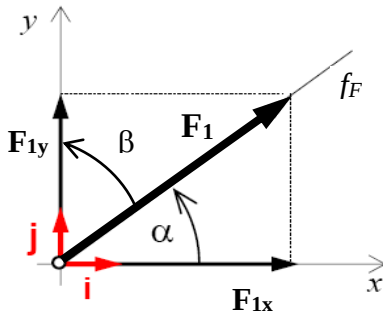


STATIKA : KAPITOLA 2

Príklad 2.1: Zakreslite sily F_1 , F_2 . Pomocou goniometrických funkcií určite veľkosť ich zložiek F_{1x} , F_{1y} , pôsobiach v smere osí súradnicového systému. Zadané: $F_1(30,20;40^\circ;500\text{ N})$, $F_2(0;0;0;50^\circ;60^\circ;70^\circ;500\text{ N})$.



Obr.2.9 a

Zložky sily F_1 :

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 40^\circ = 500 \cdot 0,766 \approx 383\text{ N} \quad (= F_1 \cdot \sin \beta)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 500 \cdot \sin 40^\circ = 500 \cdot 0,643 \approx 321,4\text{ N} \quad (= F_1 \cdot \cos \beta)$$

Výsledok: $F_{1x}(30,20;0^\circ;383\text{ N})$,

$F_{1y}(30,20;90^\circ;321,4\text{ N})$

Zložky sily F_2 :

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 50^\circ = 500 \cdot 0,642 \approx 321,4\text{ N}$$

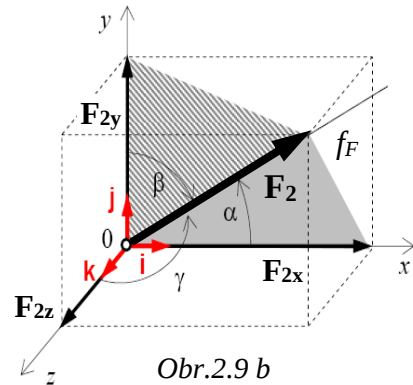
$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta = 500 \cdot \cos 60^\circ = 500 \cdot 0,5 = 250\text{ N}$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma = 500 \cdot \cos 70^\circ = 500 \cdot 0,342 \approx 171\text{ N}$$

Výsledok: $F_{2x}(0,0,0;0^\circ;90^\circ;90^\circ;321,4\text{ N})$,

$F_{2y}(0,0,0;90^\circ;0^\circ;90^\circ;250\text{ N})$,

$F_{2z}(0,0,0;90^\circ;90^\circ;0^\circ;171\text{ N})$.



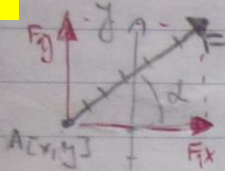
Obr.2.9 b

Príklad 2.1: Zakreslite sily F_1 a F_2 . Zadané: $F_1(-2;4;60^\circ;600\text{ N})$, $F_2(0;0;0;45^\circ;60^\circ;70^\circ;400\text{ kN})$ a rozložte ich na zložky v smere súradnicových osí.

Pr. 2.1

$$F_1(-2,4;60^\circ;600\text{ N})$$

$$F_2(0,0,0;45^\circ;60^\circ;70^\circ;400\text{ kN})$$

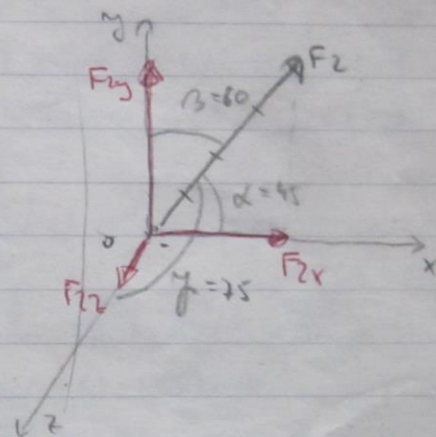


$$F_{1x} = F \cdot \cos \alpha = 600 \cdot 0,5 = 300\text{ N}$$

$$F_{1y} = F \cdot \sin \alpha = 600 \cdot 0,866 = 519,6\text{ N}$$

$$F_{1x}(-2,4;0^\circ;300\text{ N})$$

$$F_{1y}(-2,4;90^\circ;519,6\text{ N})$$



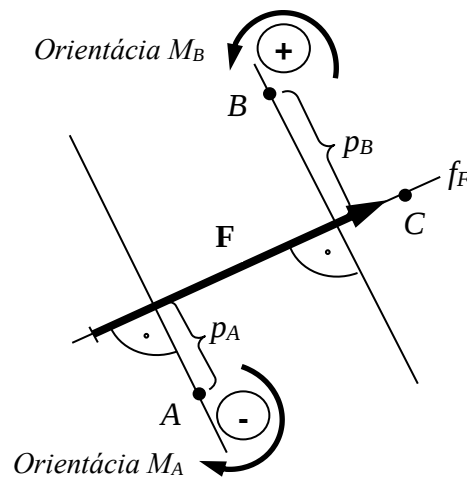
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha = 400 \cdot 0,707 = 282,8\text{ kN}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta = 400 \cdot 0,5 = 200\text{ kN}$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma = 400 \cdot 0,342 = 136,8\text{ kN}$$

$$F_{2x}(0,0,0;0^\circ;90^\circ;90^\circ;282,8\text{ kN})$$

Príklad 2.2: Určte veľkosť a zmysel otáčavých účinkov sily F vzhľadom na body A, B a C. Podľa Obr.2.17 ležia body aj sila F v jednej rovine, pričom bod C leží na nositeľke sily F . Zadané: $F = 1000 \text{ N}$, $p_A = 0,5 \text{ m}$, $p_B = 0,9 \text{ m}$.



Obr.2.17

Príklad 2.2: Určte veľkosť posuvného a otáčavého účinku (veľkosť a zmysel) od sily F vzhľadom k bodom A, B a C. Všetky body aj sila F ležia v jednej rovine, bod C leží na nositeľke sily F . Zadané: $F = 1000 \text{ N}$, $p_A = 0,5 \text{ m}$, $p_B = 0,9 \text{ m}$.

Pr. 2.2

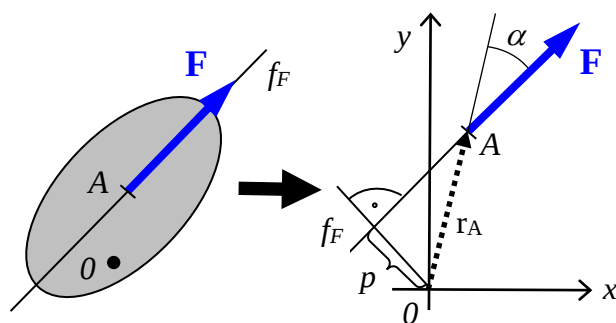
$F = 1000 \text{ N}$
 $p_A = 0,5 \text{ m}$
 $p_B = 0,9 \text{ m}$

$M_A = F \cdot p_A = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ Nm}$
 zmysel $\odot$ tzn. $M_A = -500 \text{ Nm}$

$M_B = F \cdot p_B = 1000 \cdot 0,9 = 900 \text{ Nm}$
 zmysel $\oplus$ tzn. $M_B = +900 \text{ Nm}$

$M_C = F \cdot p_C = 1000 \cdot 0 = 0 \text{ Nm}$
 tzn. sila F nemá vzhľadom k bodu C žiadny otáčavý účinok

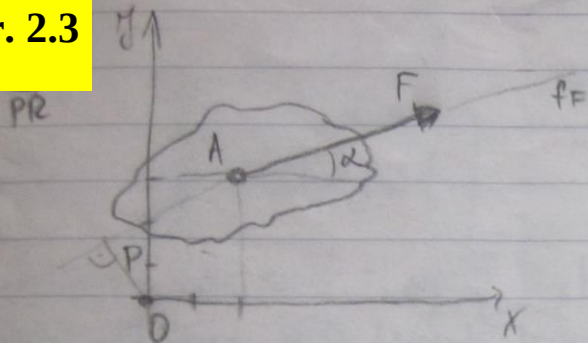
Príklad 2.3: Určite veľkosť a zmysel otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodu O . Zadané: $F=500\text{ N}$, $\alpha=30^\circ$, $r_A = 2\text{ m}$ (Obr.2.15).



Obr.2.15

Príklad 2.3: Určite veľkosť a zmysel posuvného a otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodu O . Zadané: $F(2, 3; 30^\circ; 2000\text{ N})$, $O(0,0)$.

Pr. 2.3



Zadané: $F(2, 3; 30^\circ; 2000\text{ N})$
 Body $O[0,0]$
 $A[2,3]$

а) момент силы относительно центра p_i

$$M_O = F \cdot p$$

$$M_O = 2000 \cdot -1,598 = \underline{\underline{-3196\text{ Nm}}}$$

$$p = x_A \cdot \sin \alpha - y_A \cdot \cos \alpha$$

$$p = 2 \cdot \sin 30^\circ - 3 \cdot \cos 30^\circ$$

$$p = 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,866$$

$$p = \underline{\underline{-1,598\text{ m}}}$$

б) момент - по формуле Варингеновской ветви

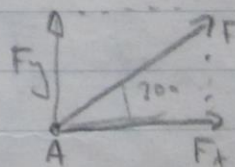
$$M_O = \sum M_{iO} = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

$$M_O = x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x$$

$$M_O = x_A \cdot F \cdot \sin \alpha - y_A \cdot F \cdot \cos \alpha$$

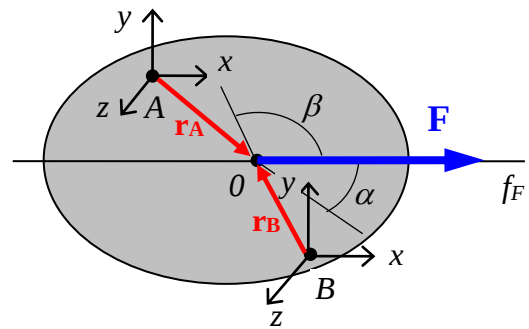
$$M_O = 2 \cdot 2000 \cdot 0,5 - 3 \cdot 2000 \cdot 0,866 = 2000 - 5196$$

$$M_O = \underline{\underline{-3196\text{ Nm}}}$$



Príklad 2.4 Na hmotnom objekte určte veľkosť a zmysel otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodom A a B (Obr.2.16). Zadané: $F=500\text{ N}$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=110^\circ$, $|r_A|=0,2\text{ m}$, $|r_B|=0,3\text{ m}$.

Záver: Zmysel momentu M považujeme za kladný, ak polohový vektor r_A a sila F tvoria ľavotočivý systém (t.j. proti pohybu ručičiek hodín), inak je zmysel momentu M záporný (t.j. v smere pohybu ručičiek hodín).



Obr.2.16

Príklad 2.4: Na hmotnom objekte určte veľkosť a zmysel otáčavého účinku sily F vzhľadom k bodom A , B . Zadané: $F(0,0;0^\circ,1000\text{N})$, $A(-6,4)$, $B(4,-4)$, $b=12\text{ m}$, $h=8\text{ m}$.

Pr. 2.4

Handwritten solution for Pr. 2.4:

Diagram 1: A rectangular object with width $b=12$ and height $h=8$. Point A is at $(-6, 4)$ and point B is at $(4, -4)$. A force F is applied at point $O(6, -4)$ along the positive x-axis.

Diagram 2: A similar diagram showing the force F applied at point $O(4, 4)$.

Calculations for Diagram 1:

Position vectors from O to A and B :

$$r_A = x_A - x_O = -6 - 6 = -12$$

$$r_B = x_B - x_O = 4 - 6 = -2$$

Force components:

$$F_x = F \cdot \cos 0^\circ = 1000\text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin 0^\circ = 0$$

Moments about A and B :

$$M_A = r_A \cdot F_y - r_B \cdot F_x = (-12) \cdot 0 - (-2) \cdot 1000 = 2000\text{ Nm}$$

$$M_B = r_B \cdot F_y - r_A \cdot F_x = (-2) \cdot 0 - (-12) \cdot 1000 = 12000\text{ Nm}$$

Calculations for Diagram 2:

Position vectors from O to A and B :

$$r_A = x_A - x_O = -6 - 4 = -10$$

$$r_B = x_B - x_O = 4 - 4 = 0$$

Moments about A and B :

$$M_A = r_A \cdot F_y - r_B \cdot F_x = (-10) \cdot 0 - 0 \cdot 1000 = 0$$

$$M_B = r_B \cdot F_y - r_A \cdot F_x = 0 \cdot 0 - (-10) \cdot 1000 = 10000\text{ Nm}$$

Príklad 2.5: Na zadanom konzolovom lomenom nosníku určite moment sily F vzhľadom k bodu A. Zadané: $F=250\text{ N}$, $\alpha=30^\circ$, geometria nosníka podľa obr.2.18.

a) Výpočet prostredníctvom určenia ramena sily p (2.20):

$$p_i = x_i \cdot \sin \alpha'_i - y_i \cdot \cos \alpha'_i \Rightarrow$$

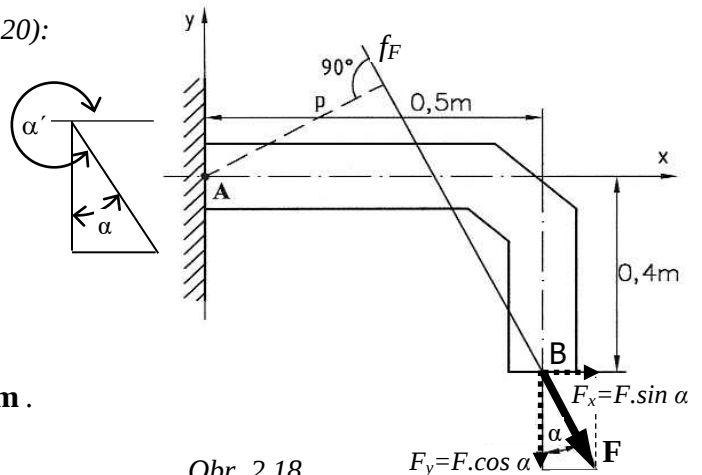
$$p = x_B \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) - y_B \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$$

Pre $\alpha = 30^\circ$ dostaneme

$$p = 0,5 \cdot \sin 300^\circ - (-0,4) \cdot \cos 300^\circ$$

$$p = 0,5 \cdot (-0,866) + 0,4 \cdot 0,5 \Rightarrow p = -0,233\text{ m}$$

$$M_A = F \cdot p = 250 \cdot -0,233 \Rightarrow M_A \cong -58,25\text{ Nm}$$



Obr. 2.18

b) Výpočet prostredníctvom Varignonovej momentovej vety:

$$M_A = \sum M_{iA} = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) \Rightarrow M_A = \sum (x_B \cdot F_y - y_B \cdot F_x)$$

$$F_x = F \cdot \cos 300 = 250 \cdot 0,5 = 125\text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin 300 = 250 \cdot -0,866 = -216,5\text{ N}$$

$$M_A = x_B \cdot F_y - y_B \cdot F_x = 0,5 \cdot -216,5 - (-0,4) \cdot 125 = -108,25 + 50 \Rightarrow M_A \cong -58,25\text{ Nm}$$

Poznámka: $-(F \cdot \cos \alpha) = F \cdot \sin \alpha' \Rightarrow -250 \cdot \cos 30^\circ = 250 \cdot \sin 300^\circ \Rightarrow -216,506 = -216,506$.

Pr.2.5

Handwritten solution for Pr.2.5:

Given: $F = 250\text{ N}$, $B[0,5; -0,4]$, $\alpha = 30^\circ$.

• pomocou ramena sily p_A

$$p_A = x_B \cdot \sin(270^\circ + 30^\circ) - y_B \cdot \cos(270^\circ + 30^\circ)$$

$$p_A = x_B \cdot \sin 300^\circ - y_B \cdot \cos 300^\circ$$

$$p_A = 0,5 \cdot -0,866 - (-0,4) \cdot 0,5$$

$$p_A = 0,5 \cdot -0,866 + 0,4 \cdot 0,5$$

$$p_A = -0,433 + 0,2$$

$$p_A = -0,233\text{ m}$$

• pomocou Varignonovej vety

$$\Pi_A = x_B \cdot F_y - y_B \cdot F_x$$

$$\Pi_A = x_B \cdot F \cdot \sin(270^\circ + \alpha) - y_B \cdot F \cdot \cos(270^\circ + \alpha)$$

$$\Pi_A = x_B \cdot F \cdot \sin 300^\circ - y_B \cdot F \cdot \cos 300^\circ$$

$$\Pi_A = 0,5 \cdot 250 \cdot -0,866 - (-0,4) \cdot 250 \cdot 0,5$$

$$\Pi_A = -108,25 + 50$$

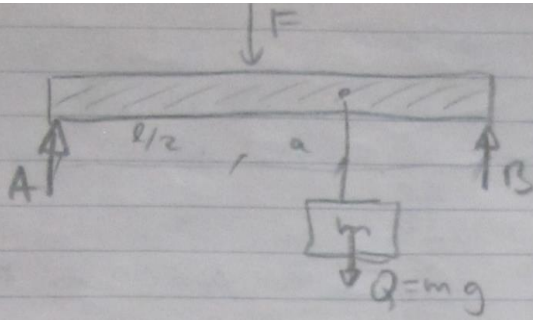
$$\Pi_A = -58,25\text{ Nm}$$

$\cos 300^\circ = 0,5$
 $\sin 300^\circ = -0,866$

$\Pi_A = F \cdot p_A$
 $\Pi_A = 250 \cdot -0,233$
 $\Pi_A = -58,25\text{ Nm}$

Príklad 2.6: Určite veľkosť sily B , vznikajúcej v bode B nosníka s dĺžkou l , zaťaženého silou F a bremenom o hmotnosti m (Obr.2.21). Zadané: $F=1 \text{ kN}$, $m=500 \text{ kg}$, $l=4 \text{ m}$, $a=1 \text{ m}$, $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Pr.2.6



$$F = 1000 \text{ N} \quad l = 4 \text{ m}$$

$$m = 500 \text{ kg} \quad a = 1 \text{ m}$$

$$A = ? \quad B = ?$$

$$Q = m \cdot g = 500 \cdot 10 = 5000 \text{ N}$$

$$\sum F_i = 0 \rightarrow F + Q = A + B$$

$$F + Q - A - B = 0 \quad \text{— ako určiť } A, B?$$

potrebujeme silu rovnováhy uvažovať — 2 nerovnice

$$\sum M_i = 0 \rightarrow \sum M_{iA} = -F \cdot \frac{l}{2} - Q \cdot \left(\frac{l}{2} + a\right) + B \cdot l = 0$$

$$B = \frac{F \cdot \frac{l}{2} + Q \cdot \left(\frac{l}{2} + a\right)}{l}$$

$$B = \frac{1000 \cdot \frac{4}{2} + 5000 \cdot (2 + 1)}{4}$$

$$B = \frac{1000 \cdot 2 + 5000 \cdot 3}{4} = \frac{2000 + 15000}{4}$$

$$B = \frac{17000}{4} = \underline{\underline{4250 \text{ N}}}$$

LOGICKY $F + Q = A + B$

$$1000 + 5000 = A + 4250$$

$$A = 6000 - 4250$$

$$A = \underline{\underline{1750 \text{ N}}}$$

Overenie: $\sum M_{iB} = 0 \rightarrow -A \cdot l + F \cdot \frac{l}{2} + Q \cdot (l/2 - a) = 0$

$$A = \frac{F \cdot \frac{l}{2} + Q \cdot (l/2 - a)}{l}$$

$$A = \frac{1000 \cdot \frac{4}{2} + 5000 \cdot (2 - 1)}{4}$$

$$A = \frac{1000 \cdot 2 + 5000 \cdot 1}{4}$$

$$A = \frac{3000}{4} = \underline{\underline{1750 \text{ N}}}$$

Príklad 2.7: Vyjadrite posuvný a otáčavý účinok dvoch rovnako veľkých, opačne orientovaných, síl F_1 a F_2 vzhľadom k bodom A, B, C. Sily ležia na paralelných nositeľkách f_{F1} a f_{F2} (Obr.2.22), ktorých kolmá vzdialenosť je p . Zadané: $F_1=F_2=10 \text{ kN}$, $p_{1A}=2 \text{ m}$, $p_{2A}=5 \text{ m}$

- Posuvný účinok: $F_1 - F_2 = 10 - 10 = 0 \Rightarrow$ žiadny posuvný účinok.

- Otáčavý účinok: $F_1 = F_2 = F = 10 \text{ kN}$
 $p = p_{2A} - p_{1A} = 5 - 2 \Rightarrow p = 3 \text{ m}$

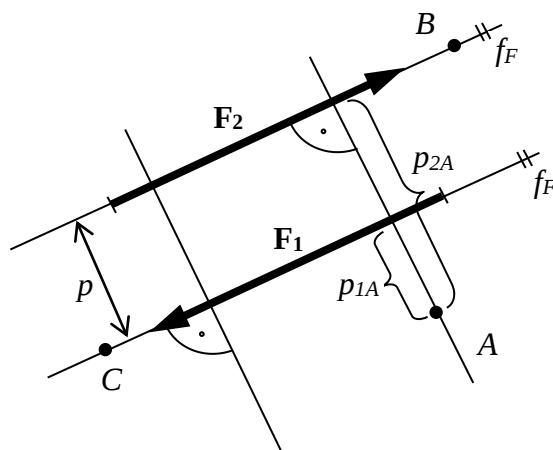
$$M_A = F_1 \cdot p_{1A} - F_2 \cdot p_{2A} = F \cdot (p_{1A} - p_{2A}) \Rightarrow$$

$$M_A = F \cdot (p_{1A} - p_{2A}) = 10000 \cdot (2 - 5) = -30\,000 \text{ Nm}$$

$$M_B = -F_1 \cdot p = -F \cdot p = -10\,000 \cdot 3 = -30\,000 \text{ Nm}$$

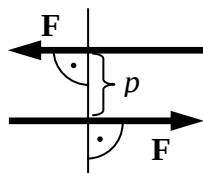
$$M_C = -F_2 \cdot p = -F \cdot p = -10\,000 \cdot 3 = -30\,000 \text{ Nm}$$

U silovej dvojice vždy platí $F_1 = F_2$, preto aj pre ľubovoľné body roviny musí platiť $M_A = M_B = M_C$.



Obr.2.22

Dôsledok: Posuvný účinok silovej dvojice je nulový. Otáčavý účinok silovej dvojice je ku všetkým bodom telesa rovnaký. Jeho veľkosť je rovná súčinu veľkosti sily tvoriacej silovú dvojicu a kolmej vzdialenosti medzi nositeľkami dvojice síl. Orientácia momentu – zmysel otáčavého účinku - je závislá iba na orientácii silovej dvojice (Obr.2.22 a,b).

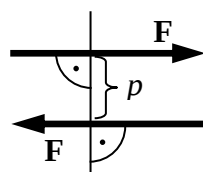


$\equiv$

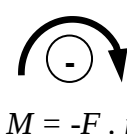


$$M = F \cdot p$$

a)



$\equiv$



$$M = -F \cdot p$$

b)

Obr.2.22 a,b

Príklad 2.8: Nahrad'te dvojicu síl $F_1, -F_1$ pôsobiacu v bodoch A, B inou dvojicou síl $F_2, -F_2$, pôsobiacou v bodoch C, D, ktoré majú smer podľa zadania. Zadané: $F_1 = 500 \text{ N}$, rozmery podľa obr.2.23.

Otáčavý účinok dvojice síl $F_1, -F_1$ má veľkosť

$$M_1 = F_1 \cdot p_1 = F_1 \cdot (\overline{AB} \cdot \cos \alpha) = 500 \cdot (0,8 \cdot \cos 30^\circ)$$

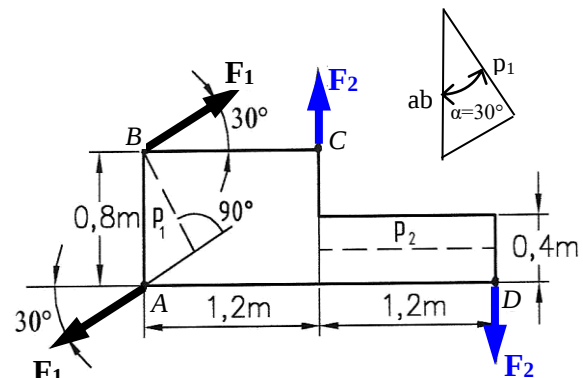
$$M_1 = 346,4 \text{ Nm}.$$

Staticky ekvivalentná dvojica síl $F_2, -F_2$, t.j. silová dvojica s rovnakým otáčavým účinkom ako má dvojica $F_1, -F_1$, čo do veľkosti i zmyslu, ale pôsobiaci v bodoch C, D je určená jedinou možnou veľkosťou sily F_2 . Platí

$$M_2 = F_2 \cdot p_2 = M_1 \Rightarrow F_2 \cdot 1,2 = 346,4,$$

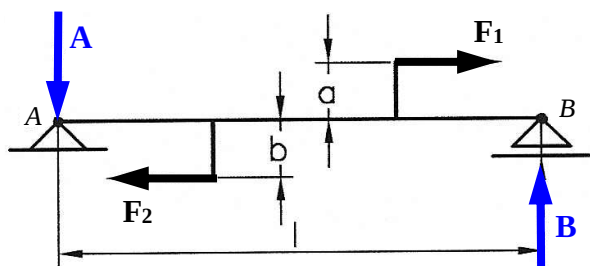
z ktorej pre veľkosť neznámej sily F_2 dostaneme

$$F_2 = \frac{M_1}{p_2} = \frac{346,4}{1,2} = 288,67 \text{ N}.$$



Obr. 2.23

Príklad 2.9: Určite veľkosť síl **A**, **B** tak, aby boli v rovnováhe s pôsobením dvojice síl **F**₁, **F**₂ podľa obr.2.24. Výpočet vykonajte všeobecne a tiež pre zadané hodnoty. Zadané: $F = 50 \text{ kN}$, $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,7 \text{ m}$, $l = 5 \text{ m}$.



Obr. 2.24

Zaťažujúce sily **F**₁, **F**₂ (uvažujeme **F**₁ = **F**₂ = **F**) tvoria tzv. silovú dvojicu s otáčavým účinkom

$$M_1 = -F \cdot (a + b). \quad (\text{zmysel } \curvearrowright)$$

Hľadané sily **A** aj **B** musia pri rovnováhe silových účinkov tvoriť taktiež silovú dvojicu. Musí preto platiť **A** = **B** a pri známom smere sily **B** (vyplýva z vlastností použitej posuvnej väzby), musí byť smer **A** ∥ **B**.

Pri rovnováhe obidvoch silových dvojíc musí platiť $\sum M_i = M_1 + M_2 = 0$,

kde $M_1 = -F \cdot (a + b)$ je otáčavý účinok od síl **F**₁, **F**₂ a $M_2 = A \cdot l = B \cdot l$ je otáčavý účinok od síl **A**, **B**. Rovnica rovnováhy otáčavých účinkov je

$$\sum M = -F \cdot (a + b) + A \cdot l = 0, \text{ odkiaľ } A = F(a + b) / l = B.$$

Výpočet pre zadané hodnoty: $M_1 = -F \cdot (a + b) = -50 \cdot (0,5 + 0,7) = -60 \text{ kNm}$.

Platí $M_2 = -M_1 \Rightarrow -M_1 = A \cdot l \Rightarrow A = -M_1 / l = 12 \text{ kN}$, resp. $-M_1 = B \cdot l \Rightarrow B = -M_1 / l = 12 \text{ kN}$.

Pr.2.9

$F_1 = F_2 = 50 \text{ kN}$
 $a = 0,5 \text{ m}$
 $b = 0,7 \text{ m}$
 $l = 5 \text{ m}$
 $A = ? , B = ?$

Uvažujeme $F_1 = F_2 = F \rightarrow M = -F \cdot (a + b)$ silová dvojica
 A a B musia tvoriť silovú dvojicu $\Rightarrow A = B$ a tiež $A \parallel B$.

$\sum M = M_1 + M_2 = 0$
 $-F \cdot (a + b) + A \cdot l = 0$
 $A = \frac{+F \cdot (a + b)}{l} = \frac{+50 \cdot 12}{5} = \frac{60}{5} = 12 \text{ kN}$

Overenie: $-F \cdot (a + b) = B \cdot l$
 $B = \frac{+F \cdot (a + b)}{l} = \frac{-50 \cdot 12}{5} = \frac{-60}{5} = -12 \text{ kN}$

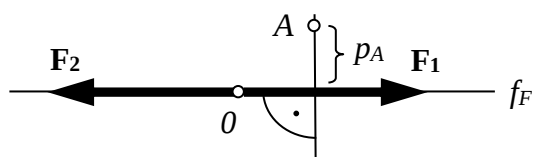
Platí $A = B$, $A \parallel B$ - tvoria tiež silovú dvojicu.

Príklad 2.10: Určite posuvný a otáčavý účinok k bodu A dvoch rovnako veľkých, ale opačne orientovaných síl F_1 a F_2 , ležiacich na spoločnej nositeľke - tzv. nulová dvojica síl (Obr.2.26.). Zadané: $F=200\text{ N}$, $p_A=0,5\text{ m}$.

- Posuvný účinok ($PÚ$): $F_1 + (-F_2) = 200 - 200 = 0\text{ N}$.
- Otáčavý účinok ($OÚ$): vzhľadom k ľubovoľne zvolenému momentovému bodu (napr. bod A) a dostaneme

$$F_1 \cdot p_A - F_2 \cdot p_A = 200 \cdot 0,5 - 200 \cdot 0,5 = 0\text{ Nm}.$$

Záver: Dve rovnako veľké, opačne orientované sily, ležiace na jednej nositeľke majú na teleso nulový silový a teda aj pohybový účinok.



Obr. 2.26