

Vybrané vzťahy z lineárnej PaP:

1. Pozdĺžna deformácia:

- Absolútne predĺženie:

$$\Delta l = l_1 - l \quad [\text{m}]$$

- Relatívne predĺženie:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad [\%] \quad [-]$$

2. Pričná deformácia:

- Absolútne zúženie / rozšírenie:

$$\Delta l_y = \varepsilon_y \cdot l \quad \text{resp.} \quad \Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l \quad [\text{m}]$$

- Relatívne zúženie / rozšírenie:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-\varepsilon_x}{m} = -\frac{\mu \cdot \sigma}{E} \quad [\%] \quad [-]$$

3. Teplotná dĺžková rozťažnosť:

- Absolútne predĺženie:

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \quad [\text{m}] \quad \text{a z toho} \quad l_1 = l + \Delta l \quad [\text{m}]$$

alebo priamo dĺžka po pretvorení vplyvom teploty

$$l_1 = l \cdot (1 + \alpha_t \cdot \Delta t) \quad [\text{m}]$$

- Relatívne predĺženie: $\varepsilon_t = \alpha_t \cdot \Delta t \quad [-]$

Ďalšie možné vzťahy: $\alpha_t = \frac{\varepsilon_t}{\Delta t}, \quad [^{\circ}\text{C}^{-1}] \quad \sigma_t = \varepsilon_t \cdot E = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot E \quad [\text{Pa}]$

4. Mechanické napätie:

- Normálové napätie: $\sigma = \pm \frac{N}{A} \quad [\text{Pa}]$,

$N = \sum F_{ix} \quad [\text{N}]$ - normálová sila pôsobiaca v priereze, A - prierezová plocha (m^2)

- Šmykové napätie: $\tau = \frac{T}{A} \quad [\text{Pa}]$,

$T = \sum F_{iy} \quad [\text{N}]$ - priečna sila pôsobiaca v priereze, A - prierezová plocha (m^2)

4. Hookeov zákon:

- ťah / tlak: $\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{resp.} \quad \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \quad [\text{Pa}]$

- šmyk: $\tau = \gamma \cdot G \quad [\text{Pa}]$

5. Podmienky bezpečnosti:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{DOV}, \quad \text{resp.} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{DOV},$$

kde: $\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_K}{k}$ alebo $\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_M}{k}$, resp. $\tau_{DOV} = \frac{\tau_K}{k}$, alebo $\tau_{DOV} = \frac{\tau_M}{k}$.

Čistý ťah / tlak:

1. Bez uvažovania vlastnej tiaže

- Vnúťorná (normálová) sila: $N = \sum F_{ix} \text{ [N]}$
- Normálové napätie: $\sigma = \pm \frac{N}{A} \text{ [Pa]}$
- Absolútne pretvorenie: $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \text{ [m]}$
- Pomerné pretvorenie: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E \cdot A} \cdot 100\% \text{ [%]}$

2. S uvažovaním vlastnej tiaže:

- Vnúťorná (normálová) sila: $N = N_F + N_G \Rightarrow N = \sum F_{ix} + (\rho \cdot g \cdot A \cdot l) \text{ [N]}$
- Normálové napätie: $\sigma = \frac{N}{A} + \rho \cdot g \cdot l = \frac{N}{A} + \gamma \cdot l \text{ [Pa]}$, kde $\rho \cdot g = \gamma \text{ [N/m}^3\text{]}$
- Absolútne pretvorenie: $\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_G \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{2E} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2E} \text{ [m]}$
- Pomerné pretvorenie: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l}{2E} \text{ [-]}$

Odporúčam napr. <http://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/tah-tlak/geogebra-tah-tlak.php>
prípadne prínosné je tiež <http://www.fce.vutbr.cz/STM/kaderova.j/frvs/frvs.html>

Na Previerku pozrieť aj príklady z: <http://www.priklady.eu/cs/Fyzika/Deformace-pevnych-latek.alej> - veľa praktických príkladov (napr. aj tepelná rozťažnosť, Hookeov zákon a pod).

Téma 7 : Namáhanie čistým ťahom alebo tlakom

Príklad 7.1: Oceľová tyč pôvodnej dĺžky $l=0,8\text{ m}$ kruhového prierezu s priemerom $d=20\text{ mm}$ je zaťažená centricky ťahovou silou $F=20\text{ kN}$.

- a) určte absolútne a relatívne predĺženie tyče.
b) určte veľkosť a charakter vznikajúceho napätia.



Riešenie: $N = F = 20\,000\text{ N}$

$$\text{a) } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{20000 \cdot 800}{210000 \cdot \frac{\pi \cdot (20)^2}{4}} = 0,24\text{ mm},$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,24}{800} = 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon = 0,0003 \cdot [100\%] = 0,03\%$$

$$\text{b) } \sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}} = \frac{20000}{\pi \cdot \frac{20^2}{4}} = \frac{20000\text{ N}}{\pi \cdot 100\text{ mm}^2} = 63,66\text{ MPa}$$

Príklad 7.2: Oceľové tiahlo dĺžky $l=1,8\text{ m}$, prierezu $A=300\text{ mm}^2$ sa po zaťažení osovou ťahovou silou F predĺžilo o $\Delta l = 0,9\text{ mm}$.

- a) vypočítajte silu, ktorou je tiahlo namáhané ťahom,
b) určte veľkosť v tiahle vznikajúceho mechanického napätia.

Riešenie:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,9}{1800} = 0,0005,$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = 0,0005 \cdot 210000 = 105\text{ MPa}, \quad \sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma \cdot A = 105 \cdot 300 = 31500\text{ N}$$

$$\text{ale aj inak } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \Rightarrow N = \frac{\Delta l \cdot E \cdot A}{l} = \frac{0,9 \cdot 210000 \cdot 300}{1800} = 31500\text{ N} \Rightarrow F = 31,5\text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{31500}{300} = 105\text{ MPa}$$



Príklad 7.3: Rúra s vonkajším priemerom $D=40\text{ mm}$, hrúbkou steny $t=4\text{ mm}$ je namáhaná statickou ťahovou silou $F=60\text{ kN}$. Vykonajte kontrolu napätia a porovnajte ho s napätím dovoleným, ak materiál rúry je oceľ 11373 ($\sigma_{DOV}=140\text{ MPa}$).

Riešenie: $N = F = 60\text{ kN}$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)} = \frac{60000}{\frac{\pi}{4} \cdot (40^2 - 32^2)} = 132,6\text{ MPa},$$

$$\sigma_{DOV} = 140\text{ MPa} \Rightarrow \sigma \leq \sigma_{DOV} \quad (132,6\text{ MPa} \leq 140\text{ MPa})$$

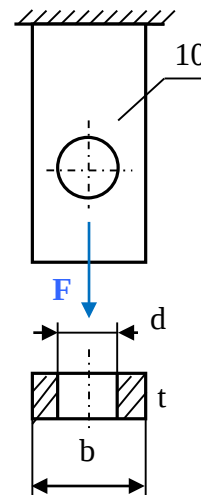


Príklad 7.4: Vypočítajte ťahové napätie v oslabenom priereze tyče obdĺžnikového prierezu otvorom, ktorá je zaťažená centricky ťahovou silou F .
Zadané: $F=40 \text{ kN}$, $b=60 \text{ mm}$, $t=10 \text{ mm}$, $d=10 \text{ mm}$.

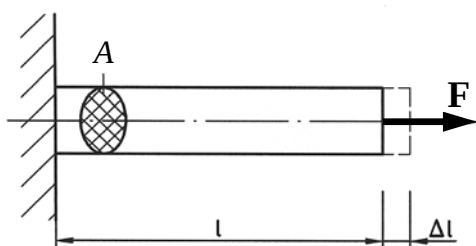
Riešenie:

$$N = F = 40\,000 \text{ N}$$

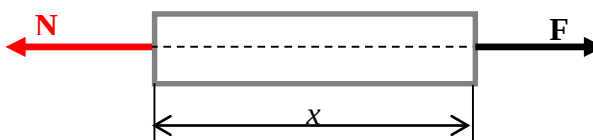
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{b \cdot t - d \cdot t} = \frac{40\,000}{60 \cdot 10 - 10 \cdot 10} = 80 \text{ MPa}$$



Príklad 7.5: Určte plochu A priečného prierezu prúta (=dimenzovanie) centricky zaťaženého ťahovou silou F (obr.7.5a) tak, aby malo výsledné absolútne predĺženie prúta hodnotu Δl .
Zadané: $F = 90 \text{ kN}$; $l = 0,7 \text{ m}$; $\Delta l = 2 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Obr.7.5a



Obr.7.5b

Riešenie:

$$\text{Podmienka rovnováhy: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow F - N = 0 \Rightarrow N = F = 90 \text{ kN}$$

Plocha A priečného prierezu prúta: vo všeobecnom prípade pre Δl pri ťahu/tlaku platí

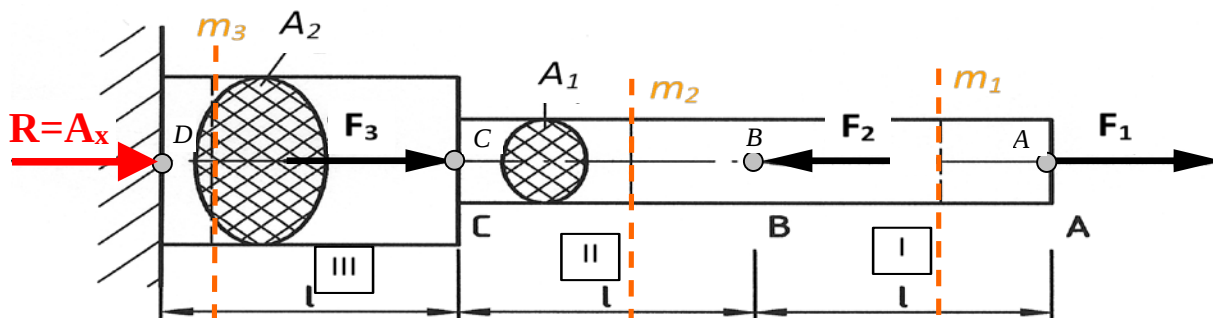
$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_G = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{g \cdot \rho \cdot l^2}{2 \cdot E} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E},$$

kde člen (Δl_F) predstavuje účinok sily F na predĺženie tyče a člen (Δl_G) vplyv vlastnej tiaže.

V tomto prípade **vplyv od vlastnej tiaže zanedbáme** (inak by nešlo o namáhanie čistým ťahom, ale o namáhanie kombinované typu ťah – ohyb).

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \Rightarrow 2 \text{ (mm)} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ (N)} \cdot 0,7 \cdot 10^3 \text{ (mm)}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ (MPa)} \cdot A \text{ (mm}^2\text{)}} \\ \Rightarrow A &= \frac{N \cdot l}{E \cdot \Delta l} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ (N)} \cdot 0,7 \cdot 10^3 \text{ (mm)}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ (N} \cdot \text{mm}^{-2}\text{)} \cdot 2 \text{ (mm)}} \Rightarrow A = 15 \cdot 10^1 = 150 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Príklad 7.6: Vypočítajte hodnoty vnútorných síl N , napätí σ , premiestnenia u v bodoch A, B, C a celkové absolútne predĺženie Δl centricky zaťaženého odstupňovaného prúta (obr.7.6a). Zakreslite priebehy N , σ a Δl po celej dĺžke prúta. Zadané: $F_1 = 6 \text{ kN}$; $F_2 = 9 \text{ kN}$; $F_3 = 4 \text{ kN}$; $A_1 = 100 \text{ mm}^2$; $A_2 = 200 \text{ mm}^2$; $l = 0,5 \text{ m}$; modul pružnosti v ťahu pre oceľ je $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Riešenie:

1. Väzbové reakcie:

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \Rightarrow A_x + F_3 - F_2 + F_1 = 0 \Rightarrow A_x = -F_3 + F_2 - F_1 = -1000 \text{ N}$$

2. Vnútorné sily v jednotlivých úsekoch:

$$\text{Časť I (A-B)} = \text{rez } m_1: \sum_{i=1}^n F_i = 0 \Rightarrow -N_1 + F_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F_1 = 6000 \text{ N},$$

$$\text{Časť II (B-C)} = \text{rez } m_2: \sum_{i=1}^n F_i = 0 \Rightarrow -N_2 - F_2 + F_1 = 0 \Rightarrow N_2 = F_1 - F_2 = -3000 \text{ N},$$

$$\text{Časť III (C-D)} = \text{rez } m_3: \sum_{i=1}^n F_i = 0 \Rightarrow -N_3 + F_3 - F_2 + F_1 = 0 \Rightarrow N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = 1000 \text{ N}.$$

3. Normálové napätia v jednotlivých úsekoch:

$$\text{Časť I (A-B): } \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{6000 \text{ (N)}}{100 \text{ (mm}^2\text{)}} = 60 \text{ MPa},$$

$$\text{Časť II (B-C): } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-3000}{100} = -30 \text{ MPa},$$

$$\text{Časť III (C-D): } \sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ MPa}.$$

4. Absolútne predĺženia jednotlivých úsekov a výsledné predĺženie Δl (A-D):

$$\text{Časť I (C-D): } \Delta l(C-D) = \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A_2} = \frac{1000 \cdot 0,500}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = 0,0125 \text{ mm},$$

$$\text{Časť II (B-C): } \Delta l(B-C) = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_1} = \frac{-3000 \cdot 0,500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = -0,075 \text{ mm},$$

$$\text{Časť III (A-B): } \Delta l(A-B) = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1} = \frac{6000 \cdot 0,500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,15 \text{ mm}.$$

$$\Delta l(A-D) = \sum (\Delta l(A-B) + \Delta l(B-C) + \Delta l(C-D)) = 0,125 - 0,075 + 0,15 = \mathbf{0,0875 \text{ mm}}$$

Hodnota absolútneho predĺženia Δl celého prúta: $\Delta l_{A-D} = \mathbf{0,0875 \text{ mm}}$.

Prípadne aj prostredníctvom určenia posunutia u

5. Pomocou určenia posunutia (u) bodov A, B, C, D:

$$u(D) = 0$$

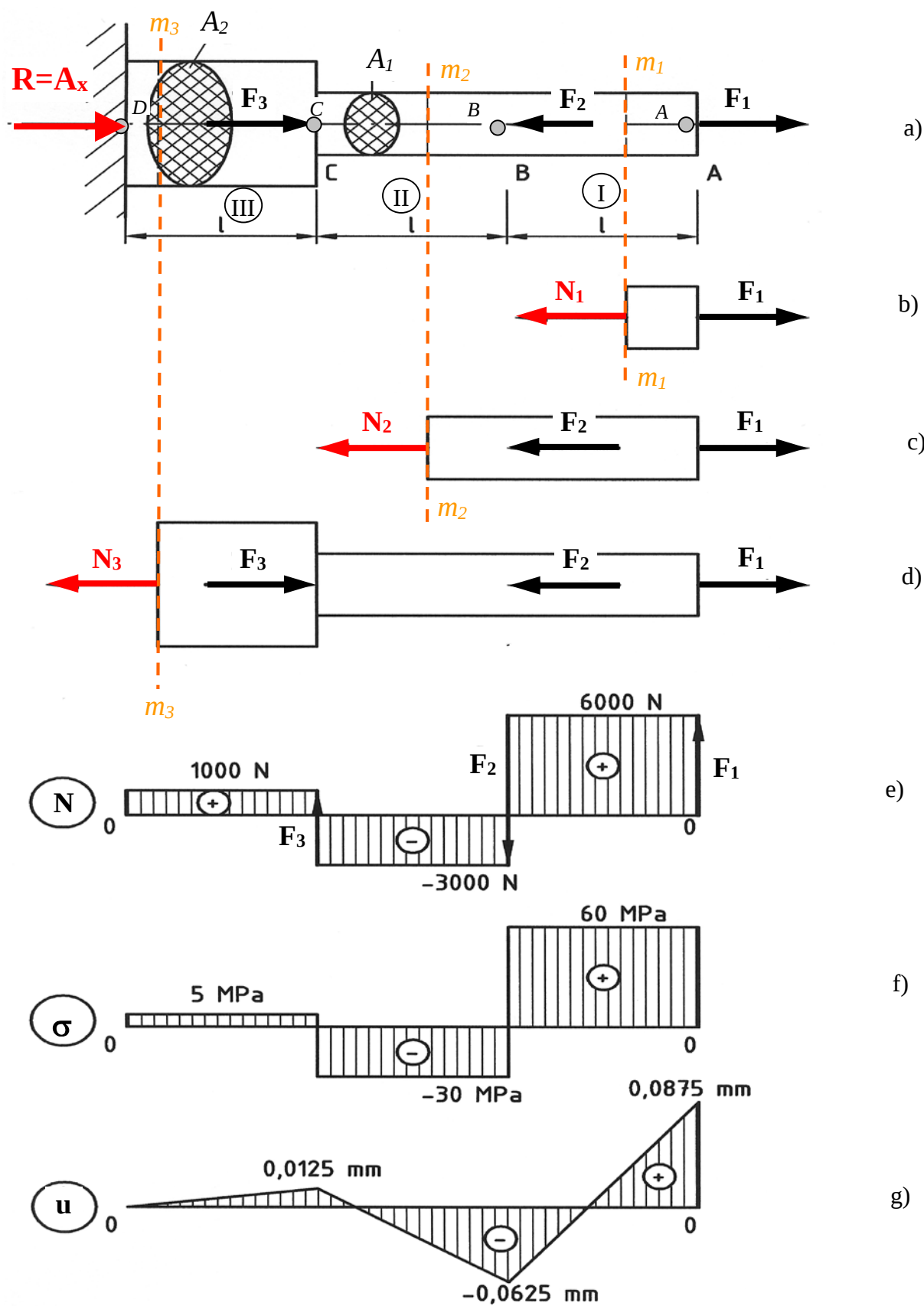
$$u(C) = u(D) + \frac{N_3 \cdot l}{E \cdot A_2} = 0 + \frac{1000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} = \mathbf{0,0125 \text{ mm}}$$

$$u(B) = u(C) + \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_1} = 0,0125 + \frac{-3000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,0125 - 0,075 = \mathbf{-0,0625 \text{ mm}}$$

$$u(A) = u(B) + \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1} = -0,0625 + \frac{6000 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = -0,0625 + 0,15 = \mathbf{0,0875 \text{ mm}} = \Delta l_{A-D}.$$

Hodnota absolútneho predĺženia Δl celého prúta: $\Delta l_{A-D} = \mathbf{0,0875 \text{ mm}}$.

Priebehy osovej sily N , normálového napätia σ a posunutia bodov A, B, C, D t.j. absolútneho predĺženia Δl na odstupňovanom centricky namáhanom prúte sú na obr.7.6 e, f, g.



Obr.7.7