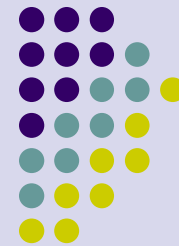


Goniometrické funkcie a riešenie všeobecného trojuholníka

GONIOMETRIA OSTRÉHO UHLA



$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\sin \beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

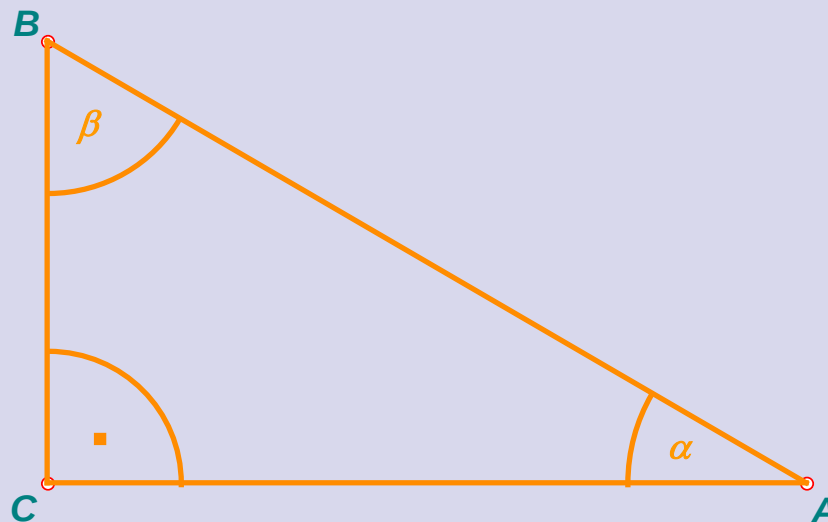
$$\cos \beta = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$$

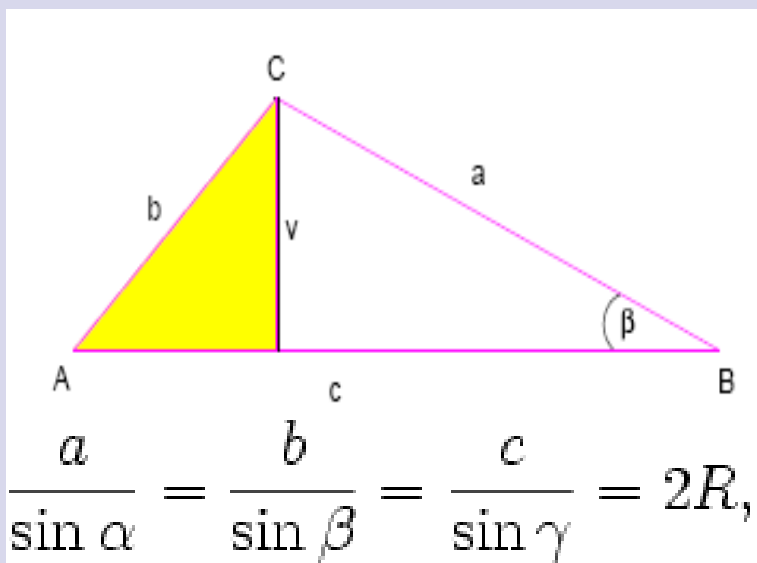
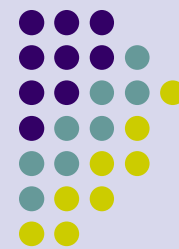
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{|BC|}{|AC|}$$



Sínusová veta



Dôkaz:

- Výška v rozdelí $\triangle ABC$ na dva trojuholníky. Potom platí:

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{v}{b} \Rightarrow v = b \cdot \sin \alpha \\ \sin \beta = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a \cdot \sin \beta \end{array} \right\} \Rightarrow b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

Analogicky dostaneme: $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Výsledok:

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}} \quad (\text{sínusová veta})$$

Sú to vlastne tri rovnice: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$; $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$; $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$

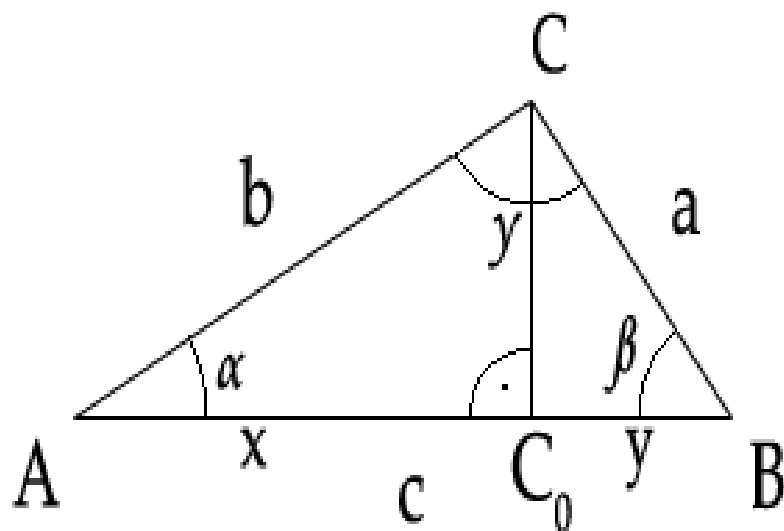
Slovne: Pomer strán sínusov protiľahlých uhlov vo všeobecných trojuholníkoch je konštantný a rovná sa priemeru opísanej kružnice.

Kosínusová veta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Dôkaz pre ostrouhlý Δ :

$$\Delta AC_0C: b^2 = x^2 + v^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = b^2 - x^2$$

$$\Delta BC_0C: a^2 = v^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$v^2 = a^2 - y^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - y^2$$

$$x + y = c$$

$$y = c - x$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$

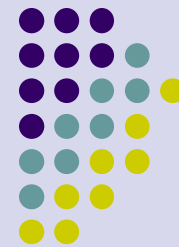
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

$$\cos \alpha = x/b \Rightarrow x = b \cdot \cos \alpha$$

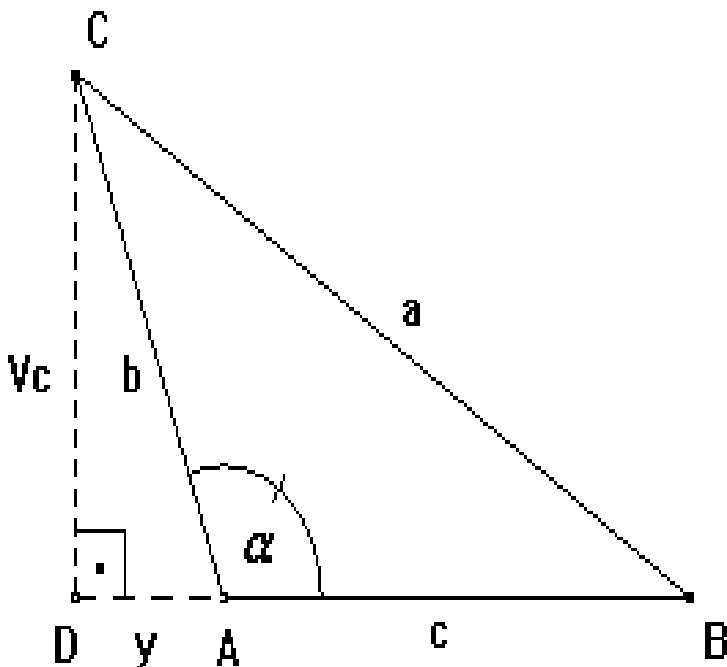
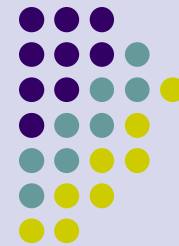
Po dosadení do vzorca dostaneme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Slovne: Obsah štvorca nad stranou všeobecného trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad zvyšnými dvoma stranami, zmenšenému o dvojnásobok súčinu týchto dvoch strán a kosínusu uhla, ktorý zvierajú.



Kosínusová veta



obr. 2.

Dôkaz pre tupouhlý Δ :

$$\Delta ADC: b^2 = y^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = b^2 - y^2$$

$$\Delta BDC: a^2 = v^2 + x^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - x^2$$

$$b^2 - y^2 = a^2 - x^2$$

$$x = c + y$$

$$b^2 - y^2 = a^2 - (c + y)^2$$

$$b^2 - y^2 = a^2 - (c^2 + 2cy + y^2)$$

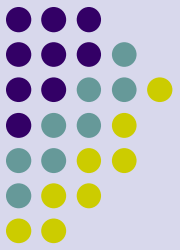
$$b^2 = a^2 - c^2 - 2cy$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = y/b \Rightarrow y = b \cdot (-\cos \alpha)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 - 2c(b \cdot -\cos \alpha)$$

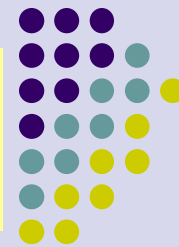
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$



Praktické příklady

PR1: Dopravné lietadlo, ktoré práve prelieta nad miestom 2 400 m vzdialenom od miesta pozorovateľa, je vidieť pod výškovým uhlom $\alpha = 26^{\circ}20'$. V akej výške lietadlo letí?



Dané: $AB = 2400 \text{ m}$, $\alpha = 26^{\circ}20'$.

Načrtneme situáciu:

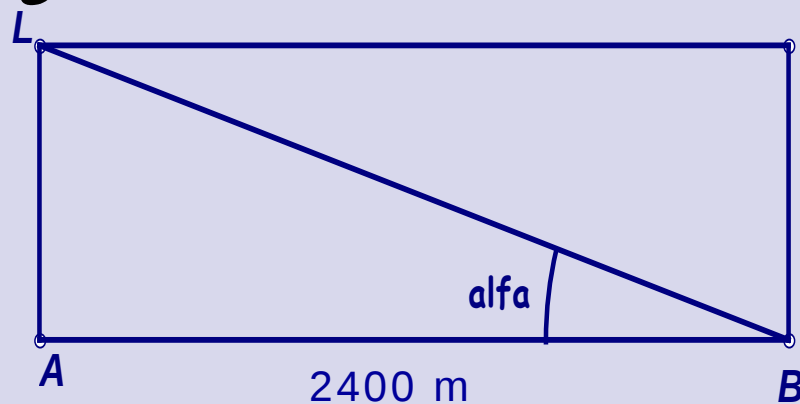
- Výšku lietadla určíme ako dĺžku úsečky LA.
- K výpočtu využijeme $\text{tg } \alpha$.

$$\text{tg } \alpha = |LA| : |AB|$$

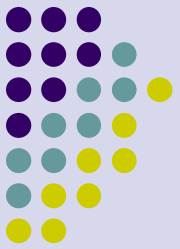
$$|LA| = |AB| \cdot \text{tg } \alpha = 2\,400 \text{ m} \cdot \text{tg } 26^{\circ}20'$$

$$|LA| = 2\,400 \text{ m} \cdot 0,495 = \underline{\underline{1\,188 \text{ m}}}$$

Lietadlo letí vo výške približne 1 188 m.



PR2: Zo skaly vo výške 60 m je vidno vrchol stožiaru pod hĺbkovým uhlom $\alpha = 42^\circ$ a päťu stožiaru pod hĺbkovým uhlom $\beta = 55^\circ$. Vypočítajte výšku stožiaru.

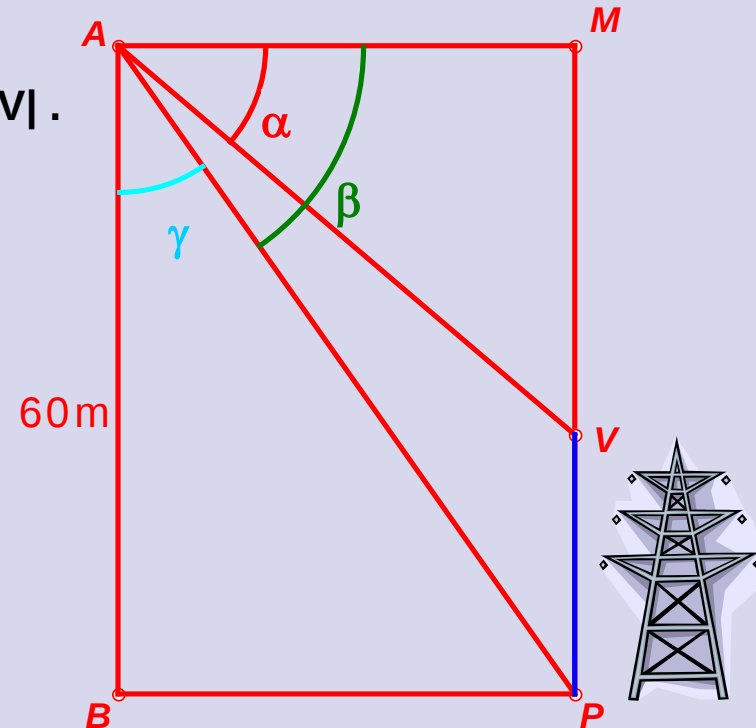


Dané: $AB = 60 \text{ m}$, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 55^\circ$ Hľadané: PV

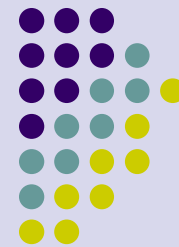
Načrtne situáciu:

- Výšku stožiaru určíme ako rozdiel $|AB| - |MV| = |PV|$.
- $MV = ?$
- Aby sme mohli z $\triangle AVM$ určiť $|MV|$, vypočítame si najskôr $|AM| = |BP|$. K výpočtu použijeme $\text{tg } \gamma$.
 $\gamma = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$
- $\text{tg } \gamma = |BP| : |AB|$
 $|BP| = |AB| \cdot \text{tg } \gamma = 60 \text{ m} \cdot \text{tg } 35^\circ = 60 \text{ m} \cdot 0,7002$
 $|BP| = 42,012 \text{ m} = \underline{42 \text{ m}}$
- Vypočítame $|MV|$
 $\text{tg } \alpha = |MV| : |AM|$
 $|MV| = |AM| \cdot \text{tg } \alpha = 42 \text{ m} \cdot \text{tg } 42^\circ = 42 \text{ m} \cdot 0,9004$
 $|MV| = 37,8168 \text{ m}$
- $|PV| = |AB| - |MV| = 60 \text{ m} - 37,8 \text{ m}$
 $|PV| = \underline{22,2 \text{ m}}$

Stožiar má výšku 22,2 m.



PR3: Kabínka lanovky z Tatranskej Lomnice (903 m n. m.) na Skalnaté pleso (1 772 m n. m.) prejde dráhu 3,682 km. Vypočítajte priemerný uhol stúpania lanovky.



Dané: $TS = 3682$ m, $SX = 869$ m Hľadané: α

Načrtujeme situáciu:

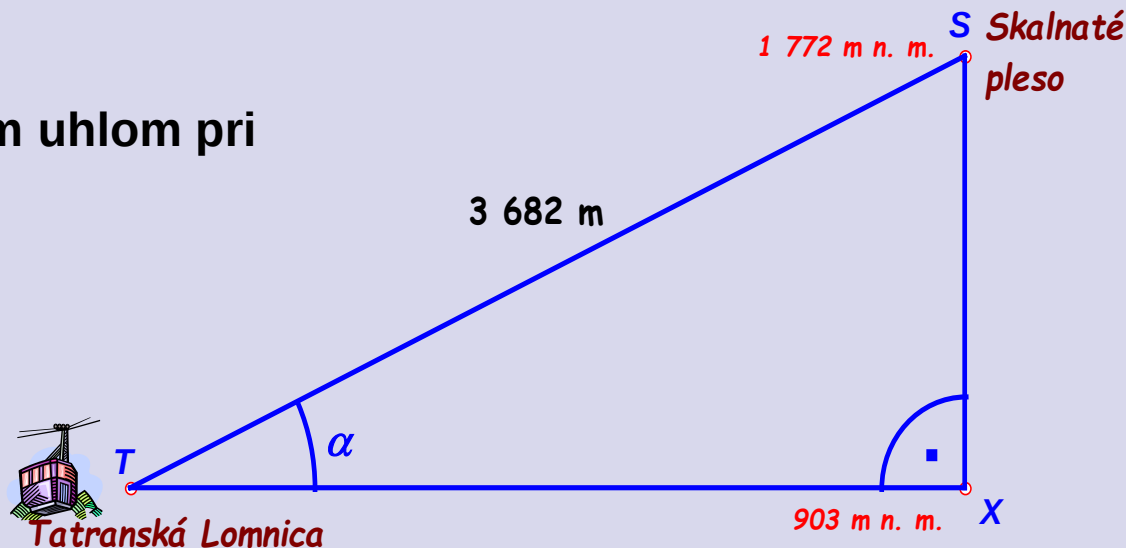
- $\triangle TXS$ je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole X

$$|TS| = 3,682 \text{ km} = 3\,682 \text{ m}$$

$$|XS| = 1\,772 \text{ m} - 903 \text{ m}$$

$$|XS| = 869 \text{ m}$$

$$|\angle XTS| = \alpha = ?^\circ$$



- K výpočtu použijeme sin uhla α

$$\sin \alpha = |XS| : |TS|$$

$$\sin \alpha = 869 \text{ m} : 3\,682 \text{ m} = 0,236\,013$$

$$\alpha = 13,651\,34^\circ = \underline{\underline{13^\circ 39' 5''}}$$

Priemerný uhol stúpania lanovky je $13^\circ 39' 5''$.

PR4: Schodisko vedúce do budovy má dĺžku 7,2 m a stúpa pod uhlom $\alpha=30^\circ$. Na konci schodiska vedie do budovy rovná plocha dlhá 3 m.

a) Po koľkých schodoch musíme vystúpiť k vchodu, ak má jeden schod výšku 12 cm?

b) Aká je vzdialenosť prvého schodu pri chodníku od priečelia budovy?

Dané: $AB=7,2$ m, $\alpha = 30^\circ$, $AE = 3$ m **Hľadané:** ps, BD

Načrtne situáciu:

- **Výška schodišťa**

$$|AB| = 7,2 \text{ m}, |\angle ABC| = \alpha = 30^\circ, |AC| = ? \text{ m}$$

K výpočtu použijeme sínus uhla α

$$\sin \alpha = |AC| : |AB| \Rightarrow |AC| = |AB| \cdot \sin \alpha$$

$$|AC| = 7,2 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 7,2 \text{ m} \cdot 0,5 = 3,6 \text{ m}$$

- **Počet schodov:**

ps = výška schodišťa : výška schodu

$$\text{ps} = AC / \text{vs} = 3,6 / 0,12 = \underline{30}.$$

- **Vzdialenosť prvého schodu od priečelia budovy:**

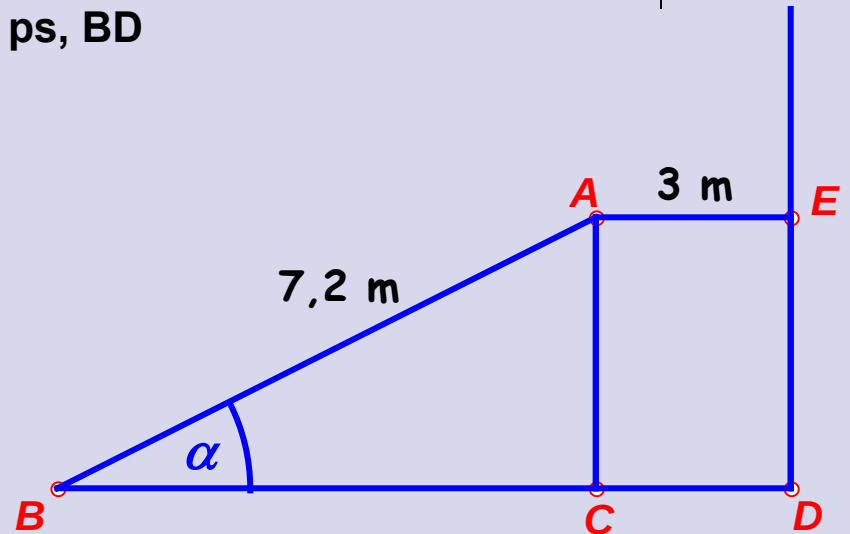
$$|AC| = |DE| = 3,6 \text{ m}, |BD| = |BC| + |CD|$$

K výpočtu použijeme kosínus uhla α

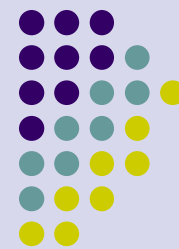
$$\cos \alpha = |BC| : |AB| \Rightarrow |BC| = |AB| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |BC| = 7,2 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ$$

$$|BC| = 7,2 \text{ m} \cdot 0,866 \Rightarrow |BC| = 6,235 \text{ m}. \text{ Dĺžka úsečky BD} = 3\text{m} + 6,235 \text{ m} = \underline{9,235 \text{ m}}.$$

Ku vchodu do budovy musíme vystúpiť po 30 schodoch. Vzdialenosť prvého schodu od priečelia budovy je 9,24 m.



PR5: Deti púšťali šarkana na šnúre, ktorá mala dĺžku 45 m. V istom okamihu zvierala šnúra s vodorovnou rovinou uhol $\alpha=45^\circ$. V akej výške od zeme sa šarkan nachádzal, ak dieťa držalo koniec šnúry vo výške 1,7 m od zeme?



Dané: $AB = 45 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $XB = 1,7 \text{ m}$ Hľadané: AY

Načrtáme situáciu:

- $\triangle ABC$ je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C
 $|AB| = 45 \text{ m}$, $|\angle ABC| = \alpha = 45^\circ$, $|AC| = ? \text{ m}$

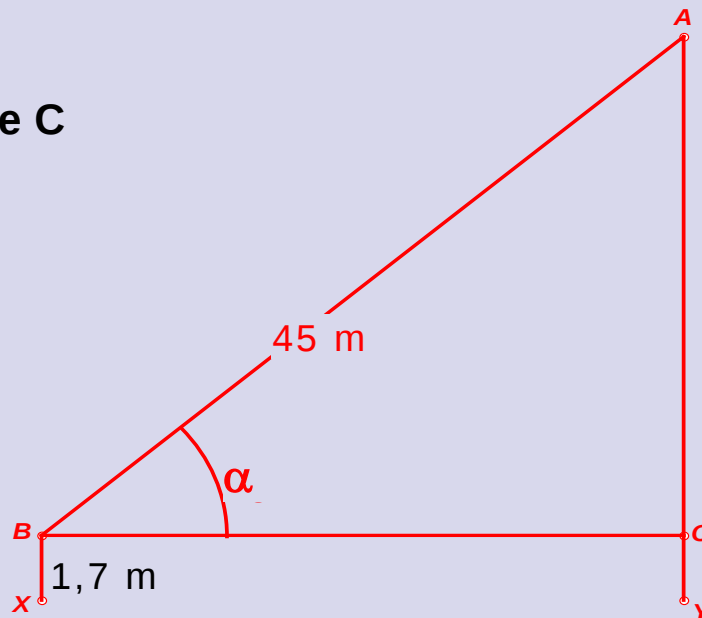
K výpočtu použijeme sínus uhla α

$$\sin \alpha = |AC| : |AB| \Rightarrow |AC| = |AB| \cdot \sin \alpha$$

$$|AC| = 45 \text{ m} \cdot \sin 45^\circ = 45 \text{ m} \cdot 0,707$$

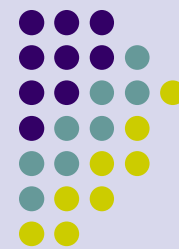
$$|AC| = 31,8198 \text{ m} = \underline{\underline{31,82 \text{ m}}}$$

- Výška v ktorej letí šarkan:
 $|AY| = |AC| + |CY| = 31,82 \text{ m} + 1,7 \text{ m}$
 $|AY| = \underline{\underline{33,52 \text{ m}}}$



Šarkan bol v danom okamihu vo výške 33,52 m od zeme.

PR6: Stĺp televízneho vykrývača je vysoký 75 m. Šiestimi lanami je upevnený v troch pätinách svojej výšky. Laná zvierajú s vodorovnou rovinou, ktorá prechádza pätou stĺpa stojaceho kolmo na túto rovinu, uhol $\alpha = 55^\circ$. Koľko metrov lana potrebujeme na upevnenie stĺpa, ak na ukotvenie lán musíme počítať so 7 % ich dĺžky navyše?



Dané: $CV = 75 \text{ m}$, $\alpha = 55^\circ$, $pl = 6$, $AC = 3/5 \cdot CV$ **Hľadané:** d_{6l}

- Načrtne situáciu:

$\triangle ABC$ je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C

$|CV| = 75 \text{ m}$, $|\angle ABC| = \alpha = 55^\circ$, $|AC| = ? \text{ m}$, $|AB| = ? \text{ m}$

- K výpočtu použijeme sínus uhla α

$|AC| = (|CV| : 5) \cdot 3 = (75 \text{ m} : 5) \cdot 3$

$|AC| = \underline{45 \text{ m}}$ – výška v ktorej sú upevnené laná

$\sin \alpha = |AC| : |AB| \Rightarrow |AB| = |AC| : \sin \alpha$

$|AB| = 45 \text{ m} : \sin 55^\circ = 45 \text{ m} : 0,81915$

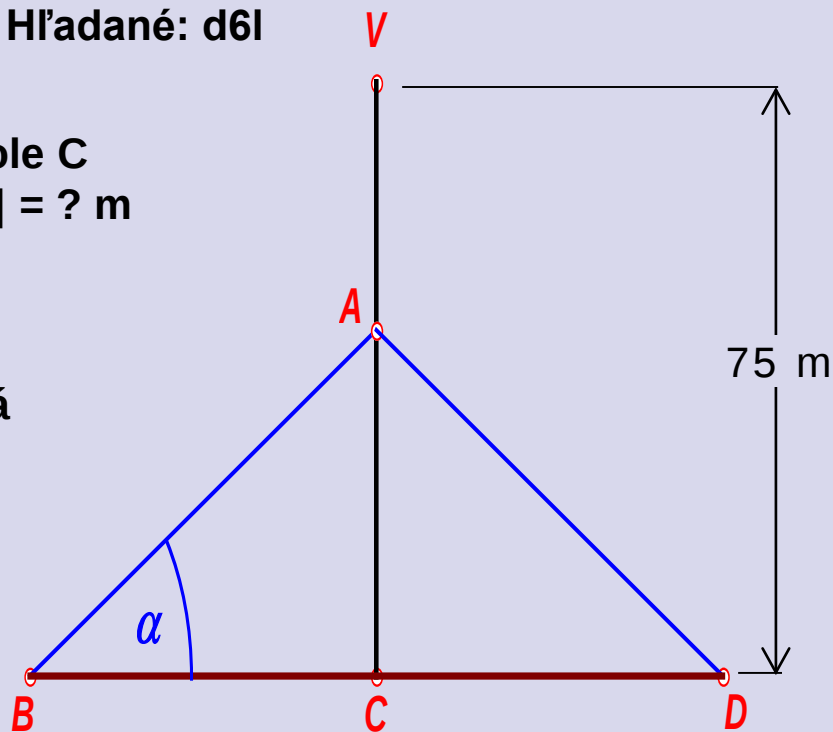
$|AB| = \underline{54,935 \text{ m}}$

- Dĺžka šiestich lán + rezerva:

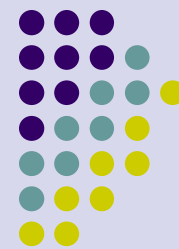
$d_{6l} = |AB| \cdot 6 \cdot 1,07 = 54,935 \cdot 6 \cdot 1,07$

$d_{6l} = \underline{352,683 \text{ m}}$

Na ukotvenie stĺpa potrebujeme 352,683 m lana.



PR7: Kosínusová veta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ platí pre každý trojuholník.
Dokážte, že táto veta platí aj pre trojuholník so stranami $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.



Dané: a , b , c

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

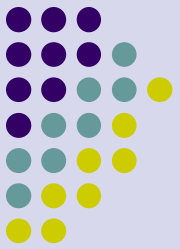
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma$$

$$a^2 = 5^2 = 25 \qquad a^2 = 144 + 169 - 2 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \frac{12}{13} = 25$$

Záver: Kosínusová veta platí aj pre zadaný trojuholník.

Úloha: Overte platnosť COS vety na ďalšom, Vami zvolenom trojuholníku.



PR8: Určite približne veľkosť uhla β , ktorý zvierajú navzájom stenová a telesová uhlopriečka kocky? Diskutujte výsledky. Ako by to bolo v prípade kvádra?

Dané: $AB = a$

Hľadané: β

Načrtneme situáciu:

- Trojuholník ABD je rovnoramenný a pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Z Pythagorovej vety určíme dĺžku strany $BD = u$:

$$u^2 = a^2 + a^2$$

$$u^2 = 2a^2$$

- Trojuholník BDH je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole D. Dĺžku strany $BH = w$ si opäť vyjadríme z Pythagorovej vety:

$$w^2 = a^2 + u^2$$

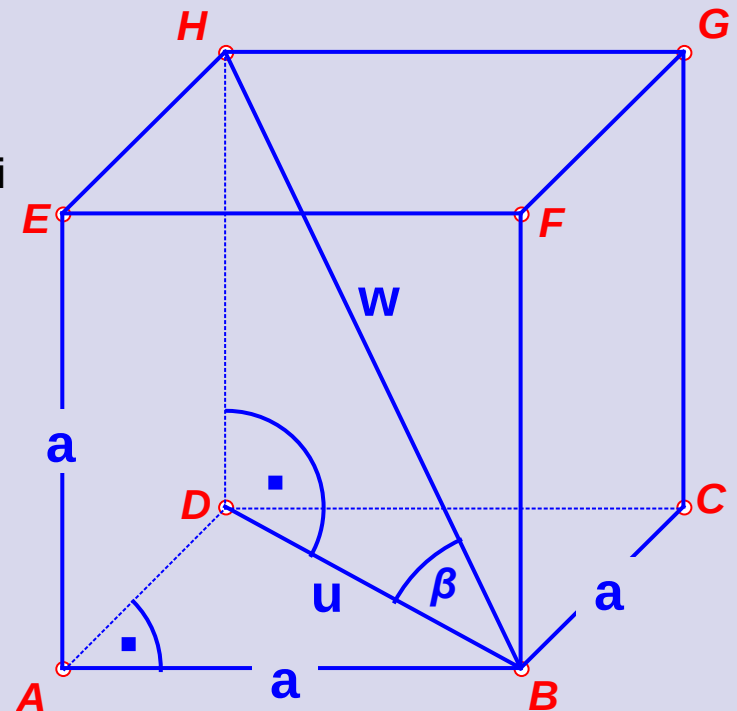
$$w^2 = a^2 + 2a^2$$

$$w^2 = 3a^2$$

- Uhol DBH : použijeme kosínus uhla $\beta = \angle DBH$:

$$\cos \beta = \sqrt{\frac{2a^2}{3a^2}} \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,8165$$

Z tabuliek určíme $\beta = \cos^{-1}(0,8165) \Rightarrow \beta = \underline{\underline{35^\circ 20'}}$



Stenová a telesová uhlopriečka kocky navzájom zvierajú uhol $35^\circ 20'$.

PR9: Priemer pohára je $d=6$ cm. Džús v ňom siaha 1 cm pod horný okraj. O aký najväčší uhol môžeme nakloniť pohár, aby sa džús z pohára nevylial?

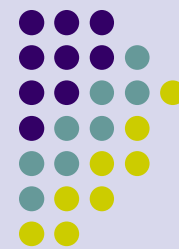
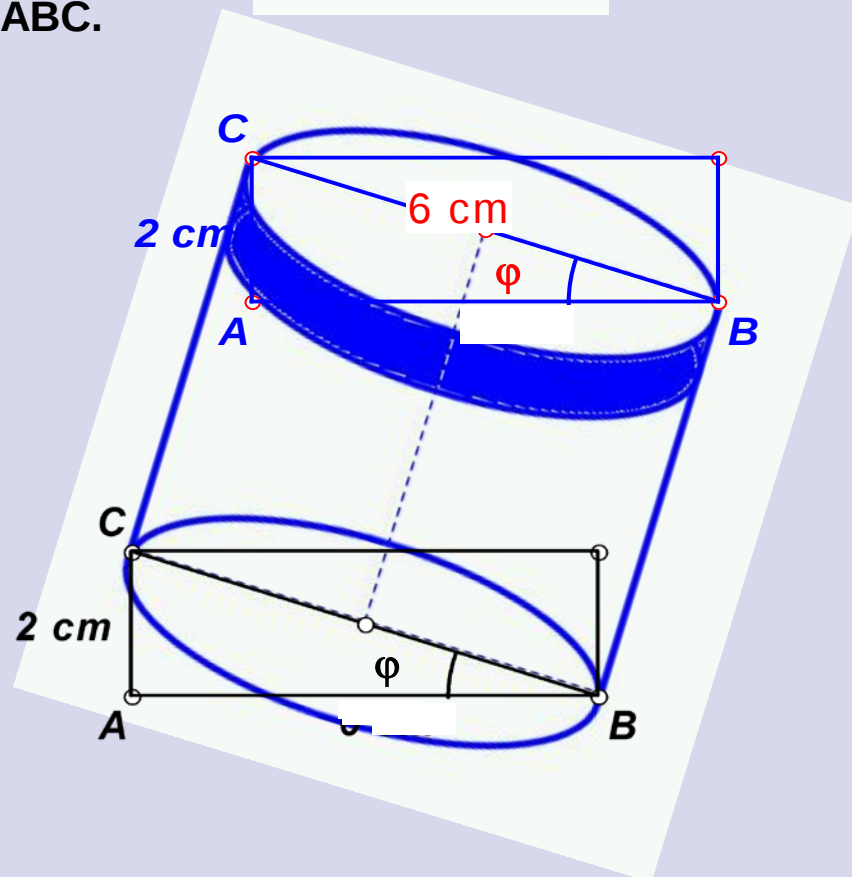
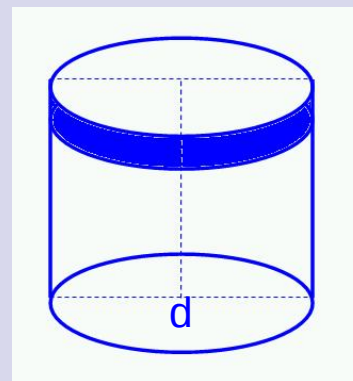
Dané: $d = BC = 6$ cm ,

Hľadané: φ

Načrtne situáciu:

- Treba si všimnúť, ako sa mení výška nezamáčanej steny pohára AC, keď pohár nakloníme pod najväčším možným uhlom, kedy sa džús ešte nevyleje.
- Uhol naklonenia pohára je potom uhol $\varphi = \angle ABC$.
- K výpočtu použijeme sinus uhla φ .
 $\sin \varphi = |AC| : |BC| = 2 : 6 = 0,3333$
 $\sin^{-1}(0,3333) = \varphi \Rightarrow \varphi = \underline{19^{\circ}47'}$

Pohár môžeme nakloniť najviac o uhol $19^{\circ}47'$.



PR10: Lietadlo na obrázku klesá pod uhlom 10° . Po dosadnutí na pristávaciu dráhu potrebuje s ohľadom na svoju rýchlosť ešte 1,8 km dráhy na bezpečné zastavenie. Koľko metrov pred koncom pristávacej dráhy lietadlo zastane?

Dané: $\alpha = 10^\circ$, $p_d = 1800$ m

Hľadané: z

Načrtujeme situáciu:

- Najskôr vypočítame, v akej vzdialenosti od začiatku pristávacej dráhy lietadlo dosadne na dráhu.

K výpočtu použijeme tangens uhla:

$$\operatorname{tg} 80^\circ = x : 2\,000 \text{ m}$$

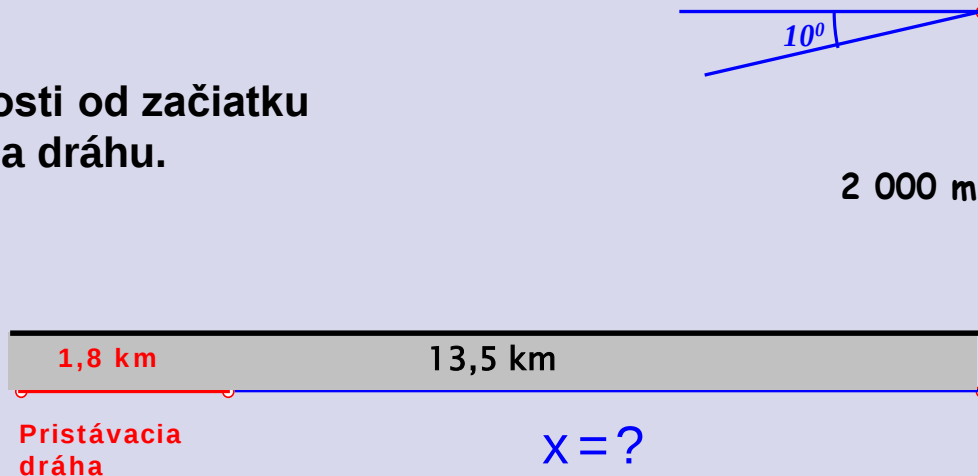
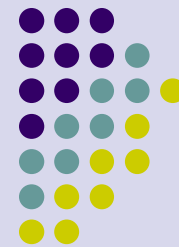
$$x = 2\,000 \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 2000 \cdot 5,671\,3$$

$$x = 11\,342,56 \text{ m}$$

- Lietadlo potrebuje ešte dráhu $p_d = 1\,800$ m na zastavenie, t.j. zastane vo vzdialenosti od začiatku dráhy: $1\,800 \text{ m} + 11\,343 \text{ m} = 13\,143 \text{ m}$

- Lietadlo zastaví vo vzdialenosti z od konca dráhy:
 $z = 13\,500 \text{ m} - 13\,143 \text{ m} = \underline{\underline{357 \text{ m}}}$

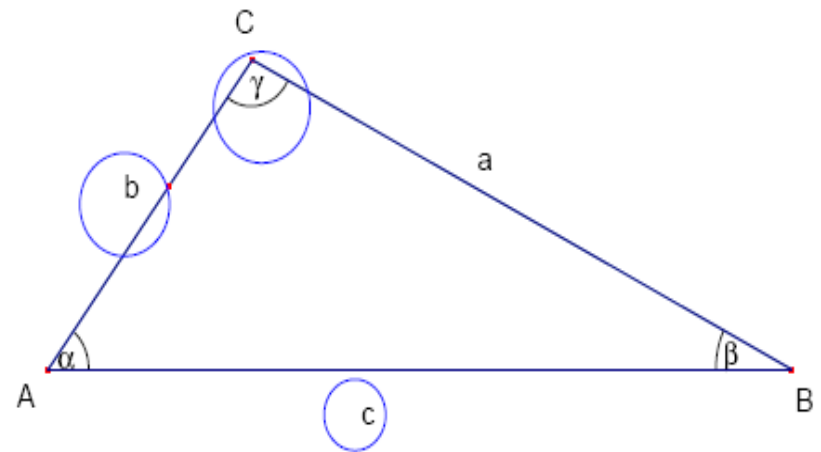
Lietadlo sa zastaví 357 m od konca pristávacej dráhy.



PR 11: Na základe údajov v obrázku určte neznáme parametre trojuholníka ABC.

$\triangle ABC$
 $b = 6 \text{ cm}$
 $c = 14 \text{ cm}$
 $\gamma = 98^\circ$

$a = ?$
 $\alpha = ?$
 $\beta = ?$



$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \beta \quad / : c$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \gamma}{c}$$

$$\sin \beta = \frac{6 \cdot \sin 98^\circ}{14}$$

$$\beta = 25^\circ 6' 45,83''$$

Riešenie:

V trojuholníku poznáme dve strany a uhol, ktorý leží oproti väčšej z nich. Trojuholník je určený podľa vety Ssu a budeme ho riešiť sinusovou vetou.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{neznáma je } \sin \beta)$$

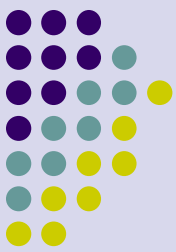
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a \cdot \sin \gamma = c \cdot \sin \alpha \quad / : \sin \gamma$$

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$a = \frac{14 \cdot \sin 56^\circ 53' 14,17''}{\sin 98^\circ}$$

$$a = 11,84160486 \text{ cm}$$



PR12: Na základe zadaných údajov vypočítajte neznáme parametre trojuholníka ABC. Dané: $\alpha=40^\circ$, $\beta=110^\circ$, $b=9$ cm.

$$\begin{aligned}\alpha &= 40^\circ \\ \beta &= 110^\circ \\ b &= 9 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{9 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{9 \cdot 0,642}{0,939} = 6,15$$

$$a = 6,15 \text{ cm}$$

Uhol χ dostaneme jednoducho:

$$\chi = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

Poslednú stranu získame zasa pomocou sínusovej vety:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \chi}$$

$$c = \frac{b \cdot \sin \chi}{\sin \beta} = \frac{9 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{9 \cdot 0,5}{0,939} = 4,8$$

$$c = 4,8 \text{ cm}$$

PR13: Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC, ak sú zadané dĺžky jeho strán: $a = 6,8$ cm, $b = 4,5$ cm, $c = 3,1$ cm.

Riešenie:

Pomocou využitia kosínusovej vety vypočítame veľkosť vnútorného uhla α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = -0,5871 \Rightarrow \alpha = 125,951^\circ$$

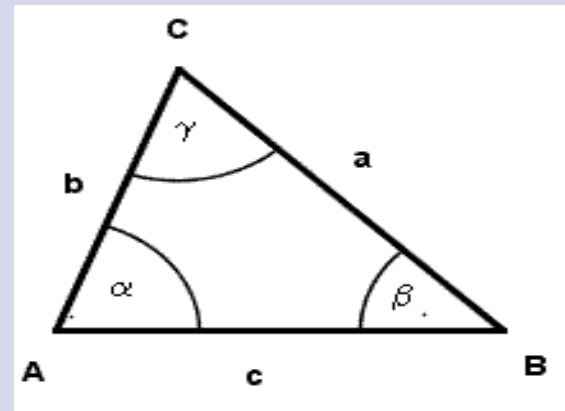
Rovnako postupujeme aj pri výpočte ďalšieho vnútorného uhla, napr. β . Platí:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = 0,8444 \Rightarrow \beta = 32,392^\circ$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

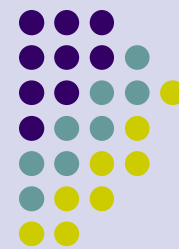
$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = 0,9294 \Rightarrow \gamma = 21,657^\circ$$



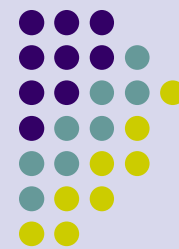
Skúška správnosti:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$125,951^\circ + 32,392^\circ + 21,657^\circ = 180^\circ$$



PR14:



Príklad 7.1 Použitím definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^2$ v bode a .

Riešenie:

Použijeme vzorec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a$$

Príklad 7.2 Použitím definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^3$ v bode a .

Riešenie:

Opäť použijeme vzorec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$