \text{cm}$$

Drôt má po zahriatí dĺžku 21,56 m. Predĺžil sa teda o 1 cm.

3. Medený drôt ($\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$), ktorého dĺžka pri teplote $18 \text{ } ^\circ\text{C}$ bola 150 cm , sa prechodom elektrického prúdu zahrial a predĺžil o 9 mm . Na akú teplotu bol drôt ohriaty?

Riešenie: $l_0 = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$, $t_1 = 18^\circ\text{C}$, $\Delta l = 0,009 \text{ m}$, $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

$$l = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

$$l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha}$$

$$\Delta t = \frac{0,009 \text{ m}}{1,5 \text{ m} \cdot 0,000017 \text{ K}^{-1}} = 353 \text{ K} = 353^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 353^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$t_2 = \Delta t + t_1$$

$$t_2 = 353^\circ + 18^\circ\text{C} = 371^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 371^\circ\text{C}$$

Drôt bol zahriaty na teplotu 371°C

4. Dve tyče, železná ($\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) a zinková ($\alpha_2 = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) mali pri teplote 0°C rovnakú dĺžku. Keď zvýšime ich teplotu na 100°C je rozdiel ich dĺžok 1 cm . Aké boli ich pôvodné dĺžky?

Riešenie: $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\Delta t = 100 \text{ K}$, $\Delta l = 0,01 \text{ m}$

$$l_1 = l_0 \cdot (1 + \alpha_1 \Delta t)$$

$$l_1 = l_0 \cdot (1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 100 \text{ K}) = l_0 \cdot 1,0012$$

$$l_2 = l_0 \cdot (1 + \alpha_2 \Delta t)$$

$$l_2 = l_0 \cdot (1 + 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 100 \text{ K}) = l_0 \cdot 1,0029$$

$$\Delta l = 0,01 \text{ m}$$

$$l_2 - l_1 = 0,01$$

$$l_0 \cdot 1,0029 - l_0 \cdot 1,0012 = 0,01 \text{ m}$$

$$0,0017 l_0 = 0,01 \text{ m}$$

$$l_0 = \frac{0,01 \text{ m}}{0,0017} = 5,88 \text{ m}$$

$$l_0 = 5,88 \text{ m}$$

Pôvodné dĺžky tyčí boli $l_0 = 5,88 \text{ m}$.

5. Hliníková nádoba ($\alpha_{\text{Al}} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) má pri teplote 20°C vnútorný objem 10 litrov . Ako sa zmení jej vnútorný objem pri teplote 100°C ?

Riešenie: $\alpha_{\text{(Al)}} = 24 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $\Delta t = 80^\circ\text{C} = 80 \text{ K}$,

$$V_0 = 10 \text{ l} = 10 \text{ dm}^3 = 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$V = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \Delta t)$$

$$V = 10^{-2} \text{ m}^3 (1 + 3 \cdot 24 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 80 \text{ K})$$

$$V = 0,01(1 + 5760 \cdot 10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$V = 0,01 \cdot 1,00576 \text{ m}^3 = 0,0100576 \text{ m}^3 = 10,0576 \text{ dm}^3$$

$$V = 10,0576 \text{ dm}^3$$

$$\Delta V = V - V_0$$

$$\Delta V = 10,0576 \text{ dm}^3 - 10 \text{ dm}^3 = 0,0576 \text{ dm}^3 = 57,6 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = 57,6 \text{ cm}^3$$

Vnútorný objem nádoby sa zväčší o $57,6 \text{ cm}^3$

6. V tabuľkách je uvedené, že meď má pri teplote 20°C hustotu $\rho_{20} = 8930 \text{ kg.m}^{-3}$. Aká je hustota medi pri teplote 80°C ?

Riešenie: $\rho_{20} = 8930 \text{ kg.m}^{-3}$, $t_1 = 20^\circ\text{C}$, $t_2 = 80^\circ\text{C}$, $\Delta t = 60^\circ\text{C} = 60 \text{ K}$, $\alpha_{\text{(Cu)}} = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$

$$\rho_{80} = \rho_{20} \cdot (1 - 3\alpha \Delta t)$$

$$\rho_{80} = 8930 \text{ kg.m}^{-3} \cdot (1 - 3 \cdot 0,000017 \text{ K}^{-1} \cdot 60 \text{ K})$$

$$\rho_{80} = 8930 \text{ kg.m}^{-3} \cdot 0,99694 = 8903 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho_{80} = 8903 \text{ kg.m}^{-3}$$

Hustota medi pri teplote 80°C je $\rho_{80} = 8903 \text{ kg.m}^{-3}$.

7. Podlahová dlaždica je z mramoru ($\alpha = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$) a má tvar štvorca. Strana dlaždice má pri teplote 0°C dĺžku $0,5 \text{ m}$. O koľko cm^2 sa zväčší plošný obsah dlaždice, pokiaľ sa jej teplota zvýši na 35°C ?

Riešenie: $\alpha = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, $a_0 = 0,5 \text{ m}$, $\Delta t = 35^\circ\text{C}$, $\Delta S = ?$

$$S_0 = a_0^2 = (0,5 \text{ m})^2 = 0,25 \text{ m}^2$$

$$a = a_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

$$a = 0,5 \text{ m} (1 + 0,0000085 \text{ K}^{-1} \cdot 35 \text{ K}) = 0,5 \text{ m} \cdot 1,0002975$$

$$a = 0,50015 \text{ m}$$

$$S = a^2$$

$$S = (0,50015 \text{ m})^2 = 0,25015 \text{ m}^2$$

$$S = 0,25015 \text{ m}^2$$

$$\Delta S = S - S_0$$

$$\Delta S = 0,25015 \text{ m}^2 - 0,25 \text{ m}^2 = 0,00015 \text{ m}^2 = 1,5 \text{ cm}^2$$

$$\Delta S = 1,5 \text{ cm}^2$$

Plošný obsah dlaždice sa zväčší o $1,5 \text{ cm}^2$

8. Mosadzná guľa ($\alpha = 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ K}^{-1}$) má pri teplote 15°C polomer $r_1 = 2 \text{ cm}$. O koľko $^{\circ}\text{C}$ ju treba zohriať, aby neprešla kruhovým otvorom o polomere $r_2 = 2,02 \text{ cm}$?

Riešenie: $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ K}^{-1}$, $r_1 = 2 \text{ cm}$, $r_2 = 2,02 \text{ cm}$,

$$V = V_0(1 + 3\alpha\Delta t)$$

$$V = V_0 + V_0 \cdot 3\alpha\Delta t$$

$$V - V_0 = V_0 \cdot 3\alpha\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{V - V_0}{V_0 \cdot 3\alpha} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_1^3 \cdot 3\alpha} = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3 \cdot 3\alpha}$$

$$\Delta t = \frac{(2,02\text{cm})^3 - (2,00\text{cm})^3}{(2,00\text{cm})^3 \cdot 3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} = \frac{8,2424\text{cm}^3 - 8,0000\text{cm}^3}{8\text{cm}^3 \cdot 3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} = 0,00561 \cdot 10^5 \text{ K}$$

$$\Delta t = 561 \text{ K} = 561^{\circ} \text{ C}$$

Mosadznou guľu treba ohriať o 561°C t.j. na 576°C

9. Cisternový vagón je až po otvor naplnený naftou. ($\rho = 940 \text{ kg.m}^{-3}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$). Pri teplote 0°C sa do vagónu vojde 50 ton nafty. Koľko nafty vytečie otvorom z vagóna, pokiaľ po ceste sa teplota nafty zvýšila na 20°C ?

Riešenie: $\rho_0 = 940 \text{ kg.m}^{-3}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $m_0 = 50\,000 \text{ kg}$, $\Delta t = 20^{\circ}\text{C} = 20 \text{ K}$

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0}$$

$$V_0 = \frac{m_0}{\rho_0} = \frac{50\,000 \text{ kg}}{940 \text{ kg.m}^{-3}} = 53,19 \text{ m}^3$$

$$V = V_0(1 + \beta\Delta t)$$

$$V = V_0 + V_0\beta\Delta t$$

$$V - V_0 = V_0\beta\Delta t$$

$$\Delta V = V_0\beta\Delta t$$

$$\Delta V = 53,19 \text{ m}^3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 20 \text{ K} = 1,0638 \text{ m}^3 = 1063,8 \text{ dm}^3 = 1063,8 \text{ l}$$

$$\Delta V = 1063,8 \text{ l}$$

Z vagónu vytečie 1063,8 litra nafty.

10. Vzduch v nádobe s pohyblivým piestom má pri teplote 10°C objem 1 liter. Aký je objem vzduchu pri teplote 40°C ? Vypočítajte relatívnu zmenu objemu vzduchu!

Riešenie: $V_0 = 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$, $\Delta t = 30^{\circ}\text{C} = 30 \text{ K}$,

$$\gamma = \frac{1}{273,16 \text{ K}} = 0,00366 \text{ K}^{-1}$$

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta t)$$

$$V = 1000 \text{ cm}^3 \cdot (1 + 0,00366 \text{ K}^{-1} \cdot 30 \text{ K}) = 1000 \text{ cm}^3 \cdot 1,1098 = 1109,8 \text{ cm}^3$$

$$V = 1109,8 \text{ cm}^3$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V_0} 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{V - V_0}{V_0} 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{1109,8 \text{ cm}^3 - 1000 \text{ cm}^3}{1000 \text{ cm}^3} 100\% = \frac{109,8}{1000} \cdot 100\% = 10,98\%$$

$$\varepsilon = 10,98\%$$

Objem vzduchu pri teplote 40°C je $V = 1109,8 \text{ cm}^3$. Relatívna zmena objemu vzduchu je $\varepsilon = 10,98\%$.

11. Vyplýva zo vzťahu $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$, že pri dostatočne veľkom ochladení môže byť dĺžka tyče "l" nulová? S ktorým dôležitým prírodným zákonom je toto tvrdenie v rozpore?

Riešenie: Dĺžka tyče je nulová, ak platí: $l = 0$

$$l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = 0$$

$$l_0 \neq 0 \Rightarrow$$

$$1 + \alpha \cdot \Delta t = 0$$

$$\alpha \cdot \Delta t = -1$$

$$\Delta t = -\frac{1}{\alpha}$$

Medenú tyč by bolo treba ochladiť o $58\,824 \text{ K}$. Takto nízka teplota asi neexistuje. Najnižšia (doteraz nedosiahnutá) je $0 \text{ K} = -273,15^{\circ}\text{C}$ = absolútna nula.

Napríklad pre meď ($\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) by platilo:

$$\Delta t = -\frac{1}{1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} = -58824 \text{ K}$$

12. Potrubie teplovodu dĺžky 200 m bolo zvárané pri teplote 20°C . O akú dĺžku sa predĺži, pokiaľ v prevádzkových podmienkach pri zváraní teplota narastie na 120°C .

Riešenie: $l_0 = 200 \text{ m}$, $\Delta T = 100 \text{ K}$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $l = ?$

$$l_0 = 200m, \Delta T = 100K, \alpha = 0,000012 K^{-1}$$

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

$$l = l_0 + l_0 \alpha \Delta T$$

$$l - l_0 = l_0 \alpha \Delta T$$

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T$$

$$\Delta l = 200m \cdot 0,000012 K^{-1} \cdot 100K = 0,24m = 24cm$$

$$\underline{\Delta l = 0,24m}$$

Potrubie teplovodu sa predĺži o 24 centimetrov.

13. Pri teplote 10^0C má medená kocka objem $600 cm^3$. Ako sa zmení jej objem po zahriatí na 210^0C ?

Riešenie: $V_0 = 600 cm^3$, $\Delta T = 200 K$, $\alpha = 1,71 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, $\Delta V = ?$

$$V_0 = 600cm^3, \Delta T = 200K, \alpha = 0,0000171K^{-1}, \Delta V = ?$$

$$V = V_0(1 + 3 \cdot \alpha \Delta T)$$

$$V = 600cm^3(1 + 3 \cdot 0,0000171K^{-1} \cdot 200K) = 600cm^3 \cdot 1,01026$$

$$V = 606,156cm^3$$

$$\Delta V = V - V_0$$

$$\Delta V = 606,156cm^3 - 600cm^3 = 6,156cm^3$$

$$\underline{\Delta V = 6,156cm^3}$$

Objem kocky sa zväčší o $6,156 cm^3$.

14. Vypočítajte súčiniteľ objemovej tepelnej rozťažnosti benzínu, ktorý pri teplote 30^0C má objem $10,3 \cdot 10^{-3} m^3$ a pri teplote 0^0C objem $10^{-2} m^3$.

Riešenie: $V_1 = 10^{-2} m^3$, $V_2 = 10,3 \cdot 10^{-3} m^3$, $\Delta T = 30 K$, $\beta = ?$

$$V_1 = 10^{-2}m^3 = 10 \cdot 10^{-3}m^3, V_2 = 10,3 \cdot 10^{-3}m^3, \Delta T = 30K, \beta = ?$$

$$V_2 = V_1(1 + \beta \Delta T)$$

$$V_2 = V_1 + V_1 \cdot \beta \Delta T$$

$$V_2 - V_1 = V_1 \cdot \beta \Delta T$$

$$\beta = \frac{V_2 - V_1}{V_1 \Delta T}$$

$$\beta = \frac{10,3 \cdot 10^{-3}m^3 - 10 \cdot 10^{-3}m^3}{10 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot 30K} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}m^3}{300 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot K} = 0,001K^{-1}$$

$$\underline{\beta = 1 \cdot 10^{-3} K^{-1}}$$

Súčiniteľ objemovej tepelnej rozťažnosti benzínu je $1 \cdot 10^{-3}K^{-1}$.

15. Vypočítajte hmotnosť 1dm^3 medi pri teplote 400°C , keď pri teplote 0°C je hustota medi $8,9 \cdot 10^3 \text{kg.m}^{-3}$.

Riešenie:

$$V = 10^{-3} \text{m}^3, \rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{kg.m}^{-3}, \alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}, \Delta T = 400 \text{K}, m = ?$$

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 - 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T)$$

$$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{kg.m}^{-3} \cdot (1 - 3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1} \cdot 400 \text{K}) = 8,9 \cdot 10^3 \text{kg.m}^{-3} \cdot (1 - 0,0204)$$

$$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{kg.m}^{-3} \cdot 0,9796 = 8718,4 \text{kg.m}^{-3}$$

$$\underline{\rho = 8718,4 \text{kg.m}^{-3}}$$

$$m = V \cdot \rho$$

$$m = 10^{-3} \text{m}^3 \cdot 8718,4 \text{kg.m}^{-3} = 8,7184 \text{kg}$$

$$\underline{m = 8,72 \text{kg}}$$

Hmotnosť medi je 8,72 kg.

16. Pri 0°C má zinková tyčka dĺžku 200 mm a medená 201 mm. Ich priečne rozmery pri 0°C sú rovnaké. Vypočítajte, pri akej teplote majú tyčky rovnaký objem.

Riešenie:

$$l_0 = 0,200m, l'_0 = 0,201m, \alpha_Z = 3 \cdot 10^{-5} K^{-1}, \alpha_M = 1,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}, t = ?$$

$$l_0 = 0,200m, l'_0 = 0,201m, \alpha_Z = 3 \cdot 10^{-5} K^{-1}, \alpha_M = 1,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}, \Delta t = t - 0^{\circ}C = t, t = ? ,$$

$$V = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_Z \cdot \Delta t) \quad \wedge \quad V' = V'_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_M \cdot \Delta t)$$

$$V = V'$$

$$V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_Z \cdot \Delta t) = V'_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_M \cdot \Delta t)$$

$$a \cdot b \cdot l_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_Z \cdot t) = a \cdot b \cdot l'_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_M \cdot t) / : a, b$$

$$l_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_Z \cdot t) = l'_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha_M \cdot t)$$

$$l_0 + 3 \cdot l_0 \cdot \alpha_Z \cdot t = l'_0 + 3 \cdot l'_0 \cdot \alpha_M \cdot t$$

$$l'_0 - l_0 = 3 \cdot l_0 \cdot \alpha_Z \cdot t - 3 \cdot l'_0 \cdot \alpha_M \cdot t$$

$$l'_0 - l_0 = t \cdot (3 \cdot l_0 \cdot \alpha_Z - 3 \cdot l'_0 \cdot \alpha_M)$$

$$t = \frac{l'_0 - l_0}{3 \cdot l_0 \cdot \alpha_Z - 3 \cdot l'_0 \cdot \alpha_M}$$

$$t = \frac{0,201m - 0,200m}{3 \cdot 0,200m \cdot 3 \cdot 10^{-5} C^{-1} - 3 \cdot 0,201m \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} C^{-1}} = \frac{0,001m}{1,8 \cdot 10^{-5} m \cdot C^{-1} - 1,0251m C^{-1}}$$

$$t = \frac{10^{-3}m}{0,7749 \cdot 10^{-5} m C^{-1}} = 1,29 \cdot 10^2 C = 129^{\circ}C$$

$$\underline{t = 129^{\circ}C}$$

Tyčky budú mať rovnaký objem pri teplote 129°C.

17. Oceľová guľa má pri teplote 80°C polomer 2cm. Aký bude objem gule pri teplote -20°C?
Riešenie:

$$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}, \Delta T = 100K, r = 2cm, V = ?, V_0 = ?$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2} m)^3 = 33,49 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\underline{V = 33,49 \cdot 10^{-6} m^3}$$

$$V = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T)$$

$$V_0 = \frac{V}{1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T}$$

$$V_0 = \frac{33,49 \cdot 10^{-6} m^3}{1 + 3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1} \cdot 100K} = \frac{33,49 \cdot 10^{-6} m^3}{1,0036} = 33,37 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\underline{V_0 = 33,37 \cdot 10^{-6} m^3}$$

Objem gule pri teplote - 20°C je 33,37 cm³.

18. Aké teplo prijme medená tyč, ktorá má pri teplote 20°C dĺžku 10cm a prierez 2cm², pokiaľ sa pri zahriatí predĺži o 0,1 mm.

Riešenie:

$$t_1 = 20^{\circ}\text{C}, \Delta l = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}, S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \rho = 8930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, c = 383 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T) \quad Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

$$l - l_0 = l_0 \alpha \Delta T \quad Q = \rho V \cdot c \cdot \Delta T$$

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T \quad Q = \rho S l_0 \cdot c \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{l_0 \alpha} \quad Q = \rho S l_0 \cdot c \cdot \frac{\Delta l}{l_0 \alpha}$$

$$Q = \frac{\rho S c \Delta l}{\alpha}$$

$$Q = \frac{8930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 383 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} = 4023 \text{ J}$$

$$\underline{Q = 4023 \text{ J}}$$

Medená tyč prijala 4023 J tepla.

19. Na tenkom oceľovom drôtku kmitá guľôčka s dobou kmitu 2 sekundy. Dĺžka závesu pri teplote 20°C je 2 metre. Ako sa zmení doba kmitu, pokiaľ kyvadlo zahrejeme na 80°C ?

Riešenie:

$$\tau = 2 \text{ s}, \Delta T = 60 \text{ K}, l_0 = 2 \text{ m}, \alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \tau' = ?$$

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta T)$$

$$l = 2 \text{ m} \cdot (1 + 0,000012 \text{ K}^{-1} \cdot 60 \text{ K}) = 2 \text{ m} \cdot 1,000072 = 2,00144 \text{ m}$$

$$\underline{l = 2,00144 \text{ m}}$$

$$\tau' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\tau' = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{2,00144 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 6,28 \cdot \sqrt{0,200144 \text{ s}^2} = 6,28 \cdot 0,44737 \text{ s} = 2,81 \text{ s}$$

$$\underline{\tau' = 2,81 \text{ s}}$$

$$\Delta \tau = \tau' - \tau$$

$$\Delta \tau = 2,81 \text{ s} - 2,00 \text{ s} = 0,81 \text{ s}$$

$$\underline{\Delta \tau = 0,81 \text{ s}}$$

Po ohriati sa doba kmitu zväčší o 0,81 sekundy.

20. O koľko sa predĺži hliníkový drôt prierezu 5 mm^2 , ktorým za 1 minútu prechádza elektrický prúd s výkonom 16 W. (Tepelné straty zanedbajte)

Riešenie:

$$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \alpha = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, c = 895 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, S = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ t = 60 \text{ s}, P = 16 \text{ W}, \Delta l = ?$$

$$a) W = Q = Pt$$

$$Q = 16 \text{ W} \cdot 60 \text{ s}$$

$$Q = 960 \text{ J}$$

$$b) Q = mc \cdot \Delta T$$

$$Q = \rho \cdot S \cdot l_0 \cdot c \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{Q}{\rho \cdot S \cdot c \cdot l_0}$$

$$c) l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \frac{Q}{\rho \cdot S \cdot c \cdot l_0}$$

$$\Delta l = \frac{Q \cdot \alpha}{\rho \cdot S \cdot c}$$

$$\Delta l = \frac{960 \text{ J} \cdot 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}}{2,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 895 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,1827 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta l = 1,827 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\underline{\Delta l = 1,827 \text{ mm}}$$

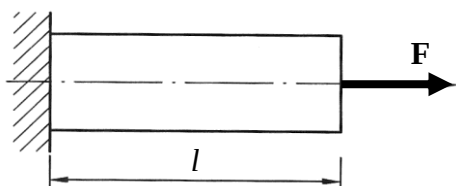
Drôt sa predĺži o 1,827 mm.

Ďalší zdroj informácií:

<http://www.noirgoku.mablog.eu/skola/pruznost-pevnost-1/>

Téma 6: Úvod do náuky o PaP

Príklad 6.1: Z akého materiálu je tyč, na ktorú pôsobí osamelá sila F (obr.6.1). Zadané: dĺžka tyče $l = 1$ m; napätie v tyči $\sigma = 42$ MPa, absolútne predĺženie tyče $\Delta l = 0,2$ mm.



Obr. 6.1

Pôsobením sily F sa tyč s dĺžkou $l=1$ m predĺžila o $\Delta l = 0,2$ mm a jej deformáciou vzniklo v tyči napätie s veľkosťou 42 MPa.

Pomerné predĺženie tyče:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,2 \text{ mm}}{1.10^3 \text{ mm}} = 0,2 \cdot 10^{-3}$$

Podľa Hookeovho zákona

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \Rightarrow 42 \text{ (MPa)} = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot E \text{ (MPa)}$$

pre materiál. charakteristiku E platí

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{42 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}}{\frac{0,2 \text{ (mm)}}{10^3 \text{ (mm)}}} = \frac{42 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}}{0,2 \cdot 10^{-3}} = 210 \cdot 10^9 \text{ (Pa)}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

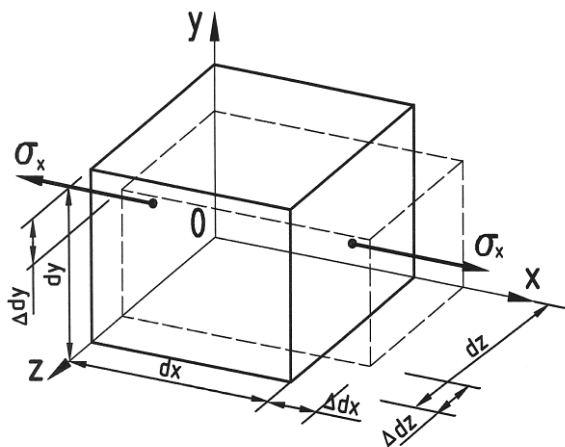
Z tabuľky hodnôt pre E zistíme, že uvedená tyč je pravdepodobne z **oceľe** alebo **niklu**.

Príklad 6.2: Určite pomerné (ε_y) a absolútne (Δdy) priečne zúženie oceľovej tyče (obr.6.3a) zaťaženej dvojicou síl F , ktorá vyvolá v tyči napätie σ . Zadané: $\sigma = 40$ MPa, $l = 1$ m.



Obr. 6.3a

Teoretické východiská: pre malý element (Obr.6.3b), vybraný z tyče, platia tzv. **rovnice elasticity** pre pomerné priečne zúženie v smere osí y a z v tvare



Obr. 6.3b

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \Rightarrow \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{mE} = -\frac{\mu \sigma}{E}$$

resp.

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{mE} = -\frac{\mu \sigma}{E},$$

kde m je tzv. **Poissonova konštanta** [-], resp. hodnota μ je **Poissonovo číslo** ($\mu = 1/m$) v [-].

2. V ľubovoľnom priečnom reze (kolmom na smer pôsobenia ťahovej sily F , vyvolávajúcej v prúte normálové napätie σ_x) vznikne priečne zúženie v smere osí y a z platí:

$$\varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m \cdot E} = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} = \varepsilon_z$$

Po dosadení hodnôt materiálových konštánt pre ocel' ($E=2,1 \cdot 10^5$ MPa, $m=10/3$, $\mu=0,3$) pre hodnotu pomerného zúženia (v smere osí y a z) dostaneme:

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma}{m \cdot E} = -\frac{40}{\frac{10}{3} \cdot 2,1 \cdot 10^5} = -5,71 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_z.$$

2. Pre určenie hodnoty absolútneho zúženia Δdy , (resp. Δdz) v prípade elementárneho úseku dy (dz podľa Obr.6.3b) potom platí:

$$\Delta dy = \varepsilon_y \cdot dy = -5,71 \cdot 10^{-5} \cdot \int_0^{dy} dy = -5,71 \cdot 10^{-5} \cdot [y]_0^{dy} = -5,71 \cdot 10^{-5} \cdot dy$$

Konkrétne, napr. pre zvolený tvar prierezu - obdĺžnikový prierez □ **tyče** – (s rozmermi $a=20$ mm, $b=50$ mm) bude platiť:

$$\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_y \Rightarrow \Delta a = \varepsilon_y \cdot a = -5,71 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \Rightarrow \Delta a = -1,142 \cdot 10^{-3} \text{ [mm]}$$

$$\text{resp. } \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y \Rightarrow \Delta b = \varepsilon_y \cdot b = -5,71 \cdot 10^{-5} \cdot 50 \Rightarrow \Delta b = -2,855 \cdot 10^{-3} \text{ [mm]}$$

3. Aké bude absolútne pozdĺžne pretvorenie tyče s prierezom ($a \times b$) o dĺžke $l=1$ m ?

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{\sigma \cdot l}{\Delta l} \Rightarrow \Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E} = \frac{40 \cdot 1000}{2,1 \cdot 10^5} = 0,19 \text{ mm} \left[\frac{\text{MPa} \cdot \text{mm}}{\text{MPa}} \right]$$

Poznámka: pre hodnotu pomerného (relatívneho) predĺženia prúta platí

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,19}{1000} = 1,9 \cdot 10^{-4} \quad \text{príp.} \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{40}{2,1 \cdot 10^5} = 1,905 \cdot 10^{-4}$$

Príklad 6.3: Vypočítajte, o koľko sa predĺži hliníková tyč dĺžky $l = 2$ m (obr. 6.2) pri zmene teploty $\Delta t = 10$ °C. Aké napätie vznikne v staticky neurčito uloženej tyči zadanou zmenou teploty Δt ?



Obr. 6.2

Zmena teploty Δt môže byť uvažovaná buď ako ohrev: $\Delta t_+ = t_1 - t_0 = (20^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}) = 10^\circ\text{C}$ alebo aj ako ochladenie: $\Delta t_- = t_1 - t_0 = (10^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = -10^\circ\text{C}$.

Súčiniteľ teplotnej dĺžkovej rozťažnosti α_t pre hliník je $\alpha_t = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ (Tab.6.3).

1. Tyč dĺžky l sa kladnou zmenou teploty Δt_+ predĺži o prírastok Δl (obr.6.2b):

$$\Delta l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l = 2,25 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C}^{-1}) \cdot 10 (^\circ\text{C}) \cdot 2 \cdot 10^3 (\text{mm}) = \mathbf{0,45 \text{ mm}}$$

ZÁVER: Tyč sa pri zmene teploty: o $+10^\circ\text{C}$ predĺži o **0,45mm**, resp. zníženie teploty (ochladenie) o 10°C by naopak vyvolalo skrátenie tyče o **0,45mm**

Poznámka: Vypočítané predĺženie je voči pôvodnej dĺžke tyče veľmi malé. Mohlo by sa zdať, že takáto zmena rozmeru nemá praktický význam, ale aj takáto pomerne malá zmena dĺžky tyče môže vyvolať veľkú zmenu napätia v ostatných prvkoch konštrukcie, ktorej je súčasťou – napr. otázky namáhania na vzperný tlak.

Pre pomerné predĺženie tyče vplyvom zmeny teploty tiež platí

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_t \cdot \Delta t \Rightarrow \varepsilon = \alpha_t \cdot \Delta t = 2,25 \cdot 10^{-5} \cdot 10 = 2,25 \cdot 10^{-4} [-] \text{ resp. aj}$$

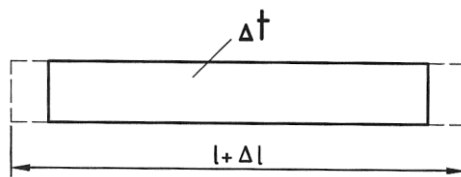
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,45}{2000} = 2,25 \cdot 10^{-4}$$

2. Za predpokladu, že je tyč uložená staticky neurčito (napr. medzi dvomi stenami) môžeme napätie, vznikajúce v tyči vplyvom zmeny teploty, určiť priamo z Hookeovho zákona a platí

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{\Delta l}{l} \cdot E = \frac{0,45 (\text{mm})}{2 \cdot 10^3 (\text{mm})} \cdot 0,72 \cdot 10^5 (\text{MPa}) = \mathbf{16,2 \text{ MPa}}$$

$$\text{resp. } \sigma = \varepsilon \cdot E = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E = 2,25 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C}^{-1}) \cdot 10 (^\circ\text{C}) \cdot 0,72 \cdot 10^5 (\text{MPa}) = \mathbf{16,2 \text{ MPa}}.$$

Príklad 6.4: Z akého materiálu je tyč $l = 3 \text{ m}$ (obr. 6.4), ktorá sa pri zvýšení teploty z $15 \text{ }^{\circ}\text{C}$ na $25 \text{ }^{\circ}\text{C}$ predĺži o $\Delta l = 0,36 \text{ mm}$? Aká by musela byť zmena teploty, aby sa tyč skrátila o $0,9 \text{ mm}$?



Obr. 6.4

1. Určíme teplotnú zmenu, t.j. rozdiel medzi teplotami: $\Delta t = t_1 - t_0 = 25 - 15 = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ (ohrev)

Vypočítame hodnotu súčiniteľa teplotnej dĺžkovej rozťažnosti α_t pre zadanú tyč :

$$\Delta l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l$$

$$\Rightarrow \alpha_t = \frac{\Delta l}{\Delta t \cdot l} = \frac{0,36}{10 \cdot 3 \cdot 10^3} = \frac{0,36}{30 \cdot 10^3} = 0,012 \cdot 10^{-3} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \left[\frac{\text{mm}}{^{\circ}\text{C} \cdot \text{mm}} = ^{\circ}\text{C}^{-1} \right]$$

a v tabuľke pre určené α_t nájdeme materiál: $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \Rightarrow \text{Oceľ}$.

2. Zmena teploty :

$$\Delta l = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta l}{\alpha_t \cdot l} = \frac{-0,9}{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3000} = \frac{-0,9}{0,036} = -25^{\circ}\text{C} \left[\frac{\text{mm}}{^{\circ}\text{C}^{-1} \cdot \text{mm}} = ^{\circ}\text{C} \right]$$