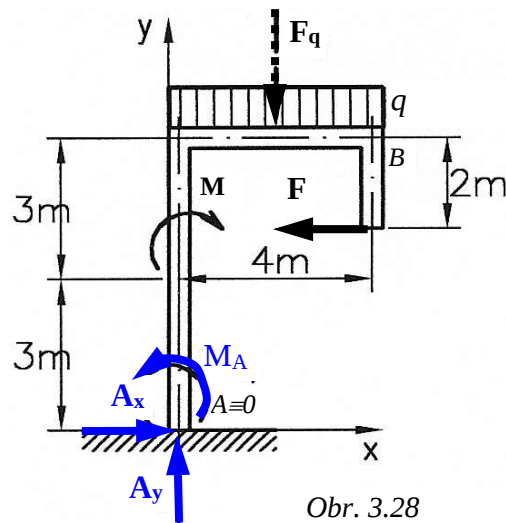


STATIKA : KAPITOLA 3

Príklad 3.10: Určte väzbové reakcie vo votknutí (bod A) pre rovinný rám. Rozmery i zaťaženia sú zrejmé z obr. 3.28. Zadané: $F=20 \text{ kN}$, $q=10 \text{ kN/m}$, $M=30 \text{ kNm}$.



Obr. 3.28

Riešenie:

Pre určenie väzbových reakcií A_x , A_y a M_A (t.j. moment vo votknutí = moment od akčných síl vzhľadom k bodu $A \equiv 0$) použijeme napr. podmienky rovnováhy (typ 1) podľa (3.41a) a dostaneme

$$\sum F_{ix} = 0 : A_x - F = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 : A_y - F_q = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0 : -M - F_q \cdot 2 + F \cdot 4 + M_A = 0$$

Po dosadení hodnôt zo zadania dostaneme

$$F_q = q \cdot 4 = 40 \text{ kN},$$

$$A_x = F = 20 \text{ kN},$$

$$A_y = F_q = 40 \text{ kN},$$

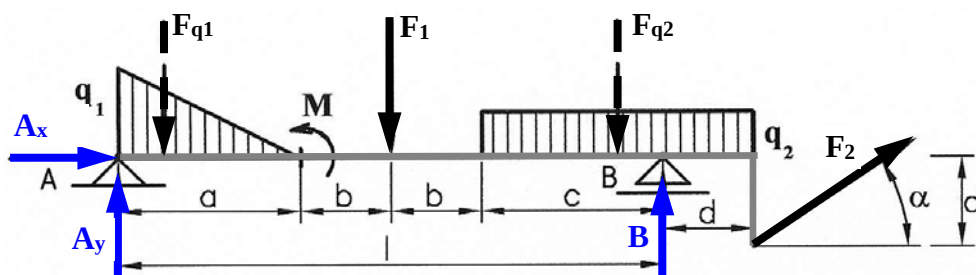
$$M_A = M + F_q \cdot 2 - F \cdot 4 = 30 \text{ kNm}.$$

Kontrolná rovnica: zvolíme napr. rovnicu rovnováhy otáčavých účinkov k bodu B, t.j. $\sum M_B = 0$ a platí

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} = 0 &\Rightarrow M_A - M - A_y \cdot 4 + A_x \cdot 6 + F_q \cdot 2 - F \cdot 2 = 0 \\ 30 - 30 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 40 \cdot 2 - 20 \cdot 2 &= 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{splnené} - \text{riešenie je správne.} \end{aligned}$$

Poznámky: 1. Spojité zaťaženie intenzity $q \text{ (N/m)}$ je v mechanike telies vhodné transformovať do formy tzv. náhradného bremena F_q . 2. V úlohách technickej praxe sa najčastejšie objavujú zaťaženia vo forme rovnomerného spojitého zaťaženia priečného, ale aj v tvare spojitého priečného zaťaženia nerovnomerného (obvykle trojuholníkové).

Príklad 3.11: Na nosníku zaťaženom osamelými silami F_1 , F_2 , momentom M a spojitémi zaťažienami q_1 , q_2 určite väzbové reakcie A_x , A_y , B (obr.3.29). Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kNm}$, $q_1 = 1 \text{ kNm}^{-1}$, $q_2 = 0,5 \text{ kNm}^{-1}$, $\alpha = 30^\circ$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 2,5 \text{ m}$, $d = 1,5 \text{ m}$.



Obr. 3.29

Riešenie:

Spojité priečne zaťaženia s intenzitami q_1 , q_2 [N/mm] nahradíme náhradnými bremenami F_{q1} a F_{q2} (t.j. transformovanými osamelými silami pôsobiacimi v ťažisku trojuholníka resp. obdĺžnika) a potom platí :

$$F_{q1} = \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot a \quad \dots \text{ pôsobí v jednej tretine dĺžky } a \text{ základne trojuholníka} \quad = a/3$$

$$F_{q2} = q_2 \cdot (c + d) \quad \dots \text{ pôsobí uprostred dĺžky } (c + d) \quad = (c + d)/2.$$

Použijeme napr. podmienky rovnováhy typ (2), tzn. 2 podmienky momentové

$$\sum M_{iA} = 0 \quad : -F_{q1} \cdot \frac{a}{3} + M - F_1 \cdot (a + b) - F_{q2} \cdot \left(l - \frac{c + d}{2}\right) + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l + d) + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot d + B \cdot l = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0 \quad : -A_y \cdot l + F_{q1} \cdot \left(l - \frac{a}{3}\right) + M + F_1 \cdot (b + c) + F_{q2} \cdot \frac{c + d}{2} + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot d + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot d = 0$$

a 1 podmienku silovú

$$\sum F_{ix} = 0 \quad : A_x + F_2 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Každá z uvedených podmienok rovnováhy síl pôsobiacich na nosník obsahuje iba jednu neznámu.

Po vyjadrení neznámych parametrov (A_x , A_y , B) z rovníc rovnováhy - pre zadané hodnoty dostaneme:

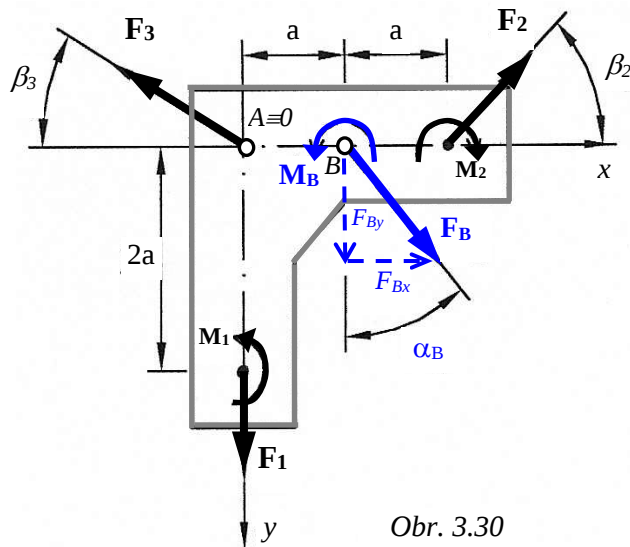
$$F_{q1} = 1,5 \text{ kN}, \quad F_{q2} = 2 \text{ kN}, \quad A_x = -3,464 \text{ kN}, \quad A_y = 3,726 \text{ kN}, \quad B = -0,226 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka :

$$\sum F_{iy} = 0 \quad : A_y - F_{q1} - F_1 - F_{q2} + B + F_2 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$3,726 - 1,5 - 2 - 2 - 0,226 + 4 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad - \text{ splnené.}$$

Príklad 3.12: V rovine dosky (obr.3.30) pôsobia sily F_1 , F_2 , F_3 a momenty M_1 , M_2 . Nahrad'te účinok takejto sústavy síl ekvivalentným účinkom inej sústavy – tvorenej silou F_B , pôsobiacou v bode B a momentom M_B . Zadané: $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $F_3 = 150 \text{ N}$, $\beta_2 = 45^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$, $M_1 = 30 \text{ Nm}$, $M_2 = 60 \text{ Nm}$, $a = 0,1 \text{ m}$.



Riešenie:

Obr. 3.30

Ide o riešenie **statickej ekvivalencie** dvoch VSS-R – tzn. znamienko Θ v rovniciach rovnováhy/ekvivalencie:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} - \sum F_{jx} &= 0 : F_{2x} - F_{3x} - F_{Bx} = 0 \\ \sum F_{iy} - \sum F_{jy} &= 0 : -F_1 + F_{2y} + F_{3y} - (-F_{By}) = 0 \\ \sum M_{iA} - \sum M_{jA} &= 0 : F_{2y} \cdot (2a) + M_1 - M_2 - (-F_{By} \cdot a + M_B) = 0\end{aligned}$$

Po vyjadrení zložiek síl pomocou sin / cos ich smerových uhlov dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} - \sum F_{jx} &= 0 : (F_2 \cdot \cos \beta_2 - F_3 \cdot \cos \beta_3) - (F_B \cdot \sin \alpha_B) = 0 & \Rightarrow F_B \cdot \sin \alpha = F_{Bx} \\ \sum F_{iy} - \sum F_{jy} &= 0 : (-F_1 + F_2 \cdot \sin \beta_2 + F_3 \cdot \sin \beta_3) - (-F_B \cdot \cos \alpha_B) = 0 & \Rightarrow F_B \cdot \cos \alpha = F_{By} \\ \sum M_{iA} - \sum M_{jA} &= 0 : (F_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot 2a + M_1 - M_2) - (-F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot a + M_B) = 0 & \Rightarrow M_B\end{aligned}$$

Vyjadrením neznámych F_{Bx} , F_{By} a M_B dostaneme

$$F_B \cdot \sin \alpha_B = F_2 \cdot \cos \beta_2 - F_3 \cdot \cos \beta_3 = 100 \cdot \cos 45 - 150 \cdot \cos 30 = -59,2 \text{ N} = F_{Bx}$$

$$F_B \cdot \cos \alpha_B = F_1 - F_2 \cdot \sin \beta_2 - F_3 \cdot \sin \beta_3 = 100 - 100 \cdot \sin 45 - 150 \cdot \sin 30 = -45,7 \text{ N} = F_{By}$$

$$M_B = F_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot 2a + M_1 - M_2 + F_B \cdot \cos \alpha_B \cdot a = 100 \cdot \sin 45 \cdot 0,2 + 30 - 60 - 45,7 \cdot 0,1 = -20,43 \text{ Nm} = M_B$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{5593,13} = 74,78 \text{ N}.$$

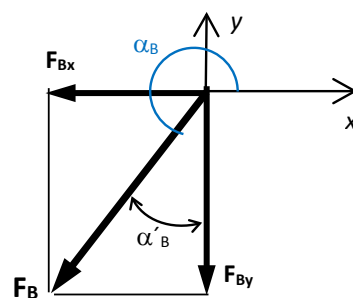
Určenie smerového uhla ekvivalentnej sily F_B :

$$\tan \alpha'_B = \frac{F_{Bx}}{F_{By}} = \frac{-59,2}{-45,7} = 1,295 \Rightarrow \alpha'_B = \arctan(1,295) = 52,33^\circ$$

resp. cez

$$\cos \alpha'_B = \frac{F_{By}}{F_B} = \frac{45,7}{74,78} = 0,61126 \Rightarrow \alpha'_B = \arccos(0,61126) = 52,33^\circ$$

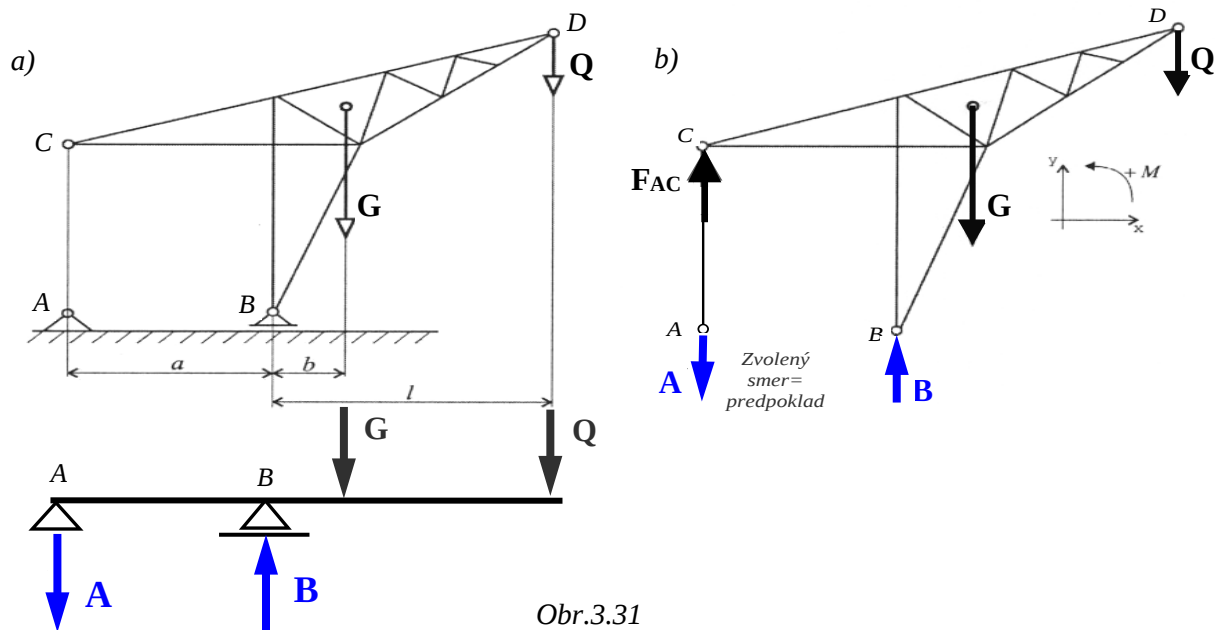
$$\alpha_B = \frac{3}{2}\pi - \alpha'_B = 270^\circ - 52,32^\circ \Rightarrow \alpha_B = 217,67^\circ$$



Obr. 3.30 a

Poznámka: Úloha môže byť zadaná aj opačne – úlohou je nájsť inú silovú sústavu, ktorá bude so zadanou silovou sústavou v rovnováhe. Je zrejmé, že výsledkom riešenia by boli rovnako veľké hodnoty F_B a M_B , ale opačného zmyslu.

Príklad 3.13: Rovinná konštrukcia žeriava (Obr.3.31) o vlastnej tiaži G je zaťažená bremenom Q . Riešte rovnováhu vonkajších síl akčných a reakčných, tvoriacich VSS-R., t.j. určite veľkosť a zmysel reakčných síl v podperách. Zadané: $G=13 \text{ kN}$, $Q=10 \text{ kN}$, $a=3 \text{ m}$, $b=2 \text{ m}$, $l=10 \text{ m}$.



Obr.3.31

Riešenie:

Teleso uvoľníme, tzn. aj keď typ väzby – pevný kĺb vyžaduje 2 zložky - A_x aj A_y s ohľadom na charakter primárnych zaťažujúcich síl G , Q zavedieme v bode A iba zvislú zložku reakcie – ozn. ako sila A ; v bode B s ohľadom na typ väzby a zaťaženie taktiež iba zvislú reakciu – sila B .

I. Statická určitosť: $n = n_v - n_0 = 3 - 3 = 0$ °V – staticky určitá úloha.

II. Väzbové reakcie: vhodné sú rovnice rovnováhy (2), t.j. 2 momentové podmienky

$$\sum M_{iB} = 0: A \cdot a - G \cdot b - Q \cdot l = 0 \Rightarrow A \cdot 3 = 13 \cdot 2 + 10 \cdot 10 \Rightarrow A = \frac{(26 + 100)}{3} = 42 \text{ kN},$$

t.j. kladná hodnota sily A znamená, že skutočná reakcia má rovnaký zmysel ako bol pôvodne predpokladaný smer zvolený na začiatku riešenia. Platí: **Reakcia A vyvodzuje na prúte AC ťahový účinok.**

$$\sum M_{iA} = 0: B \cdot a - G \cdot (a + b) - Q \cdot (l + a) = 0$$

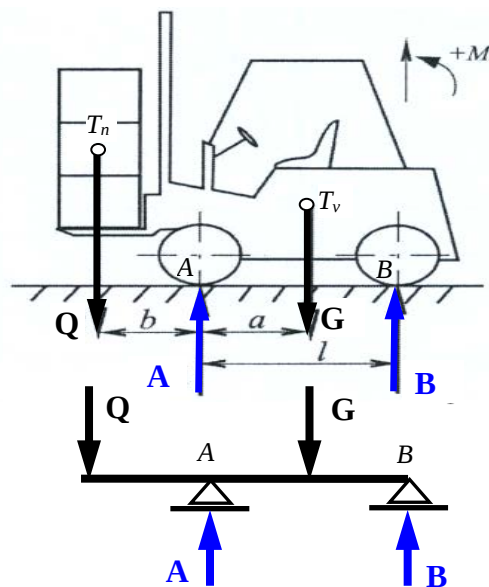
$$B \cdot 3 - 13 \cdot 5 - 10 \cdot (10 + 3) = 0 \Rightarrow 13 \cdot 5 + 10 \cdot (10 + 3) = B \cdot 3 \Rightarrow B = \frac{(13 \cdot 5 + 10 \cdot 13)}{3} = \frac{195}{3} = 65 \text{ kN}$$

Kladná hodnota sily B znamená, že skutočná reakcia B má zmysel podľa predpokladu. Platí: **Výsledný účinok reakcie B na konštrukciu je tlakový.**

III. Kontrolná podmienka:

$$\sum F_{iy} = 0: B - A - G - Q = 0 \Rightarrow 65 - 42 - 13 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené}.$$

Príklad 3.14: Vysokozdvížný vozík s hmotnosťou m a konštrukciou určenými rozmermi je zaťažný vlastnou tiažou G . Jeho ťažisko sa nachádza vo vzdialenosti b od predného kolesa (obr.3.32). Určite sily, pôsobiace v bode styku podložky a vozíka a aké maximálne bremeno môžeme naložiť s ohľadom na bezpečnosť proti prevráteniu. Zadané: $m=4425$ kg, $Q=32$ kN, $l=1740$ mm, $a=968$ mm, $b=930$ mm.



Obr.3.32

Riešenie:

Hľadáme: $A, B, Q_{\max} = ?$

$$G = m \cdot g \cong 4425 \cdot 10 = 44,25 \text{ kN}, Q = 32 \text{ kN}$$

I. Statická určitosť:

$$n = n_v - n_0 = 3 - 3 = 0 \text{ } ^\circ\text{V} - \text{úloha je staticky určitá.}$$

II. Väzbové reakcie: (Obr.3.32)

$$\sum M_{iB} = 0: Q \cdot (l + b) - A \cdot l + G \cdot (l - a) = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{Q \cdot (l + b) + G \cdot (l - a)}{l} = \frac{32 \cdot (1,74 + 0,93) + 44,25 \cdot (1,74 - 0,97)}{1,74} \Rightarrow A = 68,74 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iA} = 0: B \cdot l - G \cdot a + Q \cdot b = 0 \Rightarrow B = \frac{G \cdot a - Q \cdot b}{l} = \frac{44,25 \cdot 0,968 - 32 \cdot 0,93}{1,74} = \frac{12,624}{1,74} \Rightarrow B = 7,514 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrolná podmienka: } \sum F_{iy} = 0: -Q + A - G + B = 0 \Rightarrow -32 + 68,74 - 44,25 + 7,514 = 0 \text{ kN} \Rightarrow 0 = 0.$$

III. Maximálne bremeno s ohľadom na bezpečnosť proti prevráteniu

Úvaha: max. bremeno $Q_{\max}$ musí vyvolávať klopný moment M_{klop} menší ako moment stabilizujúci M_{stab} (Obr.3.32 a). Musí platiť podmienka

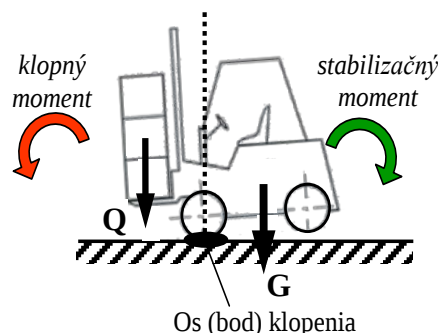
$$M_{\text{stab}} \geq M_{\text{klop}}.$$

Sila B v bode B je iba sekundárna, tzn. uvažujeme, že jej otáčavý účinok k bodu otáčania A je nulový a teda platí $B=0$. Musí platiť momentová podmienka:

$$\sum M_A = 0: M_{\text{stab}} + M_{\text{klop}} = -G \cdot a + Q_{\max} \cdot b = 0$$

$$-G \cdot a + Q_{\max} \cdot b = 0$$

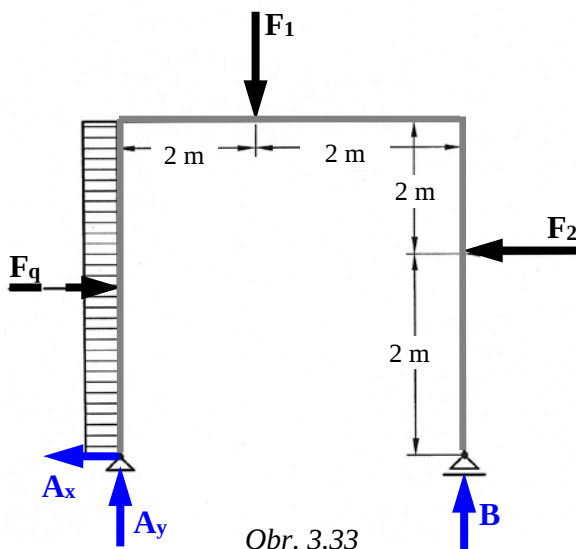
$$Q_{\max} = \frac{G \cdot a}{b} = \frac{44,25 \cdot 0,968}{0,93} = 46,06 \text{ kN} \Rightarrow m_Q \leq 4606 \text{ kg}$$



Obr.3.32 a

IV. Interpretácia výsledkov: Sily vznikajúce v miestach kontaktu vozíka s podložkou sú – na prednom kolese $A=68,74$ kN, na zadnom kolese $B=7,514$ kN a maximálne možné bezpečné bremeno je $m_Q=4606$ kg.

Príklad 3.15: Určte veľkosť väzbových reakcií v pravouhlom rovinnom ráme. Zadané: $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $q = 1 \text{ kN.m}^{-1}$. Tvar a rozmery rámu podľa obr.3.33.



Obr. 3.33

Riešenie:

I. Statická určitosť: $n = 3 - 3 = 0^\circ\text{V}$ – staticky určité.

II. Väzbové reakcie: $F_q = q \cdot l \Rightarrow F_q = 4 \text{ kN}$

$$\sum M_{iA} = 0: -F_q \cdot 2 - F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + B \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow B = 1,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_{iB} = 0: -A_y \cdot 4 - F_q \cdot 2 + F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 0,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = 0: -A_x + F_q - F_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 1 \text{ kN}$$

Kontrolná podmienka

$$\sum F_{iy} = 0: -A_y + F_1 - B = 0 \Rightarrow 0 = 0 - \text{splnené.}$$

Príklad 3.16: Určte výpočtom veľkosť a polohu výslednice dvoch rovnobežných síl F_1 a F_2 , ktoré majú opačný zmysel (obr.3.34). Zadané: $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $p = 4 \text{ m}$ (vzdialenosť síl).

Riešenie:

• Analyticky:

$$\text{Výslednica } \mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = -F_1 + F_2 = -500 + 100 \Rightarrow \mathbf{R} = -400 \text{ N.}$$

Poloha výslednice: z momentovej rovnice pre otáčavý účinok vzhľadom k ľubovoľne zvolenému bodu r platí

$$R \cdot h = M$$

$$R \cdot h = \sum (F_i \cdot p_i) = F_1 \cdot p_1 + F_2 \cdot (p_1 + p)$$

$$R \cdot 0 = -500 \cdot p_1 + 100 \cdot (p_1 + 4)$$

$$R \cdot 0 = -500 p_1 + 100 p_1 + 400$$

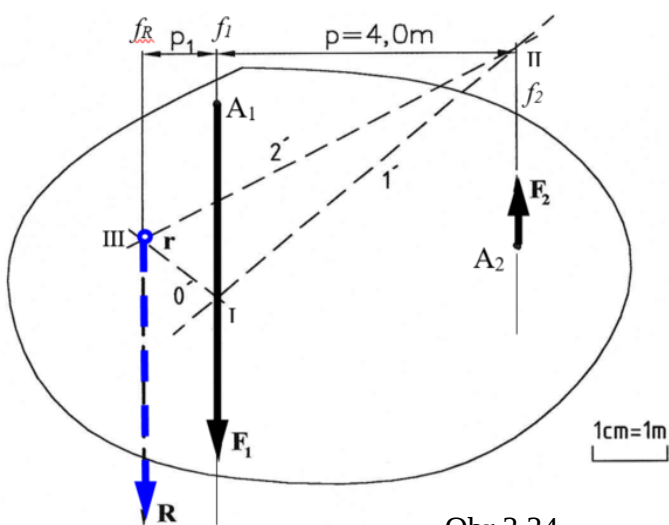
$$0 = -400 \cdot p_1 + 400$$

$$p_1 = \frac{-400}{-400} = 1,0 \text{ m}$$

Skúška:

$$\sum M_{iA} = R \cdot p_1 + F_2 \cdot p = 0$$

$$-400 \cdot 1 + 100 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$



Obr.3.34

Príklad 3.17: Výpočtom rozložte zadanú silu R (obr.3.35) na dve rovnobežné sily, ktorých nositeľky (smer i vzájomná vzdialenosť) sú známe. Zadané: $R = 4 \text{ kN}$, $p_1 = 1 \text{ m}$, $p_2 = 3 \text{ m}$.

Riešenie:

- Analyticky:

Zvolíme bod otáčania na jednej z nositeľiek neznámych síl (urýchľuje to výpočet), napr. na nositeľke f_2 sily F_2 je to bod A_2 (obr. 3.35). Podľa momentovej vety k bodu A_2 platí

$$R \cdot p_2 = F_1 \cdot (p_1 + p_2) + F_2 \cdot 0 \Rightarrow F_1 = \frac{R \cdot p_2}{p_1 + p_2}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{4 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3 \text{ kN}$$

resp. ak zvolíme bod otáčania na nositeľke f_1 sily F_1 (napr. bod A_1) platí

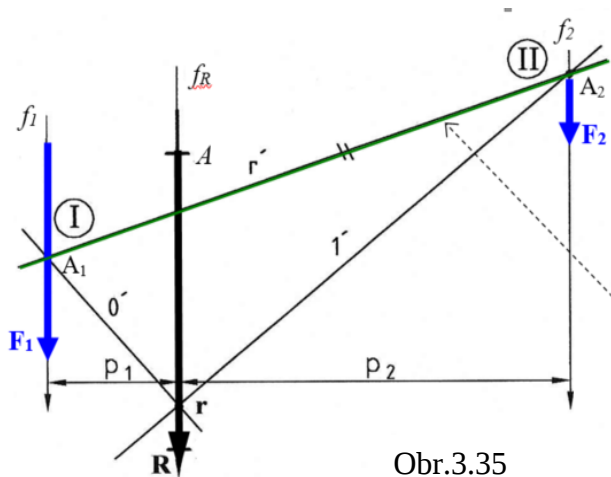
$$R \cdot p_1 = F_2 \cdot (p_1 + p_2) + F_1 \cdot 0 \Rightarrow F_2 = \frac{R \cdot p_1}{p_1 + p_2}$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{4 \cdot 1}{1 + 3} = \frac{4}{4} = 1 \text{ kN}.$$

Skúška :

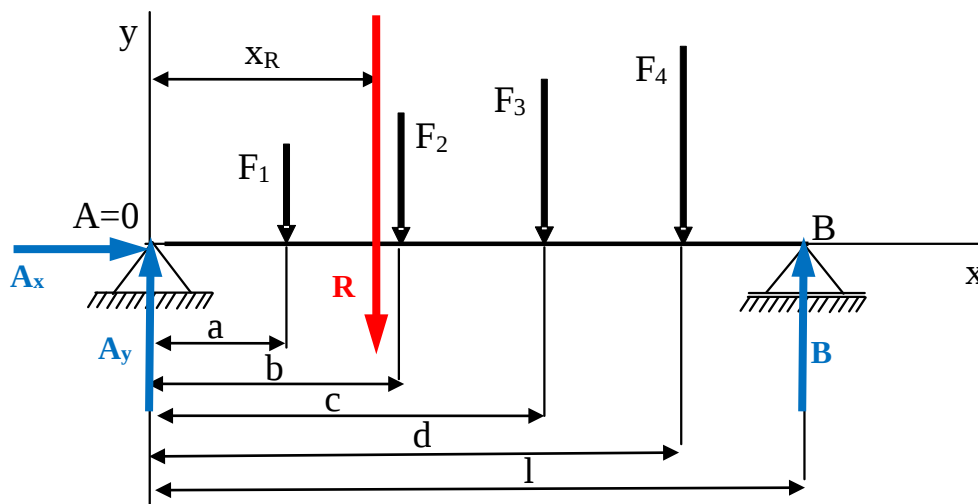
$$\sum M_{iA_1} = 0: R \cdot p_1 - F_2 \cdot (p_1 + p_2) = 0 \Rightarrow 4 \cdot 1 - 1 \cdot (1 + 3) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Poznámka: Úlohou by mohlo byť napríklad aj určenie miesta nositeľky (vzdialenosti p_1 , p_2) vopred známych (zadaných) síl F_1 , F_2 .



Obr.3.35

Príklad 3.18: Výpočtovo určte výslednicu štyroch rovnobežných síl podľa obr.3.36 a tiež veľkosť reakcií v bodoch podopretia telesa. Zadané: $F_1=300 \text{ N}$, $F_2=400 \text{ N}$, $F_3=500 \text{ N}$, $F_4=600 \text{ N}$, $a=1,85 \text{ m}$, $b=3,35 \text{ m}$, $c=5,35 \text{ m}$, $d=7,4 \text{ m}$, $l=12 \text{ m}$.



Obr.3.36

Riešenie:

Veľkosť a zmysel výslednice: $R = \sum_{i=1}^4 F_i$

$$R = \sum_{i=1}^4 F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -300 - 400 - 500 - 600 = -1800 \text{ N}$$

Poloha výslednice: $R \cdot x_R = \sum_{i=1}^4 F_i \cdot x_i$

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^4 F_i \cdot x_i}{R} = \frac{-F_1 \cdot a - F_2 \cdot b - F_3 \cdot c - F_4 \cdot d}{R} = \frac{-300 \cdot 1,85 - 400 \cdot 3,35 - 500 \cdot 5,35 - 600 \cdot 7,4}{-1800} = 5,006 \text{ m}$$

Ďalší možný spôsob: pomocou výpočtu v tabuľke, rovnako ako u redukcie VSS-R :

i	F _i (N)	α _i (°)	cos α _i	sin α _i	Súr. počiatku		Priemety síl do súr. osí x a y		Momenty zložiek vzhľadom k bodu 0	
					x _i (m)	y _i (m)	F _{ix} =F _i .cos α _i (N)	F _{iy} =F _i .sin α _i (N)	M _{ix} =-F _{ix} .y _i (N.m)	M _{iy} =F _{iy} .x _i (N.m)
1	300	270	0	-1	1,85	0	0	-300	0	-555
2	400				3,35	0	0	-400	0	-1340
3	500				5,35	0	0	-500	0	-2675
4	600				7,40	0	0	-600	0	-4440
							R _x = 0 N	R _y = -1800 N	M _x = 0 N.m	M _y = -9010 N.m
									M = -9010 N.m	

Veľkosť výslednice: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{0^2 + (-1800)^2} = \sqrt{3240000} = 1800 \text{ N}$

Je to absolútna hodnota veľkosti, pozor na jej orientáciu !!!! Zložky R_x a R_y určujú kvadrant kam smeruje.

Smer výslednice (u rovnobežných síl je vopred zrejmý) : $\text{tg } \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-1800}{0} = -\infty \Rightarrow \alpha_R = 270^\circ$

Poloha výslednice: $x_R = p = \frac{M}{R_y} = \frac{-9010}{-1800} \doteq 5,006 \text{ m}$

• Výpočet reakcií v bodoch podopretia – body A, B .

Zvolíme podmienky rovnováhy, napr. typ a) a dostaneme:

$$\sum F_{ix} = 0 : A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 : A_y - R + B = 0 \Rightarrow A_y = R - B = 1800 - 751 \doteq 1049 \text{ N}$$

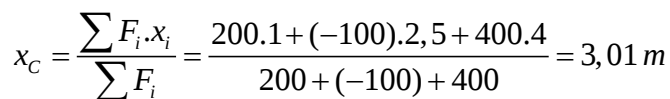
$$\sum M_i = 0 : B \cdot l - M = 0 \Rightarrow B = \frac{M}{l} = \frac{9010}{12} \doteq 751 \text{ N}$$

Kontrolná rovnica :

$$\sum M_B = 0 : -A \cdot l + R \cdot (l - x_R) = 0 \Rightarrow -1049 \cdot 12 + 1800 \cdot (12 - 5,006) = 0 \Rightarrow -12588 + 12589 \doteq 0$$

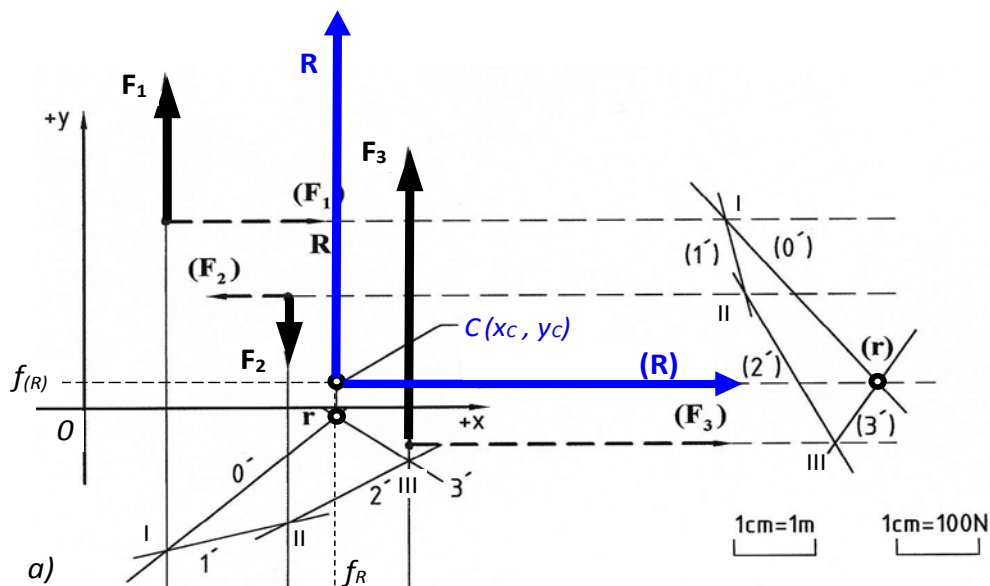
Zadané: F_1 (1; 2,5; 90° ; 200 N), F_2 (2,5; 1,5; 270° ; 100 N), F_3 (4; -0,5; 90° ; 400 N), súradnice bodov v [m].

- *Analyticky:* Dosadením zadaných parametrov SRS so zreteľom na ich znamienka do rovníc (3.54) zistíme súradnice statického stredu C zadanej sústavy rovnobežných síl a dostaneme



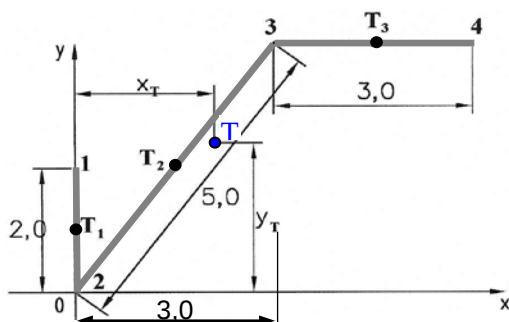
$$y_c = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i} = \frac{200 \cdot 2,5 + (-100) \cdot 1,5 + 400 \cdot (-0,5)}{200 + (-100) + 400} = 0,3 \text{ m}$$

Obr. 3.37



Obr. 3.37 a,b

Príklad 3.20: Analyticky určite ťažisko tuhej lomenej čiary 1,2,3,4, ležiacej v jednej rovine (obr.3.38).



Obr. 3.38

Riešenie:

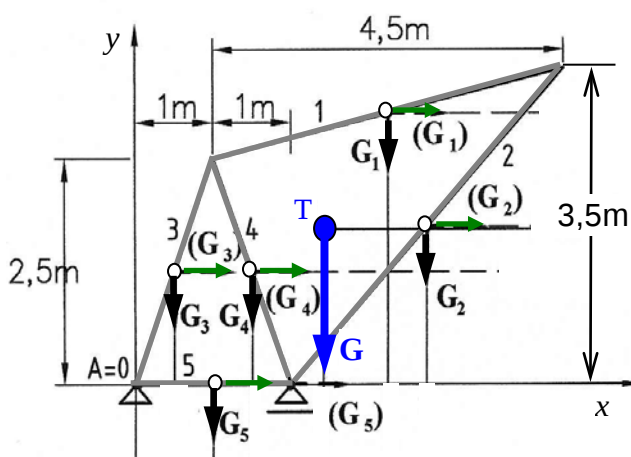
Keď rozdelíme lomenú čiaru na tri rovné časti $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, o dĺžkach $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 5 \text{ m}$, $l_3 = 3 \text{ m}$, pre súradnice ťažísk jednotlivých častí potom dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= 1,5 \text{ m} & x_3 &= (3,0 + 1,5) = 4,5 \text{ m}, \\ y_1 &= 1,0 \text{ m}, & y_2 &= 2,0 \text{ m} & y_3 &= 4,0 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ťažisko T lomenej čiary $\overline{1234}$ má podľa (3.55) súradnice

$$x_T = \frac{\sum l_i x_{Ti}}{\sum l_i} = \frac{2 \cdot 0 + 5 \cdot 1,5 + 3 \cdot 4,5}{2 + 5 + 3} = \frac{21}{10} = 2,1 \text{ m}, \quad y_T = \frac{\sum l_i y_{Ti}}{\sum l_i} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{2 + 5 + 3} = \frac{24}{10} = 2,4 \text{ m}.$$

Príklad 3.21: Určite výpočtom veľkosť vlastnej tiaže a súradnice ťažiska žeriava (obr.3.39) zostaveného z homogénnych prútov rovnakého prierezu $\rho_L = 5,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$.



Obr. 3.39

Riešenie:

• Analyticky:

Relatívne práce, pomocou trigonometrických funkcií, vypočítame dĺžky jednotlivých prútov. Platí:

$$l_1 = 4,609 \text{ m}, l_2 = 4,949 \text{ m}, l_3 = l_4 = 2,692 \text{ m}, l_5 = 2 \text{ m}.$$

Ťažiská prútov určíme priamo z Obr.3.39:

$$\begin{aligned} x_{T_1} &= 3,25 \text{ m}, & x_{T_2} &= 3,75 \text{ m}, & x_{T_3} &= 0,50 \text{ m}, \\ y_{T_1} &= 3,00 \text{ m}, & y_{T_2} &= 1,75 \text{ m}, & y_{T_3} &= 1,25 \text{ m}, \\ x_{T_4} &= 1,50 \text{ m}, & x_{T_5} &= 1,00 \text{ m} \\ y_{T_4} &= 1,25 \text{ m}, & y_{T_5} &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$

Pomocné výpočty pre výpočet ťažiska prútovej konštrukcie

Tabuľka 3.4

i	$x_{Ti} \text{ [m]}$	$y_{Ti} \text{ [m]}$	$l_i \cdot x_{Ti}$	$l_i \cdot y_{Ti}$
1	3,25	3,00	14,98	13,827
2	3,75	1,75	18,56	8,66
3	0,50	1,25	1,346	3,365
4	1,50	1,25	4,038	3,365
5	1,00	0,00	2,00	0,00
			40,924	29,217

Pre súradnice ťažiska potom z Tab.3.4 dostaneme

$$x_T = \frac{\sum l_i x_{Ti}}{\sum l_i} = \frac{40,922}{16,942} = 2,415 \text{ m}, \quad y_T = \frac{\sum l_i y_{Ti}}{\sum l_i} = \frac{29,217}{16,942} = 1,724 \text{ m}.$$

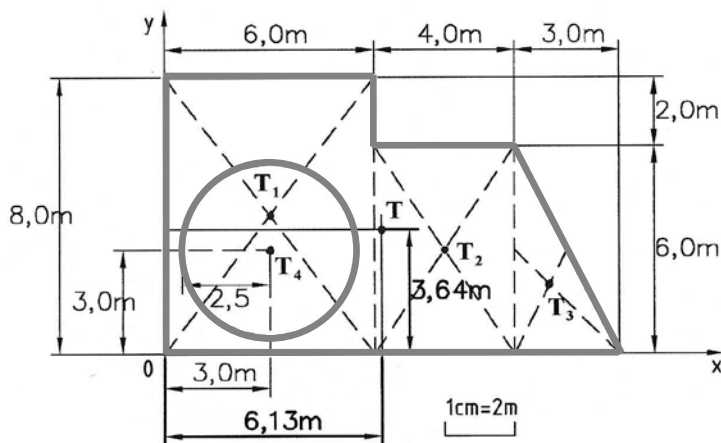
$$\text{Celková sila vlastnej tiaže výložníka: } G = \rho_L \cdot g \cdot \sum l_i \Rightarrow G = 5,5 \cdot 9,81 \cdot 16,942 = 914,1 \text{ N}.$$

Príklad 3.22: Nadrozmerné teleso (obr.3.40) je potrebné pred prepravou uložiť bezpečne na vozidlo a preto je z hľadiska stability a bezpečnosti jazdy nutné určiť súradnice ťažiska. Zadané parametre sú v Obr.3.44.

Riešenie:

Zložený prierez rozdelíme na štyri časti: dva obdĺžniky (T_1, T_2), jeden trojuholník (T_3) a jeden kruh (T_4), ktorého plocha je tzv. *negatívna* (tzn. musíme ju pri zisťovaní celkovej plochy A zloženého prierezu odrátať!).

Súradnice ťažísk $T_i (x_{Ti}, y_{Ti})$ jednotlivých častí zloženého prierezu telesa (pre $i=1,2,3,4$) sú spolu s výsledkami výpočtov ďalších potrebných parametrov uvedené v tab.3.5.



Obr. 3.40

Pomocné výpočty pre výpočet ťažiska zloženej plochy

Tabuľka 3.5

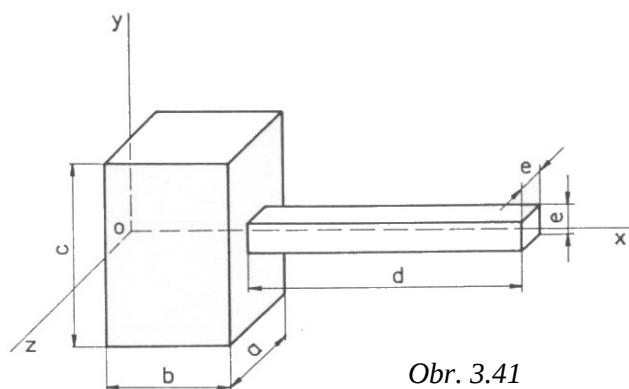
i	$x_{Ti} [m]$	$y_{Ti} [m]$	$A_i [m^2]$	$y_{Ti} \cdot A_i$	$x_{Ti} \cdot A_i$
0	1	2	3	$4 = (2 \times 3)$	$5 = (1 \times 3)$
1	3,00	4,00	48,00	192,00	144,0
2	8,00	3,00	24,00	72,00	192,0
3	11,00	2,00	9,00	18,00	99,0
4	3,00	3,00	-19,63	-58,89	-58,89
			61,37	223,11	376,11

Podľa rovníc (3.58b) sú súradnice ťažiska prepravovaného telesa

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_{Ti}}{\sum A_i} = \frac{376,11}{61,37} = 6,13 \text{ m} , \quad y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ti}}{\sum A_i} = \frac{223,11}{61,37} = 3,64 \text{ m} .$$

Poznámka: Nadrozmerné telesá sú telesá, ktoré majú rozmery väčšie, ako sú technickými normami stanovené priečne prechodové prierezy komunikácií. Obvykle prekračujú aj dovolené zaťaženie ďalších stavieb na komunikáciách (najmä mosty), pri výbere a príprave trasy je nutné brať na to zreteľ a ich tzv. z odolňovaniu venovať pozornosť.

Príklad 3.23: Určte súradnice ťažiska telesa podľa obr.3.41. Zadané: $a=100\text{ mm}$, $b=80\text{ mm}$, $c=180\text{ mm}$, $d=400\text{ mm}$, $e=30\text{ mm}$.



Obr. 3.41

Riešenie:

Jedná sa o teleso súmerné podľa osi x , preto musí platiť $y_T = z_T = 0$.

Zložené teleso rozdelíme na dva základné geometrické útvary s objemami V_1 a V_2 . Dostaneme

$$V_1 = a \cdot b \cdot c = 100 \cdot 80 \cdot 180 = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$V_2 = e \cdot e \cdot d = 30 \cdot 30 \cdot 400 = 0,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

$$V = V_1 + V_2 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Určíme súradnice ťažísk obidvoch základných geometrických útvarov a dostaneme

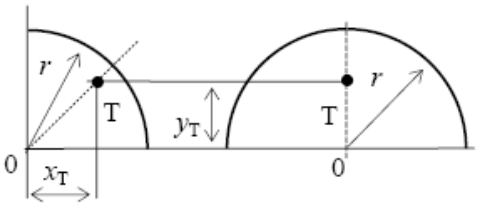
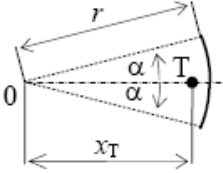
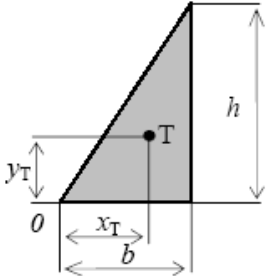
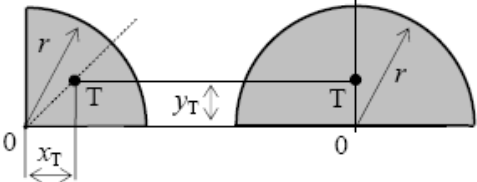
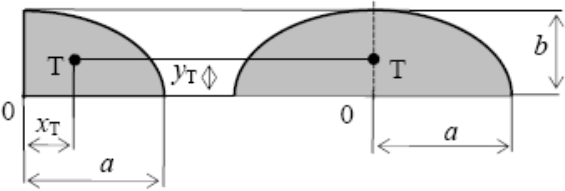
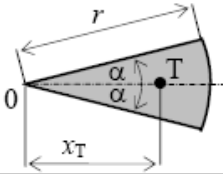
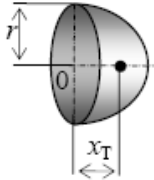
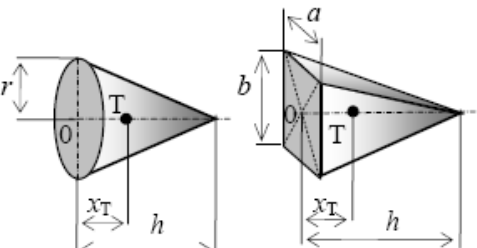
$$x_{T_1} = \frac{b}{2} = 40 \text{ mm} \quad , \quad x_{T_2} = b + \frac{d}{2} = 280 \text{ mm}$$

Pre súradnicu ťažiska x_T (ak platí $G_i = m_i \cdot g = \rho \cdot V_i \cdot g$) dostaneme

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^2 G_i \cdot x_{T_i}}{G} = \frac{\rho \cdot V_1 \cdot g \cdot x_{T_1} + \rho \cdot V_2 \cdot g \cdot x_{T_2}}{\rho \cdot V \cdot g} \quad .$$

Po skrátení výrazu o $\rho \cdot g$ dostaneme zjednodušený vzťah v tvare

$$x_T = \frac{V_1 \cdot x_{T_1} + V_2 \cdot x_{T_2}}{V} = \frac{1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \cdot 40 \text{ mm} + 0,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \cdot 280 \text{ mm}}{1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^3} = \mathbf{88 \text{ mm}}$$

Útvár	Geometrický útvar	x_T	y_T	$I / A / V$
štvrtkružnica		$\frac{2}{\pi} r$	$\frac{2}{\pi} r$	$\frac{\pi}{2} r$
polkružnica		0		πr
výsek z kružnice		$r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$
trojuholníková plocha		$\frac{2}{3} b$	$\frac{1}{3} h$	$\frac{1}{2} bh$
štvrtkruhová plocha		$\frac{4}{3\pi} r$	$\frac{4}{3\pi} r$	$\frac{\pi}{4} r^2$
polkruhová plocha		0		$\frac{\pi}{2} r^2$
štvrtelipsová plocha		$\frac{4}{3\pi} a$	$\frac{4}{3\pi} b$	$\frac{\pi}{4} ab$
polelipsová plocha		0		$\frac{\pi}{2} ab$
kruhový výsek		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
polguľa		$\frac{3}{8} r$	0	$\frac{2}{3} \pi r^3$
kužeľ		$\frac{1}{4} h$	0	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$
ihlan				$\frac{1}{3} abh$