

Potrebné znalosti z podmieňujúcich predmetov

Matematika 1:

1. Trigonometria (riešenie trojuholníkov - Pythagorova veta, Euklidove vety, sinusová a kosinusová veta, podobnosť trojuholníkov, výška, ťažnica, uhly, ...)
2. Goniometria (základné goniometrické funkcie, a vzťahy, jednotková kružnica – uhlová a oblúčková miera, transformačné vzťahy, ...)
3. Derivácia a integrácia funkcií (fyzikálna podstata derivácie a integrácie, základné princípy a vzťahy pre derivovanie a integrovanie – určitý, neurčitý integrál, ...)
4. Ďalšie všeobecné a špecifické operácie (základy vektorovej algebry - skalárny a vektorový súčet a súčin, operácie so zlomkami, úpravy algebraických výrazov, riešenie sústav algebraických rovníc, priebehy funkcií – lineárny, kvadratický, kubická parabola, extrémny funkcie jednej premennej, diferenciálna rovnica priehybu...)

Fyzika:

1. Fyzikálne veličiny a jednotky.
2. Newtonove pohybové zákony, Základy mechaniky sústav hmotných bodov a telies.
3. Fyzikálne silové polia, Gravitačný zákon.
4. Mechanické a tepelné vlastnosti tuhých látok, ...

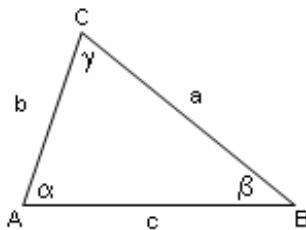
Úvod do goniometrie a trigonometrie

Goniometria (z gréckeho gónia = uhol a metró = meranie) je oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá funkciami a výpočtom uhlov a ich priemetov do vybraného smeru, definuje funkcie sínus, kosínus, tangens a ďalšie.

Trigonometria, súčasť goniometrie ktorá sa venuje praktickému použitiu goniometrických funkcií pri riešení rôznych úloh o trojuholníkoch.

Všeobecný trojuholník

Termín všeobecný zvyčajne znamená, že pri trojuholníku nepredpokladáme žiadne špecifické vlastnosti, t.j. nie je pravouhlý, rovnoramenný ani rovnostranný a pod.



vrcholy trojuholníka: A, B, C

strany trojuholníka: a, b, c

$$|AB| = c; |BC| = a; |AC| = b$$

uhly trojuholníka: α, β, γ

$$|\angle ABC| = \beta; |\angle ACB| = \gamma; |\angle BAC| = \alpha$$

Oproti väčšej strane leží vždy väčší uhol a naopak.

Trojuholníková nerovnosť: (umožňuje zistiť, či sa dá trojuholník zostrojiť)

$$a + b > c$$

alebo:

$$\text{nech } a > b > c$$

$$a + c > b$$

potom stačí overiť:

$$b + c > a$$

$$b - c < a < b + c$$

Delenie trojuholníkov:

A. podľa veľkosti strán

1. rovnostranný – má všetky tri strany rovnaké ($a = b = c$)
2. rovnoramenný – dva strany rovnaké – **ramená**, tretia rôzna - **základňa** ($b = c$)
3. rôznostranný – všetky strany rôzne (musí však platiť trojuholníková nerovnosť)

B. podľa veľkosti uhlov

1. ostrouhlý – má všetky tri uhly ostré (menšie ako 90°)
2. pravouhlý – jeden uhol pravý (90° , najčastejšie pri vrchole C) a dva uhly ostré
3. tupouhlý – má jeden uhol tupý (väčší ako 90° a menší ako 180°) a dva ostré

Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180° ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)

Vonkajšie uhly trojuholníka sú susednými uhlami vnútorných uhlov. Každý trojuholník má 6 vonkajších uhlov. Vonkajší a vnútorný uhol pri tom istom vrchole vytvárajú spolu priamy uhol (ich súčet je 180°).

Zhodnosť trojuholníkov

Dva trojuholníky sa nazývajú zhodné trojuholníky, ak majú všetky tri strany aj uhly zhodné. Napríklad dva trojuholníky ABC a $A'B'C'$ sú zhodné, ak platí:

$$AB = A'B'; BC = B'C'; CA = C'A'; \gamma = \gamma'; \alpha = \alpha'; \beta = \beta'$$

Dva trojuholníky sú zhodné, ak platí niektorá z nasledujúcich viet o zhodnosti trojuholníka:

- veta SSS – ak sa trojuholníky zhodujú vo všetkých stranách,
- veta SUS – ak sa trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom,
- veta USU – ak sa trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých k tejto strane.

Významné prvky trojuholníka

Výška trojuholníka

Kolmica zostrojená z vrcholu trojuholníka na priamku, na ktorej leží protiľahlá strana trojuholníka, sa nazýva **výška trojuholníka**.

Výšky trojuholníka sa pretínajú v bode nazývanom priesečník výšok (alebo **ortocentrum** - označenie V).

v_a výška na stranu **a**

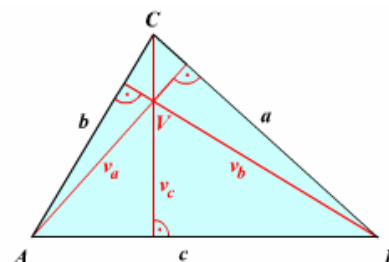
v_b výška na stranu **b**

v_c výška na stranu **c**

V ortocentrum

Poznámky:

- V ostrouhlom trojuholníku leží ortocentrum leží vo vnútri trojuholníka.
- V pravouhlom trojuholníku je ortocentrum v bode, pri ktorom leží pravý uhol.
- V tupouhlom trojuholníku sa nachádza ortocentrum mimo trojuholníka.



Ťažnica trojuholníka

Úsečka, ktorá spája vrchol trojuholníka so stredom protiľahlej strany, sa nazýva **ťažnica trojuholníka**.

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v bode, ktorý nazývame **ťažisko trojuholníka** (označujeme ho T). Vzdialenosť ťažiska od stredu strany, ku ktorej je ťažnica zostrojená, sa rovná jednej tretine dĺžky ťažnice.

$$TS_a = \frac{1}{3} AS_a$$

$$TS_b = \frac{1}{3} BS_b$$

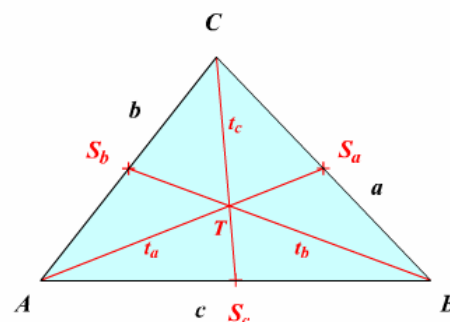
$$TS_c = \frac{1}{3} CS_c$$

t_a ťažnica na stranu **a**

t_b ťažnica na stranu **b**

t_c ťažnica na stranu **c**

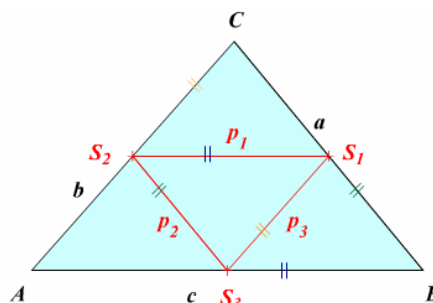
T ťažisko



Stredná priečka trojuholníka

Stredná priečka trojuholníka je úsečka, ktorá spája vždy 2 stredy strán. Je rovnobežná s tretou stranou trojuholníka. Dĺžka strednej priečky sa rovná jednej polovici strany, s ktorou je rovnobežná.

p_1, p_2, p_3 stredné priečky



Obvod a obsah trojuholníka

Obvod trojuholníka (o)

$$o = a + b + c$$

a, b, c strany trojuholníka

Obsah trojuholníka (S)

- Pre výpočet obsahu všeobecného trojuholníka

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

a, b, c strany trojuholníka
 v_a, v_b, v_c výšky trojuholníka

- Pre výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

a, b odvesny trojuholníka

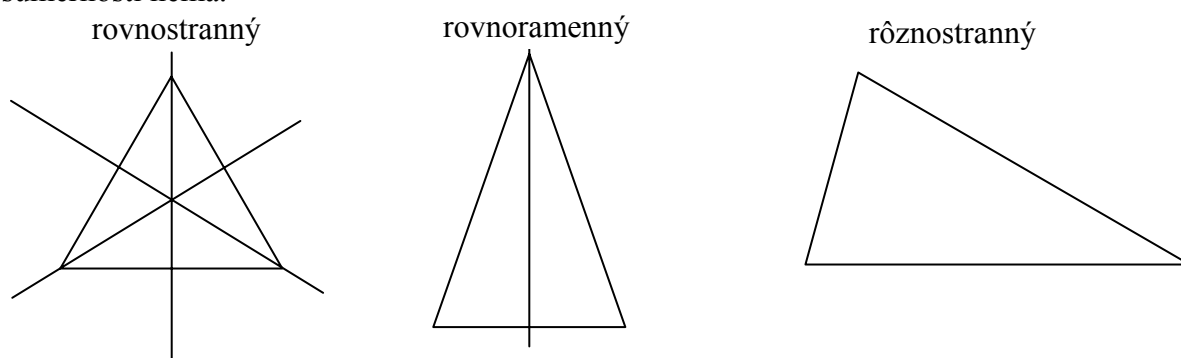
Osová a stredová súmernosť trojuholníkov

Stredová súmernosť

Žiadny trojuholník nemá stred súmernosti.

Osová súmernosť

Rovnostranný trojuholník má tri osi súmernosti (osi strán trojuholníka). Rovnoramenný trojuholník má jednu os súmernosti (os základne). Rôznostranný trojuholník os súmernosti nemá.

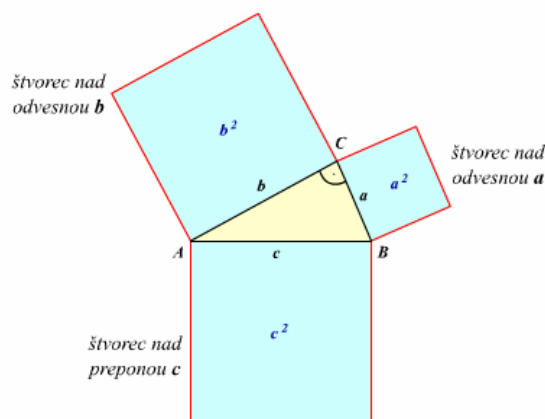


Pythagorova veta

V pravouhlom trojuholníku ABC, v ktorom pravý uhol je pri vrchole C, platí:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Obsah štvorca nad preponou sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad odvesnami pravouhlého trojuholníka.



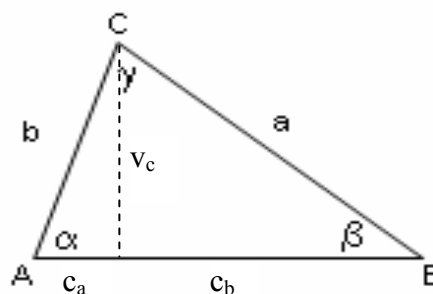
Euklidove vety

Dve matematické vety týkajúce sa pravouhlého trojuholníka:

1. Euklidova veta o výške:

Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov na prepone.

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b$$



2. Euklidova veta o odvesne:

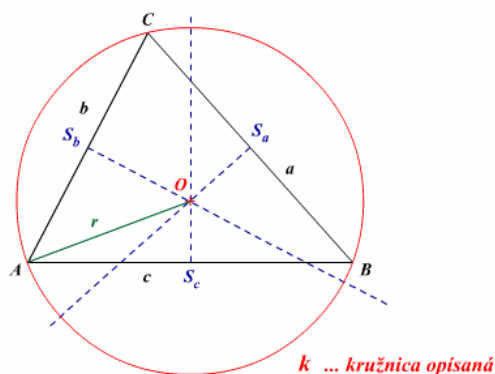
Obsah štvorca zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z prepony a priemetu prepony na odvesne.

Pre jednotlivé odvesny trojuholníka teda platí: $a_{\Delta}^2 = c \cdot c_a$, $b_{\Delta}^2 = c \cdot c_b$

Kružnica a trojuholník

Kružnica opísaná okolo trojuholníka

Kružnica opísaná trojuholníku je taká kružnica, ktorej stred S je priesečníkom osí jednotlivých strán trojuholníka. Polomer kružnice r je vzdialenosť stredu kružnice (priesečníka osí strán) od ľubovoľného vrcholu trojuholníka.

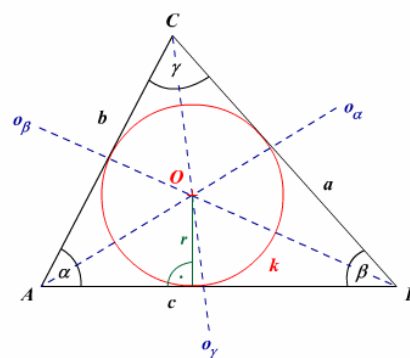


Poznámky:

- Stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku sa nachádza vo vnútri trojuholníka.
- Stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku sa nachádza v strede prepony trojuholníka.
- Stred kružnice opísanej tupouhlému trojuholníku sa nachádza mimo trojuholníka.

Kružnica vpísaná do trojuholníka

Kružnica vpísaná do trojuholníka je taká kružnica, ktorej stred O je priesečníkom osí vnútorných uhlov trojuholníka. Polomer kružnice r je dĺžka kolmice zostrojenej zo stredu kružnice (priesečníka osí vnútorných uhlov) na ľubovoľnú stranu trojuholníka.



Pomery strán pravouhlého trojuholníka – základné goniometrické funkcie

Každý uhol z intervalu $(0, 90^\circ)$ určuje pomery strán **pravouhlého trojuholníka**, pričom tieto pomery sú definované hodnotami (vzťahmi) goniometrických funkcií pre zadaný ostrý uhol.

Sínus α je pomer dĺžky odvesny protiľahlej tomuto uhlu a dĺžky prepony.

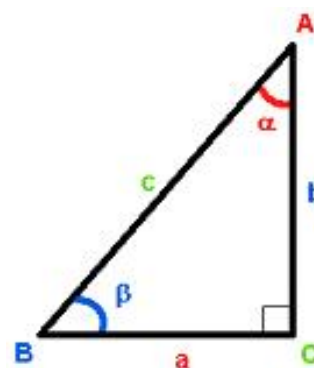
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Kosínus α je pomer dĺžky odvesny priľahlej tomuto uhlu a dĺžky prepony.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Tangens α je pomer dĺžok odvesny protiľahlej tomuto uhlu a dĺžky odvesny k nemu priľahlej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Kotangens α je pomer dĺžok odvesny priľahlej tomuto uhlu a dĺžky odvesny k nemu protiľahlej.

$$\cotg \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Sekans α je pomer dĺžky prepony a dĺžky odvesny priľahlej tomuto uhlu.

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Kosekans α je pomer dĺžky prepony a dĺžky odvesny protiľahlej tomuto uhlu.

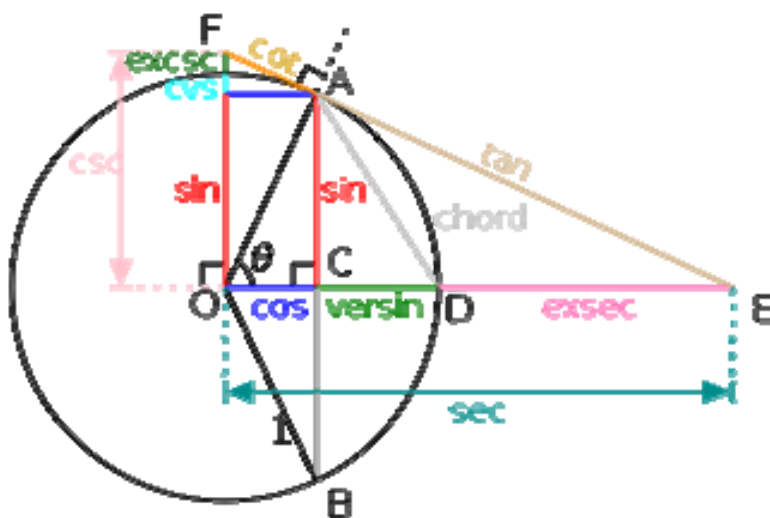
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Historicky sa používali ešte dve ďalšie funkcie:

$$\operatorname{versin} = 1 - \cos$$

$$\operatorname{exsec} = \sec - 1$$

Najdôležitejšie funkcie v rámci mechaniky sú **sínus**, **kosínus** a **tangens**.



Riešenie trojuholníkov

Riešením trojuholníka rozumieme určenie dĺžok všetkých jeho strán a veľkostí jeho vnútorných uhlov. Pri riešení ľubovoľného všeobecného trojuholníka môžeme používať **sínusovú a kosínusovú vetu**.

1. Sínusová veta - vzťah medzi stranami a vnútornými uhlami všeobecného trojuholníka. Najčastejšie sa prezentuje takto: **Pre každý trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ a stranami a, b, c platí:**

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

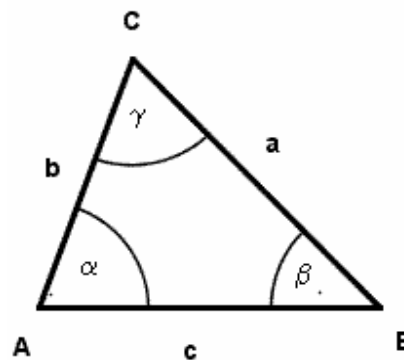
kde R je polomer opísanej kružnice pre tento trojuholník.

Slovne: Pomer všetkých dĺžok strán a hodnôt sínusov im protiľahlých uhlov je v trojuholníku konštantný. Alebo: Pomer dĺžok strán trojuholníka sa rovná pomeru sínusov im protiľahlých uhlov.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Inak zapísané:

$$a \sin \beta = b \sin \alpha, \quad c \sin \beta = b \sin \gamma, \quad c \sin \alpha = a \sin \gamma$$



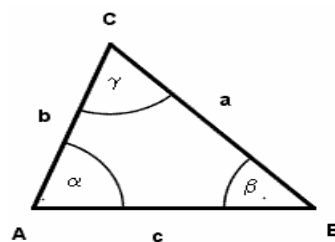
Použitie sínusovej vety:

- Úloha **USU** - ak poznáme dva vnútorné uhly a stranu k nim priľahlú,
- Úloha **SSU** - ak poznáme dĺžky dvoch strán a veľkosť vnútorného uhla, ležiaceho oproti jednej z nich (tzn. veľkosť vnútorného uhla, ktorý tieto dve strany nezvierajú).
(V tomto prípade sa však stáva, že nám veta poskytne dve riešenia, avšak iba správne riešenie poskytuje pri súčte všetkých uhlov v trojuholníku hodnotu 180°).

2. Kosínusová veta - výpočet dĺžky strany trojuholníka. Úloha : **USS** - ak poznáme iba veľkosť uhla ležiaceho oproti tejto strane a dĺžku zvyšných dvoch strán (zvierajú tento uhol).

V každom trojuholníku ABC, ktorého vnútorné uhly majú veľkosť α , β , γ a strany veľkosť a , b , c platí:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2accos\beta \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2abcos\gamma\end{aligned}$$



Kosínusová veta je v zovšeobecnením Pythagorovej vety pre všetky typy trojuholníkov.

Dôkaz kosínusovej vety:

Nech v trojuholníku ABC pãta výšky na stranu c rozdeľuje stranu c na dve časti:

$$x = |AC_0|, y = |C_0B|, v_c = |CC_0|$$

Potom v trojuholníku AC_0C platí Pythagorova veta:

$$b^2 = v_c^2 + x^2 \Rightarrow v_c^2 = b^2 - x^2$$

Obdobne v trojuholníku BC_0C platí Pythagorova veta:

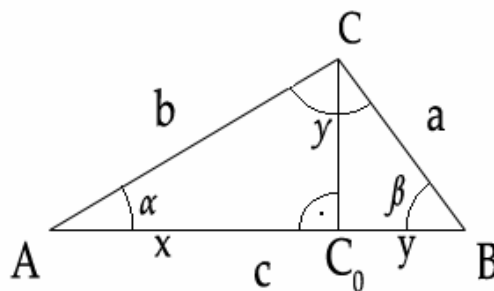
$$a^2 = v_c^2 + y^2 \Rightarrow v_c^2 = a^2 - y^2$$

Na základe predchádzajúcich výpočtov potom platí:

$$v_c^2 = v_c^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - y^2$$

Keďže strana c sa skladá z častí x a y , je možné y vyjadriť ako $y = c - x$ a teda $y^2 = (c-x)^2 = c^2 - 2cx + x^2$.



$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

V trojuholníku AC_0C platí, že kosínus α je rovný pomeru strán x / b , z čoho je možné x vyjadriť v tvare $x = b \cdot \cos(\alpha)$.

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cos(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Analogickým spôsobom môžeme dokázať aj zvyšné tvary **kosínusovej vety**.

Stupňová a oblúčková miera

Jednotková kružnica - všetky uhly vieme okrem stupňovej miery zobraziť aj na kružnici. Najvýhodnejšie je pracovať s kružnicou s polomerom $r = 1$, čím dostaneme tzv. jednotkovú kružnicu (je výhodná pre odčítavanie hodnôt a vlastností goniometrických funkcií).

Ku každému bodu na jednotkovej kružnici vieme určiť uhol, ktorý mu prislúcha. Vieme nájsť jeho x a y súradnicu, a tiež vyčítať, aká časť kružnice mu prislúcha.

Napríklad: ak je uhol 180° , aká dlhá je dĺžka kružnicového oblúka prislúchajúcemu tomuto uhlu na jednotkovej kružnici? Pre obvod kruhu platí: $o = 2\pi r$

$180^\circ \Rightarrow$ polkružnica ; jednotková kružnica $\Rightarrow r = 1$
 $1/2 \cdot o = 1/2 \cdot 2\pi r = \pi \cdot 1 \Rightarrow 180^\circ \sim \pi$

Aká je dĺžka, keď uhol je 360° ? $360^\circ \sim 2\pi$

Aká je dĺžka, keď uhol je 90° ? $90^\circ \sim \pi/2$

Aká je dĺžka, keď uhol je 120° ? $120^\circ \sim 2/3\pi$

Oblúčková miera - je meranie uhla v iných jednotkách ako stupňoch, a to v **radiánoch**.

180° je π radiánov

Z toho vyplýva prevod (transformačný vzťah):

1 stupeň = $\pi / 180 = 0,01745$ radiánov, resp.

1 radián = $180 / \pi = 57,296^\circ$.

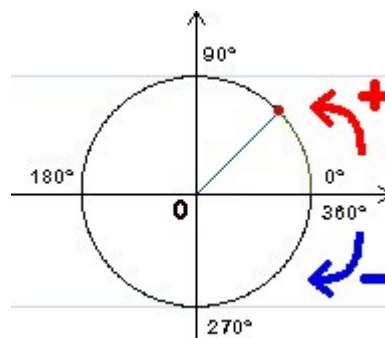
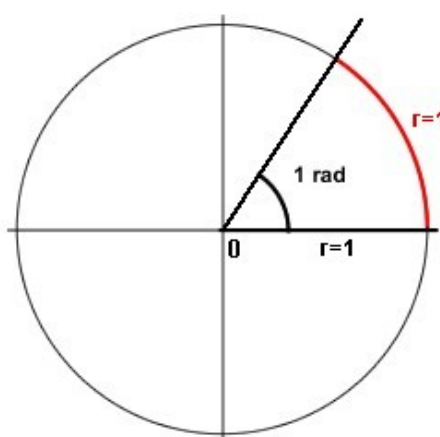
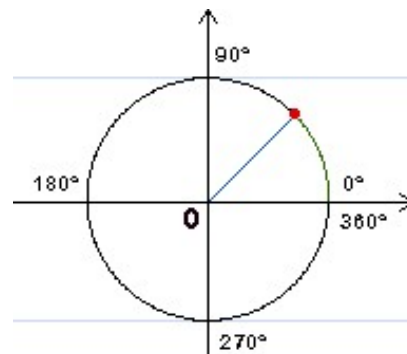
Približná hodnota 1 radiánu je $57^\circ 17' 44''$.

Transformačné vzťahy:

- **stupňová miera : $\alpha = (x \cdot 180) / \pi$**
(za x dosadíme číslo v radiánoch a dostaneme α v stupňoch)
- **oblúčková miera : $x = (\alpha \cdot \pi) / 180$**
(za α dosadíme uhol v stupňoch a dostaneme x v radiánoch)

Výhodou merania uhla v radiánoch je v tom, že veľkosť uhla v rad je zároveň dĺžkou kružnicového oblúka prislúchajúceho tomuto uhlu na jednotkovej kružnici. Ale to sú iba kladné čísla. Preto musíme zaviesť kladný a záporný zmysel otáčania (kladné čísla proti smeru otáčania hodinových ručičiek a záporné v smere pohybu). Takto môžeme tzv. namotávať na jednotkovú kružnicu celú reálnu os.

Oblúčková miera sa využíva najmä v kinematike a dynamike, v statike sa používa skôr sporadicky.



Vlastnosti základných goniometrických funkcií

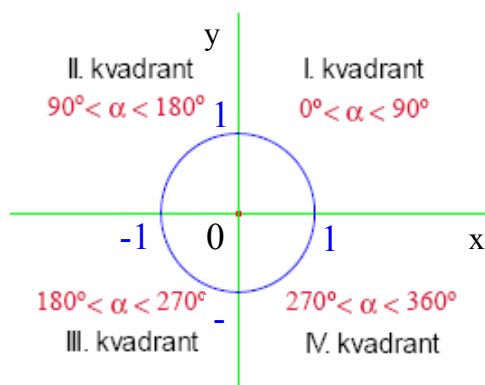
Jednotková kružnica je rozdelená na kvadranty. Kvadranty sú štvrtkružnice a v každom kvadrante sa funkcia správa inak.

I. kvadrant ... α_0

II. kvadrant ... $180^\circ - \alpha_0$

III. kvadrant ... $180^\circ + \alpha_0$

IV. kvadrant ... $360^\circ - \alpha_0$



	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} \alpha$	+	-	+	-

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$	0	$\varnothing$	0
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\varnothing$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\varnothing$	0	$\varnothing$

Niektoré goniometrické vzorce:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Sínusová veta:

(Ssu ; usu)

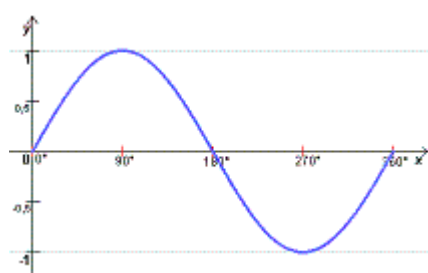
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Kosínusová veta:

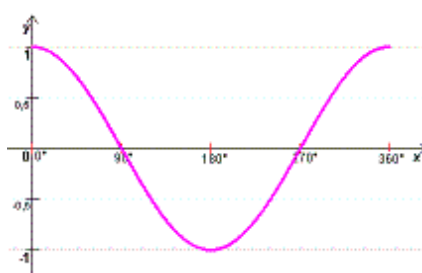
(sss ; suš)

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

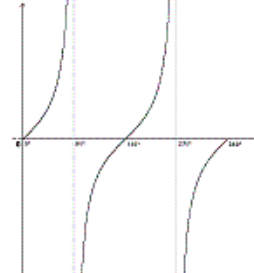
Grafy funkcií : $y = \sin x$;



$y = \cos x$;



$y = \tan x$.



Funkcie **sin** a **cos** sú periodické s periódou 2π , **tan** je periodická s periódou π .

Ďalšie dôležité vzťahy pre prácu s goniometrickými funkciami:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

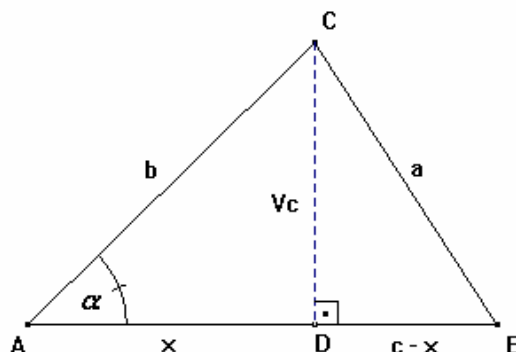
Je možné ich nájsť oveľa viac v ktorejkoľvek príručke matematiky.

ZÁKLADNÉ VZŤAHY TRIGONOMETRIE - AKO RIEŠENIE JEDINEJ ÚLOHY O TROJUHOLNÍKU

Úloha : Vyjadrite pomocou dĺžok strán trojuholníka :

1. kosínusy a sínusy jeho vnútorných uhlov,
2. dĺžky jeho výšok a ťažníc,
3. jeho obsah,
4. polomery kružníc do neho vpísanej, resp. mu opísanej .

Riešenie :



obr. 1.

1. Výpočet výšky a ťažnice

Skúsme vypočítať výšku v_c dvoma spôsobmi z pravouhlých trojuholníkov **ADC** a **DBC** :

$$b^2 - x^2 = (v_c)^2 = a^2 - (c - x)^2$$

ak vynecháme zbytočné v_c , po úprave dostávame :

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

odkiaľ môžeme vyjadriť x :

$$x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \quad (1)$$

Z pravouhlého trojuholníka ADC bezprostredne dostávame :

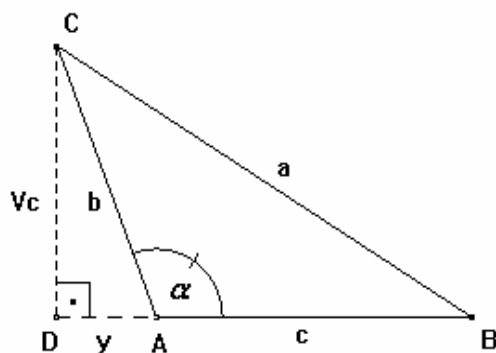
$$\cos \alpha = \frac{x}{b} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, \quad (2)$$

alebo vyjadrenie strany pomocou zvyšných strán a kosínusu uhla α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

známa pod názvom **kosínusová veta**.

Je však uvedené tvrdenie platné, aj keď je napr. uhol α tupý ?



obr. 2.

Opäť vypočítame výšku v_c dvoma spôsobmi z pravouhlých trojuholníkov **DAC** a **DBC** :

$$b^2 - y^2 = (v_c)^2 = a^2 - (c + y)^2$$

ak vynecháme zbytočné v_c , po úprave dostávame : $b^2 = a^2 - c^2 - 2cy$

odkiaľ môžeme vyjadriť y :

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} . \quad (1')$$

Vidíme, že formálne $y = -x$. Z pravouhlého trojuholníka **DAC** dostávame :

$$\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\frac{y}{b} = \frac{x}{b} \quad \text{čiže aj v tomto prípade platia vzťahy (2) a (3).}$$

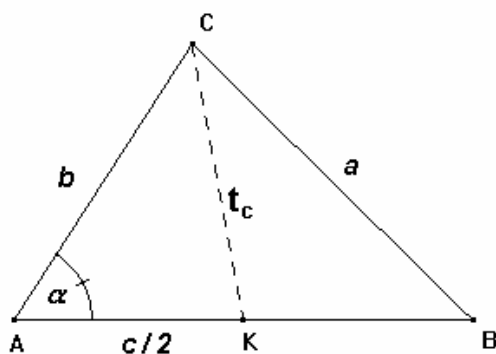
Ak bude uhol α pravý, tak vzťahy (2) a (3) platia evidentne tiež. Preto môžeme tvrdiť, že **v každom trojuholníku platí** :

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} , \quad \cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} , \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Vypočítajme dĺžku ťažnice napr. na stranu c :

Pomocou kosínusovej vety vyjadríme štvorec strany t_c z trojuholníka **AKC**.



obr. 3.

$$t_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 2b \frac{c}{2} \cos \alpha$$

Ak za $\cos \alpha$ dosadíme z (2) postupne dostaneme :

$$t_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - 2b \frac{c}{2} \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

$$t_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \quad (4)$$

2. Výpočet obsahu

Ak sa vrátíme k výpočtu dĺžky výšky v_c (pozri obr. 1.)

Zo vzťahu $(v_c)^2 = b^2 - x^2$ po dosadení za x zo vzťahu (1) dostávame :

$$v_c^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2 = b^2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4c^2}$$

Výraz : $V = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$ nadobúda kladné hodnoty práve vtedy, keď existuje trojuholník, ktorého strany majú dĺžky a, b, c . Taktiež platí, že sa rovná výrazu :

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

Ak ho budeme označovať symbolom V , tak pre výšky v každom trojuholníku platí :

$$v_a = \frac{\sqrt{V}}{2a}, \quad v_b = \frac{\sqrt{V}}{2b}, \quad v_c = \frac{\sqrt{V}}{2c} \quad (5)$$

Pre obsah trojuholníka potom platí :

$$P_{ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{\sqrt{V}}{4} \quad (6)$$

Ak polovičný obvod trojuholníka (tzv. semiperimeter) označíme symbolom s dostávame vzťahy :

$$a + b + c = 2s, \quad -a + b + c = s - a, \quad a - b + c = s - b, \quad a + b - c = s - c$$

takže obsah trojuholníka možno vyjadriť tzv. **Herónovým vzorcom** v tvare:

$$P_{ABC} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad (6')$$

3. Výpočet kosínusov a sínusov vnútorných uhlov

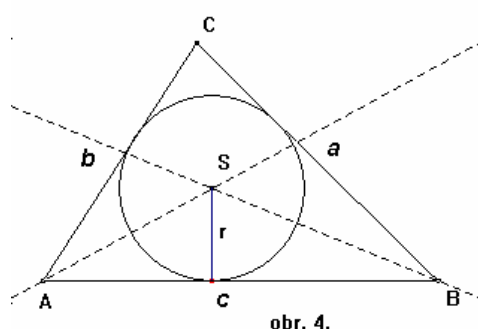
Vyjadrime ešte sínusy vnútorných uhlov trojuholníka. Pretože $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ môžeme podľa potreby použiť obrázok 1. alebo 2., odkiaľ dostávame :

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b} = \frac{\sqrt{V}}{2bc}, \quad \text{podobne} \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{V}}{2ac}, \quad \text{ako aj} \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{V}}{2ab} \quad (7)$$

Ak vzťahy (7) postupne delíme dĺžkami strán a, b, c a porovnáme ich, dostaneme :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sqrt{V}}{2abc}, \quad \text{čo je tvar všeobecne známej } \mathbf{sínusovej vety}.$$

4. Výpočet polomerov vpísanej a opísanej kružnice.



Polomer vpísanej kružnice :

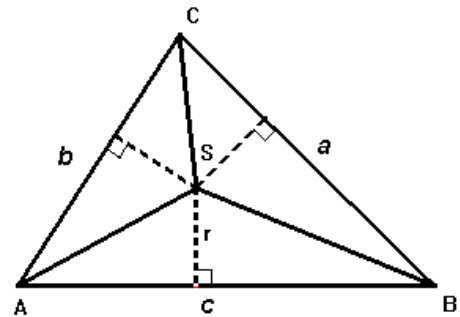
Zdá sa že obr. 4. nie je úplne vhodný. Obsahuje zbytočnú informáciu o konštrukcii vpísanej kružnice.

Obr. 5. evokuje myšlienku rozdeliť trojuholník **ABC** na tri trojuholníky. Ak vyjadríme ich obsahy pomocou polomeru r vpísanej kružnice a ich súčet porovnáme s obsahom celého trojuholníka dostávame :

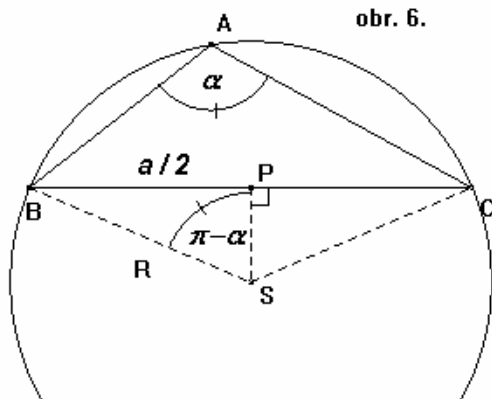
$$\frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = P_{ABC} = \frac{\sqrt{V}}{4},$$

odkiaľ platí :

$$r = \frac{\sqrt{V}}{2.(a + b + c)}$$



obr. 5.



obr. 6.

Polomer opísanej kružnice: napr. pre prípad tupouhlého trojuholníka.

Z obrázku vyplýva, že :

$$\frac{a/2}{R} = \sin \alpha$$

čo po úprave dáva :

$$R = \frac{abc}{\sqrt{V}}$$

Pre prípady pravouhlého resp. ostrouhlého trojuholníka je možné získať adekvátne riešenie obdobným spôsobom.

Derivovanie funkcie

S využitím derivácií sa stretávame veľmi často v matematike, geometrii, fyzike, či v najrôznejších technických aplikáciách. Vo všeobecnosti platí, že **derivácia funkcie f v bode a určuje veľkosť prírastku (zmenu) tejto funkcie f v závislosti na polohe bodu a .**

Objasnenie podstaty derivácie: napr. vzorec vyjadrujúci závislosť času, rýchlosti a dráhy pri rovnomernom priamočiaram pohybe $s = v \cdot t$.

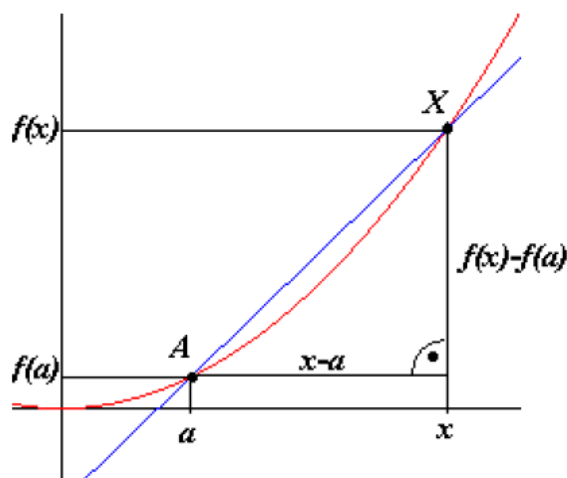
Ak napríklad každú 1 sekundu prejdeme vzdialenosť 2 metre, potom rýchlosť vyjadruje prírastok dráhy za jednotku času. **Rýchlosť preto môžeme charakterizovať ako deriváciu dráhy v určitom čase t .**

Geometrická interpretácia derivácie

Nech je daná spojitá funkcia $y = f(x)$. Na grafe tejto funkcie je pevne zvolený bod $A = [a, f(a)]$. Budeme sa snažiť zaviesť pojem dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $A = [a, f(a)]$. Zvoľme na grafe funkcie iný bod $X = [x, f(x)]$. Z pravouhlého trojuholníka na obrázku je zrejmé, že smer priamky AX je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

kde φ je uhol, ktorý zvierajú priamka AX s osou x . Ak sa bod X blíži k bodu A , tzn. ak sa rozdiel $(x - a)$ blíži k 0, mení sa aj poloha priamky AX .



Ak sa priamka AX blíži k istej limitnej polohe, t.j. ak sa jej smernica blíži k limite

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

nazveme túto limitnú polohu priamky AX **dotyčnicou grafu funkcie f v bode $A = [a, f(a)]$.**

Fyzikálna interpretácia derivácie

Nech sa bod P pohybuje po číselnej osi. Poloha bodu P závisí od času t , ktorý uplynul od začiatku pohybu. Táto závislosť je vyjadrená funkciou $s = f(t)$. Nech v čase t_0 je súradnica bodu P rovná $s_0 = f(t_0)$. Za čas $t - t_0$ sa táto súradnica zmení o $f(t) - f(t_0)$. Podiel

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

sa nazýva stredná rýchlosť bodu P v časovom úseku $t_0 - t$. Okamžitá rýchlosť v čase t_0 bude

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Z oboch interpretácií je možné vysloviť tvrdenie:

Nech je funkcia $f(x)$ definovaná v okolí bodu a . Ak existuje konečná limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, potom túto limitu nazveme deriváciou funkcie $f(x)$ v bode a a budeme ju označovať symbolom $f'(a)$. Ak uvedená limita neexistuje, hovoríme, že funkcia v danom bode nemá deriváciu.

V minulosti bola derivácia, s ohľadom na teóriu tzv. infinitezimálnych hodnôt, najčastejšie definovaná ako *pomer, v akom rast určitej premennej y zodpovedá zmene inej premennej x, na ktorej má premenná y nejakú funkčnú závislosť*. Pre vyjadrenie zmeny hodnoty sa v takomto prípade používa symbol Δ a potom takýto pomer môžeme symbolicky zapísať ako

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Avšak pri snahe o čo najmenšie Δx , blížiac sa 0, je možné konečne malý rozdiel Δx nahradiť nekonečne malou zmenou dx , ktorá definuje pomer dvoch nekonečne malých hodnôt.

Počas vývoja matematiky sa však intuitívna predstava nekonečne malých (infinitezimálnych) hodnôt ukázala ako nedostatočne presná a bola nahradená *teóriou limit*. Preto najbežnejšia, aktuálne platná definícia derivácie, zodpovedajúca vyššie uvedeným súvislostiam má tvar:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivácia funkcie vo všeobecnosti popisuje zmenu (nárast resp. pokles) funkcie v pomere k veľmi malej zmene jej premennej, príp. aj viac premenných – tzv. parciálna derivácia.

Nie vždy však limita, ktorá deriváciu definuje, existuje a je konečná, čiže nie každá funkcia má v každom bode aj deriváciu.

Označovanie derivácie: deriváciu je možné označovať niekoľkými spôsobmi:

$f'(x)$ (derivácia funkcie f , ktorá závisí od premennej x),

$\frac{d}{dx} f(x)$ (derivácia funkcie $f(x)$ podľa premennej x),

$\frac{df}{dx}$ (df podľa dx).

Vzorce na derivovanie funkcií

Derivácia súčtu a rozdielu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Derivácia súčinu: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Derivácia podielu: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad v(x) \neq 0$

Vety o derivovaní funkcií

$$\begin{array}{lll}
 (k)' = 0 & (\cot g x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (x^n)' = n \cdot x^{n-1} & (\ln x)' = \frac{1}{x} & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\sin x)' = \cos x & (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} & (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
 (\cos x)' = -\sin x & (e^x)' = e^x \cdot \ln e \Rightarrow (e^x)' = e^x & (\operatorname{arc} \cot g x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
 (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (a^x)' = a^x \cdot \ln a & \\
 (\cos x)' = -\sin x & &
 \end{array}$$

Prehľad derivácií niektorých elementárnych funkcií:

$$\begin{array}{ll}
 [c]' = 0, & \text{kde } c \text{ je konštanta } c \in R. \\
 [x]' = 1, & x \in R, \\
 [x^n]' = n \cdot x^{n-1}, & x \in R, n \in N, \\
 [a^x]' = a^x \cdot \ln a, & a > 0, x \in R, \\
 [e^x]' = e^x, & x \in R, \\
 [\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln x}, & a > 0, a \neq 1, x \in (0, \infty), \\
 [\ln x]' = \frac{1}{x}, & x \in R, \\
 [\sin x]' = \cos x, & x \in R, \\
 [\cos x]' = -\sin x, & x \in R, \\
 [\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, & x \in R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\}, \\
 [\cot g x]' = \frac{-1}{\sin^2 x}, & x \in R - \{k\pi, k \in Z\}, \\
 [\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1), \\
 [\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1), \\
 [\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}, & x \in R, \\
 [\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2}, & x \in R.
 \end{array}$$

Derivácia vo fyzike a technických disciplínach

Vo fyzike sa používa prvá aj druhá derivácia a pri výpočte sa aplikujú tie isté matematické vzťahy pre derivovanie ako v matematike. Pre označenie týchto derivácií však častejšie používame tzv. **Leibnitzov zápis** pre prvú deriváciu:

$$\frac{d}{dx} \text{ resp. } \frac{df}{dx} \text{ alebo aj } \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

kde f je funkcia, ktorú derivujeme, x je premenná, podľa ktorej derivujeme.

Zápis druhej derivácie:

$$\frac{d^2}{dx^2} \text{ resp. } \frac{d^2 f}{dx^2} \text{ alebo aj } \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Pozor: výraz df/dx nepredstavuje podiel a číslo 2 nepredstavuje druhú mocninu, ale naznačuje druhú deriváciu vo výraze $d^2 f/dx^2$.

Newtonova interpretácia sa obvykle využíva vo fyzike, pre derivovanie podľa premennej vyjadrujúcej čas (a teda aj v kinematike a dynamike). Používa bodku nad premennou, napr.:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Záver:

Derivácia funkcie je vlastne rozdiel jej funkčných hodnôt v rozsahu určenej premennej. Graficky predstavuje smernicu krivky v danom bode.

Derivácia v spojitom priestore je analógiou diferencie medzi susednými hodnotami v diskretnom priestore.

Čítajte viac: <http://kamas.blog.sme.sk/c/7969/Integral-derivacia-naucili-vas-ako-sa-to-pocita-ale-neviete-co-to-je.html#ixzz1ZFOnXUMr>

Integrovanie funkcie

Je možné z derivovanej funkcie nejakým spôsobom získať pôvodnú (tzv. primitívnu) funkciu ??? Áno, opačnou operáciou k derivácii je integrácia (angl. texty používajú tiež termín antiderivácia).

Pojem integrálu je zovšeobecnením pojmov ako plocha, objem, príp. súčet či suma.

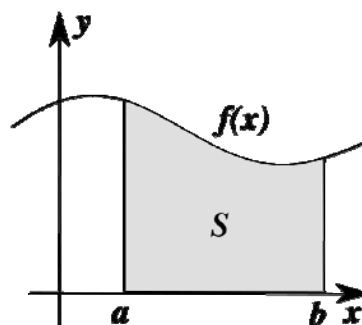
Integrálny počet je jeden z najužitočnejších analytických nástrojov. Má nezastupiteľné využitie v aplikovanej matematike (napr. fyzika, stavebné inžinierstvo, poisťňa a finančná matematika, štatistika iné).

Geometrická interpretácia integrálu

Určitý integrál nezápornej funkcie $f(x)$ medzi určitými dvoma bodmi a , b je rovný ploche obrazca ohraničeného priamkami $x = a$, $x = b$, osou x a krivkou definovanou funkciou f .

Matematicky vyjadrené: takýto integrál je rovný miere množiny S definovanej ako

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



Integrál označujeme pretiahnutým písmenom $\int$ (tzv. dlhé s; z lat. *summa*, *summa*). Integrál opísaný vyššie by sme zapísali ako $\int_a^b f(x) dx$,

kde znak $\int$ označuje integrovanie, a a b sú integračné medze (len pri určitom integrále), dx označuje premennú, podľa ktorej sa integruje (pôvodne označovalo infinitezimálnu hodnotu, ale dnes slúži len ako rýdzo symbolické označenie bez ďalšieho významu).

Fyzikálna interpretácia integrálu

Nech v každom bode súradnicovej osi x pôsobí sila $\mathbf{F}$, ktorá má smer a orientáciu ako os x . Veľkosť sily F nech závisí od súradnice x jej pôsobiska, pričom táto závislosť je vyjadrená funkciou f , platí teda, že $\mathbf{F} = f(\mathbf{x})$. Potom integrál takto definovanej funkcie $\int_a^b f(x) dx$ určuje **prácu vykonanú touto silou**, ak sa hmotný objekt (teleso) jej účinkom premiestni z polohy $x=a$ do polohy $x=b$, tzn. prejde dráhu $\langle a, b \rangle$.

Hľadanie neurčitých integrálov

Hľadanie neurčitého integrálu (primitívnej funkcie) je opačný - inverzný proces, k určovaniu derivácie. Pri výpočte sa vychádza zo známych integrálov (tzv. tabuľkové integrály) a využíva sa lineárnosť, metóda per partes alebo substitučná metóda.

Základné vzorce pre tabuľkové integrály

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pre $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pre $0 < a \neq 1$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x dx = \sin x + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$ alebo $-\operatorname{arccotg} x + c$
- 9.1. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + c$ pre $a \neq 0$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + c$ alebo $-\operatorname{arccos} x + c$
- 10.1. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \left(\frac{x}{a} \right) + c$ pre $a \neq 0$
11. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

Tabuľka je základom pre výpočet neurčitých integrálov všetkých ostatných funkcií.

Záver:

V diskretnom priestore používame funkciu Suma. Ide v podstate o súčet jednotlivých diskretných hodnôt (napr. suma denného zárobku nám dáva mesačný zárobok, ktorý počítame po dňoch a teda vieme, že musíme sčítať cca. 20 čísel).

Funkcia suma je v spojitom priestore nepoužiteľná, pretože by sme museli sčítať nekonečné množstvo čísiel. To je práve účelom a úlohou integrálu.

Integrál v spojitom priestore je analógiou sumy v diskretnom priestore.

Čítajte viac: <http://kamas.blog.sme.sk/c/7969/Integral-derivacia-naucili-vas-ako-sa-to-pocita-ale-neviete-co-to-je.html#ixzz1ZFNx8FuH>

Fyzika:

I. Základné fyzikálne veličiny

Fyzikálne veličiny a jednotky					
z á k l a d n é					
Názov veličiny	Značka	Jednotka	Názov veličiny	Značka	Jednotka
Dĺžka	<i>l, d</i>	m [meter]	Termodynamická	<i>T</i>	K [kelvin]
Hmotnosť	<i>m</i>	kg [kilogram]	teplota		
Čas	<i>t</i>	s [sekunda]	Látkové množstvo	<i>n</i>	mol [mol]
Elektrický prúd	<i>I</i>	A [ampér]	Svietivosť	<i>I</i>	cd [kandela]
o d v o d e n é					
Názov veličiny	Značka	Jednotka	Vzťah pre určenie veličiny		
Obsah	<i>S</i>	m ² [meter štvorcový]	<i>S</i> = <i>a</i> . <i>a</i> = <i>a</i> ² [obsah štvorca]		
Objem	<i>V</i>	m ³ [meter kubický]	<i>V</i> = <i>a</i> . <i>a</i> . <i>a</i> = <i>a</i> ³ [objem kocky]		
Hustota	<i>ρ</i>	kg/m ³ g/cm ³	<i>ρ</i> = $\frac{m}{V}$		
Dráha	<i>s</i>	m [meter]			
Rýchlosť	<i>v</i>	m/s	<i>v</i> = $\frac{s}{t}$ [pohyb rovnomerný]		
Zrýchlenie	<i>a</i>	m/s ²	<i>a</i> = $\frac{v-v_0}{t}$		
Sila	<i>F</i>	N [newton]	<i>F</i> = <i>m</i> . <i>a</i>		
Tiaž	<i>G</i>	N [newton]	<i>G</i> = <i>m</i> . <i>g</i> [<i>g</i> ≈9,81 m/s ²]		
Tlak	<i>p</i>	Pa [pascal]	<i>p</i> = $\frac{F}{S}$ Pascalov zákon		
Hydrostatický tlak	<i>p_h</i>	Pa [pascal]	<i>p_h</i> = <i>h</i> . <i>ρ</i> . <i>g</i>		
Atmosferický tlak	<i>p_a</i>	Pa [pascal]	<i>p_a</i> = $\frac{F_a}{S}$ [štandardný <i>p_a</i> =101 325 Pa]		
Tlaková sila	<i>F_t</i>	N [newton]	<i>F_t</i> = <i>p</i> . <i>S</i>		
Moment sily	<i>M</i>	N.m [newtonmeter]	<i>M</i> = <i>F</i> . <i>r</i> [<i>r</i> =rameno]		
Práca	<i>W</i>	J [joule]	<i>W</i> = <i>F</i> . <i>s</i>		
Výkon	<i>P</i>	W [watt]	<i>P</i> = $\frac{W}{t}$		
Teplo	<i>Q</i>	J [joule]	ΔQ = <i>m</i> . <i>c</i> .(<i>t</i> - <i>t₀</i>) [<i>c</i> =tep. kapacita]		
Polohová energia	<i>E_p</i>	J [joule]	<i>E_p</i> = <i>m</i> . <i>g</i> . <i>h</i>		
Pohybová energia	<i>E_k</i>	J [joule]	<i>E_k</i> = $\frac{1}{2}$ <i>m</i> . <i>v</i> ²		
Vnútorná energia	<i>U</i>	J [joule]			
Frekvencia	<i>f</i>	Hz [hertz]	<i>f</i> = $\frac{1}{T}$ [<i>T</i> =perióda]		
Vlnová dĺžka	<i>λ</i>	m [meter]	<i>λ</i> = $\frac{v}{f}$		
Elektrický odpor	<i>R</i>	Ω [ohm]	<i>R</i> = <i>ρ</i> . $\frac{l}{S}$ [<i>ρ</i> =rezistivita]		
Elektrická práca	<i>W</i>	J [joule]	<i>W</i> = <i>U</i> . <i>I</i> . <i>t</i>		
Výkon elektrického prúdu	<i>P</i>	W [watt]	<i>P</i> = <i>U</i> . <i>I</i>		
Elektrické napätie	<i>U</i>	V [volt]	<i>U</i> = $\frac{W}{Q}$ [<i>Q</i> =elektrický náboj]		

JEDNOTKY FYZIKÁLNYCH A TECHNICKÝCH VELIČÍN, NÁSOBNÉ A PODIELOVÉ JEDNOTKY, GRÉCKA ABECEDA

Podľa medzinárodnej sústavy jednotiek (Système International d'Unités) s medzinárodne prijatou značkou SI, sa meracie jednotky fyzikálnych a technických veličín rozdeľujú na 2 základné skupiny : **hlavné jednotky** a **vedľajšie jednotky**.

1. Hlavné jednotky - môžu byť tzv. *základné, doplnkové a odvodené*.

Veličina	Jednotka	
	názov	značka
Základné jednotky		
Dĺžka	meter	m
Hmotnosť	kilogram	kg
Čas	sekunda	s
Elektrický prúd	ampér	A
Termodynamická teplota	kelvin	K
Látkové množstvo	mol	mol
Svietivosť	Kandela	cd
Doplnkové jednotky		
Rovinný uhol	radián	rad
Priestorový uhol	steradián	sr

Veličina	Jednotka			Vzťah k jednotkám SI
	názov	značka	rozmer	
Ovodené jednotky				
Plošný obsah	štvorcový meter	A, S	m^2	m^2
Objem	kubický meter	V	m^3	m^3
Hustota	kilogram na kub.m.	ρ	$kg.m^{-3}$	$kg.m^{-3}$
Merný (špecifický) objem	kubický meter na kg	V	$m^3.kg^{-1}$	$m^3.kg^{-1}$
Sila, tiaž	newton	F, G, Q	N	$m.kg.s^{-2}$
Moment sily (dvojice síl)	newton meter	M	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Tlak, mechanické napätie	pascal	p, σ	$Pa=N.m^{-2}$	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Kmitočet (frekvencia)	hertz	f	Hz	$Hz=s^{-1}$
Rýchlosť	meter za sekundu	v, c	$m.s^{-1}$	$m.s^{-1}$
Zrýchlenie	meter za sek. na druhú	a, g	$m.s^{-2}$	$m.s^{-2}$
Uhlová rýchlosť	radián za sekundu	ω	$rad.s^{-1}$	$rad.s^{-1}$
Uhlové zrýchlenie	radián za sek. na druhú	ε, α	$rad.s^{-2}$	$rad.s^{-2}$
Energia (práca, teplo)	joule	A, W	J	$m^2.kg.s^{-2}$
Elektrické napätie	volt	V	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Výkon	watt	P	W	$m^2.kg.s^{-3}$

2. Vedľajšie jednotky

Veličina	Vedľajšia jednotka		Vzťah k jednotkám SI
	názov	značka	
Čas	minúta hodina deň	min h d	min = 60 s h = 60 min = 3600 s d = 24 h = 86400 s
Uhol (rovinný)	stupeň minúta sekunda grad (gon)	1° 1' 1'' g (gon)	1° = $\pi/180$ rad (radián) 1' = 1/60° = $\pi/10800$ rad 1'' = 1/60' = $\pi/648000$ rad 1g = $\pi/200$ rad
Objem	liter	l	l = 1 dm ³ = 10 ⁻³ m ³
Hmotnosť	tona	t	t = 10 ³ kg
Teplota	Celsiov stupeň	°C	T = t + 273,15 K
Plošný obsah	hektár	ha	ha = 10000 m ² = 10 ⁴ m ²

3. Násobné jednotky a podielové jednotky

Predpona	kilo	mega	giga	tera	peta	exa
Značka	k	M	G	T	P	E
Význam	10 ³	10 ⁶	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹⁵	10 ¹⁸

Predpona	mili	mikro	nano	piko	femto	atto
Značka	m	μ	n	p	f	a
Význam	10 ⁻³	10 ⁻⁶	10 ⁻⁹	10 ⁻¹²	10 ⁻¹⁵	10 ⁻¹⁸

4. Znaky gréckej abecedy

Písmeno	alfa	beta	gama	delta	epsilon	zéta
Veľké	A	B	Γ	Δ	E	Z
Malé	α	β	γ	δ	ε	ζ

Písmeno	éta	théta	iota	kappa	lambda	mi
Veľké	H	Θ	I	K	Λ	M
Malé	η	υ	ι	κ	λ	μ

Písmeno	ný	ksí	omikron	pí	ro	sigma
Veľké	N	Ξ	O	Π	P	Σ
Malé	ν	ξ	ο	π	ρ	σ

Písmeno	tau	ypsilon	psí	omega		
Veľké	T	Υ	Ψ	Ω		
Malé	τ	υ	ψ	ω		

II. Základné zákony technickej mechaniky

Základ Newtonovskej mechaniky tvoria tzv. **pohybové zákony** a **gravitačný zákon**, ktoré sú zovšeobecnením množstva empirických poznatkov a z nich vyplývajúcich dôsledkov.

1. Newtonov pohybový zákon - Zákon zotrvačnosti

Každé teleso zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútené, pôsobením vonkajších síl, tento svoj pohybový stav zmeniť.

Tento zákon platí pre hmotný bod, resp. hmotný stred telesa (ťažisko), nakoľko sa v ňom nehovorí nič o rotácii telesa. Zákon zotrvačnosti platí vzhľadom na pokoj, resp. pohyb, určený v inerciálnej súradnicovej sústave.

2. Newtonov pohybový zákon - Zákon sily

Matematické vyjadrenie zákona sily, vo všeobecnosti definovaného ako „**Časová zmena hybnosti telesa je priamoúmerná pôsobiacej sile a má s ňou rovnaký smer**“ je

$$\frac{dH}{dt} = F,$$

kde H je hybnosť telesa (resp. hmotného bodu).

V prípade skúmania pohybu objektov, ktoré sa skladajú z častíc (atómov a molekúl), ktorých hmotnosť nie je premenná veličina ($m = \text{konšt.}$), t.j. nezávisí od rýchlosti pohybujúceho sa objektu (relativistický prístup), možno zákon sily prepísať do tvaru

$$F = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a,$$

kde za silu F považujeme výslednú silu pôsobiacu na dané teleso. To možno slovne vyjadriť:

Sila F , pôsobiaca na hmotný bod, je priamoúmerná súčinu hmotnosti m pohybujúceho sa telesa a zrýchlenia telesa a , ktoré táto sila telesu udeľuje.

Ak na teleso nepôsobí žiadna sila, alebo výslednica pôsobiacich síl je nulová, teleso zotrváva v stave pokoja, alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Dôsledok: ***pri pôsobení rovnako veľkých síl, telesá nadobudnú tým menšie zrýchlenie, čím sú väčšie ich hmotnosti.***

3. Newtonov pohybový zákon - Zákon akcie a reakcie

Sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá, majú vždy rovnakú veľkosť a opačný smer.

Sila F_{12} , ktorou pôsobí jedno teleso na druhé, sa nazýva **akcia** a sila F_{21} , ktorou pôsobí druhé teleso na prvé, sa potom nazýva **reakcia**. Podľa tohto zákona v každom okamihu platí

$$F_{12} = - F_{21}.$$

Tretí Newtonov zákon tiež sa niekedy nazýva *zákon vzájomného pôsobenia* a možno ho formulovať aj ako: **Každá akcia vyvoláva rovnako veľkú reakciu opačného smeru.**

4. Newtonov gravitačný zákon – Gravitačný zákon

Newtonov gravitačný zákon sa dnes zapisuje v tvare $F_G = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$, kde m_1 a m_2 sú hmotnosti telies medzi ktorými silu počítame, R je ich vzájomná vzdialenosť a κ je gravitačná konštanta ($\kappa = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$).

Z uvedeného je možné tvrdiť, že **gravitácia** je príťažlivá sila pôsobiaca medzi hmotnými telesami, ktorou sa telesá navzájom priťahujú. Je priamo úmerná súčinu hmotností telies a nepriamo úmerná štvorcu vzdialenosti medzi telesami. Ak uvedený vzťah uvažujeme pre prípad vzájomného priťahovania sa telies, ktorých rozmery sú rádovo odlišné (napr. teleso a Zem) a teda do Newtonovho vzťahu dosadíme za hmotnosť $m_1 = m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (hmotnosť Zeme) a za vzdialenosť jej polomer $R = R_Z = 6378 \text{ km}$ dostaneme vzťah pre silu pôsobiacu na teleso s hmotnosťou m – nazývaná tiež **tiažová sila F_g** – definovaná v tvare

$$F_G = m \cdot \frac{\kappa \cdot m_Z}{R_Z^2} = m \cdot g .$$

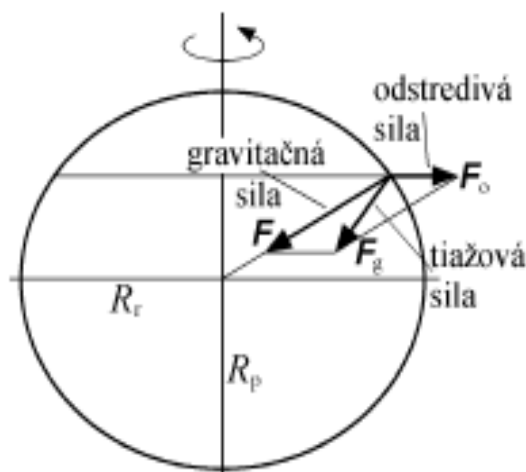
Je to sila gravitačného pôvodu, ktorou pôsobí Zem na voľne padajúce teleso s hmotnosťou m a udeľuje mu zrýchlenie voľného pádu g .

Zlomok v uvedenom vzťahu sme označili g a nazývame ho **gravitačné zrýchlenie**. Gravitačné zrýchlenie pri povrchu Zeme v našich zemepisných šírkach má hodnotu približne $9,81 \text{ m/s}^2$. (presne $9,80665 \text{ m/s}^2$). Závisí od nadmorskej výšky a zemskej šírky. Na rovníku je nižšie než na pólach. Na rovníku predstavuje hodnota gravitačného zrýchlenia približne $9,78 \text{ m/s}^2$ a na pólach $9,83 \text{ m/s}^2$. Tieto rozdiely spôsobuje predovšetkým odstredivá sila spôsobená rotáciou Zeme okolo svojej osi.

Tiaž G [N] je tlaková sila, ktorou teleso v gravitačnom poli pôsobí na podložku alebo ťahová sila, ktorou teleso v gravitačnom poli pôsobí na záves. Tiaž na rozdiel od tiažovej sily F_g nepôsobí na teleso. Je to sila, ktorou zavesené teleso pôsobí na záves, resp. položené teleso pôsobí na podložku.

Tiaž a tiažová sila majú rovnaký smer, ale pôsobia v rôznych pôsobiskách. Potom vzťah pre tiaž môžeme vyjadriť podobne ako tiažovú silu, v tvare $G = m \cdot g$.

Rozdiel medzi pojmami gravitácia a tiaž súvisí s otáčaním Zeme. Zem je rotujúca vzťažná sústava, v ktorej pôsobia sily. Jednou z nich je **odstredivá sila**, vyplývajúca z rotácie Zeme. Ak zložíme gravitačnú silu F smerujúcu do stredu Zeme s odstredivou silou F_o , dostaneme výslednicu F_g , ktorú nazývame **tiažová sila**. Z konštrukcie rovnobežníka síl na obrázku vyplýva, že tiažová sila nepôsobí smerom do stredu Zeme, ale sa od tohto smeru mierne odchyľuje.



Tiažové zrýchlenie g je zrýchlenie telies na Zemi, ktoré je výsledkom zloženia gravitačného zrýchlenia a odstredivého zrýchlenia, ktoré vzniká ako dôsledok otáčania Zeme. Jednotkou tiažového zrýchlenia je m/s^2 .

Odchýlka medzi smerom tiažovej sily a smerom do stredu Zeme je však veľmi malá. Preto pri riešení väčšiny úloh je zanedbateľný aj rozdiel medzi veľkosťami gravitačnej a tiažovej sily. Pri riešení úloh v statike (s ohľadom na veľkosť vonkajších síl, rozmery a hmotnosti riešených sústav telies) sa pri **zamieňaní pojmov tiažová sila a gravitačná sila prakticky nedopúšťame významnejšej chyby**.

III. Základné a odvodené veličiny v mechanike:

V mechanike sú za základné veličiny obvykle považované:

1. **DĹŽKA** - vyjadrujúca základné geometrické vlastnosti materiálneho sveta a rozloženie konkrétnych i abstraktných materiálnych objektov.

Vzdialenosť medzi dvoma bodmi je dĺžka priamej čiary vedenej medzi danými bodmi (úsečka). **Rozmer** alebo **dimenzia** je jedna z hodnôt, ktorou sa udáva miera niečoho v ploche alebo v priestore. Rozmer je jedna zo základných vlastností priestoru. Základnou jednotkou dĺžky v medzinárodnej sústave jednotiek SI je **1 meter [m]**. Je definovaný ako dĺžka dráhy, ktorú prejde svetlo vo vákuu za $1/299\,792\,458$ s.

2. **ČAS** - vyjadrujúci následnosť udalostí a umožňujúci vyjadrenie zmien a pohybov).

Čas [s] (značka t z angl. *time*, lat. *tempus*) je v súčasnosti definovaný ako jedna z niekoľkých fundamentálnych kvantít (kvantít, ktoré nemožno definovať pomocou iných kvantít, pretože v súčasnosti nepoznáme nič fundamentálnejšie). Preto, podobne ako v prípade iných fundamentálnych kvantít (ako priestor a hmota), je čas definovaný meraním.

Čas ako fyzikálna veličina vyjadruje interval medzi dvoma udalosťami alebo dobu trvania deja. V súčasnosti je ako základná jednotka času definovaná - tzv. *konvenčná sekunda* (s) - definovaná ako 9 192 631 770 oscilácií špecifikovaného prechodu v atóme Cs-133.

3. HMOTNOSŤ - vyjadrujúca zotrvačné vlastnosti hmotných objektov a charakterizujúca jej schopnosť gravitačne silovo pôsobiť.

Hmotnosť je vlastnosť resp. miera vlastnosti všetkých objektov látkovej povahy prejavujúca sa jednak v tom, že kladú odpor voči zmenám svojho pohybového stavu (teda v zotrvačnosti) a jednak v tom, že na seba vzájomne pôsobia (teda v gravitácii). Hmotnosť je teda kvantitatívnou mierou:

- **zotrvačnosti** (zotrvačných vlastností) telesa.
- **gravitačných vlastností** telies, napr. stojace auto pôsobí na vozovku väčšou silou ako človek stojaci vedľa auta, pretože majú rôznu hmotnosť (rôzne gravitačné vlastnosti) a majú teda aj rôznu schopnosť pôsobiť silou iné telesá, resp. byť nimi priťahované.

Je to skalárna veličina a jej základnou jednotkou je jeden kilogram [kg].

Odvedené veličiny v mechanike:

4. SILA – definovaná svojim účinkom ako časová zmena hybnosti:

$$F = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

Jednotkou sily je 1 **newton** [N]. Je to sila, ktorá hmotnosti 1 kg udeľuje zrýchlenie 1 m/s^2 . V praxi sa používajú násobky tejto jednotky: MN, kN, mN, μN . Medzi staršie jednotky sily patrili: kilopond kp ($1 \text{ kp} \approx 9,81 \text{ N}$) a dyn ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$).

5. STATICKÝ MOMENT SILY - je určený súčinom dĺžky ramena a sily, tzn. kolmej vzdialenosti sily od osi otáčania podľa vzťahu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Moment sily je rovnako ako sila samotná vektorová veličina. Jednotkou momentu sily je **newtonmeter** [N. m alebo Nm].

