



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Anežka Jurčíková, Martin Krejsa,
Lenka Lausová, Vladimíra Michalcová

STAVEBNÍ STATIKA

Vzdělávací pomůcka



Ostrava 2013

Předmluva

Učební pomůcka byla vytvořena v rámci projektu *Inovace studijního programu Stavební inženýrství*, který zahrnuje tvorbu výukových podkladů. Výukové materiály, jejichž přípravu garantuje Ing. Vladimíra Michalcová, Ph.D., by měly sloužit jako doplňující prvek výuky předmětu Stavební statika. Podklady jsou určeny zejména pro studenty bakalářského studia studijního programu Stavební inženýrství (B3607).

V Ostrave 30. 9. 2013

Autoři

Obsah

1	Úvod do předmětu Stavební statika	1
1.1	Nosná konstrukce	1
1.2	Kinematika prutové nosné konstrukce	2
1.2.1	Pohybové možnosti volných hmotných objektů	4
1.2.2	Řešené úlohy v oboru kinematiky	5
1.2.3	Kinematika prutových soustav	6
1.2.4	Příklad na posouzení kinematické určitosti rovinné kloubové prutové soustavy	7
1.3	Akce, reakce, interakce	8
2	Přímková a rovinná soustava sil	10
2.1	Přímková soustava sil	10
2.1.1	Příklad - výslednice přímkové soustavy sil	10
2.1.2	Příklad - rovnováha přímkové soustavy sil	11
2.2	Svazek sil	12
2.2.1	Příklad - výslednice soustavy sil se společným působištem	13
2.2.2	Příklad - rovnováha soustavy sil se společným působištem	15
2.3	Statický moment síly	16
2.4	Silová dvojice	17
2.5	Obecná soustava sil	17
2.5.1	Příklad - výslednice obecné soustavy sil	18
2.5.2	Příklad - soustava rovnoběžných sil	21
2.5.3	Příklad - určení ramene výslednice soustavy rovnoběžných sil	23
3	Výpočet reakcí silově zatíženého prutu	26
3.1	Rovinný nosník a jeho podepření	26
3.2	Výpočet reakcí vazeb.	27
3.3	Příklady na výpočet reakcí	28
3.3.1	Prostý nosník - bodové zatížení	28
3.3.2	Nosník s převislými konci - bodové zatížení	29
3.3.3	Konzola	29
3.3.4	Prostý nosník - spojitě zatížení rovnoměrné	30
3.3.5	Prostý nosník - spojitě zatížení trojúhelníkové	31
3.3.6	Šikmý nosník - zatížení kolmé ke střednici prutu	31
3.3.7	Šikmý nosník - zatížení svislé	33
3.3.8	Lomený nosník	34
3.3.9	Oblouk 1	35

3.3.10	Oblouk 2	35
3.3.11	Oblouk 3	36
3.3.12	Oblouk 4	37
3.3.13	Oblouk 5	38
4	Vnitřní síly přímého vodorovného nosníku	39
4.1	Analýza vnitřních sil na rovinných nosnících	39
4.1.1	Schwedlerovy vztahy	40
4.1.2	Příklad - bodové zatížení	43
4.1.3	Příklad - nosník s převislým koncem	44
4.1.4	Příklad - rovnoměrné spojitě zatížení	45
4.1.5	Příklad - nerovnoměrné spojitě zatížení	46
5	Vnitřní síly přímého šikmého nosníku	47
5.1	Zatížení kolmé ke střednici prutu	48
5.1.1	Šikmý prut zatížený spojitým zatížením kolmým ke střednici	48
5.1.2	Šikmý prut zatížený silou kolmou ke střednici	53
5.2	Zatížení svislé, působení na šikmou délku prutu	55
5.2.1	Šikmý prut zatížený spojitým zatížením zadaným na délku prutu	55
5.2.2	Šikmý prut zatížený svislou silou	59
5.3	Spojitě zatížení zadáno na půdorysný průmět	61
5.3.1	Šikmý prut zatížený spojitým zatížením zadaným na průmět	61
5.4	Další řešené příklady	64
5.4.1	Šikmý prut - Příklad 1	64
5.4.2	Šikmý prut - Příklad 2	65
5.4.3	Šikmý prut - Příklad 3	66
5.4.4	Šikmý prut - Příklad 4	67
6	Vnitřní síly rovinně lomeného nosníku, pravoúhlé zalomení	68
6.1	Charakteristika rovinného lomeného nosníku	68
6.2	Výpočet a vykreslení vnitřních sil	68
6.3	Kontrola rovnováhy ve styčniku	69
6.4	Řešené příklady	71
6.4.1	Příklad - rám 1	71
6.4.2	Příklad - rám 2	76
6.4.3	Příklad - rám 3	78
6.4.4	Příklad - rám 4	80
6.4.5	Příklad - rám 5	82
7	Vnitřní síly rovinně lomeného nosníku se šikmými pruty	84
7.1	Příklad - šikmý rám 1	84
7.1.1	Řešení - šikmý rám 1	84
7.2	Příklad - šikmý rám 2	88
7.2.1	Řešení - šikmý rám 2	88
7.3	Příklad - šikmý rám 3	91
7.3.1	Řešení - šikmý rám 3	91
7.4	Otázky	94

8	Vnitřní síly rovinně zakřiveného prutu	95
8.1	Příklad - oblouk 1	96
8.1.1	Řešení - oblouk 1	97
8.2	Příklad - oblouk 2	103
8.2.1	Řešení - oblouk 2	103
8.3	Příklad - oblouk 3	109
8.3.1	Řešení - oblouk 3	109
8.4	Příklad - oblouk 4	119
8.5	Příklad - oblouk 5	122
8.5.1	Řešení - oblouk 5	122
8.6	Příklad - oblouk 6	124
8.6.1	Řešení - oblouk 6	124
8.7	Příklad - oblouk 7	128
8.7.1	Řešení - oblouk 7	128
9	Rovinné nosníkové soustavy : Gerberův nosník	131
9.1	Příklad 1	131
9.1.1	Zatížení	132
9.1.2	Výpočet interakcí a reakcí	132
9.1.3	Výpočet vnitřních sil	133
9.2	Příklad 2	134
9.2.1	Výpočet interakcí a reakcí	135
9.2.2	Výpočet vnitřních sil	135
9.3	Příklad 3	136
9.3.1	Výsledné hodnoty reakcí a průběhy vnitřních sil	137
9.4	Příklad 4	138
9.4.1	Výpočet interakcí a reakcí	138
9.4.2	Výsledné hodnoty reakcí a průběhy vnitřních sil	140
10	Rovinné nosníkové soustavy: trojkloubový nosník bez táhla a s táhlem	142
10.1	Trojkloubový rám	142
10.2	Příklad 1	143
10.2.1	Výpočet reakcí	143
10.2.2	Průběhy vnitřních sil	144
10.3	Trojkloubový rám s táhlem	145
10.4	Příklad 2	146
10.4.1	Výpočet reakcí	147
10.4.2	Výpočet síly v táhle	147
10.4.3	Průběhy vnitřních sil	147
11	Rovinné nosníkové soustavy : Příhradový nosník	150
11.1	Příklad - příhradová konstrukce 1	150
11.2	Příklad - příhradová konstrukce 2	153
11.3	Příklad - příhradová konstrukce 3	158
11.4	Příklad - příhradová konstrukce 4	159

12 Průřezové charakteristiky	160
12.1 Příklad - složený průřez 1	160
12.1.1 Plocha složeného průřezu [m^2]	160
12.1.2 Statický moment plochy [m^3]	161
12.1.3 Poloha těžiště složeného průřezu [m]	163
12.1.4 Momenty setrvačnosti (MS) základních průřezů [m^4]	164
12.1.5 Momenty setrvačnosti průřezů k posunutým osám [m^4]	165
12.1.6 Centrální momenty setrvačnosti složeného průřezu [m^4]	165
12.1.7 Deviační moment [m^4]	166
12.1.8 Hlavní centrální momenty setrvačnosti průřezu [m^4]	168
12.1.9 Natočení hlavních centrálních os	168
12.1.10 Invariant součtu momentů setrvačnosti	169
12.1.11 Polární moment setrvačnosti [m^4]	170
12.1.12 Rekapitulace základních pojmů	171
12.2 Příklad - složený průřez 2	172
12.3 Příklad - složený průřez 3	173
12.4 Příklad - složený průřez 4	174
12.5 Příklad - složený průřez 5	176
12.6 Příklad - složený průřez 6	178
12.7 Příklad - složený průřez 7	179
13 Otázky k dané problematice	180

Kapitola 1

Úvod do předmětu Stavební statika

Předmět Stavební statika je určen pro studenty prvního ročníku bakalářského studia oborů Stavební inženýrství a Architektura a stavitelství. Je zaměřen na řešení prutových nosných konstrukcí, u nichž se předpokládá, že jsou **nedeformovatelné** (dokonale tuhé). Při výpočtech se tedy neuvažuje, že se účinkem zatížení změní tvar nosného systému.

Nosné konstrukce vyžadují splnění některých důležitých předpokladů. Prvním z nich je skutečnost, že konstrukce musí zůstat po účinku zatížení **nehybná**, což souvisí s vhodným podepřením nosné konstrukce, resp. se správným spojením jednotlivých částí nosného systému. Splnění tohoto předpokladu zkoumá obor nazývaný kinematika, o kterém je v tomto učebním textu pojednáno v kapitole 1.2.

Další důležitá vlastnost každé nosné konstrukce je skutečnost, že nosný systém musí být **v rovnováze**. Znamená to, že účinky zatížení vyvolají v nosném systému rovnovážné síly. K jejich určení slouží **podmínky rovnováhy**, které jsou v tomto textu vysvětleny nejprve na silových soustavách v kapitole 2. Další text pak obsahuje statické řešení různých typů prutových nosných konstrukcí na základě příslušných podmínek rovnováhy. V předmětu Stavební statika se řeší výhradně **konstrukce staticky určité**, což znamená, že pro určení veškerých statických veličin u těchto nosných systémů postačí pouze podmínky rovnováhy.

1.1 Nosná konstrukce

Nosná konstrukce je tvořena z jedné nebo více částí nosného systému - z tzv. konstrukčních prvků. Tato tělesa mohou být rozdělena podle svého tvaru na:

- pruty (převládá jeden rozměr - délka, viz např. obr. 1.1),
- plošné prvky (převládají dva rozměry, třetím je tloušťka, viz např. 1.2 nebo 1.3),
- masívní prvky (všechny tři rozměry jsou z hlediska své velikosti srovnatelné).

Ve výpočtech lze rovněž využít i tzv. hmotný bod, což je teoretický případ nosného prvku, jehož rozměry jsou vzhledem k ostatním částem nosného systému natolik malé, že je lze považovat za nekonečně malé.

V tomto učebním textu je výklad soustředěn pouze na prutové konstrukce, tedy nosné systémy, které jsou tvořeny jedním nebo více pruty (pak se jedná o tzv. nosníkovou soustavu). V některých příkladech může nosníková soustava obsahovat i hmotné body. Tyto nosné prvky budou v rámci tohoto učebního textu umístěny do svislé, případně vodorovné roviny. Takto definované úlohy se pak nazývají **rovinné**.



Obrázek 1.1: Pohled na nosný systém, tvořený soustavou prutových prvků



Obrázek 1.2: Nosný systém, který obsahuje stropní desku - plošný konstrukční prvek

1.2 Kinematika prutové nosné konstrukce

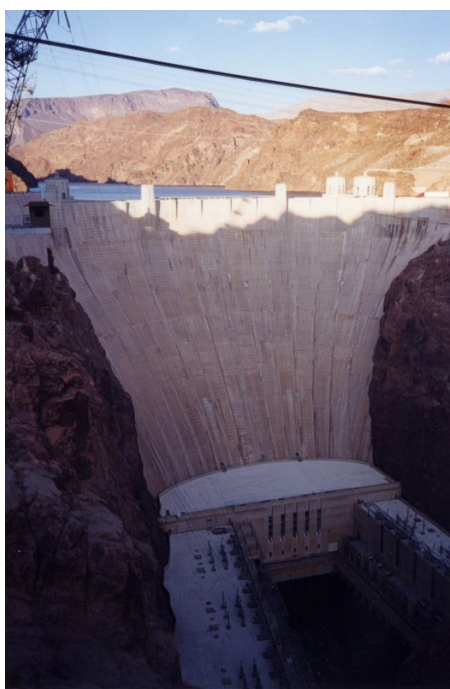
Kinematika je obor mechaniky pevných těles, který se zabývá studiem možností pohybu dokonale tuhých těles a jejich soustav čistě z geometrického hlediska.

Nosné stavební konstrukce musí být **dokonale nehybné**. Toho se dosáhne vhodným **podepřením** a u soustav vhodným **spojením** jednotlivých těles soustavy. Podepřením se rozumí připojení nosné konstrukce k dokonale nehybné **podporové konstrukci**, která může být tvořena základovou konstrukcí, mostním pilířem nebo sousedním objektem.

Ve výpočtech se uvažuje s tzv. **idealizací** podepření, které může tvořit:



Obrázek 1.3: Nosný systém, tvořený prutovými prvky a tzv. ztužující stěnou - plošným konstrukčním prvkem



Obrázek 1.4: Betonová přehrada - masívní konstrukční systém

1. **vnější vazba:** brání absolutnímu posunu nebo pootočení podepřeného tělesa (viz např. obr. 1.5),
2. **vnitřní vazby:** brání vzájemnému posunu nebo pootočení spojených těles (viz např. obr. 1.6).



Obrázek 1.5: Vnější vazba - vetknutí: tento typ podepření brání posunutí i pootočení konstrukce.



Obrázek 1.6: Vnitřní vazba - momentový kloub: tento typ podepření vzájemnému posunutí dvou částí mostní konstrukce.

1.2.1 Pohybové možnosti volných hmotných objektů

U hmotných objektů, které se v oboru kinematiky vyšetřují, se stanovuje tzv. **stupeň volnosti** n_v . Tato veličina stanovuje počet **pravoúhlých složek posunutí** (*translací*) nebo **pootočení** (*rotací*), které zkoumaný volný hmotný objekt může vykonat.

Následující výčet uvádí různé typy hmotných objektů v rovině a prostoru s příslušnými stupni volnosti:

- **Volný hmotný bod v rovině:** $n_v = 2$. Objekt je jednoznačně určen dvojicí souřadnic $[x, y]$, v rovině může nabývat celkem ∞^2 různých poloh.
- **Volný hmotný bod v prostoru:** $n_v = 3$. Objekt je jednoznačně určen trojicí souřadnic $[x, y, z]$, v prostoru může nabývat celkem ∞^3 různých poloh.
- **Volný tuhý prut (volná tuhá deska) v rovině:** $n_v = 3$. Objekt je jednoznačně určen dvojicí souřadnic $[x, y]$ a svým natočením α , v rovině může nabývat celkem ∞^3 různých poloh.
- **Volné tuhé těleso v prostoru:** $n_v = 6$. Objekt je jednoznačně určen trojicí souřadnic $[x, y, z]$ a trojicí natočení k osám souřadnicového systému α, β, γ , v prostoru může nabývat celkem ∞^6 různých poloh.

Dané stupně volnosti hmotným objektům odebírají vnější či vnitřní vazby, které znemožňují v místě podepření posuny či pootočení hmotného objektu. Podle počtu odebraných stupňů volnosti se pak vazby mohou označovat jako n -násobné podle počtu odebraných stupňů volnosti, kde $n = 1, 2, \dots, 6$.

Pro podepření tuhého prutu v rovinných úlohách lze rozlišit následující jednoduché vnější vazby:

- **Kyvný prut:** násobnost vazby = 1, je bráněno posunutí ve směru kyvného prutu, vzniká jedna silová reakce.
- **Posuvný kloub (posuvná vazba):** vše je identické s kyvným prutem, jedná se jen o odlišné vyjádření stejného typu vnější vazby.
- **Neposuvný (pevný) kloub:** násobnost vazby = 2, je bráněno 2 posunutím ve dvou na sebe kolmých směrech, vznikají dvě na sebe kolmé silové reakce.
- **Posuvné vetknutí:** násobnost vazby = 2, je bráněno pootočení a posunutí prutu ve směru kolmém k ose prutu, vzniká momentová reakce a silová reakce kolmá k ose prutu.
- **Dokonalé vetknutí:** násobnost vazby = 3, je bráněno pootočení a 2 na sebe kolmým posunutím, vzniká momentová reakce a dvě na sebe kolmé silové reakce.

1.2.2 Řešené úlohy v oboru kinematiky

V oboru stavební statiky lze v rámci kinematiky řešit následující úlohy:

1. určení nejmenšího nezbytně nutného počtu vnějších i vnitřních (u soustav) vazeb pro zajištění dokonalé nehybnosti konstrukce,
2. připojení těchto vazeb k tělesu (tělesům) konstrukce způsobem zajišťujícím dokonalou nehybnost. U této úlohy existuje nebezpečí nevhodného umístění vazeb do konstrukce (tzv. výjimečné případy podepření).

K pevnému podepření objektu je potřeba tolika vazeb v , aby zrušily všechny stupně volnosti n_v objektu. Z hlediska kinematiky pak rozlišujeme následující typy nosných konstrukcí:

1. **Kinematicky určené konstrukce:** $n_v = v$, konstrukce je podepřena nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb. Nehybnost konstrukce je tímto zajištěna. Kinematicky určené konstrukce se řeší v oboru stavební statiky.
2. **Kinematicky přeuročité konstrukce:** $n_v < v$, konstrukce je podepřena větším počtem správně umístěných vazeb. Nehybnost konstrukcí je zajištěna. Kinematicky přeuročité konstrukce nelze řešit jen s pomocí podmínek rovnováhy a s předpokladem dokonale tuhého tělesa, proto nelze provést statický výpočet v oboru stavební statiky, ale v předmětech Pružnost a plasticita nebo Statika stavebních konstrukcí.
3. **Kinematicky neurčené konstrukce:** $n_v > v$, konstrukce je podepřena nedostatečným počtem vazeb. Nehybnost konstrukce není nezajištěna, a proto nelze použít ve stavebnictví.

1.2.3 Kinematika prutových soustav

Většina nosných konstrukcí je složena z více hmotných objektů. Pokud se jedná o tzv. prutovou soustavu, vzájemné spojení prutů pak může být:

- **Monolitické (rámové) spojení:** spojení prutů provedeno svarem, nýtováním, šroubovým spojem, slepením, betonáží. Není umožněno vzájemné pootočení spojených prutů, takže se stále jedná o jeden hmotný objekt (viz např. obr. 1.7).
- **Kloubové spojení:** ke spojení prutů je použito (momentových) kloubů - vnitřních vazeb, které umožňují vzájemné pootočení spojených prutů. Vzniká tzv. kloubová prutová soustava (viz např. obr. 1.1).



Obrázek 1.7: Příklad monolitického (rámového, tuhého) spojení prutů - spojené konce se nemohou vzájemně posunout ani pootočit

Zajištění nehybnosti rovinné kloubové prutové soustavy pomocí vnějších i vnitřních vazeb je pak třeba věnovat zvláštní pozornost. Musí být splněna zejména následující podmínka:

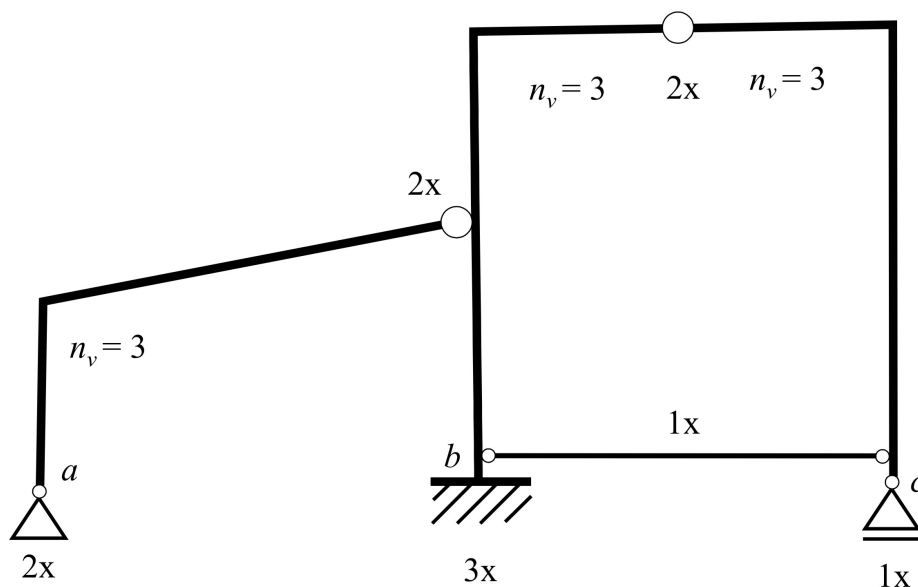
$$2 \cdot b + 3 \cdot p = a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + 2 \cdot \sum_{n=3,4,\dots} (n-1) \cdot k_n, \quad (1.1)$$

kde b je počet hmotných bodů, p je počet tuhých prutů, a_1 je počet jednonásobných vazeb, a_2 je počet dvojnásobných vazeb (také se zde připočítává počet vnitřních kloubů, které spojují 2 tuhé pruty), a_3 je počet trojnásobných vazeb a k_n je počet vnitřních kloubů, spojujících $n > 2$ tuhých prutů.

V rovnici 1.1 lze pak na levé straně získat celkový počet stupňů volnosti n_v rovinné kloubové prutové soustavy (a také počet statických podmínek rovnováhy), na straně pravé pak počet vnějších (externích) a vnitřních (interních) vazeb $v = v_e + v_i$.

1.2.4 Příklad na posouzení kinematické určitosti rovinné kloubové prutové soustavy

Posuďte kinematickou určitost rovinné kloubové prutové soustavy, která je schématicky zobrazena na obr. 1.8. (Pozn.: táhlo, spojující body b a c je nutno považovat za jednonásobnou vnitřní vazbu, která odebrává prutové soustavě 1 stupeň volnosti - body b a c by se již ve směru táhla posouvaly stejně.)



Obrázek 1.8: Schéma rovinné kloubové prutové soustavy z příkladu 1.2.4

Řešení:

Po uvolnění všech vnějších i vnitřních vazeb bude rovinná kloubová prutová soustava tvořena trojicí lomených nosníků. Každý z nich vykazuje tři stupně volnosti - dva na sebe kolmé posuny a pootočení. Do levé strany rovnice (1.1) je tedy nutno dosadit za $p = 3$ a celkový počet stupňů volnosti soustavy je pak $n_v = 3 \cdot p = 9$.

Vnější vazby jsou pak tvořeny jedním posuvným kloubem, jedním pevným kloubem a jedním dokonalým vetknutím. Do pravé strany rovnice (1.1) se pak dosadí za $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a $a_3 = 1$. Počet vnějších (externích) vazeb (a také neznámých reakcí v nich) je pak roven $v_e = a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 = 6$.

V konstrukci se nacházejí dva vnitřní momentové klouby, které spojují dva hmotné objekty - lomené nosníky. V takovém případě se do pravé strany rovnice (1.1) přičte k $a_2 = 2$, jelikož se jedná rovněž o dvojnásobnou vazbu. Táhlo je, jak již bylo řečeno, vnitřní vazba jednonásobná, tudíž se přičte k $a_1 = 1$. Počet vnitřních (interních) vazeb (a neznámých interakcí v nich) je tedy $v_i = a_1 + 2 \cdot a_2 = 5$.

Výsledná analýza pak spočívá v nerovnici $n_v = 9 < v_e + v_i = 6 + 5 = 11$. Jedná se tedy o kinematicky přeureditou rovinnou kloubovou prutovou soustavu, jejíž stupeň kinematické přeureditosti je roven $2 (v_e + v_i - n_v)$.

1.3 Akce, reakce, iterakce

Při dotyku dvou těles na sebe tělesa působí vzájemně silami o shodných absolutních velikostech a opačných smyslech. Tyto síly se nazývají **akce a reakce**. Přeneseno na nosný systém, podepřený vnějšími vazbami, případně obsahující více nosných prvků spojených vnitřními vazbami, lze definovat:

- **Akce:** silové účinky, které vzniknou působením nosné konstrukce na podpory (uplatní se při výpočtu podporové konstrukce).
- **Reakce:** silové účinky, které vzniknou v důsledku působení podporové konstrukce na nosný systém (uplatní se při výpočtu nosné konstrukce).
- **Interakce:** silové účinky, které vznikají ve vnitřních vazbách mezi spojenými nosnými prvky.

Závěrem této úvodní kapitoly krátká rekapitulace. Na obr. 1.9 je schématicky znázorněna soustava, tvořená tuhou deskou a hmotným bodem. Oba nosné prvky jsou spojeny dvojicí vnitřních vazeb. Celá soustava je pak podepřena pevným a posuvným kloubem. Nosný systém je tedy nehybný. Konstrukce je zatížena trojicí sil F_1 až F_3 , které působí vně konstrukce. Vzhledem ke skutečnosti, že ve statických výpočtech je zatížení předem známo (může být definováno např. normovými předpisy), jedná se o vstupní údaj výpočtu. Zatížení se proto může označovat také jako tzv. **primární vnější síly**.

Reakce ve vnějších vazbách $R_{a,x}$, $R_{a,z}$ a $R_{b,z}$ naopak představují neznámé dané úlohy. Jedná se o síly, které působí rovněž vně konstrukce, díky čemuž se mohou označovat také jako tzv. **sekundární vnější síly**.

Z hlediska počtu reakcí ve vnějších či interakcí ve vnitřních vazbách lze rozlišovat:

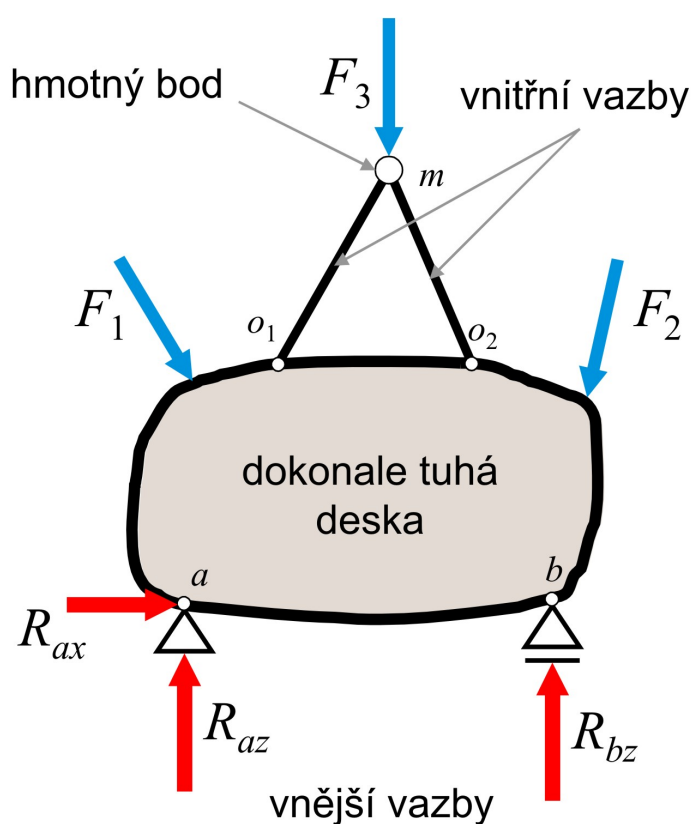
1. **Staticky určené konstrukce:** $n_v = v$, konstrukce je podepřena nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb, ve kterých vznikají reakce a interakce, jenž lze vyřešit jen s pomocí podmínek rovnováhy.
2. **Staticky neurčené konstrukce:** $n_v < v$, konstrukce je podepřena větším počtem správně umístěných vazeb. Reakce a interakce již nelze vyřešit jen s pomocí podmínek rovnováhy, nýbrž také např. s podmínkami deformačními. Statický výpočet proto nelze provést v

oboru stavební statiky, ale až v předmětech Pružnost a plasticita nebo Statika stavebních konstrukcí, které se mj. zabývají určením deformací nosného systému. (Např. rovinná kloubová prutová soustava z příkladu 1.2.4, jejíž stupeň statické neurčitosti je roven 2. Znamená to, že kromě podmínek rovnováhy je potřeba ve statickém výpočtu definovat ještě 2 podmínky deformační.)

3. **Staticky přeurčité konstrukce:** $n_v > v$, konstrukce je podepřena nedostatečným počtem vazeb, a proto nelze použít ve stavebnictví.

Pokud se jedná o kinematicky určitou konstrukci, k jejich určení postačí podmínky rovnováhy.

Primární i sekundární vnější síly tvoří **silovou soustavu** - v daném případě rovinnou. O řešení rovinných silových soustav pojednává následující kapitola 2.



Obrázek 1.9: Schématické znázornění - idealizace, nosného systému, tvořeného tuhous deskou a hmotným bodem.

Kapitola 2

Přímková a rovinná soustava sil

2.1 Přímková soustava sil

Soustava sil ležící ve společném paprsku se nazývá přímková soustava sil [2]. Působíště všech sil m_i lze posunout do společného bodu m , který je totožný s počátkem souřadnicového systému o a paprsek sil lze ztotožnit s osou x (obr. 2.1).

Výslednice R soustavy sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ má směr totožný se směrem společného paprsku sil a velikost rovnou algebraickému součtu sil podle vztahu

$$R = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (2.1)$$

kde síly $F_1, F_2, \dots, F_n$ mají kladnou hodnotu při souhlasném směru s osou x , zápornou při směru opačném. Výsledné kladné znaménko znamená souhlasný smysl výslednice R s osou x , záporné znaménko opačný.

Soustava sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ je v rovnováze, pokud algebraický součet všech sil soustavy je roven nule

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (2.2)$$

Pokud soustava sil není v rovnováze (výslednice soustavy $R \neq 0$), lze ji uvést do rovnováhy tzv. **rovnovážnou silou** $\bar{R} = -R$.

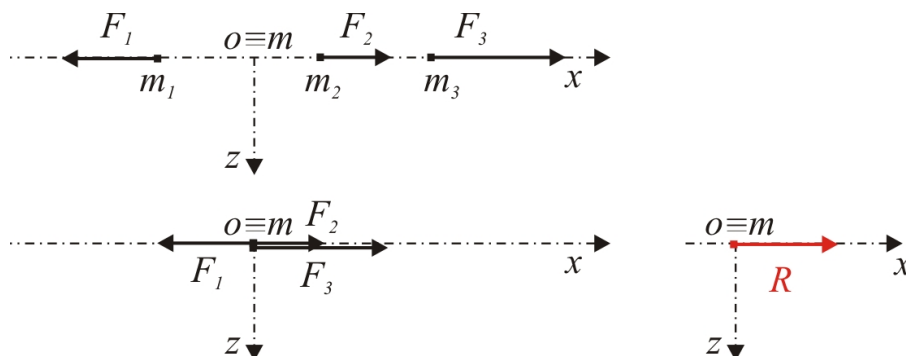
Rovnice (2.1) představuje **podmínku ekvivalence** a (2.2) **podmínku rovnováhy** soustavy sil působících ve společném paprsku. Pro přímkovou soustavu sil lze psát tedy jednu podmínku rovnováhy a jednu podmínku ekvivalence.

2.1.1 Příklad - výslednice přímkové soustavy sil

Určete výsledný účinek soustavy sil působících ve společném vodorovném paprsku (totožném s osou x viz obr. 2.1), je-li dáno: $F_1 = -20$ kN, $F_2 = 12$ kN a $F_3 = 30$ kN.

Řešení:

Pro určení výsledného účinku přímkové soustavy sil lze posunout působíště všech sil do počátku souřadného systému podle obrázku 2.1. Hodnota výslednice R je určena podle podmínky ekvi-



Obrázek 2.1: Výslednice přímkové soustavy sil z př. 2.1.1

valence (2.1)

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = -20 + 12 + 30 = 22 \text{ [kN]} . \quad (2.3)$$

Výslednice dané soustavy sil je $R = 22 \text{ kN}$, kladné znaménko odpovídá souhlasnému směru s osou x viz obr. 2.1.

2.1.2 Příklad - rovnováha přímkové soustavy sil

Zrušte účinek soustavy sil z předchozího příkladu 2.1.1 působících ve společném vodorovném paprsku podle obr. 2.1.

Řešení:

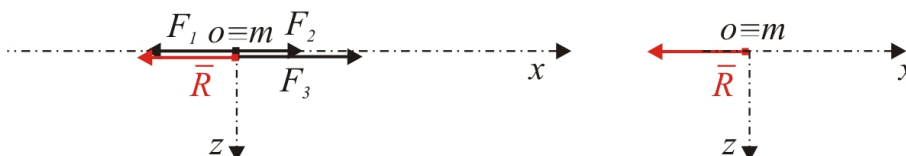
Rovnovážnou silou $\bar{R}$ je doplněna daná soustava sil tak, aby výsledný účinek byl nulový. Hodnotu $\bar{R}$ i znaménko (čili směr) lze určit z podmínky rovnováhy (2.2)

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 , \quad (2.4)$$

kde po dosazení lze získat

$$-20 + 12 + 30 + \bar{R} = 0 \Rightarrow \bar{R} = -22 \text{ [kN]} . \quad (2.5)$$

Hodnota rovnovážné síly je $\bar{R} = -22 \text{ kN}$, záporné znaménko udává směr proti ose x viz obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Rovnovážná soustava sil z př. 2.1.2

Poznámka:

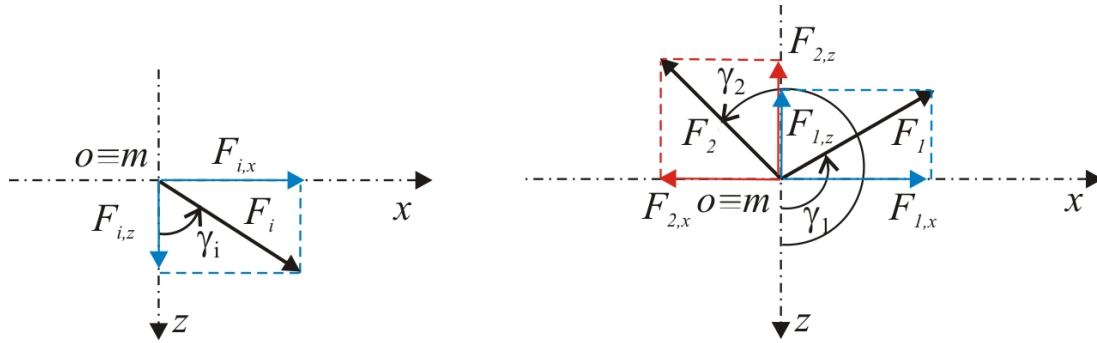
Při srovnání výslednice R a rovnovážné síly $\bar{R}$ je zřejmé, že výslednice i rovnovážná síla mají stejnou velikost a jsou opačně orientované.

2.2 Svazek sil

Rovinná soustava sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ se společným působištěm se nazývá **svazek sil**. Pro výsledné řešení takové soustavy sil je zapotřebí každou sílu dané soustavy rozložit do dvou složek F_{ix} a F_{iz} působících v souřadnicových osách x a z (obr. 2.3). Průměty sil mají velikost

$$F_{ix} = F_i \cdot \sin \gamma_i, \quad F_{iz} = F_i \cdot \cos \gamma_i, \quad (2.6)$$

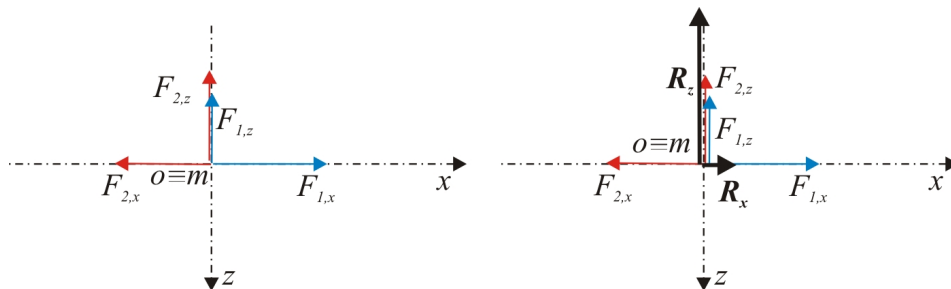
kde úhel γ_i je orientovaný úhel, který svírá síla F_i s kladným směrem osy z . Výsledkem rozkladů



Obrázek 2.3: Rozklad sil v souřadném systému

všech sil jsou soustavy sil působící v ose x a v ose z , které lze sečíst podle rovnic ekvivalence 2.7 a zakreslit podle obr. 2.4

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (2.7)$$



Obrázek 2.4: Nahrazení soustavy sil

Silami R_x a R_z je původní soustava sil ekvivalentně nahrazena. Lze určit celkovou výslednici soustavy sil R , která je dána vektorovým součtem složek R_x a R_z podle obr. 2.6

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} \quad (2.8)$$

a směrový úhel γ_R

$$\sin \gamma_R = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \gamma_R = \frac{R_z}{R}. \quad (2.9)$$

Výsledný účinek svazku sil může být dán složkami výslednice R_x a R_z nebo celkovou výslednicí R a směrovým úhlem γ_R .

Zrušení účinku svazku sil lze pomocí rovnovážné síly $\bar{R}$, jejíž složky $\bar{R}_x$ a $\bar{R}_z$ lze získat z podmínek rovnováhy v obou osách podle rovnice (2.2).

Pro svazek sil lze psát **dvě podmínky ekvivalence**

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin \gamma_i = R \cdot \sin \gamma_R, \quad (2.10)$$

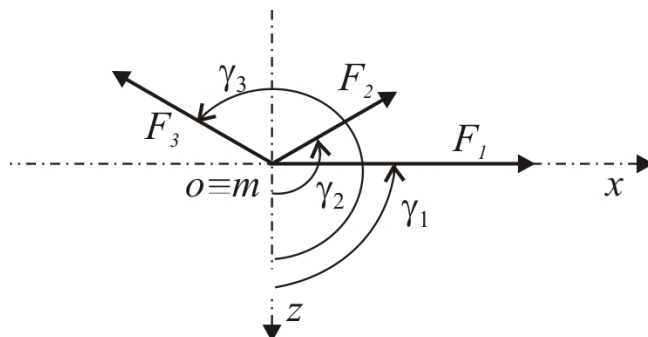
$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos \gamma_i = R \cdot \cos \gamma_R \quad (2.11)$$

a **dvě podmínky rovnováhy**

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (2.12)$$

2.2.1 Příklad - výslednice soustavy sil se společným působištěm

Určete početně i graficky velikost, směr a smysl výslednice R svazku tří sil se společným působištěm m podle obrázku 2.5, je-li dáno: $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 12 \text{ kN}$ a $F_3 = 30 \text{ kN}$, $\gamma_1 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 120^\circ$ a $\gamma_3 = 240^\circ$.



Obrázek 2.5: Zadání soustavy sil z př. 2.2.1

Tabulka 2.1: Složky výslednice soustavy sil z př. 2.2.1

i	F_i [kN]	γ_i [°]	$\sin \gamma_i$ [-]	$\cos \gamma_i$ [-]	F_{ix} [kN]	F_{iz} [kN]
1	20,00	90,00	1,00	0,00	20,00	0,00
2	12,00	120,00	0,87	-0,50	10,39	-6,00
3	30,00	240,00	-0,87	-0,50	-25,98	-15,00
$\sum_{i=1}^3$					$R_x = 4,41$	$R_z = -21,00$

Řešení:

Nejprve jsou určeny složky všech sil v osách x a z podle rovnic (2.6). Pro větší přehlednost jsou zadání a výpočty složek výslednice R_x a R_z uvedeny v tabulce 2.1.

Jednotlivé výpočty v tabulce lze rozepsat pomocí následujících rovnic

$$F_{1x} = F_1 \cdot \sin \gamma_1 = 20 \cdot \sin 90 = 20,00 \text{ [kN]} , \quad (2.13)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin \gamma_2 = 12 \cdot \sin 120 = 10,39 \text{ [kN]} , \quad (2.14)$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \sin \gamma_3 = 30 \cdot \sin 240 = -25,98 \text{ [kN]} , \quad (2.15)$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 = 20 \cdot \cos 90 = 0 \text{ [kN]} , \quad (2.16)$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma_2 = 12 \cdot \cos 120 = -6,00 \text{ [kN]} , \quad (2.17)$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \gamma_3 = 30 \cdot \cos 240 = -15,00 \text{ [kN]} . \quad (2.18)$$

Poté lze sečíst všechny síly působící v osách x , z a určit výsledný účinek soustavy sil podle podmínek ekvivalence (2.7)

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 20,00 + 10,39 - 25,98 = 4,41 \text{ [kN]} . \quad (2.19)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 - 6,00 - 15,00 = -21,00 \text{ [kN]} . \quad (2.20)$$

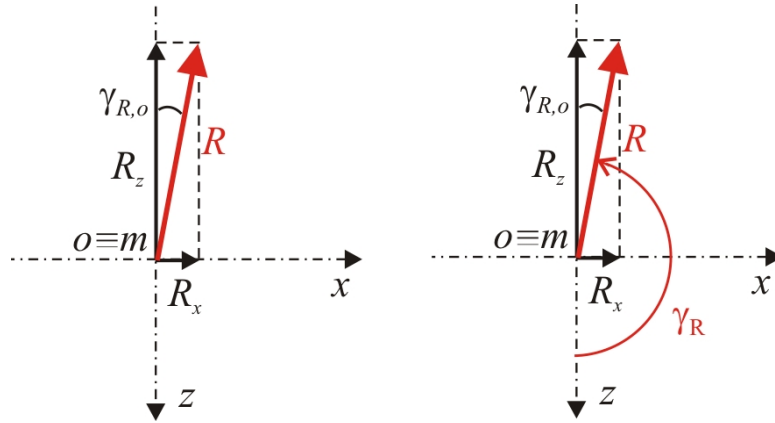
Složkami R_x a R_z je původní soustava ekvivalentně nahrazena. V některých případech je výhodnější ponechat výslednice soustavy ve vypočtených složkách výslednice R_x a R_z . V tomto příkladě je úkolem určit celkovou výslednici R a její směr a orientaci (úhel γ) vzhledem k osám souřadného systému. Známé složky výslednice R_x a R_z jsou zakreslené v obrázku 2.6. Z vektorového součtu je zřejmá velikost, směr i úhel výslednice soustavy R .

Grafické řešení výslednice lze ověřit výpočtem

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = \sqrt{4,41^2 + (-21,00)^2} = 21,46 \text{ [kN]} . \quad (2.21)$$

Jednoznačné určení úhlu γ_R , který svírá výslednice R s kladným směrem osy z je zřejmé z obr. 2.6. Nejprve je určen ostrý úhel $\gamma_{R,o}$ ke svislé ose nezávisle na její orientaci z absolutních hodnot R_x a R_z , např. ze složky R_x

$$\gamma_{R,o} = \arcsin \frac{|R_x|}{R} = \arcsin \frac{4,41}{21,46} = 11,86 \text{ [°]} \quad (2.22)$$



Obrázek 2.6: Výslednice soustavy sil z př. 2.2.1

a poté je dopočítán úhel, který svírá výslednice s kladně orientovanou osou z

$$\gamma_R = 180 - \gamma_{R,o} = 180 - 11,86 = 168,14 [^\circ] . \quad (2.23)$$

Poznámka:

Směr výslednice je zřejmý už ze znamének složek výslednice R_x a R_z . V příkladě 2.2.1 kladné znaménko u R_x znamená, že složka směřuje doprava ve směru kladné osy x a záporné znaménko u R_z znamená, že tato složka směřuje nahoru proti kladnému směru osy z , z čehož lze vyvodit, že výslednice R směřuje do II. kvadrantu.

2.2.2 Příklad - rovnováha soustavy sil se společným působištem

Určete početně i graficky velikost, směr a smysl rovnovážné síly $\bar{R}$ svazku tří sil se společným působištem m z předcházejícího příkladu (obr. 2.5) (= uveďte danou soustavu sil do rovnováhy).

Řešení:

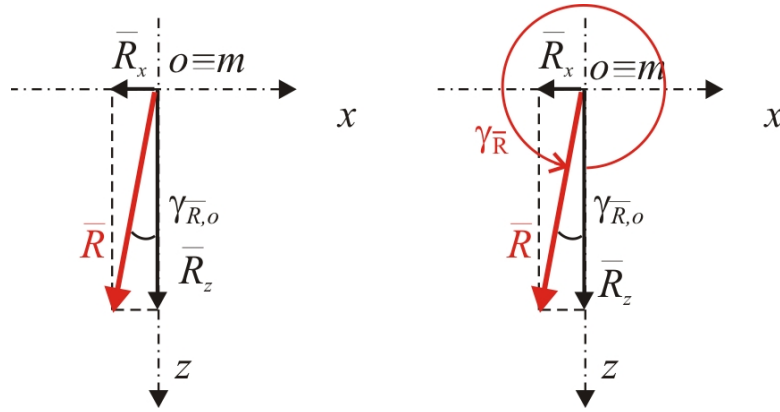
V osách x a z se určí rovnovážné síly k dané soustavě sil podle podmínky rovnováhy 2.2, kterou aplikujeme na obě osy x a z (využijeme již vypočtených složek $F_{i,x}$ a $F_{i,z}$ z rovnic (2.13) až (2.18)). Složky rovnovážné síly $\bar{R}_x$ a $\bar{R}_z$ v osách x a z mají hodnotu

$$\sum_{i=1}^n F_{i,x} + \bar{R}_x = 0 \Rightarrow \bar{R}_x - 20,00 - 10,39 + 25,98 = 0 . \quad (2.24)$$

$$\bar{R}_x = -4,41 [\text{kN}] . \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i,z} + \bar{R}_z = 0 \Rightarrow \bar{R}_z + 0 - 6,00 - 15,00 = 0 . \quad (2.26)$$

$$\bar{R}_z = 21,00 [\text{kN}] . \quad (2.27)$$



Obrázek 2.7: Rovnovážná síla k soustavě sil z př. 2.2.2

Rovnážná síla $\bar{R}$ má hodnotu

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{R}_x^2 + \bar{R}_z^2} = \sqrt{(-4,41)^2 + 21,00^2} = 21,46 \text{ [kN]}. \quad (2.28)$$

Pro určení směru a úhlu, který svírá rovnovážná síla s kladným směrem osy z je opět vhodné zakreslit již vypočtené složky $\bar{R}_x$ a $\bar{R}_z$ v souřadném systému (obr. 2.7), určit nejprve ostrý úhel např. k ose z nezávisle na její orientaci a poté dopočítat orientovaný úhel ke kladnému směru osy z . Ostrý úhel $\gamma_{\bar{R},o}$, který svírá rovnovážná síla $\bar{R}$ se svislou osou z , může být určen z absolutních hodnot známých složek $\bar{R}_x$ a $\bar{R}_z$, např. pomocí složky $\bar{R}_x$

$$\gamma_{\bar{R},o} = \arcsin \frac{|\bar{R}_x|}{\bar{R}} = \arcsin \frac{|-4,41|}{21,46} = 11,86 [^\circ] \quad (2.29)$$

a úhel $\gamma_{\bar{R}}$, který svírá rovnovážná síla s kladně orientovanou osou z

$$\gamma_{\bar{R}} = 360 - \gamma_{\bar{R},o} = 180 - 11,86 = 348,14 [^\circ]. \quad (2.30)$$

Poznámka:

Soustava svazku tří sil doplněná o rovnovážnou sílu $\bar{R}$ (nebo její složky $\bar{R}_x$ a $\bar{R}_z$) je v rovnováze. Z příkladů 2.2.1 a 2.2.2 je zřejmé, že výslednice a rovnovážná síla mají stejnou velikost, směr ale opačnou orientaci.

2.3 Statický moment síly

Statický moment síly F k libovolnému bodu s je definován součinem velikosti síly F a jejího ramene p podle rovnice

$$M = M_s = F \cdot p. \quad (2.31)$$

Bod s se nazývá momentový střed a rameno p je délka kolmice spuštěné z momentového středu s na paprsek síly F . Je-li smysl otáčení síly okolo momentového středu proti směru chodu hodinových ručiček, jedná se o kladný statický moment síly F k bodu s . Základní poučky o

statickém momentu síly k bodu lze najít v [2]. Jedna ze základních pouček se nazývá **věta Varignonova** a je příkladem uplatnění principu superpozice účinků

$$M_s = R \cdot r = \sum_{i=1}^n F_i \cdot p_i , \quad (2.32)$$

kde r je rameno výslednice R k bodu s , p_i jsou ramena dílčích sil soustavy F_i k bodu s .

2.4 Silová dvojice

Dvojice sil je soustava dvou rovnoběžných sil stejně velkých, opačně orientovaných a neležících ve společném paprsku. Výsledný účinek dvojice sil v rovině v níž působí je otáčivý, dvojice sil způsobí moment. Velikost momentu dvojice sil lze určit podle rovnice

$$M_s = F \cdot p , \quad (2.33)$$

kde F je jedna síla z dvojice sil a p je rameno dvojice sil.

Silové dvojice lze skládat a výsledným účinkem soustavy silových dvojic je moment M_r

$$M_r = \sum_{i=1}^n M_i , \quad (2.34)$$

kde M_i jsou momenty způsobené jednotlivými silovými dvojicemi působícími v rovině. Další poučky týkající se dvojic sil lze najít např. v [2].

2.5 Obecná soustava sil

Každou sílu obecné soustavy sil $F_1, F_2, \dots, F_n$ lze rozložit do dvou složek F_{ix} a F_{iz} působících v souřadnicových osách x a z (obr. 2.8). Průměty sil mají velikost

$$F_{ix} = F_i \cdot \sin \gamma_i , \quad F_{iz} = F_i \cdot \cos \gamma_i , \quad (2.35)$$

kde úhel γ_i je orientovaný úhel, který svírá síla F_i s kladným směrem osy z . Každá síla vytváří k počátku také moment M_0

$$M_{i0} = F_{ix} \cdot z_i - F_{iz} \cdot x_i , \quad (2.36)$$

kde x_i a z_i jsou souřadnice působistě síly F_i , F_{ix} a F_{iz} jsou její průměty do směrů souřadných os x a z .

Pro obecnou soustavu sil lze psát **tři podmínky ekvivalence**:

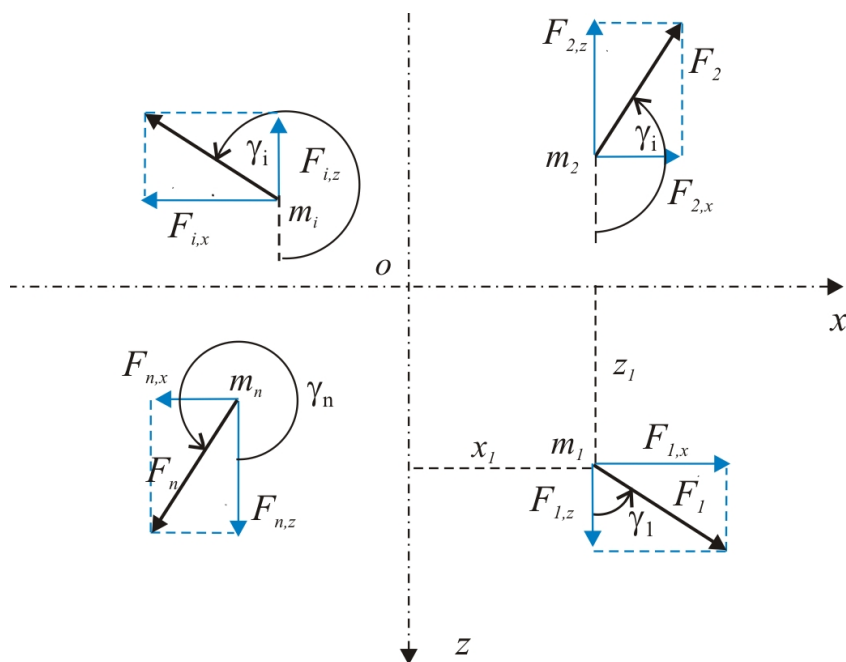
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin \gamma_i = R \cdot \sin \gamma_R , \quad (2.37)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \cos \gamma_i = R \cdot \cos \gamma_R , \quad (2.38)$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0} = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot z_i - F_{iz} \cdot x_i) \quad (2.39)$$

a **tři podmínky rovnováhy**:

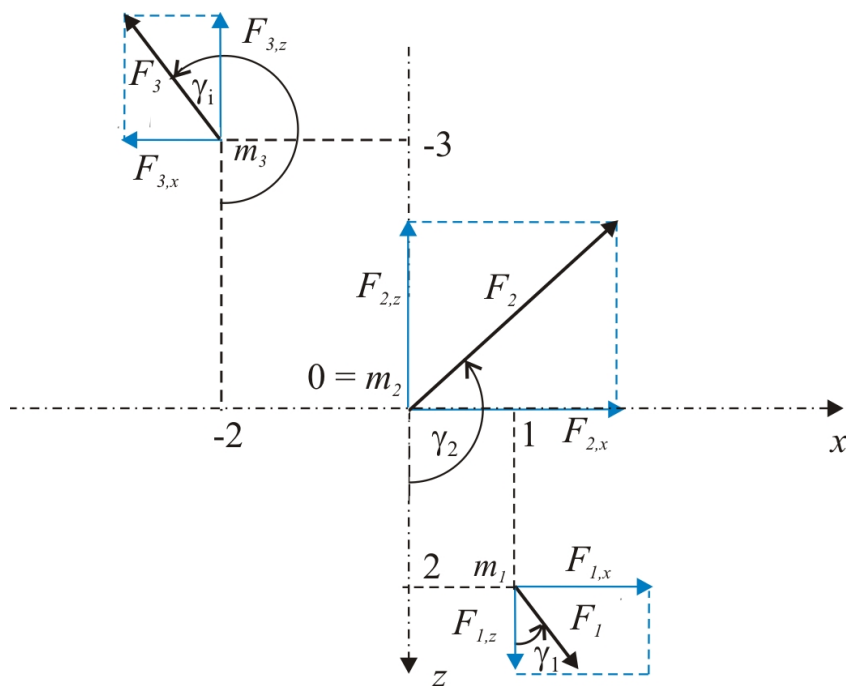
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 , R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 , M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 . \quad (2.40)$$



Obrázek 2.8: Obecná soustava sil

2.5.1 Příklad - výslednice obecné soustavy sil

Určete početně i graficky velikost, směr, smysl a polohu výslednice R obecně působících sil m podle obrázku 2.9, je-li dáno: $F_1 = 8 \text{ kN}$, $F_2 = 22 \text{ kN}$ a $F_3 = 14 \text{ kN}$, $\gamma_1 = 30^\circ$, $\gamma_2 = 120^\circ$ a $\gamma_3 = 200^\circ$, souřadnice působišť $x_1 = 1 \text{ m}$, $z_1 = 2 \text{ m}$, $x_2 = 0 \text{ m}$, $z_2 = 0 \text{ m}$, $x_3 = -2 \text{ m}$, $z_3 = -3 \text{ m}$.



Obrázek 2.9: Zadání soustavy sil z př. 2.5.1

Nejprve jsou určeny složky všech sil v osách x a z podle rovnic (2.6). Zadání soustavy sil a mezivýpočty jsou uvedeny v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2: Zadání a výpočet př. 2.5.1

i	F_i [kN]	γ_i [°C]	$\sin \gamma_i$ [-]	$\cos \gamma_i$ [-]	x_i [m]	z_i [m]	F_{ix} [kN]	F_{iz} [kN]	M_{0x} [kNm]	M_{0z} [kNm]
1	8,00	30,00	0,50	0,87	1,00	2,00	4,00	6,93	8,00	-6,93
2	22,00	120,00	0,87	-0,50	0,00	0,00	19,05	-11,00	0,00	0,00
3	14,00	200,00	-0,34	-0,94	-2,00	-3,00	-4,79	-13,16	14,36	-26,31
$\sum_{i=1}^3$							$R_x = 18,26$	$R_z = -17,23$	22,36	-33,24
							$R = 25,11$		$M_0 = -10,87$	
							$r = 0,43 \text{ m}$			

Rozklady sil do souřadných os:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \sin \gamma_1 = 8 \cdot \sin 30 = 4,00 \text{ [kN]} , \quad (2.41)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin \gamma_2 = 22 \cdot \sin 120 = 19,05 \text{ [kN]} , \quad (2.42)$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \sin \gamma_3 = 14 \cdot \sin 200 = -4,79 \text{ [kN]} , \quad (2.43)$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 = 8 \cdot \cos 30 = 6,93 \text{ [kN]} , \quad (2.44)$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma_2 = 22 \cdot \cos 120 = -11,00 \text{ [kN]} , \quad (2.45)$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \gamma_3 = 14 \cdot \cos 200 = -13,16 \text{ [kN]} . \quad (2.46)$$

Složky výslednice R_x , R_z získáme sečtením průmětů všech sil v souřadnicových osách

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 4,00 + 19,05 - 4,79 = 18,26 \text{ [kN]} , \quad (2.47)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 6,93 - 11,00 - 13,16 = -17,23 \text{ [kN]} . \quad (2.48)$$

Celková výslednice soustavy sil

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = \sqrt{18,26^2 + (-17,23)^2} = 25,11 \text{ [kN]} . \quad (2.49)$$

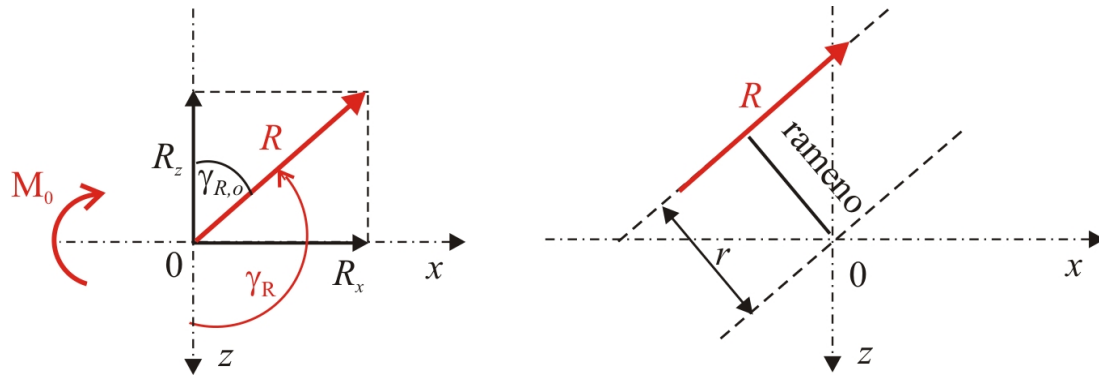
Ostrý úhel $\gamma_{R,o}$ ke svislé ose pomocí absolutní hodnoty složky R_x a výslednice R je dán výrazem

$$\gamma_{R,o} = \arcsin \frac{|R_x|}{R} = \arcsin \frac{18,26}{25,11} = 46,65 [^\circ] \quad (2.50)$$

Úhel γ_R , který svírá výslednice R s kladným směrem osy z je zřejmý z obr. 2.10

$$\gamma_R = 180 - \gamma_{R,o} = 180 - 46,65 = 133,35 [^\circ] . \quad (2.51)$$

Z třetí podmínky ekvivalence (2.64) lze získat moment, který daná soustava vytváří vzhledem k počátku souřadného systému. Do rovnice dosazujeme průměty sil a souřadnice působišť



Obrázek 2.10: Výslednice obecné soustavy sil z př. 2.5.1

a je třeba respektovat znaménka jak složek sil tak i jejich umístění pro správný směr výsledného momentu. Dosazením do podmínky

$$M_0 = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot z_i - F_{iz} \cdot x_i) \quad (2.52)$$

lze získat výsledný moment

$$M_0 = 4,00 \cdot 2 + 19,05 \cdot 0 + (-4,79) \cdot (-3) - 6,93 \cdot 1,00 - (-11,00) \cdot 0 - (-13,16) \cdot (-2) = -10,87 \text{ [kNm]} . \quad (2.53)$$

Další možností, jak zjistit moment soustavy sil vzhledem k počátku, je uvažovat složky sil a ramena sil v absolutní hodnotě a znaménka určit podle směru otáčení každé složky síly vzhledem k počátku podle obrázku 2.9. Výsledný moment je potom dán výpočtem

$$M_0 = 4,00 \cdot 2 + 19,05 \cdot 0 + 4,79 \cdot 3 - 6,93 \cdot 1,00 + 11,00 \cdot 0 - 13,16 \cdot 2 = -10,87 \text{ [kNm]} . \quad (2.54)$$

Výsledný účinek soustavy sil lze nahradit pouze výslednicí R na rameni r tak, aby působila stejným momentem k počátku, jaký vytváří daná soustava sil viz obrázek 2.10. Lze tedy posunout rovnoběžně s paprskem výslednice tuto výslednici o rameno r tak, že současně vytváří moment M_0 požadovaného směru daného výpočtem. Délku ramene r určíme pomocí Varignonovy věty

$$M_0 = R \cdot r \Rightarrow r = \frac{|M_0|}{R} = \frac{|-10,87|}{25,11} = 0,43 \text{ [m]} . \quad (2.55)$$

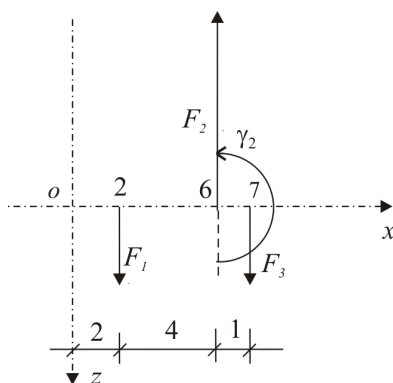
Zadaná obecná soustava tří sil je ekvivalentně nahrazena složkami výslednice $R_x = 18,26 \text{ kN}$ a $R_z = -17,23 \text{ kN}$ působícími v počátku a momentem $M_0 = -10,87 \text{ kNm}$ působícím kdekoli v rovině souřadného systému, nebo výslednicí $R = 25,11 \text{ kN}$, úhlem $\gamma_R = 133,35^\circ$ a opět momentem v rovině $M_0 = -10,87 \text{ kNm}$. V případě ekvivalentního nahrazení soustavy sil jedinou silou výslednicí R , je zapotřebí ji rovnoběžně posunout o vzdálenost r tak, aby současně s posunem vykonávala také otáčivý účinek totožný s účinkem původní obecné soustavy sil podle obr. 2.10.

Poznámka:

Výslednice R zobrazena na 2.10 ležící na přímce vzdálené o rameno r od počátku soustavy se nazývá tzv. **kluzný vektor**. Působíště této síly není pevně dáno, resp. silový i momentový účinek této výslednice není závislý na jejím působíšti (síla se může libovolně posouvat po své nositelce).

2.5.2 Příklad - soustava rovnoběžných sil

Je dána soustava sil rovnoběžných s osou z podle obrázku 2.11: $F_{1,z} = F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_{2,z} = F_2 = 18 \text{ kN}$ a $F_{3,z} = F_3 = 5 \text{ kN}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 180^\circ$ a $\gamma_3 = 0$, souřadnice působišť $x_1=2 \text{ m}$, $x_2=6 \text{ m}$, $x_3=7 \text{ m}$. Nahrďte soustavu výslednou silou působící v počátku a momentem. Poté nahradte soustavu sil výslednicí působící na rameni r_0 vzhledem k počátku. Nakonec určete početně také polohu výslednice R vzhledem k síle F_2 (rameno r_{F_2}).



Obrázek 2.11: Zadání soustavy sil z př. 2.5.2

Řešení:

Pomocí výpočetního postupu v tabulkovém procesoru Microsoft Excel lze určit výslednici sil, statický moment sil k počátku a rameno výslednice viz tabulka 2.3.

Tabulka 2.3: Zadání a výpočet př. 2.5.2

i	F_i [kN]	γ_i [°C]	$\sin \gamma_i$ [-]	$\cos \gamma_i$ [-]	x_i [m]	z_i [m]	F_{ix} [kN]	F_{iz} [kN]	M_{0x} [kNm]	M_{0z} [kNm]
1	5	0	0	1	2	~	0	5	~	-10
2	18	180	0	-1	6	~	0	-18	~	108
3	5	0	0	1	7	~	0	5	~	-35
$\sum_{i=1}^3$							$R_x = 0$	$R_z = -8$	~	63,00
							$R = -8$		$M_0 = 63$	
$r = 7,875 \text{ m}$										

Výpočet složek sil v osách x a z podle rovnic (2.6) lze najít v tabulce 2.3, je zřejmé, že složky sil promítnuté do osy x jsou nulové a síly se promítnou celou svou velikostí do osy z . Přepočtem pomocí goniometrických funkcí získáme orientaci těchto sil vzhledem k ose z .

Rozklady sil do souřadných os:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \sin \gamma_1 = 5 \cdot \sin 0 = 0,00 \text{ [kN]}, \quad (2.56)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin \gamma_2 = 18 \cdot \sin 180 = 0,00 \text{ [kN]}, \quad (2.57)$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \sin \gamma_3 = 5 \cdot \sin 0 = 0,00 \text{ [kN]}, \quad (2.58)$$

$$F_{1z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 = 5 \cdot \cos 0 = 5,00 \text{ [kN]} , \quad (2.59)$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \cos \gamma_2 = 18 \cdot \cos 180 = -18,00 \text{ [kN]} , \quad (2.60)$$

$$F_{3z} = F_3 \cdot \cos \gamma_3 = 5 \cdot \cos 0 = 5,00 \text{ [kN]} . \quad (2.61)$$

Složky výslednice R_x , R_z získáme sečtením průmětů všech sil v souřadnicových osách

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0,00 \text{ [kN]} , \quad (2.62)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 5,00 - 18,00 + 5,00 = -8,00(\uparrow) \text{ [kN]} . \quad (2.63)$$

Celková výslednice R soustavy sil je rovna R_z , záporné znaménko znamená směr proti ose z , čili vzhůru. Pokud bychom chtěli vyjádřit orientaci výslednice pomocí velikosti a úhlu γ_R , který svírá výslednice s kladným směrem osy z , dalo by se napsat $R=8\text{kN}$ a $\gamma_R=180^\circ$.

Z třetí podmínky ekvivalence (2.64) lze získat moment, který daná soustava vytváří vzhledem k počátku souřadného systému. Do rovnice dosazujeme průměty sil a souřadnice působišť a je třeba respektovat znaménka jak složek sil tak i jejich umístění pro správný směr výsledného momentu. Dosazením do podmínky

$$M_0 = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \cdot z_i - F_{iz} \cdot x_i) \quad (2.64)$$

lze získat výsledný moment

$$M_0 = 0 + 0 + 0 - 5,00 \cdot 2 - (-18,00) \cdot 6 - 5,00 \cdot 7 = 63,00 \text{ [kNm]} . \quad (2.65)$$

Další možností, jak zjistit moment soustavy sil vzhledem k počátku, je uvažovat složky sil a ramena sil v absolutní hodnotě a znaménka určit podle směru otáčení každé složky síly vzhledem k počátku podle obrázku 2.11. Výsledný moment je potom dán výpočtem

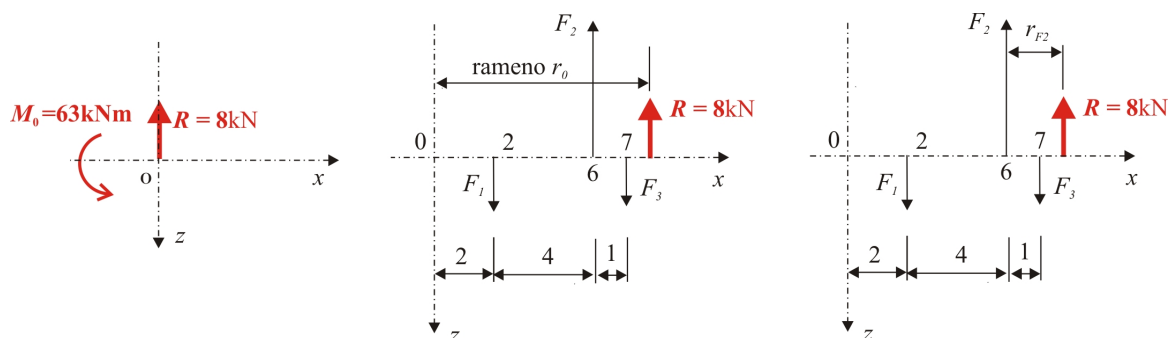
$$M_0 = -5,00 \cdot 2 + 18,00 \cdot 6 - 5,00 \cdot 7 = 63,00 \text{ [kNm]} . \quad (2.66)$$

Dalším úkolem je nahrazení výsledného účinku soustavy sil výslednicí R na rameni r_0 viz obrázek (obr. 2.12 uprostřed). Délku ramene r určíme pomocí Varignonovy věty

$$M_0 = R \cdot r_0 \Rightarrow r_0 = \frac{|M_0|}{|R|} = \frac{|63,00|}{|8,00|} = 7,875 \text{ [m]} . \quad (2.67)$$

Na obrázku 2.12 vlevo je znázorněna výslednice soustavy sil působící v počátku souřadného systému a statický moment, který soustava vyvodí vzhledem k počátku, na obrázku uprostřed je zobrazeno nahrazení soustavy sil pouze výslednicí působící na rameni r vzhledem k počátku a na obrázku vpravo je zobrazena poloha výslednice sil vzhledem k síle F_2 .

Zadaná soustava tří rovnoběžných sil je ekvivalentně nahrazena složkami výslednicí $R=8,00\text{ kN}$, úhlem $\gamma_R=180,00^\circ$ a momentem v rovině $M_0=63,00\text{ kNm}$. V případě ekvivalentního nahrazení soustavy sil jedinou silou výslednicí R , je zapotřebí ji rovnoběžně posunout o vzdálenost $r=7,875\text{ m}$ tak, aby současně s posunem vykonávala také kladný otáčivý účinek totožný s účinkem původní obecné soustavy sil. Výslednice se posune směrem doprava od počátku souřadného systému (obr. 2.12 uprostřed).



Obrázek 2.12: Řešení př. 2.5.2

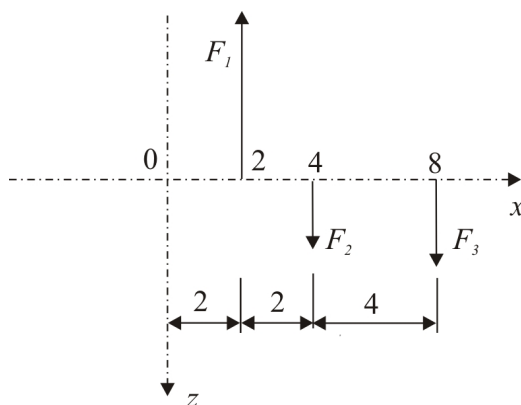
Posledním úkolem je určení polohy výslednice vzhledem k síle F_2 . V tomto případě lze využít předchozích výsledků a pomocí Varignonovy věty a obr. 2.11 určit rameno r_{F_2}

$$R \cdot r_{F_2} = \sum F_i \cdot r_i \Rightarrow r_{F_2} = \frac{\sum F_i \cdot r_i}{R} = \frac{5 \cdot 4 + 18 \cdot 0 - 5 \cdot 1}{8} = 1,875 \text{ [m]}. \quad (2.68)$$

Při výpočtu je respektována orientace sil a jejich hodnoty. Řešení lze vyjádřit slovně, že moment ke kterémukoliv bodu v rovině (v tomto případě k působišti síly F_2), který způsobí daná soustava sil, je stejný jako moment, který způsobí výslednice této soustavy sil (v tomto případě výslednice R na rameni r_{F_2}).

2.5.3 Příklad - určení ramene výslednice soustavy rovnoběžných sil

Je dána soustava sil rovnoběžných s osou z podle obrázku 2.13: $F_{1,z} = F_1 = -10 \text{ kN}$, $F_{2,z} = F_2 = 6 \text{ kN}$ a $F_{3,z} = F_3 = 7 \text{ kN}$, souřadnice působišť $x_1=2 \text{ m}$, $x_2=4 \text{ m}$, $x_3=8 \text{ m}$. Určete početně polohu výslednice R vzhledem k počátku (rameno r_0) a vzhledem k síle F_2 (rameno r_{F_2}) pomocí Varignonovy věty.



Obrázek 2.13: Zadání soustavy sil z př. 2.5.3

Řešení:

Výpočetní postup pro určení výslednice, momentu k počátku a ramene výslednice k počátku je naznačen v tabulce 2.3.

Tabulka 2.4: Zadání a výpočet př. 2.5.2

i	F_i [kN]	γ_i [°C]	$\sin \gamma_i$ [-]	$\cos \gamma_i$ [-]	x_i [m]	z_i [m]	F_{ix} [kN]	F_{iz} [kN]	M_{0x} [kNm]	M_{0z} [kNm]
1	16	180	0	-1	2	~	0	-16	~	32
2	6	0	0	1	4	~	0	6	~	-24
3	7	0	0	1	8	~	0	7	~	-56
$\sum_{i=1}^3$							$R_x = 0$	$R_z = -3$	~	-48,00
							$R = -3$		$M_0 = -48$	
							$r_0 = 16,00 \text{ m}$			

Nejprve se určí velikost a směr výslednice soustavy sil $R = R_z$ součtem všech sil v ose z

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_i = -16,00 + 6,00 + 7,00 = -3,00(\uparrow) \text{ [kN]}. \quad (2.69)$$

Dalším úkolem je určit délku ramene r_0 pomocí Varignonovy věty (moment k počátku od výslednice soustavy sil je stejný jako moment, který vyvodí soustava těchto sil). Tato věta lze zapsat při respektování směru otáčení sil kolem počátku rovnicí podle obrázku 2.14

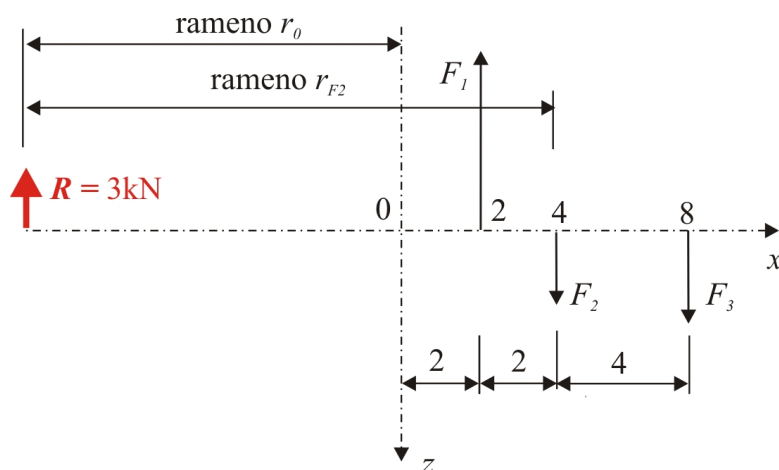
$$-R \cdot r_0 = F_1 \cdot r_1 - F_2 \cdot r_2 - F_3 \cdot r_3 \Rightarrow r_0 = \frac{-16 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 8}{3} = 16,00 \text{ [m]}, \quad (2.70)$$

kde r_1, r_2, r_3 jsou ramena sil k počátku.

Rameno výslednice r_2 vzhledem k síle F_2 je určeno stejným způsobem pomocí Varignonovy věty a obrázku 2.14

$$-R \cdot r_{F2} = -F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot r_3 \Rightarrow r_{F2} = \frac{+16 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 4}{3} = 20,00 \text{ [m]}, \quad (2.71)$$

kde r_1, r_2, r_3 jsou ramena sil k působišti síly F_2 .



Obrázek 2.14: Řešení př. 2.5.2

Na obrázku 2.14 je znázorněna výslednice soustavy sil působící na rameni vzhledem k počátku souřadného systému a na rameni vzhledem k síle F_2 .

Poznámka:

Při výpočtu rovnic (2.70) a (2.71) je zapotřebí nejprve odhadnout polohu výslednice a zakreslit ji do obrázku. Potom je třeba uvažovat se znaménkem momentu, který vyvodí vzhledem k momentovému středu (v tomto případě počátek souřadného systému, resp. působíště síly F_2). Vyjde-li výpočtem rameno výslednice záporně, znamená to, že výslednice ve skutečnosti působí na opačné straně vzhledem k momentovému středu než bylo předpokládáno.

Poznámka:

Rovnoběžné síly lze zdat velikostmi sil v ose z a znaménkem, kterým se určí orientace jednotlivých sil. Např.: $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = -18 \text{ kN}$ a $F_3 = 5 \text{ kN}$, souřadnice působíšť $x_1=2 \text{ m}$, $x_2=6 \text{ m}$, $x_3=7 \text{ m}$. Další možností je zadání velikostmi sil a úhlem, který svírají s osou z .

Kapitola 3

Výpočet reakcí silově zatíženého prutu

3.1 Rovinný nosník a jeho podepření

Jednoduchý rovinný nosník je nosný prvek, u nějž jeden rozměr (délka) značně převládá nad zbývajícími rozměry [2]. Podle tvaru a polohy střednice lze nosníky rozdělit na

- přímé (vodorovné, svislé, šikmé)
- lomené (střednice je představována lomenou čarou)
- zakřivené (střednice má tvar rovinné křivky - např. oblouk)
- obecného tvaru

Jednoduchý rovinný nosník bez vnitřních kloubů má tři stupně volnosti. Pro jeho podepření lze použít pět základních typů vnějších vazeb, které jsou uvedeny v tab.3.1.

Tabulka 3.1: Vazby jednoduchého rovinného nosníku

Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby a reakce
Kyvný prut	1	
Posuvná kloubová podpora	1	nebo
Pevná kloubová podpora	2	nebo
Posuvné vetknutí	2	
Dokonalé vetknutí	3	

Pevného staticky a kinematicky určitého podepření lze dosáhnout kombinací výše uvedených vazeb, které zruší nosníku jeho tři stupně volnosti. Tyto vazby představují tři neznámé složky reakcí vazeb, které určíme ze tří podmínek rovnováhy.

Podle způsobu podepření dělíme nosníky na

- konzolové (vetknuté na jednom konci nosníku)
- prosté (podepřené ve dvou místech, a to pevnou kloubovou podporou a posuvnou kloubovou podporou)
- nosníky podepřené ve třech bodech např. třemi kyvnými pruty nebo třemi posuvnými klouby.

3.2 Výpočet reakcí vazeb.

Složky reakcí vazeb se řeší ze tří statických podmínek rovnováhy obecné rovinné soustavy sil (2.40) působící na nosník uvolněný z vnějších vazeb. Pořadí sestavení a typy podmínek rovnováhy volíme tak, abychom z každé rovnice získali jednu neznámou složku reakcí. Podmínky rovnováhy, ve kterých se počítají síly, nazýváme **silové**. Podmínky rovnováhy, které obsahují součet momentů, nazýváme **momentové**.

Konzolový nosník

1. $\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{ax}$ (silová podmínka rovnováhy) ,
2. $\sum F_{iz} = 0 \rightarrow R_{az}$ (silová podmínka rovnováhy) ,
3. $\sum M_{ia} = 0 \rightarrow M_a$ (momentová podmínka rovnováhy) ,

KONTROLA

4. $\sum M_{ib} = 0$ (momentová kontrola k libovolnému bodu, např. k volnému konci).

Prostý nosník

1. $\sum F_{ix} = 0 \rightarrow R_{ax}$ (silová podmínka rovnováhy) ,
2. $\sum M_{ia} = 0 \rightarrow R_{bz}$ (momentová podmínka rovnováhy) ,
3. $\sum M_{ib} = 0 \rightarrow R_{az}$ (momentová podmínka rovnováhy) ,

KONTROLA

4. $\sum F_{iz} = 0$ (silová podmínka v ose z).

Tyto obecné tvary podmínek rovnováhy používáme pro výpočet reakcí podle typu uložení konstrukce (podle typu podpor = vazeb) nezávisle na tvaru střednice (přímý nosník, lomený nosník, oblouk). Při výpočtu reakcí se vždy snažíme odhadnout jejich směr podle působícího zatížení a poté je zakreslíme do obrázku. Podmínky rovnováhy sestavujeme až na základě

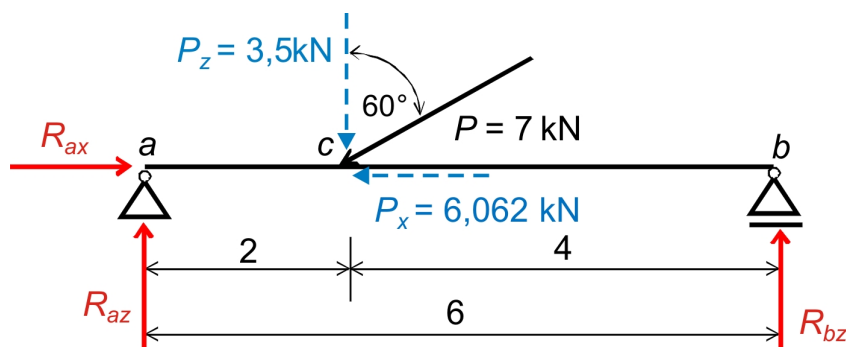
zakreslených reakcí. Pokud řešením vyjde kladná hodnota reakce, znamená to, že její směr byl správně odhadnut. Vyjde-li řešením podmínek rovnováhy u reakce znaménko záporné, znamená to, že má opačnou orientaci než původně zvolená. Sestavené podmínky rovnováhy však platí pro předem odhadnuté směry, proto reakce v původním obrázku ponecháme a pro další výpočet zadání nosníku překreslíme s již opravenými směry a kladnými hodnotami.

3.3 Příklady na výpočet reakcí

Ve všech následujících příkladech určete reakce z podmínek rovnováhy a proveďte kontrolu.

3.3.1 Prostý nosník - bodové zatížení

V tomto příkladě je prostě podepřený nosník zatížen bodovým zatížením, které je představováno silou $P = 7 \text{ kN}$ působící pod úhlem 60° podle obr. 3.1. Určete reakce a proveďte kontrolu.



Obrázek 3.1: Zadání př. 3.3.1

Nejprve určíme složky působící síly promítnuté do vodorovné a svislé osy

$$P_x = P \cdot \sin \gamma = 7 \cdot \sin 60 = 6,062 \text{ [kN]} , \quad (3.1)$$

$$P_z = P \cdot \cos \gamma = 7 \cdot \cos 60 = 3,5 \text{ [kN]} . \quad (3.2)$$

Podle typu podpor doplníme příslušné reakce, odhadneme jejich směr podle působícího zatížení a zakreslíme do obrázku. V tomto příkladě v podpoře a i b působí svislé reakce nahoru tak, aby zrušily účinek síly P_z . V podpoře a je navržena pevná kloubová podpora, proto v tomto bodě bude působit vodorovná reakce proti síle P_x . Odhadnuté směry reakcí R_{az} , R_{bz} a R_{ax} lze vidět na obr. 3.1. Poté dosadíme do podmínek rovnováhy pro prosté podepření nosníku

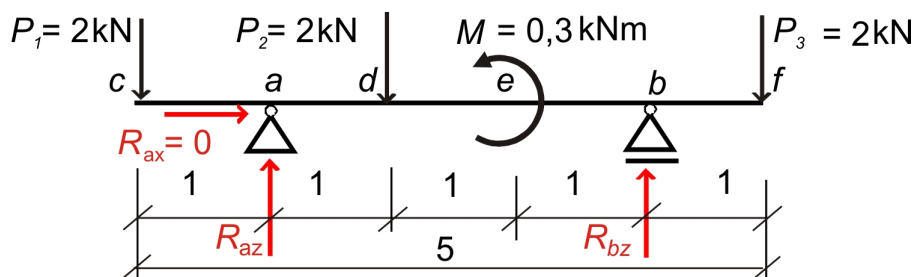
1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} - P_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 6,062 \text{ kN } (\rightarrow) ,$
2. $\sum M_{ia} = 0 : -2 \cdot P_z + 6 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 1,17 \text{ kN } (\uparrow) ,$
3. $\sum M_{ib} = 0 : 4 \cdot P_z - 6 \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 2,33 \text{ kN } (\uparrow) .$

KONTROLA - pro kontrolu sečteme všechny síly v ose z :

$$4. \sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + P_z = 0 \Rightarrow -2,33 - 1,17 + 3,5 = 0 \rightarrow 0 = 0.$$

3.3.2 Nosník s převislými konci - bodové zatížení

Nosník s převislými konci je zatížen silami $P_1 - P_3$ a osamělým momentem M podle obr. 3.2. Určete reakce a proveďte kontrolu.



Obrázek 3.2: Zadání př. 3.3.2

Odhadneme směr reakcí a zakreslíme do obrázku. V tomto příkladě v podpoře a i b působí svislé reakce nahoru tak, aby zrušily účinek svislých sil P . V příkladě nepůsobí zatížení v ose nosníku, proto vodorovná reakce v podpoře a vychází $R_{ax} = 0$. Poté dosadíme do podmínek rovnováhy pro prosté podepření nosníku

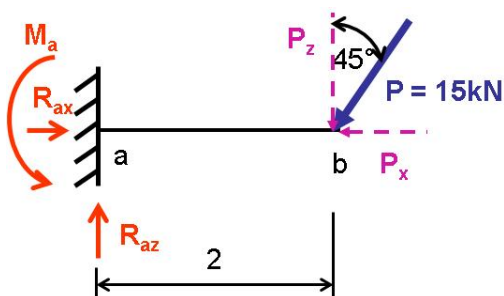
1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} = 0 \text{ kN}$,
2. $\sum M_{ia} = 0 : 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2 + M + 3 \cdot R_{bz} - 4 \cdot P_3 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 2,57 \text{ kN} (\uparrow)$,
3. $\sum M_{ib} = 0 : 4 \cdot P_1 - 3 \cdot R_{az} + 2 \cdot P_2 + M - 1 \cdot P_3 = 0 \Rightarrow R_{az} = 3,43 \text{ kN} (\uparrow)$.

KONTROLA - pro kontrolu sečteme všechny síly v ose z :

4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + P_1 + P_2 + P_3 = 0 \Rightarrow -3,43 - 2,57 + 2 + 2 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$.

3.3.3 Konzola

Vetknutý nosník (konzola) je zatížen bodovým zatížením na volném konci, které je představováno silou $P = 15 \text{ kN}$ působící pod úhlem 45° podle obr. 3.3. Určete reakce z podmínek rovnováhy a proveďte kontrolu.



Obrázek 3.3: Zadání př. 3.3.3

Jelikož síla působí pod úhlem 45° je zřejmé, že obě složky P_x a P_z musí mít stejnou hodnotu. Goniometrické funkce odpovídají úhlu γ , který svírá síla s osou z . Složky působící síly ve svislé

a vodorovné ose mají velikost

$$P_x = P \cdot \sin \gamma = 15 \cdot \sin 45 = 10,61 \text{ [kN]} , \quad (3.3)$$

$$P_z = P \cdot \cos \gamma = 15 \cdot \cos 45 = 10,61 \text{ [kN]} . \quad (3.4)$$

Ve vetknutí jsou odebrány nosníku všechny 3° volnosti, proto všechny tři reakce zakreslíme do bodu a podle obr. 3.3. Poté dosadíme do podmínek rovnováhy v pořadí vhodném pro konzolový nosník a vyřešíme neznámé reakce.

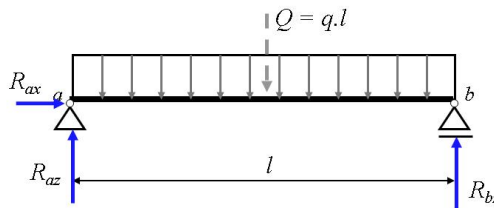
1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} - P_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 10,61 \text{ [kN]} (\rightarrow) ,$
2. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} + P_z = 0 \Rightarrow R_{az} = 10,61 \text{ [kN]} (\uparrow) ,$
3. $\sum M_{ia} = 0 : M_a - P_z \cdot 2 = 0 \Rightarrow M_a = 21,22 \text{ [kNm]} (\text{proti})$

KONTROLA

4. $\sum M_{ib} = 0 : M_a - R_{az} \cdot 2 = 0 \Rightarrow 21,21 - 10,61 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

3.3.4 Prostý nosník - spojitě zatížení rovnoměrné

Prostě podepřený nosník je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením q po celé délce podle obr. 3.4. Určete reakce obecně pomocí q a l .



Obrázek 3.4: Zadání př. 3.3.4

Pro výpočet reakcí lze místo spojitěho zatížení q použít tzv. náhradní břemeno Q [kN] umístěné v jeho těžišti. Náhradní břemeno tedy působí uprostřed nosníku a jeho hodnota je

$$Q = q \cdot l \text{ [kN]} , \quad (3.5)$$

Svislé reakce R_{az} a R_{bz} směřují nahoru tak, aby zrušily účinek zatížení q . Na nosník nepůsobí žádná vnější síla ve vodorovné ose, proto reakce R_{ax} je nulová. Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prosté podepření nosníku lze získat

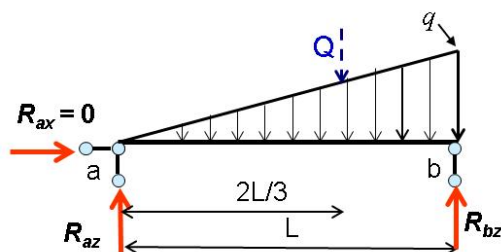
1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} = 0 ,$
2. $\sum M_{ia} = 0 : -Q \cdot \frac{l}{2} + l \cdot R_{bz} = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + l \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = \frac{q \cdot l}{2} \text{ kN} (\uparrow) ,$
3. $\sum M_{ib} = 0 : Q \cdot \frac{l}{2} - l \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = \frac{q \cdot l}{2} \text{ kN} (\uparrow) .$

KONTROLA

4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + Q = 0 \Rightarrow 0 = 0 .$

3.3.5 Prostý nosník - spojitě zatížení trojúhelníkové

V tomto příkladě je prostě podepřený nosník zatížen spojitým trojúhelníkovým zatížením po celé délce viz obr. 3.5, intenzita q je hodnota zatížení v bodě b . Určete reakce pomocí q a l .



Obrázek 3.5: Zadání nosníku s trojúhelníkovým zatížením př. 3.3.5

Náhradní břemeno Q [kN] je umístěné v těžišti trojúhelníkového zatížení, to znamená ve dvou třetinách délky od podpory a , a jeho hodnota je

$$Q = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \text{ [kN]}. \quad (3.6)$$

Svislé reakce R_{az} a R_{bz} směřují nahoru, reakce R_{ax} je opět nulová. Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prostě podepřený nosník lze psát

1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} = 0$,
2. $\sum M_{ia} = 0 : -Q \cdot \frac{2 \cdot l}{3} + l \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = \frac{2 \cdot Q}{3} = \frac{q \cdot l}{3} \text{ kN } (\uparrow)$,
3. $\sum M_{ib} = 0 : Q \cdot \frac{l}{3} - l \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = \frac{Q}{3} = \frac{q \cdot l}{6} \text{ kN } (\uparrow)$,

KONTROLA

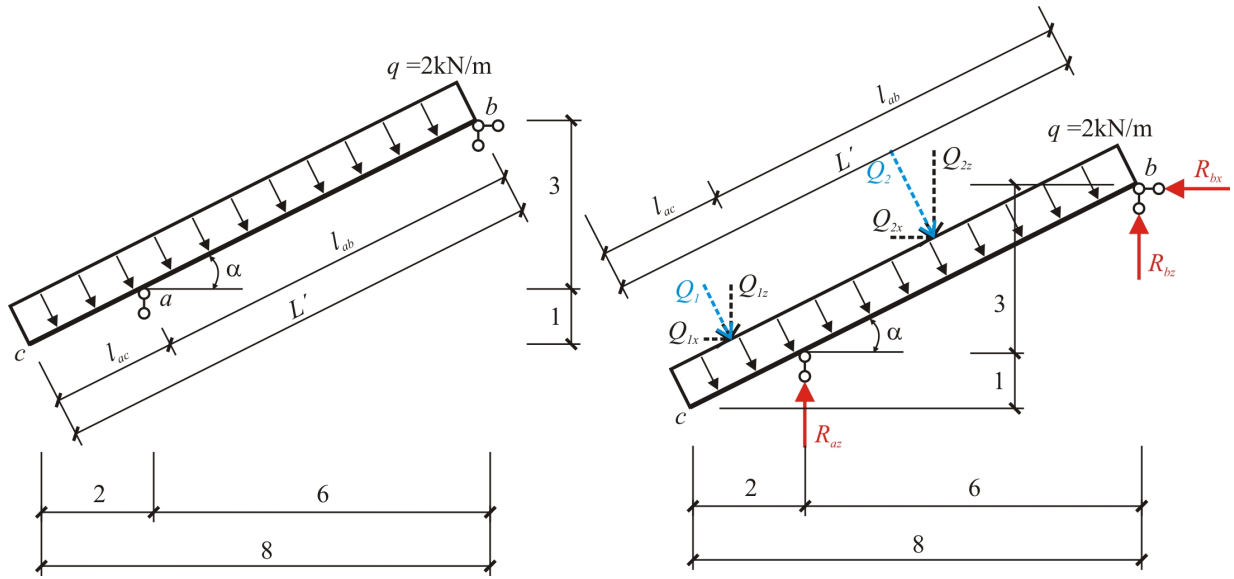
4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + Q = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Poznámka:

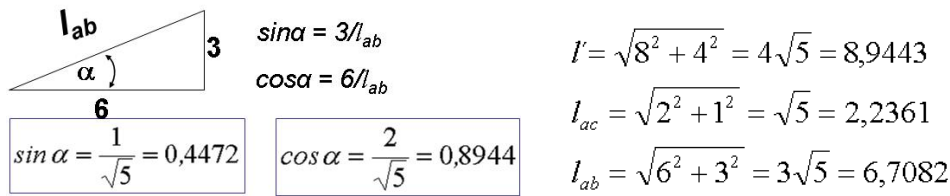
U příkladů 3.3.4 a 3.3.5 se dají reakce odhadnout bez výpočtů. U rovnoměrného spojitého zatížení, které je symetricky uloženo na nosníku je zřejmé, že obě reakce jsou stejně velké a mají poloviční hodnotu z náhradního břemene Q . U trojúhelníkového zatížení se reakce rozdělí na jednu třetinu z Q a dvě třetiny z Q podle orientace zatížení.

3.3.6 Šikmý nosník - zatížení kolmé ke střednici prutu

U šikmého nosníku je střednice nosníku odkloněna o určitý úhel vzhledem k souřadným osám x a z . Lze rozlišit různé typy zatížení vzhledem ke střednici prutu, o čemž pojednává kap. 5. V příkladě 3.3.6 je řešeno zatížení kolmé ke střednici prutu. Pro výpočty šikmých nosníků je nejprve zapotřebí určit délky prutů a goniometrické funkce podle obr. 3.7.



Obrázek 3.6: Zadání šikmého nosníku z př. 3.3.6

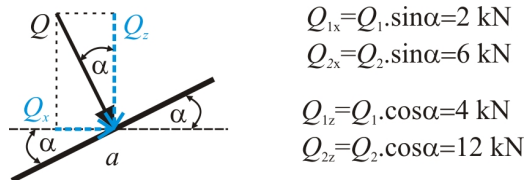


Obrázek 3.7: Délky prutů a goniometrické funkce

V případě kolmého zatížení vzhledem ke střednici je třeba si uvědomit, jak zatížení působí v osách x a z a podle něj odhadnout směry reakcí. Směr náhradních břemen Q_1 a Q_2 pro úseky $c - a$ a $a - b$ musí odpovídat směru spojitěho zatížení q (kolmo ke střednici nosníku) a mají hodnotu

$$Q_1 = q \cdot l_{ac} = 2\sqrt{5}[\text{kN}] , \quad Q_2 = q \cdot l_{ab} = 6\sqrt{5}[\text{kN}] . \quad (3.7)$$

Předpokládané směry reakcí zakreslíme do obrázku (obr. 3.6 vpravo). Do silových podmínek rovnováhy $\sum F_{ix} = 0$ a $\sum F_{iz} = 0$ je zapotřebí znát hodnoty složek zatížení Q v osách x a z (obr. 3.8).


Obrázek 3.8: Rozklad zatížení Q př. 3.3.6

Svislé reakce R_{az} a R_{bz} směřují nahoru, směr reakce R_{bx} odhadneme doleva. Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prostě podepřený nosník lze psát

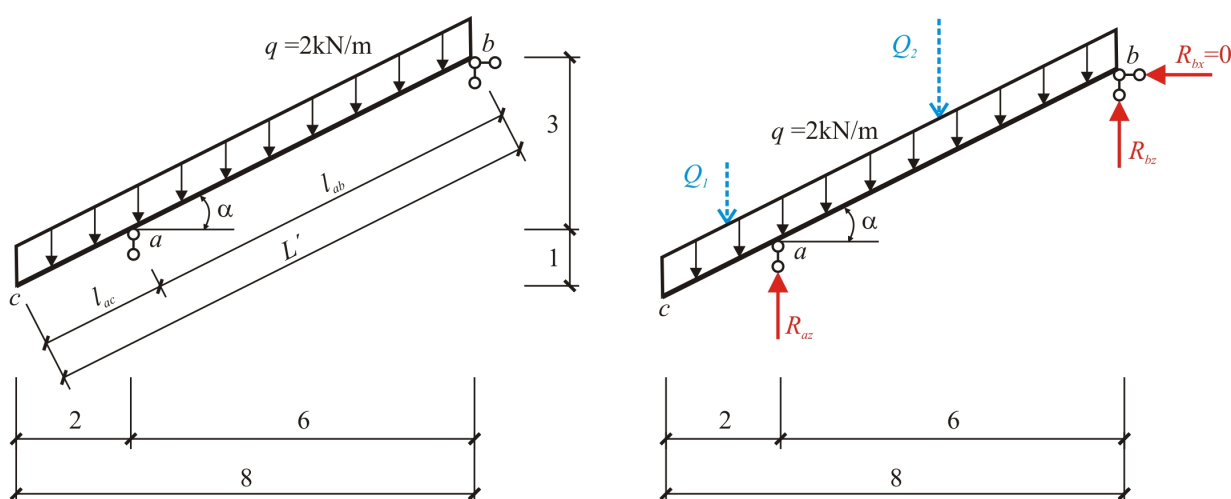
1. $\sum F_{ix} = 0 : Q_{1x} + Q_{2x} - R_{bx} = 0 \Rightarrow R_{bx} = 8 \text{ kN}(\leftarrow)$,
 2. $\sum M_{ia} = 0 : Q_1 \cdot \frac{l_{ac}}{2} - Q_2 \cdot \frac{l_{ab}}{2} + 3 \cdot R_{bx} + 6 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 2,66 \text{ kN}(\uparrow)$,
 3. $\sum M_{ib} = 0 : Q_1 \cdot (\frac{l_{ac}}{2} + l_{ab}) + Q_2 \cdot \frac{l_{ab}}{2} - 6 \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 13,33 \text{ kN}(\uparrow)$,
- KONTROLA
4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + Q_{1z} + Q_{2z} = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Poznámka:

Do momentových podmínek lze alternativně použít složky zatížení Q_{1x} , Q_{1z} , Q_{2x} a Q_{2z} ovšem ramena sil jsou v tomto případě svislé a vodorovné vzdálenosti.

3.3.7 Šikmý nosník - zatížení svislé

V tomto příkladě jsou počítány reakce v případě svislého zatížení vzhledem podle obr. 3.9



Obrázek 3.9: Zadání šikmého nosníku z př. 3.3.6

Délky prutů lze převzít z předchozího příkladu 3.3.6. Náhradní břemena částí prutu Q_1 a Q_2 [kN] jsou opět umístěna v těžišti části zatížení na úsecích $c-a$ a $a-b$, mají stejnou hodnotu, tentokrát však směřují svisle dolů (viz obr. 3.9 vpravo). Jejich hodnoty jsou

$$Q_1 = q \cdot l_{ac} = 2\sqrt{5}[\text{kN}] , \quad Q_2 = q \cdot l_{ab} = 6\sqrt{5}[\text{kN}] . \quad (3.8)$$

Předpokládané směry reakcí zakreslíme do obrázku 3.9. Svislé reakce R_{az} a R_{bz} směřují nahoru tak, aby zrušily účinek zatížení q . Na nosník nepůsobí žádná vnější síla ve vodorovné ose, proto reakce R_{bx} je nulová. Ramena náhradních břemen vzhledem k podporám jsou v tomto případě dány půdorysnými vzdálenostmi. Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prostě podepřený nosník lze psát

1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{bx} = 0$,

$$2. \sum M_{ia} = 0 : Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 3 + 6 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 5,963 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

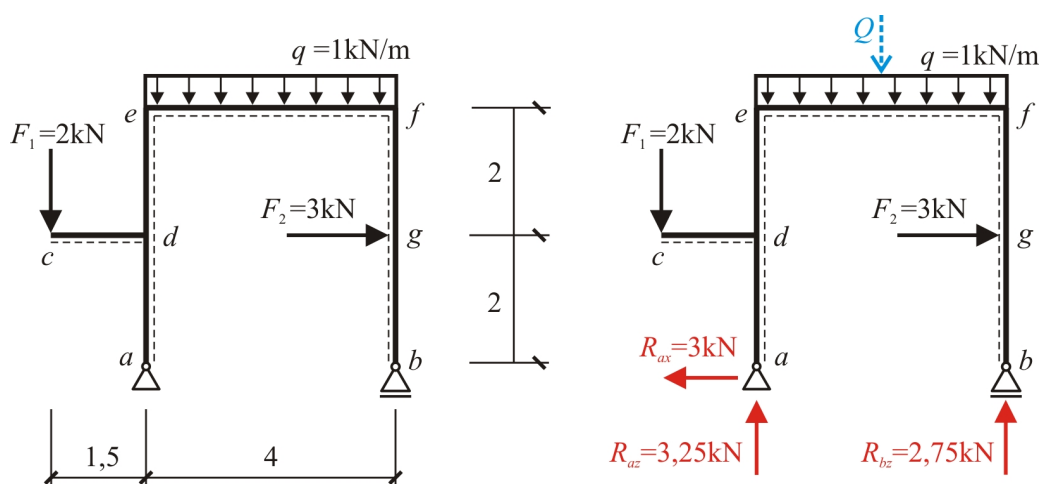
$$3. \sum M_{ib} = 0 : Q_1 \cdot 7 + Q_2 \cdot 3 - 6 \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 11,926 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

KONTROLA

$$4. \sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

3.3.8 Lomený nosník

O nosníku se zalomenou střednicí (rám) detailněji pojednává kap. 6. V příkladě 3.3.8 jsou řešeny reakce rámové konstrukce. Geometrie a zatížení jsou zobrazeny na obr. 3.10.



Obrázek 3.10: Zadání lomeného pravoúhlého rámu z př. 3.3.8

Náhradní břemeno na rámové příčli Q se určí podle vztahu

$$Q = q \cdot l = 1 \cdot 4 = 4 \text{ [kN]} . \quad (3.9)$$

Předpokládané směry reakcí zakreslíme do obrázku 3.10 a po dosazení do podmínek rovnováhy pro prosté podepření lze získat tyto rovnice

$$1. \sum F_{ix} = 0 : F_2 - R_{ax} = 0 \Rightarrow R_{ax} = 3 \text{ kN } (\leftarrow),$$

$$2. \sum M_{ia} = 0 : F_1 \cdot 1,5 - Q \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + 4 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 2,75 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

$$3. \sum M_{ib} = 0 : F_1 \cdot 5,5 + Q \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + R_{az} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{az} = 3,25 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

KONTROLA

$$4. \sum F_{iz} = 0 : -R_{az} - R_{bz} + Q + F_1 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

3.3.9 Oblouk 1

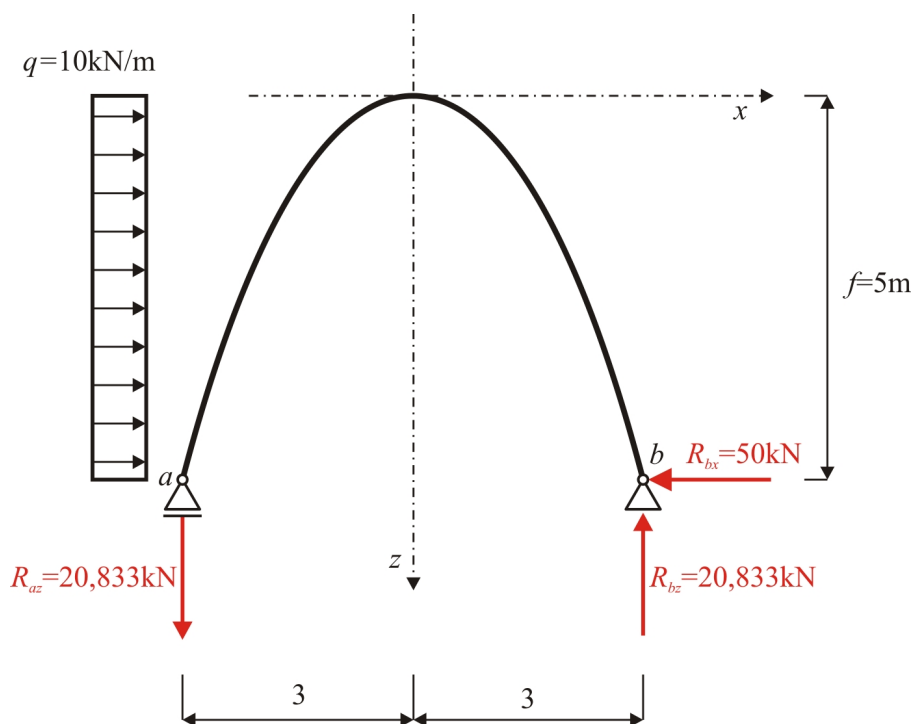
O obloucích detailněji pojednává kap. 8. Při určování reakcí u oblouku stejně jako v předchozích případech nezáleží na střednici, ale na typu a vzdálenosti podpory a na zatížení. Opět se řeší rovnovážná soustava sil, která je tvořena zatížením a reakcemi. Geometrie obloukové konstrukce z příkladu 3.3.9 a jeho zatížení jsou zobrazeny na obr. 3.11. Předpokládané směry reakcí zakreslíme do obrázku 3.11.

Účinek zatížení ve vodorovném směru je zrušen silou R_{bx} , otáčivý účinek je zrušen dvojicí sil R_{az} a R_{bz} . Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prosté podepření lze získat tyto rovnice

1. $\sum F_{ix} = 0 : qf - R_{bx} = 0 \Rightarrow R_{bx} = 50 \text{ kN } (\leftarrow),$
2. $\sum M_{ia} = 0 : -qf \cdot \frac{f}{2} + l \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 20,833 \text{ kN } (\uparrow) ,$
3. $\sum M_{ib} = 0 : -qf \cdot \frac{f}{2} + l \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 20,833 \text{ kN } (\downarrow) ,$

KONTROLA

4. $\sum F_{iz} = 0 : R_{az} - R_{bz} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$

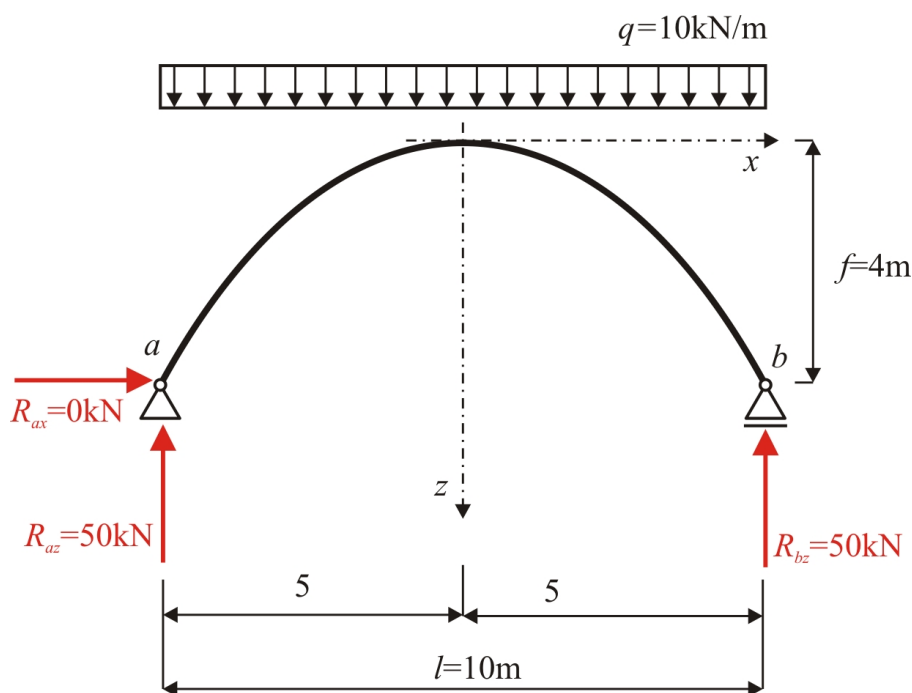


Obrázek 3.11: Zadání oblouku z př. 3.3.9

3.3.10 Oblouk 2

V tomto příkladě je oblouk zatížen spojitým rovnoměrným zatížením po celé své délce. Úloha se řeší obdobně jako v příkladě 3.3.4. Geometrie obloukové konstrukce a jeho zatížení jsou zobrazeny na obr. 3.12.

Předpokládané směry reakcí viz obr. 3.12. Vodorovná reakce R_{ax} je nulová, R_{az} a R_{bz} směřují nahoru proti působícímu zatížení. Po dosazení do podmínek rovnováhy lze získat tyto rovnice



Obrázek 3.12: Zadání oblouku z př. 3.3.10

1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} = 0 \text{ kN} ,$
 2. $\sum M_{ia} = 0 : -ql \cdot \frac{l}{2} + l \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 50,0 \text{ kN} (\uparrow) ,$
 3. $\sum M_{ib} = 0 : ql \cdot \frac{l}{2} - l \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 50,0 \text{ kN} (\uparrow) ,$
- KONTROLA
4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} + ql - R_{bz} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$

3.3.11 Oblouk 3

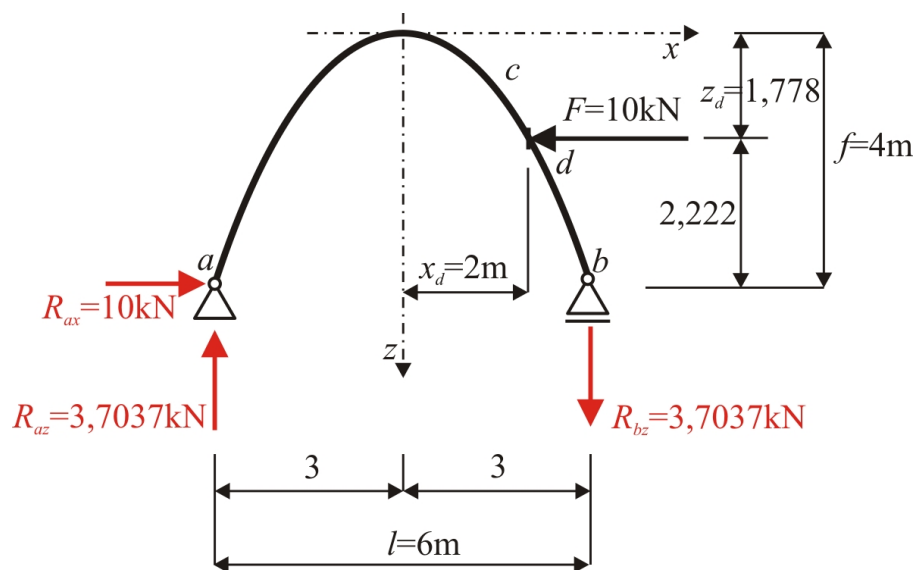
Na oblouk v příkladě 3.3.11 působí síla $F=10\text{kN}$, která je dána x -ovou souřadnicí podle obr. 3.13, z -ovou souřadnicí z_d lze dopočítat podle příkladu 8.3 a vztahu

$$z_d = k \cdot x_d^2 = 0,44 \cdot 2,0^2 = 1,778 \text{ [m]} . \quad (3.10)$$

Svislou vzdálenost působící síly od podpor lze dopočítat: $f - z_d = 4 - 1,778 = 2,222 \text{ m}.$

Dosažením do podmínek rovnováhy určíme reakce

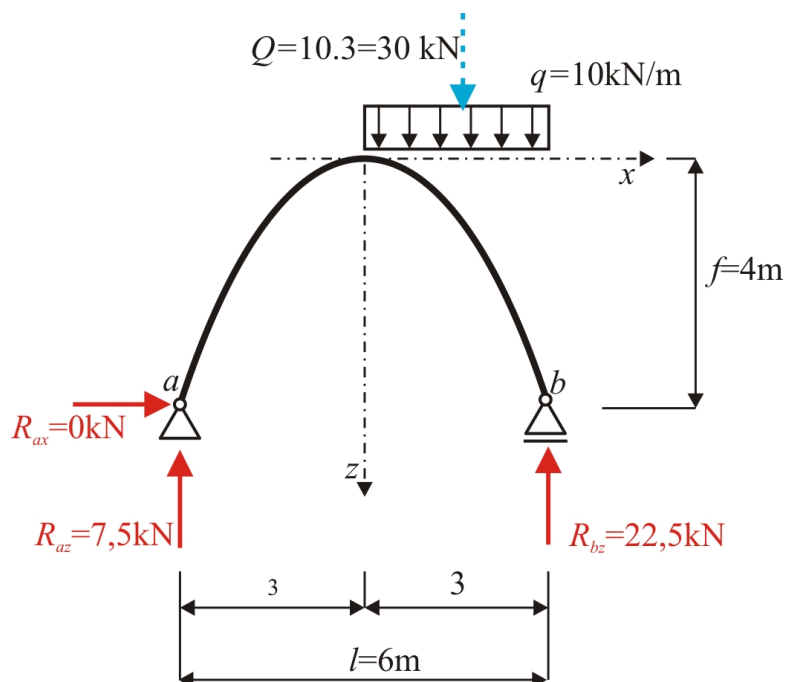
1. $\sum F_{ix} = 0 : R_{ax} - F = 0 \Rightarrow R_{ax} = 10 \text{ kN} (\rightarrow),$
 2. $\sum M_{ia} = 0 : F \cdot 2,222 - 6 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 3,7037 \text{ kN} (\downarrow) ,$
 3. $\sum M_{ib} = 0 : F \cdot 2,222 - 6 \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 3,7037 \text{ kN} (\uparrow) ,$
- KONTROLA
4. $\sum F_{iz} = 0 : -R_{az} + R_{bz} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$



Obrázek 3.13: Zadání oblouku z př. 3.3.11

3.3.12 Oblouk 4

Na pravou část oblouku z příkladu 3.3.12 působí svislé rovnoměrné zatížení $q=10\text{kN/m}$. Geometrie konstrukce a předpokládané směry reakcí jsou zobrazeny na obr. 3.14.



Obrázek 3.14: Zadání oblouku z př. 3.3.12

Vodorovná reakce R_{ax} je nulová, R_{az} a R_{bz} směřují nahoru proti působícímu zatížení. Po dosazení do podmínek rovnováhy lze získat tyto rovnice

$$1. \sum F_{ix} = 0 : R_{ax} = 0 \text{ kN} ,$$

$$2. \sum M_{ia} = 0 : -Q \cdot 4,5 + 6 \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 22,5 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

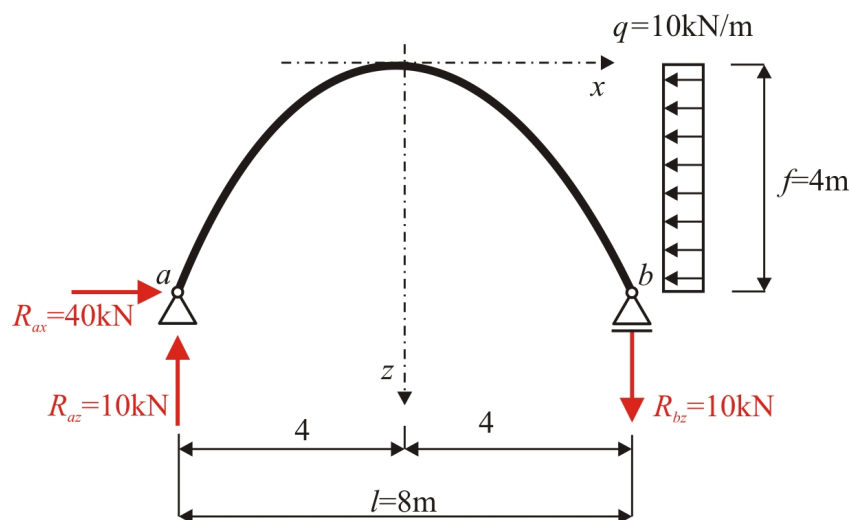
$$3. \sum M_{ib} = 0 : Q \cdot 1,5 - 6 \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 7,5 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

KONTROLA

$$4. \sum F_{iz} = 0 : -R_{az} + Q - R_{bz} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

3.3.13 Oblouk 5

Na pravou část oblouku v příkladu 3.3.13 působí vodorovné rovnoměrné zatížení $q=10\text{kN/m}$. Geometrie konstrukce a předpokládané směry reakcí jsou zobrazeny na obr. 3.15.



Obrázek 3.15: Zadání oblouku z př. 3.3.13

Účinek zatížení ve vodorovném směru je zrušen silou R_{ax} , otáčivý účinek je zrušen dvojicí sil R_{az} a R_{bz} . Po dosazení do podmínek rovnováhy pro prosté podepření lze získat tyto rovnice

$$1. \sum F_{ix} = 0 : -qf + R_{ax} = 0 \Rightarrow R_{ax} = 40,0 \text{ kN } (\rightarrow),$$

$$2. \sum M_{ia} = 0 : +qf \cdot \frac{f}{2} - l \cdot R_{bz} = 0 \Rightarrow R_{bz} = 10,00 \text{ kN } (\downarrow) ,$$

$$3. \sum M_{ib} = 0 : +qf \cdot \frac{f}{2} - l \cdot R_{az} = 0 \Rightarrow R_{az} = 10,00 \text{ kN } (\uparrow) ,$$

KONTROLA

$$4. \sum F_{iz} = 0 : -R_{az} + R_{bz} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Kapitola 4

Vnitřní síly přímého vodorovného nosníku

4.1 Analýza vnitřních sil na rovinných nosnících

Tato kapitola se zabývá analýzou vnitřních sil na rovinných nosnících. Nejprve je provedena rekapitulace závěrů z předcházejících kapitol, na které se v této kapitole navazuje:

- Každý prut v rovině má 3° volnosti (kap. 1).
- Pokud jsou podepřením odebrány právě 3° volnosti jedná se o staticky určitou úlohu (kap. 1).
- Vnější zatížení a reakce v podporách jsou v rovnováze, neznámé reakce se určí pomocí tří statických podmínek rovnováhy (kap. 3.2).
- Vnější zatížení a reakce se nazývají vnější síly (kap. 3.2).

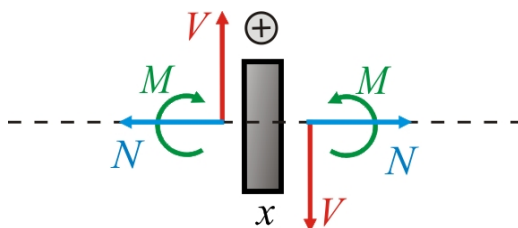
Uvnitř nosníku působením vnějších sil vznikají tzv. **vnitřní síly**. Vnitřní síly v libovolném průřezu x jsou určeny na základě rovnováhy vnějších sil uvolněné části nosníku v x s výslednicí vnitřních sil ([1] [2]). Obecnou výslednici vnitřních sil po uvolnění levé nebo pravé části nosníku lze ekvivalentně nahradit třemi složkami:

- složka výslednice v ose x - normálová síla N ,
- složka výslednice v ose z - posouvající síla V ,
- momentová složka - ohybový moment M .

Normálová síla N v libovolném průřezu x nosníku je rovna algebraickému součtu všech vnějších sil působících v ose nosníku zleva nebo zprava od x . Kladná normálová síla vyvozuje v průřezu x tah a působí směrem z průřezu. V opačném případě je normálová síla záporná a vyvozuje tlak viz obr. 4.1.

Posouvající síla V v libovolném průřezu x nosníku je rovna algebraickému součtu všech vnějších sil působících kolmo k ose nosníku zleva nebo zprava od x . Kladná posouvající síla počítána zleva směřuje nahoru. V opačném případě je záporná. Kladná posouvající síla počítána zprava směřuje dolů. V opačném případě je záporná viz obr. 4.1.

Ohybový moment M v libovolném průřezu x nosníku je roven algebraickému součtu všech statických momentů od všech vnějších sil zleva nebo zprava od x . Kladný ohybový moment počítaný zleva otáčí po směru chodu hodinových ručiček. V opačném případě je záporný. Kladný ohybový moment počítaný zprava otáčí proti směru chodu hodinových ručiček. V opačném případě je záporný. Kladným ohybovým momentem jsou dolní vlákna tažena a horní tlačena (nosník je prohýbán směrem dolů). U záporného ohybového momentu je to naopak viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Kladné složky vnitřních sil

Pro získání přehledu o průběhu vnitřních sil po celé délce nosníku kreslíme diagramy N , V , M . Kladné normálové síly N a V se vynášejí nahoru, záporné dolů. Pořadnice ohybových momentů se vynášejí vždy na stranu tažených vláken. Průběhy vnitřních sil se vykreslují vždy **kolmo** na osu nosníku.

Poznámka:

Je třeba si dát pozor na záměnu statického momentu a ohybového momentu. Statický moment M_s [kNm] k momentovému středu s je roven algebraickému součtu **všech** statických momentů, jedná se o vnější otáčivý účinek momentů nebo sil působících na rameni (kapitoly 2, 3). Ohybový moment M [kNm] je **vnitřní síla** v libovolném průřezu x nosníku a je roven algebraickému součtu všech statických momentů od všech vnějších sil **zleva nebo zprava** k průřezu x . Má tendenci nosník deformovat – ohýbat.

4.1.1 Schwedlerovy vztahy

Z diferenciálních podmínek rovnováhy přímého nosníku (obr.) jsou odvozeny následující vztahy mezi vnitřními silami a vnějším spojitým zatížením [1], [2]

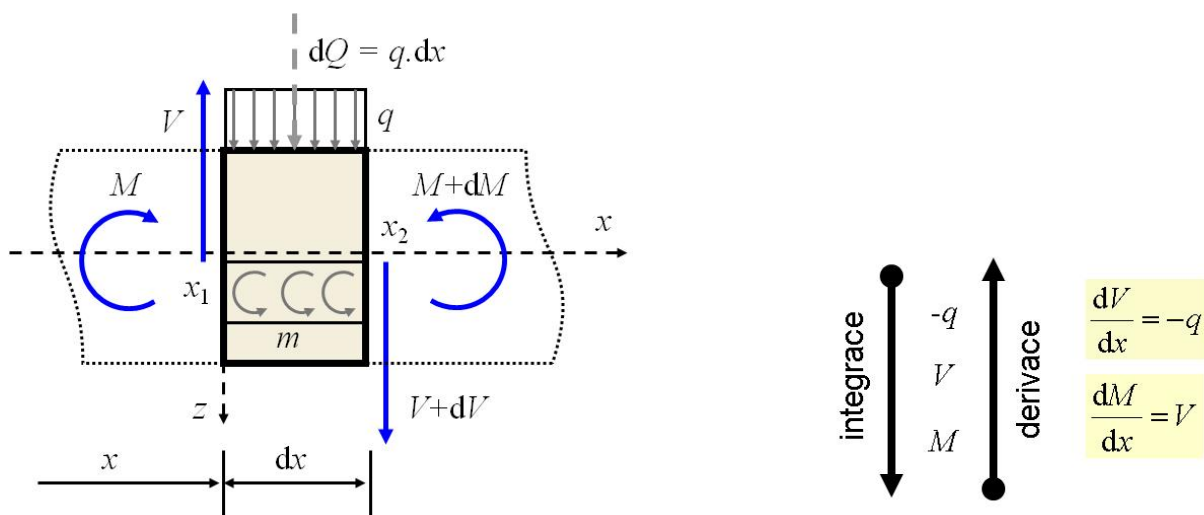
$$\frac{dN}{dx} = -n, \quad (4.1)$$

$$\frac{dV}{dx} = -q, \quad (4.2)$$

$$\frac{dM}{dx} = V + m, \quad (4.3)$$

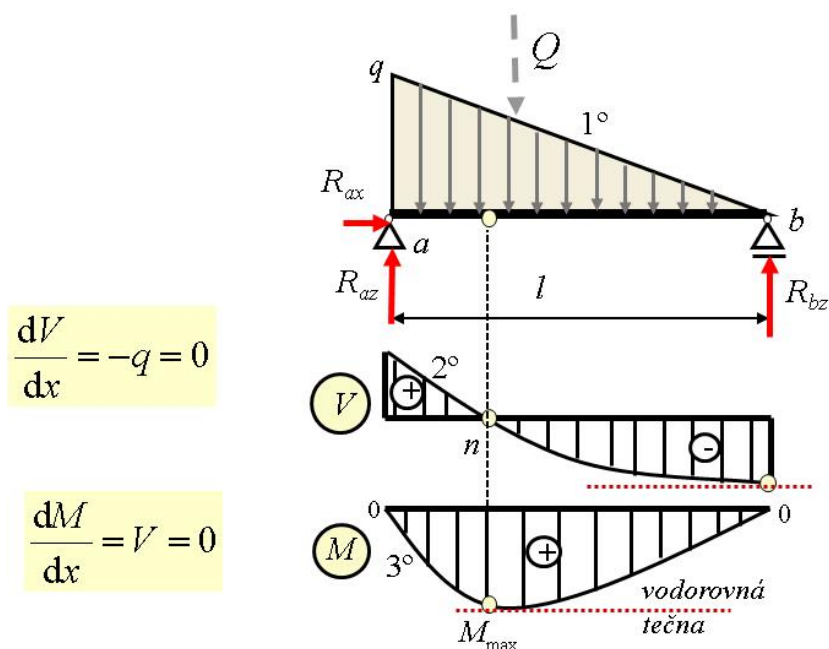
Závěry Schwedlerových vztahů

Závěry z diferenciálních podmínek rovnávy vyplývají z matematických zákonitostí v rovnicích (4.1) až (4.3) a týkají se řádu funkcí vnitřních sil a výpočtu polohy extrému jak je zřejmé z

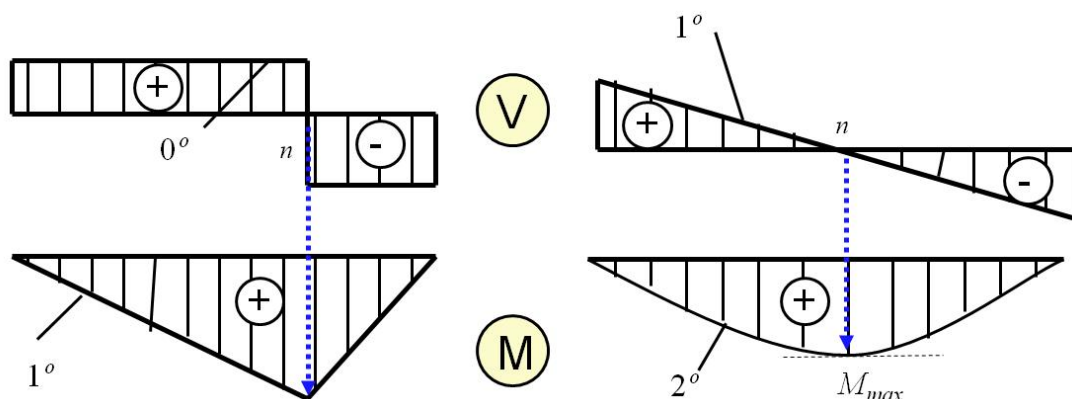
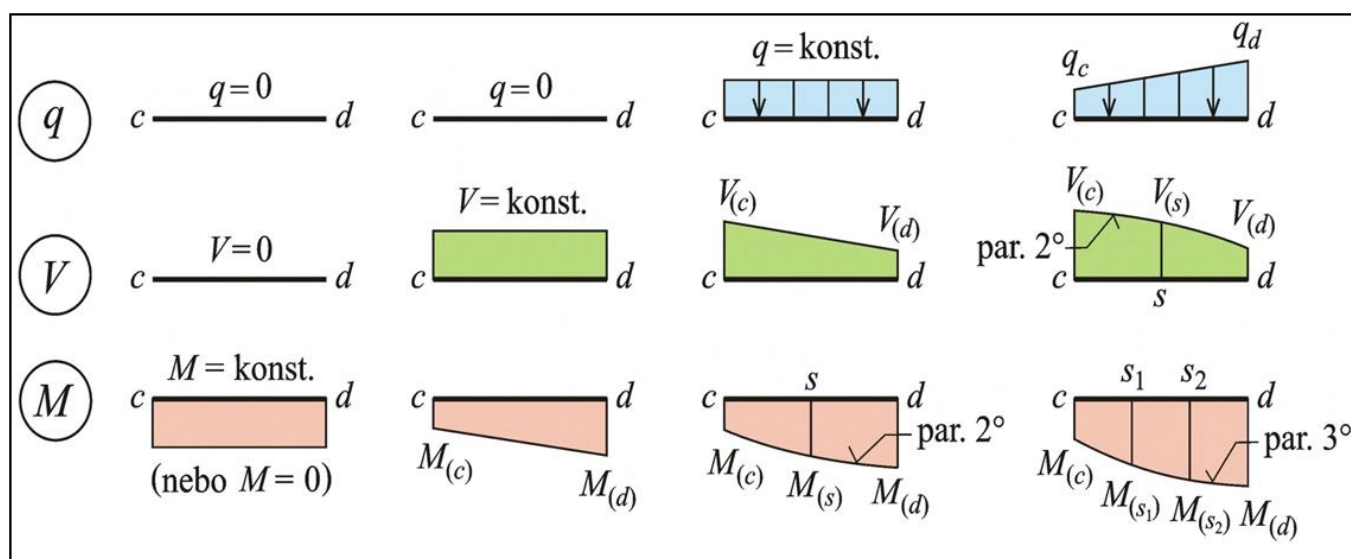


Obrázek 4.2: Uvolněný element nosníku a derivačně-integrační schéma

obrázků 4.4 až 4.5. Z těchto závěrů vyplývá, že derivací ohybového momentu lze určit posouvající sílu a derivací posouvající síly intenzitu spojitého zatížení. Pro vykreslování diagramu to znamená, že funkce zatížení, posouvajících sil a ohybových momentů je vždy o jeden řád vyšší. Velmi důležitým závěrem je možnost určení místa tzv. **nebezpečného** (přechodného) průřezu. Z matematiky je známo, že extrém funkce se nachází v místě, kde je derivace této funkce rovna nule. Pro určení extrémního momentu pod spojitým zatížením je nutné nejprve najít umístění tohoto nebezpečného průřezu a posléze hodnotu ohybového momentu pro tento bod dopočítat. V praxi to znamená rovnici posouvající síly pod spojitým zatížením položit rovnu nule a řešením vyjde hledaný kořen x .



Obrázek 4.3: Závěry Schwedlerových vztahů - nebezpečný průřez n

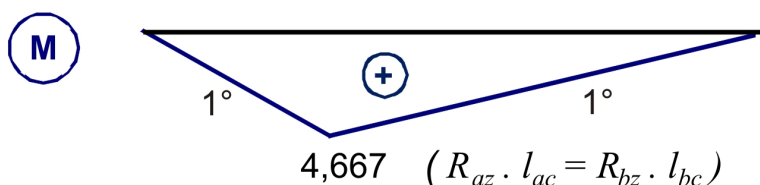
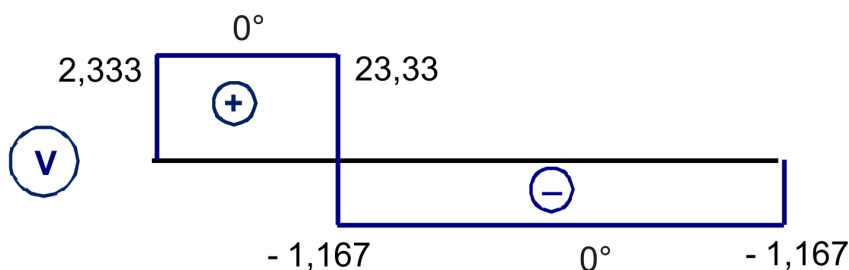
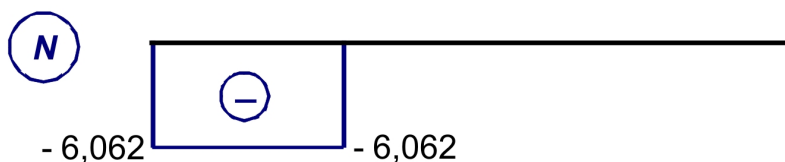
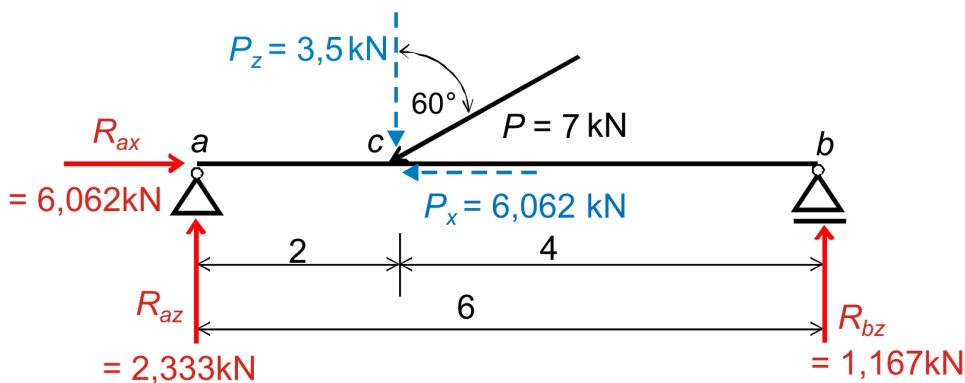

Obrázek 4.4: Nebezpečný průřez n

Obrázek 4.5: Závislost mezi obrazci q , V , M

Hodnoty vnitřních sil v libovolném průřezu lze vypočítat z podmínek rovnováhy uvolněné levé anebo pravé části nosníku. Výpočtem z obou stran se musí dojít ke stejným hodnotám, obvykle určujeme vnitřní síly z té strany, kde je výpočet kratší nebo jednodušší, důležité hodnoty kontrolujeme výpočtem z obou stran (např. extrémní moment).

V případě, že v jednom bodě má vnitřní síla dvě hodnoty, píšeme k síle dva indexy. První index značí místo, ve kterém je síla určena. Druhý index označuje bod zleva nebo zprava průřezu, podle toho, zda se jedná o hodnotu těsně zleva nebo zprava k danému průřezu (např. normálová síla N_{ca} je hodnota těsně vlevo od bodu c směrem k bodu a). Pokud se vyskytne označení písmen v indexu s pomlčkou, znamená to konstantní hodnotu vnitřní síly na úseku (např. normálová síla N_{a-c} je konstantní normálová síla na úseku ac).

4.1.2 Příklad - bodové zatížení

V tomto příkladě jsou řešeny průběhy vnitřních sil prostého nosníku zatíženého osamělým břemenem viz obr. 4.7. Reakce jsou vyřešeny v kap.3.2.



Normálové síly:

zleva:

$$N_a = (N_{ac}) = -R_{ax}$$

$$N_{cb} = -R_{ax} + P_x$$

zprava:

$$N_b = (N_{b-c}) = 0$$

$$N_{c-a} = -P_x$$

Posouvající síly:

zleva:

$$V_a = (V_{a-c}) = R_{az}$$

$$V_{c-b} = R_{az} - P_z$$

zprava:

$$V_b = (V_{b-c}) = -R_{bz}$$

$$V_{c-a} = -R_{bz} + P_z$$

Ohybové momenty:

zleva:

$$M_a = 0$$

$$M_x = R_{az} \cdot x$$

$$M_c = R_{az} \cdot l_{ac}$$

$$M_x = R_{az} \cdot x - P_z \cdot (x - l_{ac})$$

$$M_b = R_{az} \cdot l - P_z \cdot l_{cb} = 0$$

zprava:

$$M_b = 0$$

$$M_x = R_{bz} \cdot x$$

$$M_c = R_{bz} \cdot l_{bc}$$

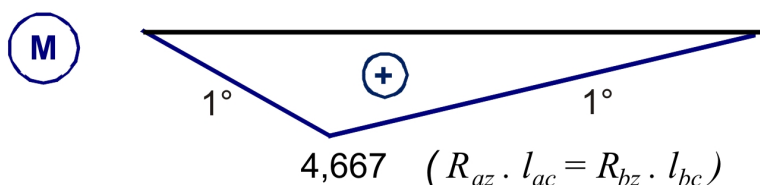
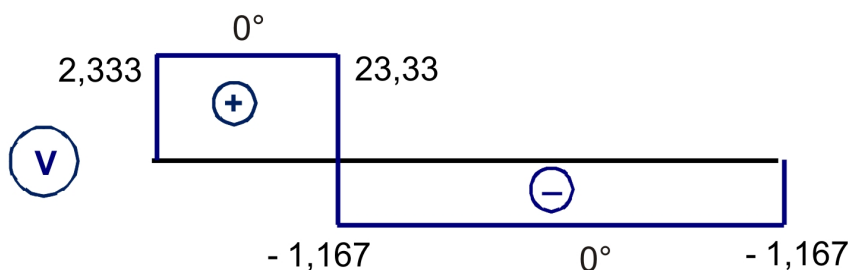
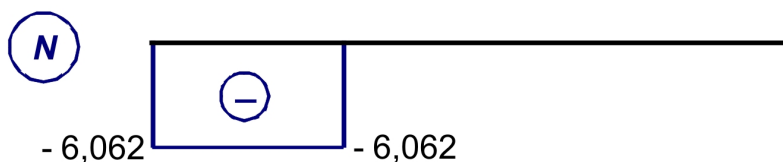
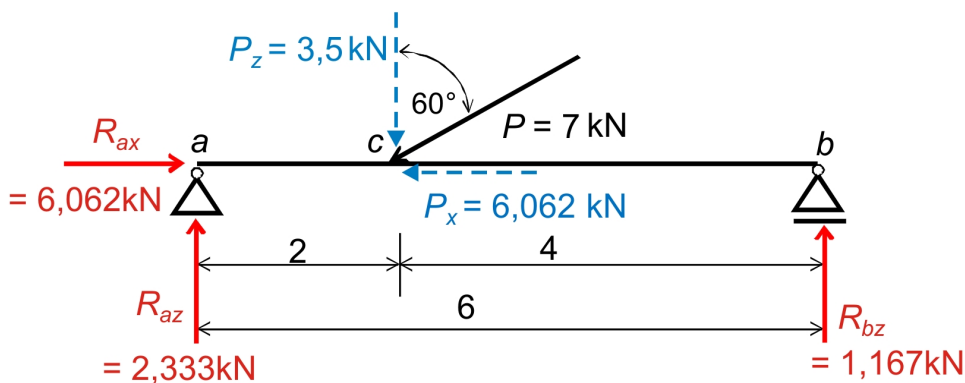
$$M_x = R_{bz} \cdot x - P_z \cdot (x - l_{bc})$$

$$M_a = R_{bz} \cdot l - P_z \cdot l_{ac} = 0$$

Obrázek 4.6: Normálové síly z př. 4.1.2

4.1.3 Příklad - nosník s převislým koncem

Nosník s převislými konci je zatížen bodovými zatíženími podle obr. 4.7. Reakce jsou vyřešeny v kap.3.2.



Normálové síly:

zleva:

$$N_a = (N_{ac}) = -R_{ax}$$

$$N_{cb} = -R_{ax} + P_x$$

zprava:

$$N_b = (N_{b-c}) = 0$$

$$N_{c-a} = -P_x$$

Posouvající síly:

zleva:

$$V_a = (V_{a-c}) = R_{az}$$

$$V_{c-b} = R_{az} - P_z$$

zprava:

$$V_b = (V_{b-c}) = -R_{bz}$$

$$V_{ca} = -R_{bz} + P_z$$

Ohybové momenty:

zleva:

$$M_a = 0$$

$$M_x = R_{az} \cdot x$$

$$M_c = R_{az} \cdot l_{ac}$$

$$M_x = R_{az} \cdot x - P_z \cdot (x - l_{ac})$$

$$M_b = R_{az} \cdot l - P_z \cdot l_{cb} = 0$$

zprava:

$$M_b = 0$$

$$M_x = R_{bz} \cdot x$$

$$M_c = R_{bz} \cdot l_{bc}$$

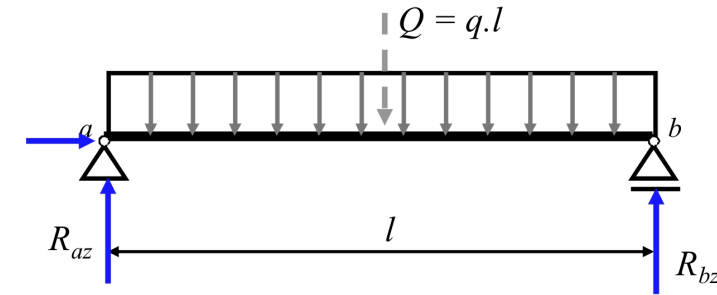
$$M_x = R_{bz} \cdot x - P_z \cdot (x - l_{bc})$$

$$M_a = R_{bz} \cdot l - P_z \cdot l_{ac} = 0$$

Obrázek 4.7: Normálové síly z př. 4.1.2

4.1.4 Příklad - rovnoměrné spojité zatížení

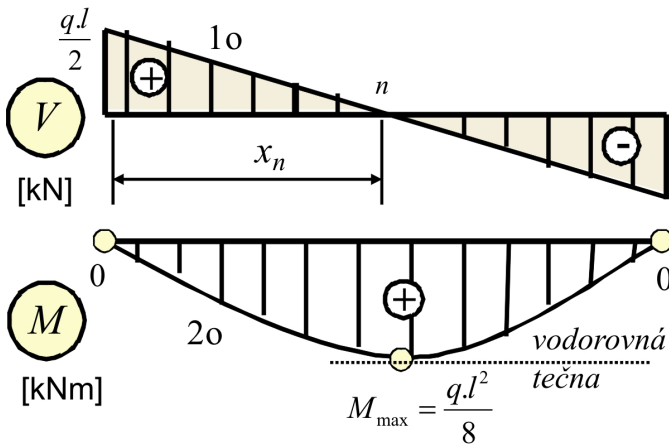
Určete obecně polohu nebezpečného průřezu a maximální moment na prostém nosníku zatíženým spojitým rovnoměrným zatížením q .



$$V_a = V_{(x=0)} = R_{az} = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$V_b = V_{(x=l)} = R_{az} - Q = -\frac{q \cdot l}{2}$$

$$V_n = 0 \Rightarrow V_a - q \cdot x_n = 0 \Rightarrow x_n = \frac{V_a}{q}$$



$$M_a = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_b = M_{(x=l)} = 0$$

$$M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = R_{az} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x_n - q \cdot x_n \cdot \frac{x_n}{2} = R_{az} \cdot x_n - \frac{q \cdot x_n^2}{2}$$

$$M_{(x_{\max})} = M_{(x=l/2)} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

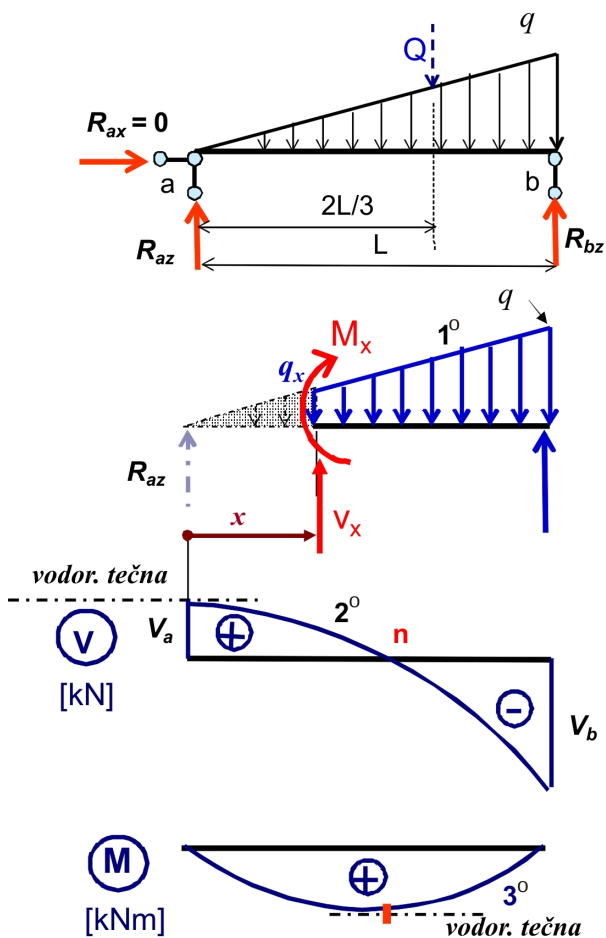
Obrázek 4.8: Posouvající síly řešeny zleva z př. 4.1.4

Nejprve jsou obecně určeny reakce viz kapitola 3.2. V tomto případě je nosník zatížen pouze svislým zatížením, takže normálové síly jsou rovny nule. Nosič je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením, takže $q = \text{konst}$. Podle Schwedlerových vztahů posouvající síla bude 1. řádu (lineární průběh) a ohybové momenty 2. řádu (parabolický průběh).

Při určování posouvajících sil je výhodné začít z levé strany nosníku, pokud síla směřuje nahoru, způsobuje kladnou posouvající sílu, kterou vykreslujeme také směrem nahoru. To znamená, že posouvající síla V_a v bodě a je rovna hodnotě reakce R_{az} . Mezi body a a b na délce nosníku x se změní hodnota posouvající síly o hodnotu $V_x = -q \cdot x$ (lineární funkce). Z podpory a do podpory b se posouvající síla změní o hodnotu $-q \cdot l$. V podpoře b tedy hodnota posouvající počítána zleva $V_b = R_{az} - q \cdot l = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot l = -\frac{q \cdot l}{2}$. Hodnoty posouvajících sil v bodě a a v bodě b spojíme přímkou. Pokud posouvající síla mění znaménko pod spojitým zatížením, určíme polohu tohoto místa x_n z rovnice $V^L - q \cdot x_n = 0$

Funkci ohybových momentů lze psát z levé strany $M_x = R_{az} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$ (rovnice paraboly), po dosazení za x hodnotu x_n dostaneme hodnotu extrémního momentu M_n .

4.1.5 Příklad - nerovnoměrné spojitě zatížení



$$V_a = R_{az}$$

$$V_b = R_{az} - Q = -R_{bz}$$

$$V_{(x)} = V_a - q_x \cdot \frac{x}{2} = V_a - \frac{q \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2} = V_a - \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot L}$$

$$V_n = 0 \Rightarrow V_a - q \cdot \frac{x_n^2}{2L} = 0 \Rightarrow x_n = \sqrt{\frac{V_a \cdot 2L}{q}}$$

$$M_a = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_b = M_{(x=L)} = 0$$

$$V_{(x)} = R_{az} - q_x \cdot \frac{x}{2} = V_a - \frac{q \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2} = V_a - \frac{q \cdot x^2}{2 \cdot L}$$

$$M_{(x)} = R_{az} \cdot x - \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot L}$$

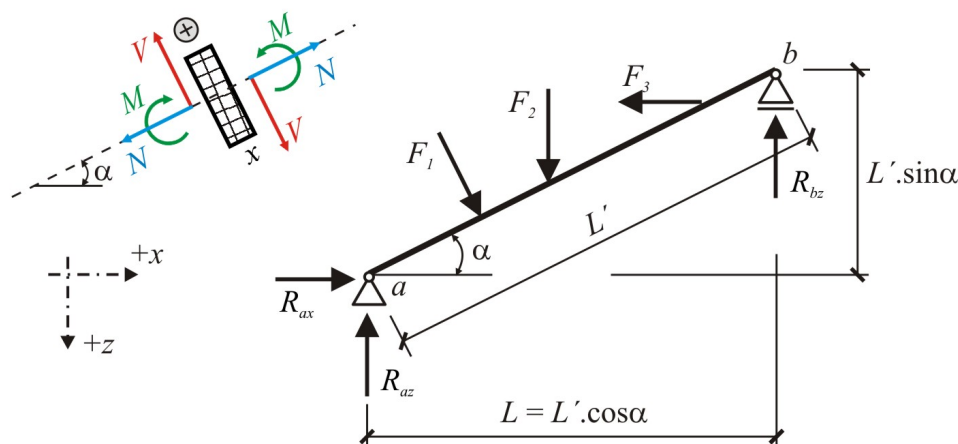
$$M_{(x)} = R_{az} \cdot x - \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot L}$$

Obrázek 4.9: Ohybový moment řešený zleva z př. 4.1.5

Kapitola 5

Vnitřní síly přímého šikmého nosníku

Pojem šikmý nosník je používán dle publikace [1] pro nosník ležící v souřadnicové rovině xz , který je vůči vodorovné ose x pootočen o úhel α . Pro šikmou délku je v této kapitole použito označení L' , vodorovný průmět délky je označen L a platí mezi nimi vztah $L = L' \cdot \cos \alpha$ (viz obrázek 5.1). Nosník je podepřen třemi jednoduchými vazbami proti posunům ve směrech os x a z , tedy jednou neposuvnou a jednou posuvnou kloubovou vazbou (stejně jako u prostého nosníku v rovinné úloze).



Obrázek 5.1: Šikmý nosník obecně zatížený - geometrie a kladné směry vnitřních sil na elementu

V obvyklých příkladech bývá nosník zatížen dvěma způsoby:

- zatížením, které působí kolmo na osu prutu (spojité zatížení nebo osamělá břemena),
- zatížením, které působí ve směru svislém (případně ve vodorovném, u bodových sil - příklady 5.4.3 a 5.4.4), přičemž intenzita svislého spojitého zatížení může být zadána dvojím způsobem:
 1. spojitě zatížení je zadáno na šikmou délku L' (například působení vlastní tíhy konstrukce) - příklad 5.2.1,
 2. spojitě zatížení je zadáno na půdorysný průmět, tedy na délku L (například zatížení sněhem) - příklad 5.3.1.

Grafické znázornění různých způsobů zadání intenzity spojitěho zatížení je patrné z obrázků 5.2, 5.6 a 5.10. Vzájemná souvislost mezi intenzitou **téhož** zatížení zadanou na šikmou délku a půdorysný průmět bude popsána v příkladu 5.3.

Výpočet vnitřních sil se provádí stejně jako u přímého vodorovného nosníku (kapitola 4), jen s tím rozdílem, že směr osy prutu už není shodný se směrem souřadnicové osy. Vnější síly tak není třeba rozkládat na **složky osově** (to je potřebné pouze pro výpočet reakcí), ale na takzvané **složky lokální**, které mají směr rovnoběžný, resp. kolmý na osu prutu, což vychází z obecné definice jednotlivých vnitřních sil (viz kapitola 4). Průběhy vnitřních sil se sestavují také podle zásad uvedených v kapitole 4 a vykreslují se vždy **kolmo** na šikmou osu nosníku.

Obecný postup řešení šikmého nosníku:

1. výpočet reakcí R_x , R_{az} a R_{bz} - dle kapitoly 3,
2. je-li zadáno spojitě zatížení působící na půdorysný průmět, je třeba jej nejdříve přepočítat na šikmou délku - viz příklad 5.3

$$q' = q \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

3. rozklad všech vnějších sil na lokální složky (osové a kolmé) -

$$P_{iz}^{\parallel} = P_{iz} \cdot \sin \alpha \quad (5.2)$$

$$P_{iz}^{\perp} = P_{iz} \cdot \cos \alpha \quad (5.3)$$

$$P_{ix}^{\parallel} = P_{ix} \cdot \cos \alpha \quad (5.4)$$

$$P_{ix}^{\perp} = P_{ix} \cdot \sin \alpha \quad (5.5)$$

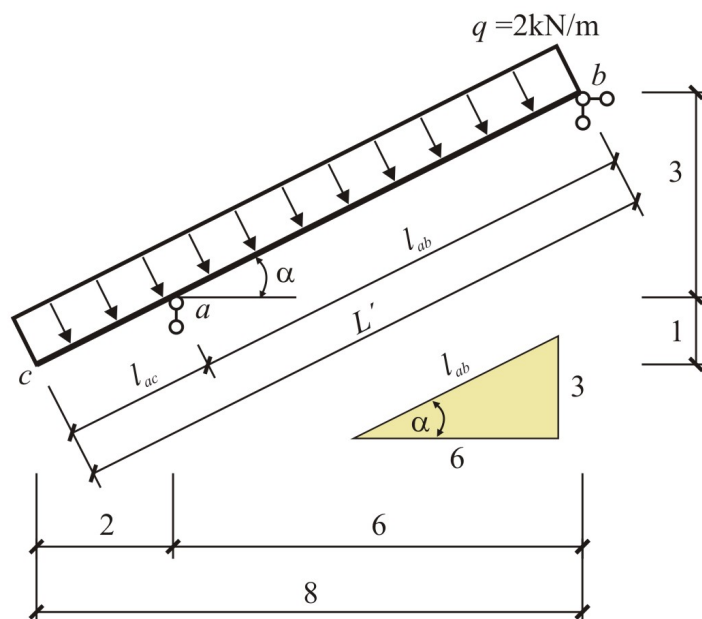
4. řešení osově úlohy - průběh normálových sil N z osových složek ($P^{\parallel}$),
5. řešení příčné úlohy - průběh posouvajících sil V a ohybových momentů M ze složek kolmých ($P^{\perp}$).

5.1 Zatížení kolmé ke střednici prutu

U takto zadaného zatížení je nutné pro výpočet reakcí (dle kapitoly 3) provést nejdříve rozklad zatížení na osově složky (ve směru os x a z). Při výpočtu vnitřních sil naopak není nutné zatížení rozkládat, jelikož už je zadáno ve směru kolmém na osu prutu (pro řešení příčné úlohy).

5.1.1 Šikmý prut zatížený spojitým zatížením kolmým ke střednici

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Zadání příkladu 5.1.1

Přípravné výpočty

Značení jednotlivých veličin je převzato z obrázků 5.2 a 5.3.

$$L' = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}\text{m}; l_{ab} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\text{m}; l_{ac} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\text{m}$$

$$\sin \alpha = 3/l_{ab} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = 6/l_{ab} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$Q_1 = q \cdot l_{ac} = 2\sqrt{5}\text{kN}; Q_2 = q \cdot l_{ab} = 6\sqrt{5}\text{kN}$$

Pro výpočet reakcí (dle kapitoly ??) je potřeba rozložit náhradní břemena na osově složky:

$$Q_{1x} = Q_1 \cdot \sin \alpha = 2\text{kN}; Q_{1z} = Q_1 \cdot \cos \alpha = 4\text{kN}$$

$$Q_{2x} = Q_2 \cdot \sin \alpha = 6\text{kN}; Q_{2z} = Q_2 \cdot \cos \alpha = 12\text{kN}$$

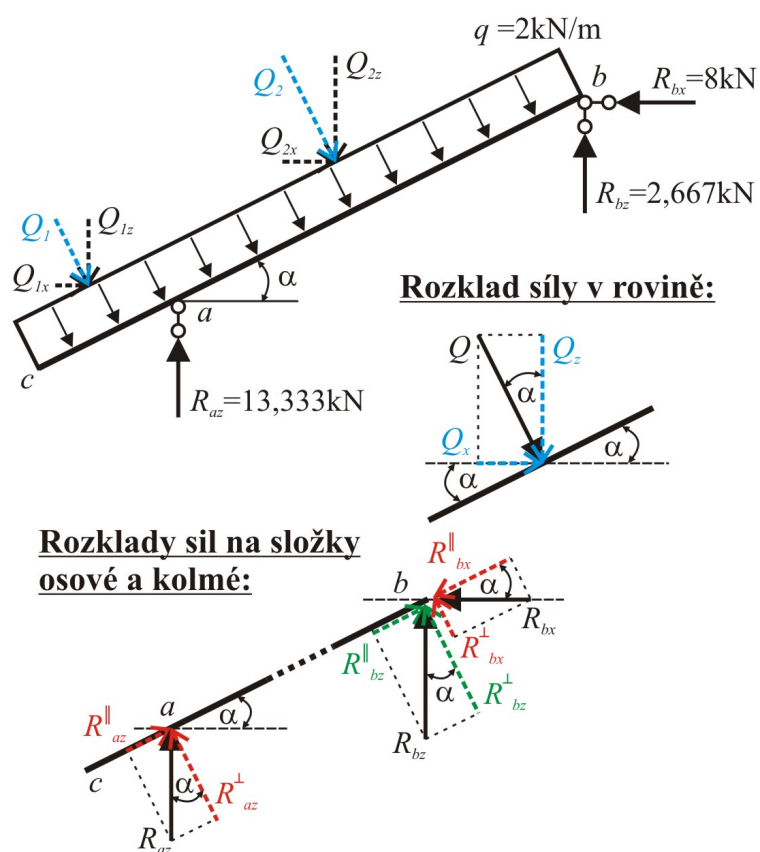
Rozklad sil

Pro výpočet vnitřních sil by bylo postačující rozložit pouze reakci R_{az} , ale ze cvičných důvodů je zde uveden rozklad i ostatních reakcí (viz obrázek 5.3). Jednotlivé lokální složky jsou vypočteny na základě rovnic 5.2 až 5.5.

$$R_{az}^{\parallel} = 5,96\text{kN}; R_{az}^{\perp} = 11,96\text{kN}$$

$$R_{bz}^{\parallel} = 1,19\text{kN}; R_{bz}^{\perp} = 2,385\text{kN}$$

$$R_{bx}^{\parallel} = 7,16\text{kN}; R_{bx}^{\perp} = 3,58\text{kN}$$



Obrázek 5.3: Hodnoty reakcí dle příkladu 3.3.6 z kapitoly 3 a rozklad sil na nosníku z příkladu 5.1.1

Normálové síly

$$N_{ac} = 0; N_{ab} = -R_{az}^{\parallel} = -5,96 \text{ kN}; N_b = N_{ab} = -5,96 \text{ kN}$$

Posouvající síly

$$V_c = 0; V_{ac}^L = -Q_1 = -4,47 \text{ kN}; V_{ab}^L = -Q_1 + R_{az}^{\perp} = 7,45 \text{ kN}; V_b^L = -Q_1 + R_{az}^{\perp} - Q_2 = -5,96 \text{ kN}$$

$$(V_b^P = -R_{bx}^{\perp} - R_{bz}^{\perp})$$

$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^P = V_b/q = 2,98 \text{ m}; x_n^L = V_{ab}/q = 3,73 \text{ m}$$

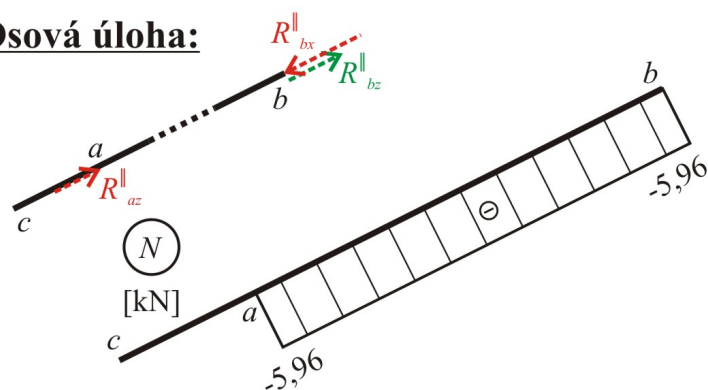
Ohybové momenty

$$M_b = M_c = 0; M_a^L = -Q_1 \cdot \frac{l_{ac}}{2} = -5,0 \text{ kNm}; M_{\frac{a-c}{2}}^L = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(\frac{l_{ac}}{2}\right)^2 = -1,25 \text{ kNm}$$

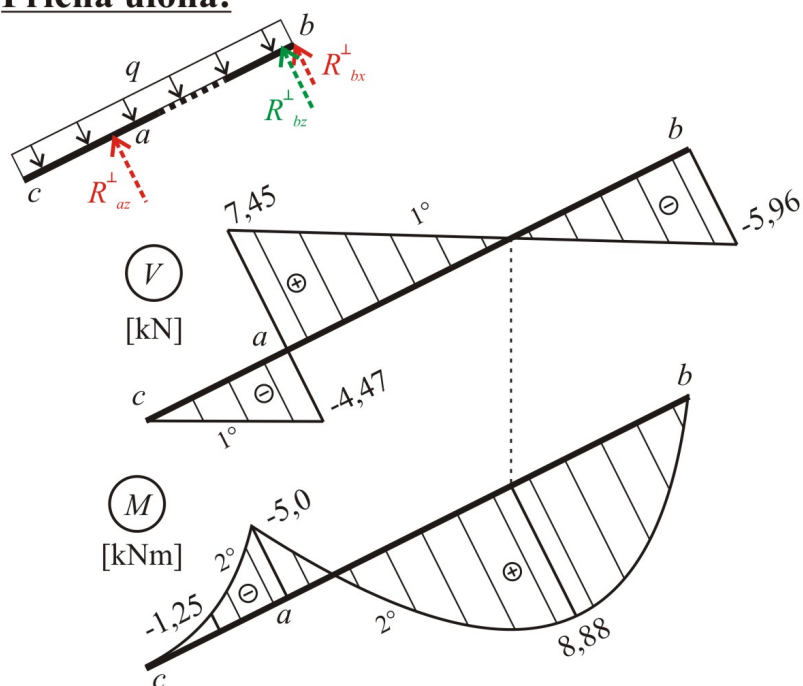
$$\text{Výpočet extrémního momentu (v průřezu } n): M_n^P = R_{bx}^{\perp} \cdot x_n^P + R_{bz}^{\perp} \cdot x_n^P - \frac{1}{2} \cdot q \cdot (x_n^P)^2 = 8,88 \text{ kNm}$$

Průběh vnitřních sil je zakreslen na obrázku 5.4.

Osová úloha:



Příčná úloha:



Obrázek 5.4: Výsledné průběhy vnitřních sil šikmého prutu z příkladu 5.1.1

5.1.2 Šikmý prut zatížený silou kolmou ke střednici

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.5. Postup je podobný jako u příkladu 5.1.1.

Přípravné výpočty

$$L' = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{m}; \sin \alpha = 2/L' = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = 4/L' = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pro výpočet reakcí (dle kapitoly 3) je potřeba rozložit zadanou sílu na osově složky:

$$P_x = P \cdot \sin \alpha = \underline{4,472\text{kN}}; P_z = P \cdot \cos \alpha = \underline{8,944\text{kN}}$$

Rozklad sil

$$R_{az}^{\parallel} = \underline{2,5\text{kN}}; R_{az}^{\perp} = \underline{5,0\text{kN}}; R_{bz}^{\parallel} = \underline{1,5\text{kN}}; R_{bz}^{\perp} = \underline{3,0\text{kN}}; R_{bx}^{\parallel} = \underline{4,0\text{kN}}; R_{bx}^{\perp} = \underline{2,0\text{kN}}$$

Normálové síly

$$N_a = N_b = -R_{az}^{\parallel} = -2,5\text{kN}$$

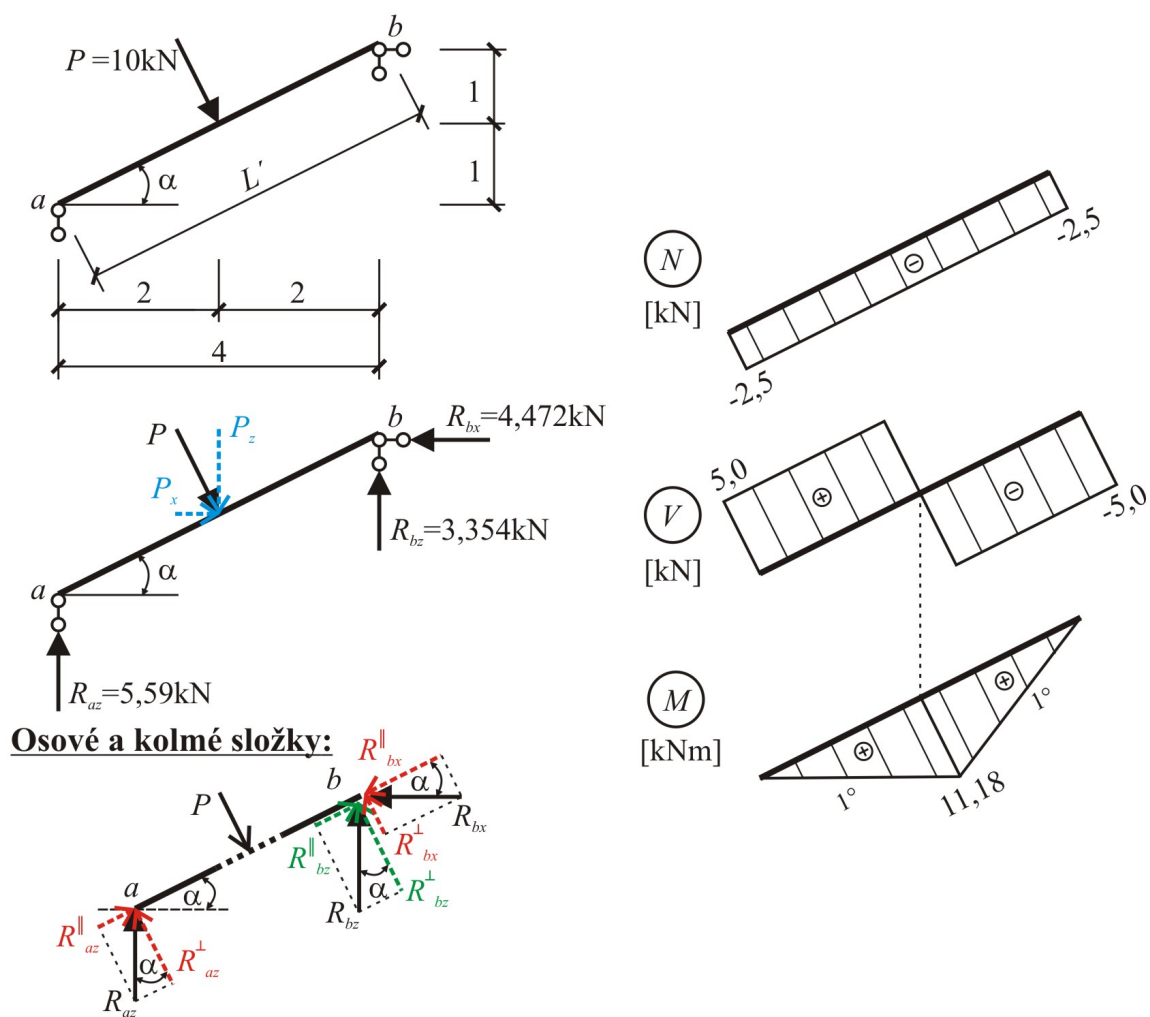
Posouvající síly

$$V_a^L = V_{Pa} = R_{az}^{\perp} = 5,0\text{kN}; V_{Pb} = V_b^L = R_{az}^{\perp} - P = -5,0\text{kN}$$

Ohybové momenty

$$M_a = M_b = 0; M_P^L = R_{az}^{\perp} \cdot \frac{L'}{2} = R_{az} \cdot \frac{L}{2} = 11,18\text{kNm};$$

Průběh vnitřních sil je zakreslen na obrázku 5.5.



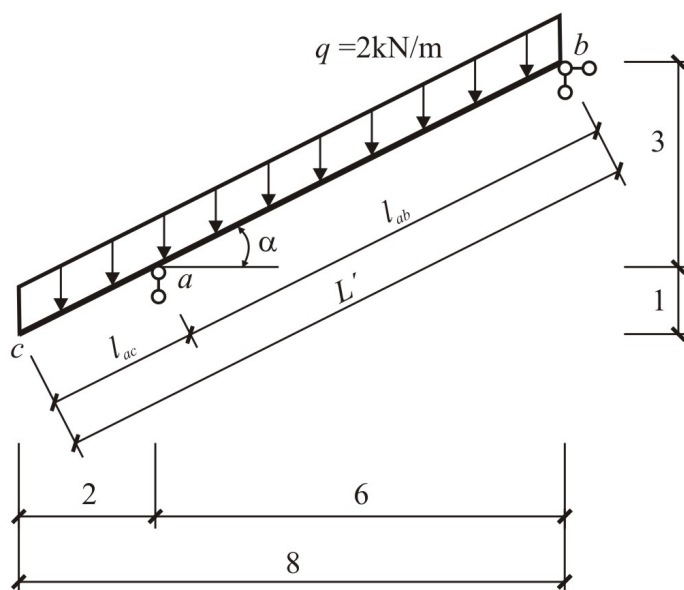
Obrázek 5.5: Zadání a řešení příkladu 5.1.2

5.2 Zatížení svislé, působení na šikmou délku prutu

Narozdíl od předešlého typu zatížení není třeba pro výpočet reakcí rozkládat zatížení v rovině, jelikož působí přímo ve směru osy z . Pro výpočet vnitřních sil je pak ale nutné zatížení (osamělé síly i spojité zatížení) rozložit do lokálních (osových a kolmých) složek. U takto zadaného spojitého zatížení je dále důležitý správný výpočet náhradních břemen, který se provádí ze šikmé délky.

5.2.1 Šikmý prut zatížený spojitým zatížením zadaným na délku prutu

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: Zadání příkladu 5.2.1

Přípravné výpočty

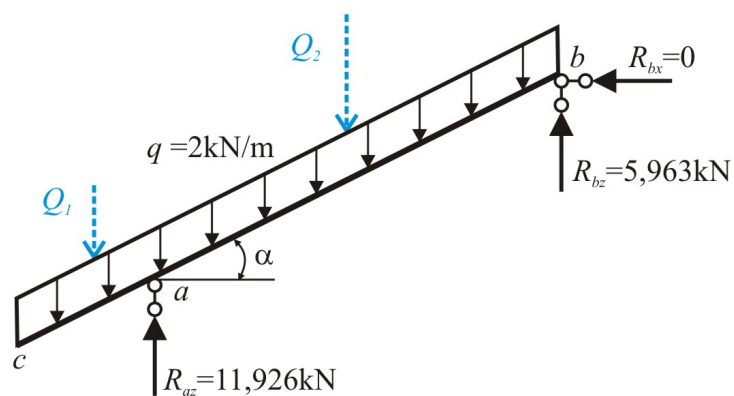
Značení jednotlivých veličin je převzato z obrázků 5.6 a 5.7.

$$L' = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}\text{m}; l_{ab} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\text{m}; l_{ac} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\text{m}$$

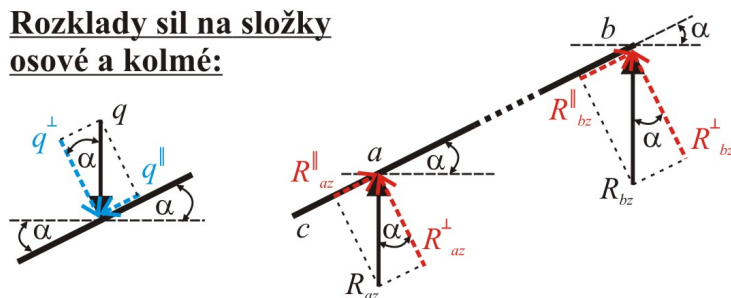
$$\sin \alpha = 3/l_{ab} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = 6/l_{ab} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$Q_1 = q \cdot l_{ac} = 2\sqrt{5}\text{kN}; Q_2 = q \cdot l_{ab} = 6\sqrt{5}\text{kN}$$

Náhradní břemena mají **svislý směr**!



**Rozklady sil na složky
osové a kolmé:**



Obrázek 5.7: Hodnoty reakcí dle příkladu 3.3.7 z kapitoly 3 a rozklad sil na nosníku z příkladu 5.2.1

Rozklad sil

Grafické znázornění je na obrázku 5.7. Vzhledem ke směru působení zatížení je vodorovná reakce nulová.

$$R_{az}^{\parallel} = \underline{5,33\text{kN}}; R_{az}^{\perp} = \underline{10,67\text{kN}}$$

$$R_{bz}^{\parallel} = \underline{2,67\text{kN}}; R_{bz}^{\perp} = \underline{5,33\text{kN}}$$

$$q^{\parallel} = \underline{0,894\text{kN/m}}; q^{\perp} = \underline{1,789\text{kN/m}}$$

Normálové síly

$$N_c = 0; N_{ac} = q^{\parallel} \cdot l_{ac} = 2,0\text{kN}; N_{ab} = q^{\parallel} \cdot l_{ac} - R_{az}^{\parallel} = -3,333\text{kN};$$

$$N_b = q^{\parallel} \cdot L' - R_{az}^{\parallel} = R_{bz}^{\parallel} = 2,667\text{kN}$$

Posouvající síly

$$V_c = 0; V_{ac}^L = -q^{\perp} \cdot l_{ac} = -4,0\text{kN}; V_{ab}^L = -q^{\perp} \cdot l_{ac} + R_{az}^{\perp} = 6,667\text{kN};$$

$$V_b = -q^{\perp} \cdot L' + R_{az}^{\perp} = R_{bz}^{\perp} = -5,33\text{kN}$$

$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^P = V_b/q^{\perp} = 2,981\text{m}; x_n^L = V_{ab}/q^{\perp} = 3,727\text{m}$$

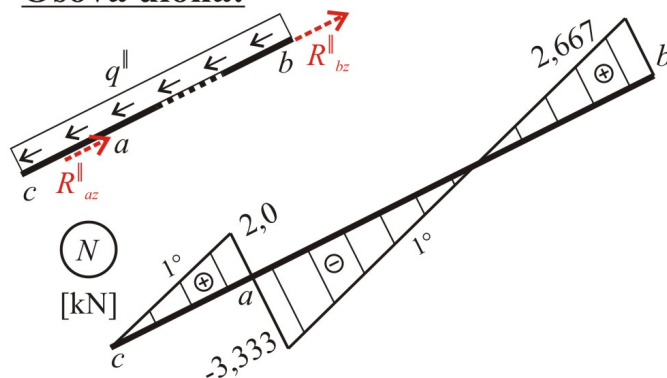
Ohybové momenty

$$M_b = M_c = 0; M_a^L = -\frac{1}{2} \cdot q^{\perp} \cdot l_{ac}^2 = -4,47\text{kNm}; M_{\frac{a-c}{2}}^L = -\frac{1}{2} \cdot q^{\perp} \cdot \left(\frac{l_{ac}}{2}\right)^2 = -1,118\text{kNm}$$

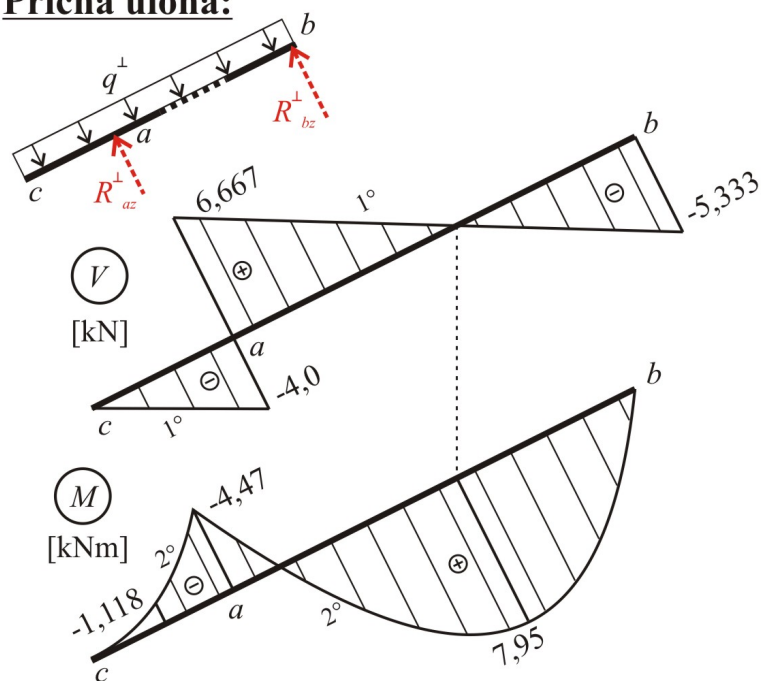
$$\text{Výpočet extrémního momentu (v průřezu } n): M_n^P = R_{bz}^{\perp} \cdot x_n^P - \frac{1}{2} \cdot q^{\perp} \cdot (x_n^P)^2 = 7,95\text{kNm}$$

Průběh vnitřních sil je zakreslen na obrázku 5.8.

Osová úloha:



Příčná úloha:



Obrázek 5.8: Výsledné průběhy vnitřních sil šikmého prutu z příkladu 5.2.1

5.2.2 Šikmý prut zatížený svislou silou

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.9.

Přípravné výpočty

$$L' = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{m}; \sin \alpha = 2/L' = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = 4/L' = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Rozklad sil

$$R_{az}^{\parallel} = R_{bz}^{\parallel} = 2,236\text{kN}; R_{az}^{\perp} = R_{bz}^{\perp} = 5,0\text{kN}$$

$$P^{\parallel} = 4,472\text{kN}; P^{\perp} = 8,944\text{kN}$$

Normálové síly

$$N_a^L = N_{Pa} = -R_{az}^{\parallel} = -2,236\text{kN}; V_{Pb} = V_b^L = -R_{az}^{\parallel} + P^{\parallel} = R_{bz}^{\parallel} = 2,236\text{kN}$$

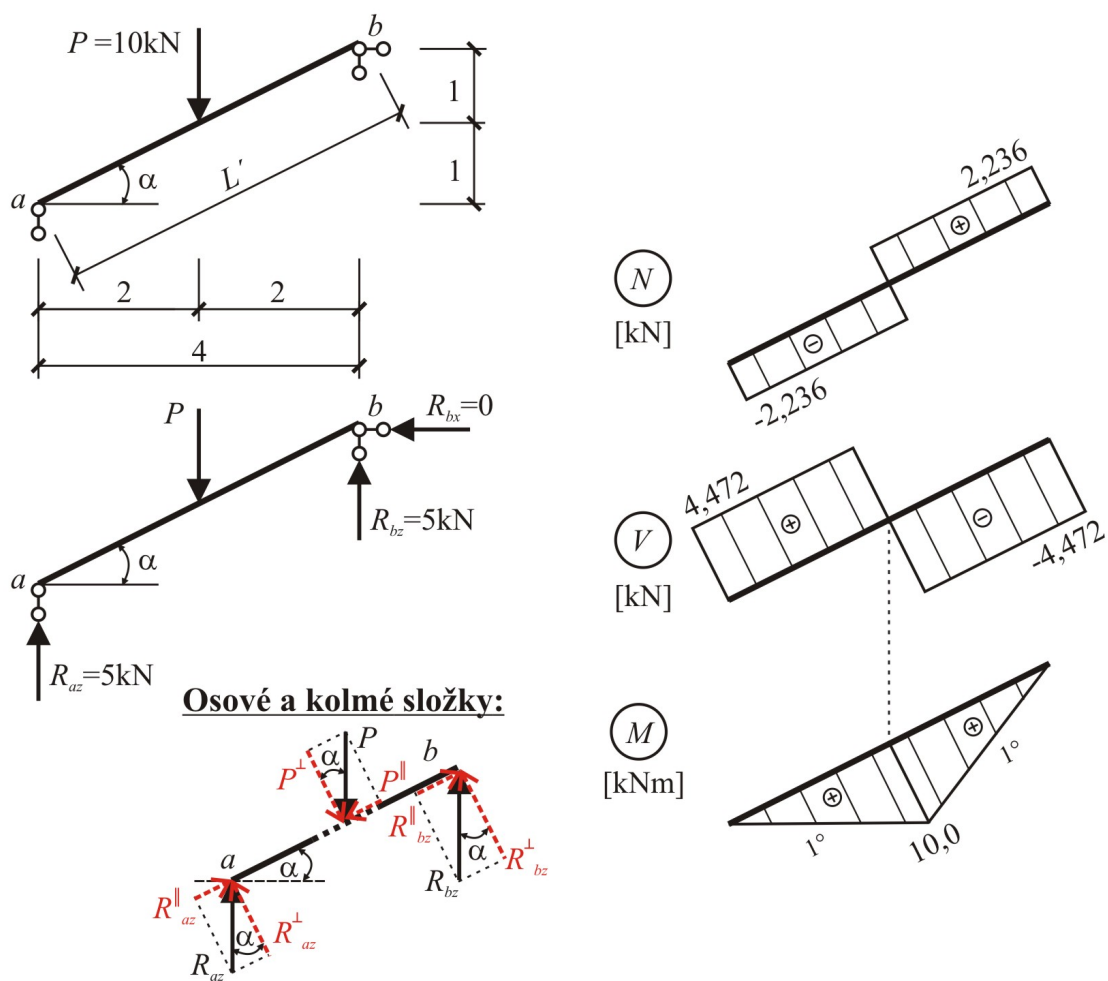
Posouvající síly

$$V_a^L = V_{Pa} = R_{az}^{\perp} = 4,472\text{kN}; V_{Pb} = V_b^L = R_{az}^{\perp} - P^{\perp} = -R_{bz}^{\perp} = -4,472\text{kN}$$

Ohybové momenty

$$M_a = M_b = 0; M_P^L = R_{az}^{\perp} \cdot \frac{L'}{2} = R_{az} \cdot \frac{L}{2} = 10\text{kNm};$$

Průběh vnitřních sil je zakreslen na obrázku 5.9.



Obrázek 5.9: Zadání a řešení příkladu 5.2.2

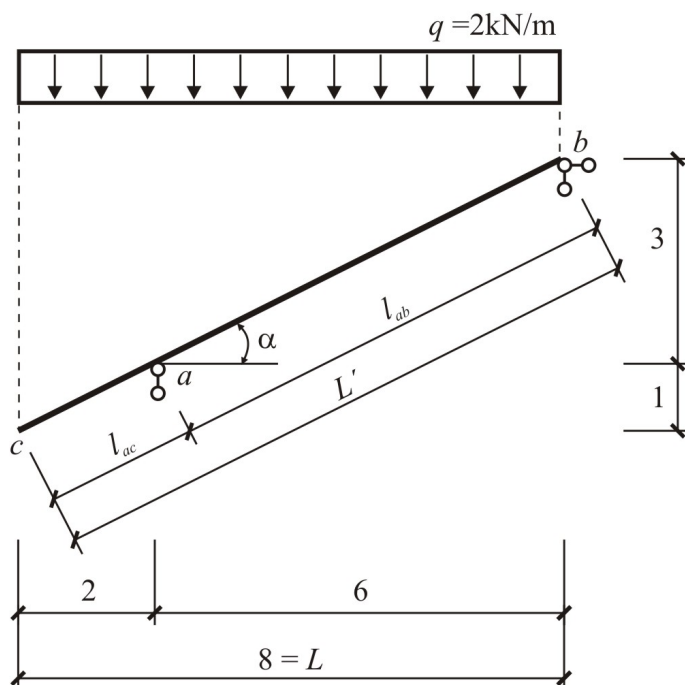
5.3 Spojité zatížení zadáno na půdorysný průmět

Hlavním rozdílem oproti spojitému zatížení dle oddílu 5.2 je ve smyslu působení a z toho vyplývajícího výpočtu náhradních břemen. Ten se provádí z **půdorysné délky**. Takto zadané spojité zatížení je pak nutné před jeho rozkladem na osově a kolmé složky přepočítat na zatížení působící na **šikmou délku** (dle rovnice 5.1). Tento přepočet vychází z principu zachování stejného účinku zatížení, prakticky tedy z rovnosti výsledných náhradních břemen (viz obrázek 5.11). Rovnice 5.1 je odvozena z následujícího vztahu:

$$q' = \frac{q \cdot L}{L'} \quad (5.6)$$

5.3.1 Šikmý prut zatížený spojitým zatížením zadaným na průmět

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.10.



Obrázek 5.10: Zadání příkladu 5.3.1

Přípravné výpočty

Značení jednotlivých veličin je převzato z obrázků 5.10 a 5.11.

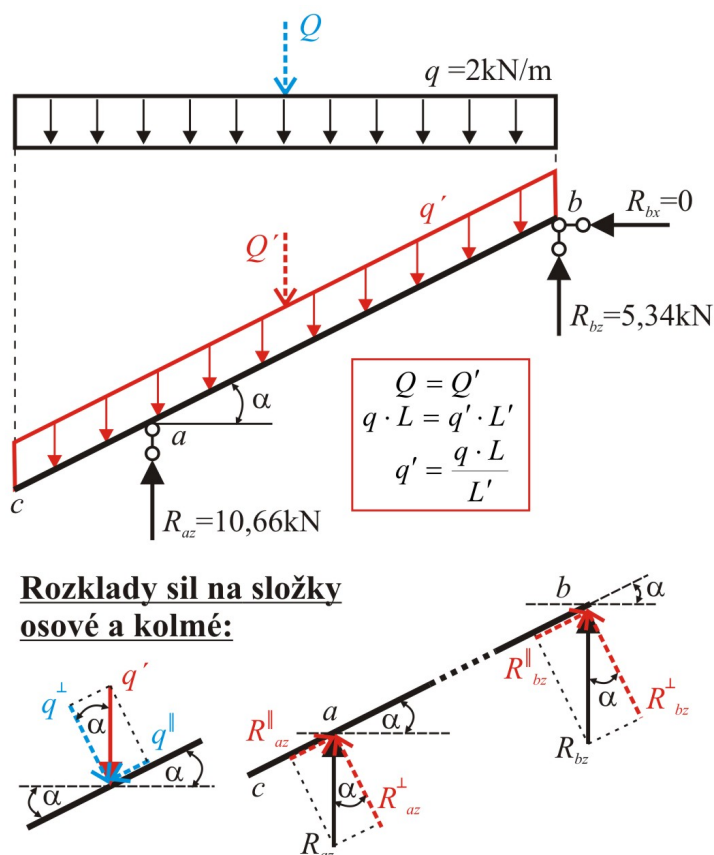
$$L' = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}\text{m}; \quad l_{ab} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}\text{m}; \quad l_{ac} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\text{m}$$

$$\sin \alpha = 3/l_{ab} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha = 6/l_{ab} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$Q = q \cdot L = 16\text{kN}$$

Náhradní břemeno má **svislý směr**!

Přepočet spojitého zatížení na intenzitu na šikmou délku: $q' = \frac{2 \cdot 8}{4\sqrt{5}} = 1,789 \text{ kN/m}$



Obrázek 5.11: Hodnoty reakcí dle kapitoly 3 a rozklad sil na nosníku z příkladu 5.3.1

Rozklad sil

Grafické znázornění je na obrázku 5.11. Vzhledem ke směru působení zatížení je vodorovná reakce nulová. Rozklad spojitého zatížení je proveden z přepočtené hodnoty zatížení q' !

$$R_{az}^{\parallel} = 4,77 \text{ kN}; R_{az}^{\perp} = 9,54 \text{ kN}$$

$$R_{bz}^{\parallel} = 2,385 \text{ kN}; R_{bz}^{\perp} = 4,77 \text{ kN}$$

$$q'^{\parallel} = 0,8 \text{ kN/m}; q'^{\perp} = 1,58 \text{ kN/m}$$

Normálové síly

$$N_c = 0; N_{ac} = q'^{\parallel} \cdot l_{ac} = 1,79 \text{ kN}; N_{ab} = q'^{\parallel} \cdot l_{ac} - R_{az}^{\parallel} = -2,98 \text{ kN};$$

$$N_b = q'^{\parallel} \cdot L' - R_{az}^{\parallel} = R_{bz}^{\parallel} = 2,39 \text{ kN}$$

Posouvající síly

$$V_c = 0; V_{ac}^L = -q'^{\perp} \cdot l_{ac} = -3,58 \text{ kN}; V_{ab}^L = -q'^{\perp} \cdot l_{ac} + R_{az}^{\perp} = 5,97 \text{ kN};$$

$$V_b = -q'^{\perp} \cdot L' + R_{az}^{\perp} = R_{bz}^{\perp} = -4,77 \text{ kN}$$

$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^P = V_b / q'^{\perp} = 3,019 \text{ m}; x_n^L = V_{ab} / q'^{\perp} = 3,778 \text{ m}$$

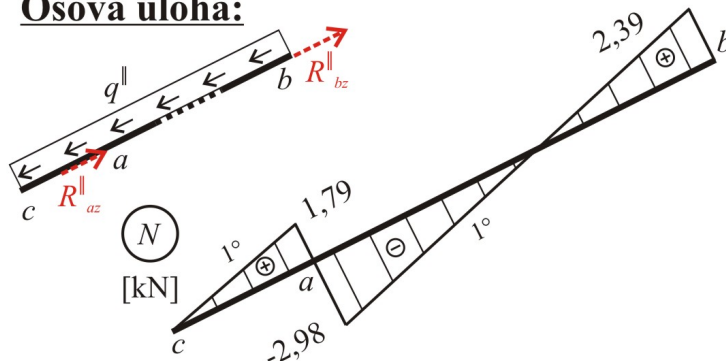
Ohybové momenty

$$M_b = M_c = 0; M_a^L = -\frac{1}{2} \cdot q'^{\perp} \cdot l_{ac}^2 = -4,0 \text{ kNm}; M_{\frac{a-c}{2}}^L = -\frac{1}{2} \cdot q'^{\perp} \cdot \left(\frac{l_{ac}}{2}\right)^2 = -1,0 \text{ kNm}$$

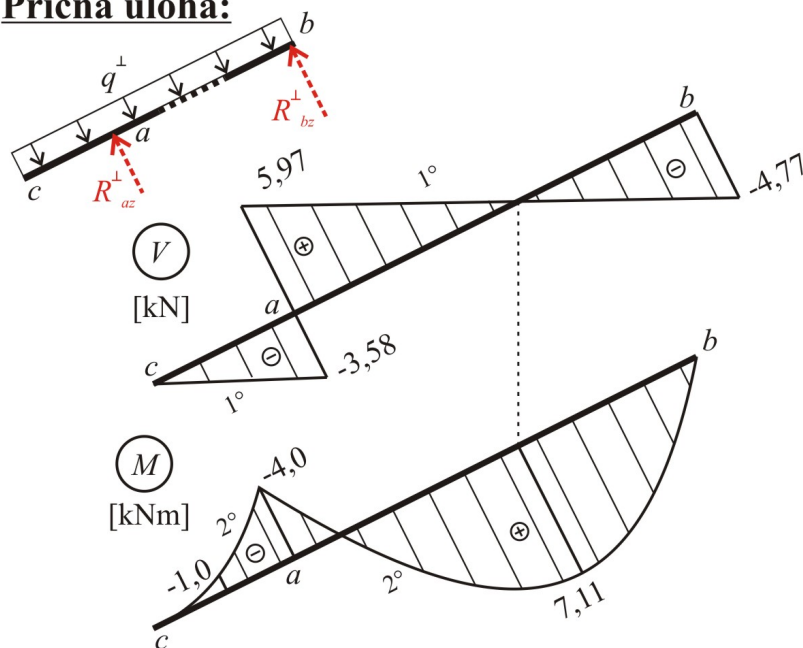
Výpočet extrémního momentu (v průřezu n): $M_n^P = R_{bz}^{\perp} \cdot x_n^P - \frac{1}{2} \cdot q'^{\perp} \cdot (x_n^P)^2 = 7,11 \text{ kNm}$

Průběh vnitřních sil je zakreslen na obrázku 5.12.

Osová úloha:



Příčná úloha:

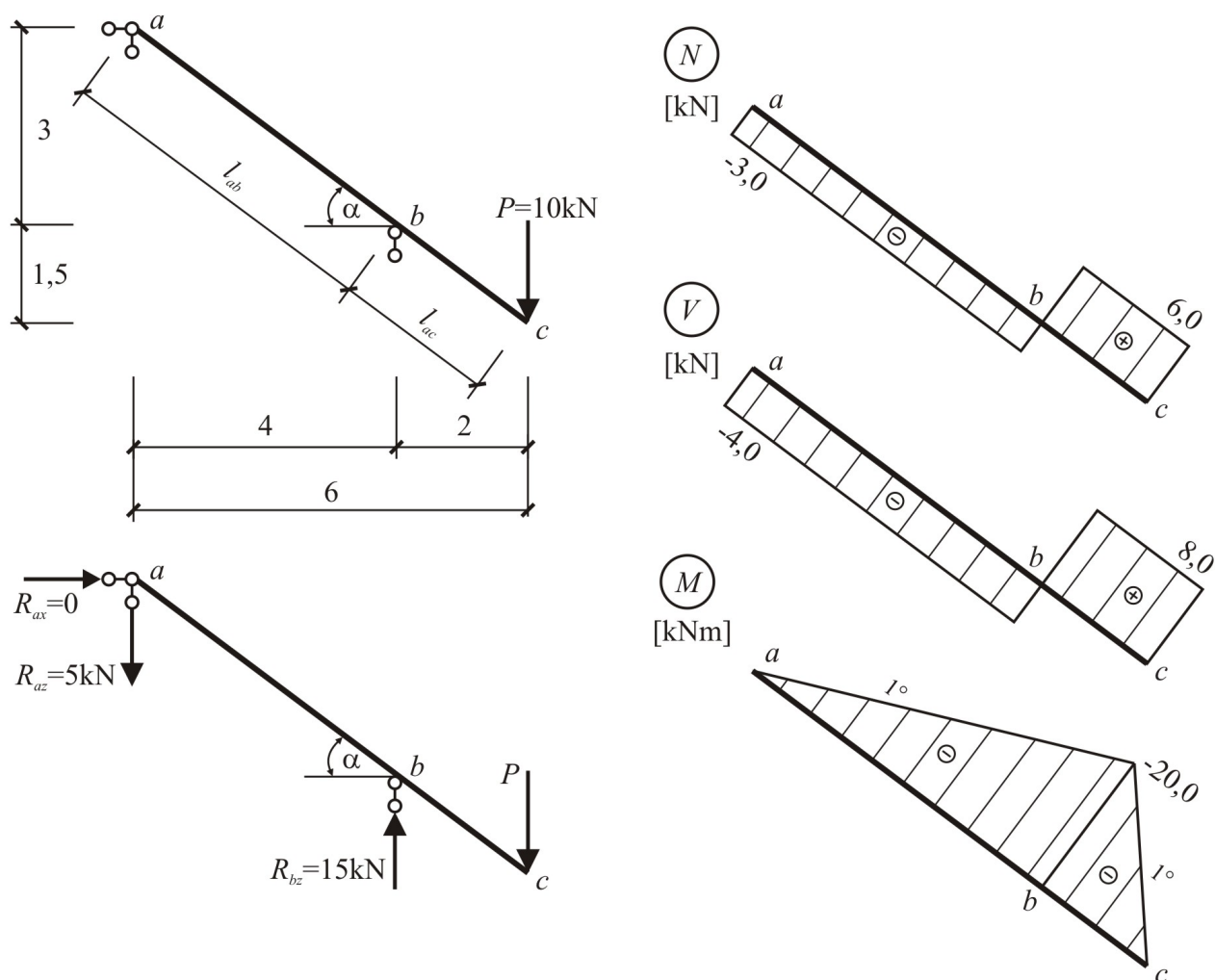


Obrázek 5.12: Výsledné průběhy vnitřních sil šikmého prutu z příkladu 5.3.1

5.4 Další řešené příklady

5.4.1 Šikmý prut - Příklad 1

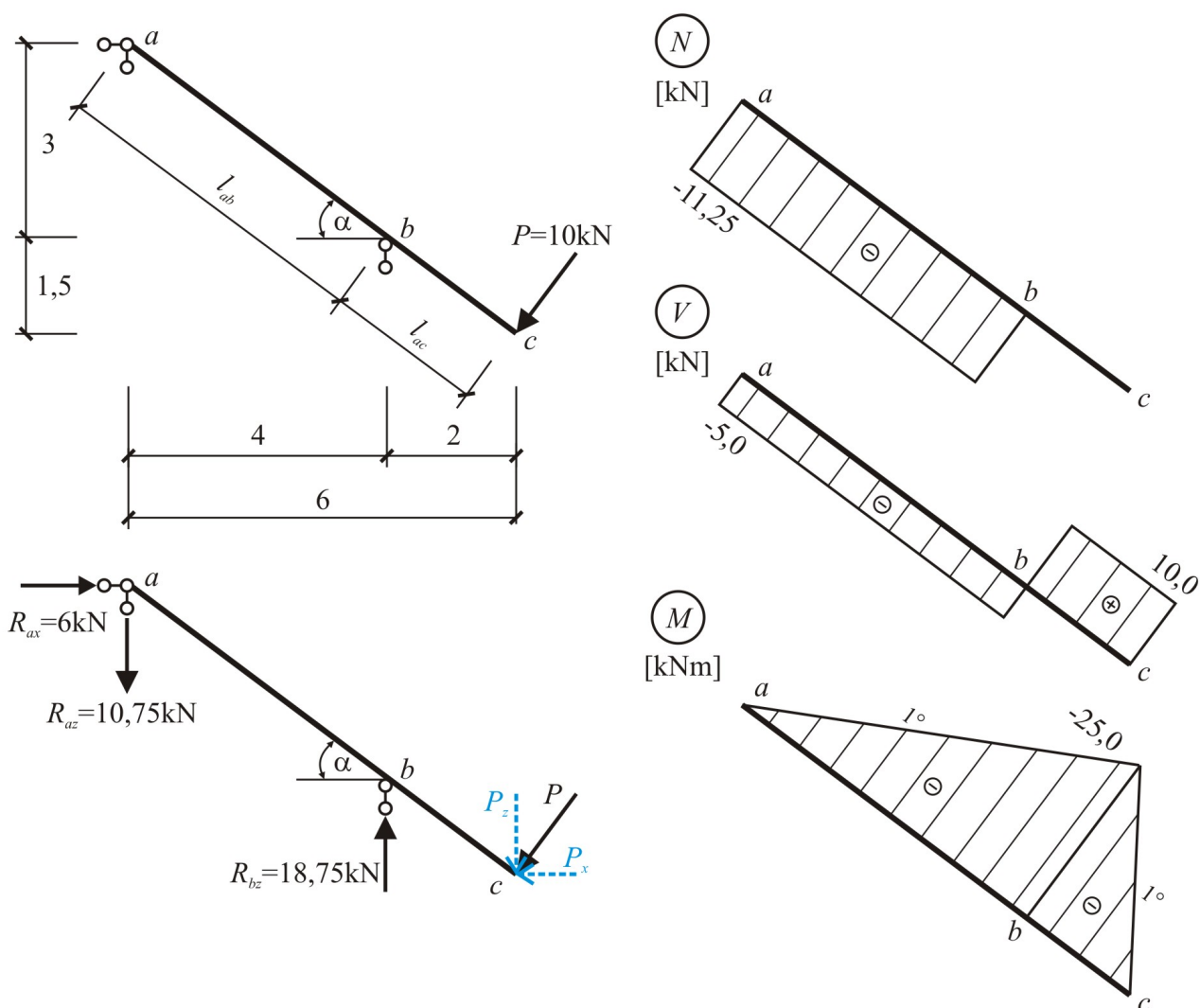
Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.13.



Obrázek 5.13: Zadání a řešení příkladu 5.4.1

5.4.2 Šikmý prut - Příklad 2

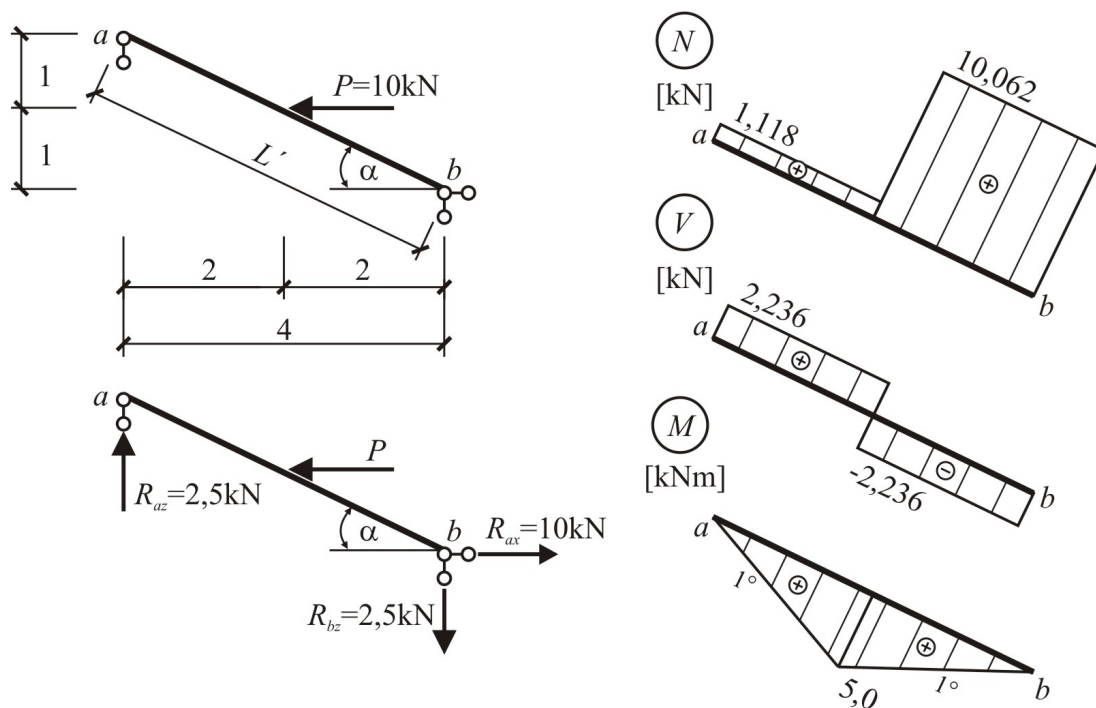
Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.14.



Obrázek 5.14: Zadání a řešení příkladu 5.4.2

5.4.3 Šikmý prut - Příklad 3

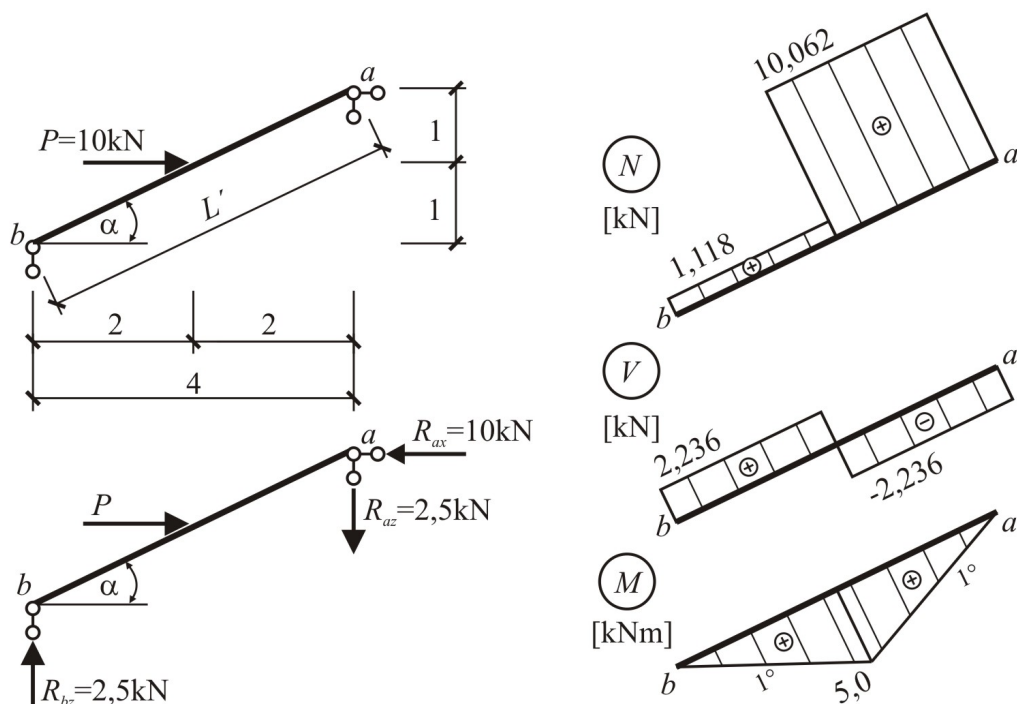
Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.15.



Obrázek 5.15: Zadání a řešení příkladu 5.4.3

5.4.4 Šikmý prut - Příklad 4

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na šikmém nosníku z obrázku 5.16.



Obrázek 5.16: Zadání a řešení příkladu 5.4.4

Kapitola 6

Vnitřní síly rovinně lomeného nosníku, pravoúhlé zalomení

6.1 Charakteristika rovinného lomeného nosníku

Lomený nosník (někdy označován také jako rám) je podle definice v publikaci [1] konstrukce, jejíž střednice je rovinná lomená čára složená (ve smyslu této kapitoly) ze svislých a vodorovných částí, pro které se používá označení **pruty**. Střednice může být nerozvětvená i rozvětvená, avšak žádná z částí nesmí tvořit uzavřenou čáru (jednalo by se pak o jiný typ konstrukce). Má-li se jednat o rám rovinný, předpokládá se, že všechny pruty mají společnou hlavní rovinu xz . Za předpokladu řešení pouze staticky určitých konstrukcí lze uvažovat dva způsoby podepření:

- neposuvné vetknutí v rovině nosníku v jediné podpoře (např. v příkladu 6.4.2),
- kloubové podepření ve dvou podporách; v jedné z podpor podepření neposuvné, ve druhé pak posuvné (např. v příkladu 6.4.1).

Podporové body, koncové body a body lomu nebo větvení se nazývají **uzly** (někdy se používá také pojem **styčníky**) a označují se malými písmeny.

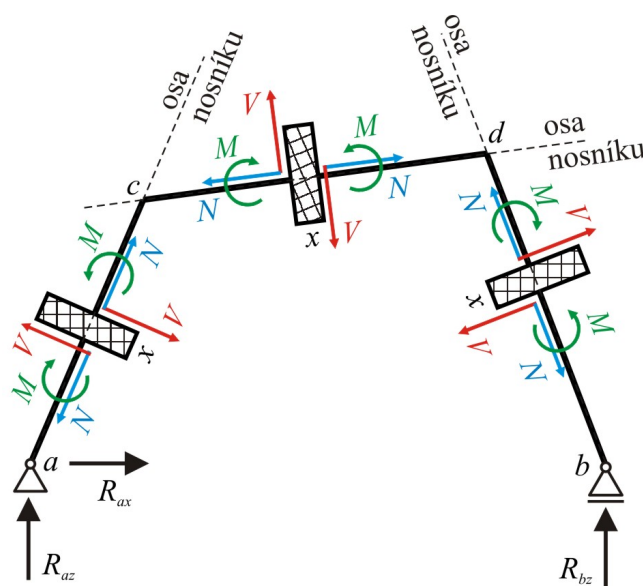
Na kterýkoliv prut lomeného nosníku může působit po jeho délce libovolné zatížení (silové i momentové) v rovině jeho střednice (rovina xz). Kromě toho mohou působit také bodové síly či momenty přímo v uzlech. Zadané zatížení vyvolá v jednotlivých prutech obecně všechny tři složky vnitřních sil, tedy normálové síly N , posouvající síly V i ohybové momenty M . Aby bylo možné určit znaménka vnitřních sil a následně správně vykreslit jejich průběhy, je nutné nejdříve jednotlivé pruty **orientovat**, tedy určit, který z koncových uzlů bude po pomyslném otočení prutu do vodorovného směru považován za „levý“ a „pravý“. Orientace nosníku může být vyjádřena pomocí uspořádané dvojice písmen, kdy první písmeno označuje levý uzel a druhé uzel pravý, případně graficky: na straně uvažovaných „spodních“ vláken (u okraje, který bude po pootočení považován za dolní) je zakreslena přerušovaná čára. V následujících příkladech je používáno právě zmíněné grafické vyjádření orientace prutů.

6.2 Výpočet a vykreslení vnitřních sil

Hodnoty vnitřních sil v libovolném průřezu lze vypočítat z podmínek rovnováhy z levé anebo pravé části, na které je zvoleným průřezem celá konstrukce rozdělena. V praxi je dostačující

výpočet pouze z jedné strany a to z té, která umožňuje jednodušší výpočet. Kladný smysl vnitřních sil na jednotlivých prutech obecně lomeného nosníku je patrný z obrázku 6.1. Hodnoty jednotlivých vnitřních sil jsou dle publikace [1] definovány následovně:

1. **Normálová síla** N v zadaném průřezu je rovna algebraickému součtu všech sil (zatížení i reakcí) působících na zvolené části lomeného nosníku (levé či pravé) **ve směru osy prutu**.
2. **Posouvající síla** V v zadaném průřezu je rovna algebraickému součtu všech sil (zatížení i reakcí) působících na zvolené části lomeného nosníku (levé či pravé) **ve směru kolmém k ose prutu**.
3. **Ohybový moment** M v zadaném průřezu je roven algebraickému součtu statických momentů (k danému průřezu) všech sil a momentů (zatížení i reakcí) působících na zvolené části lomeného nosníku (levé či pravé).



Obrázek 6.1: Obecný rovinně lomený nosník v rovinné úloze se zakreslením kladných smyslů vnitřních sil na prutech

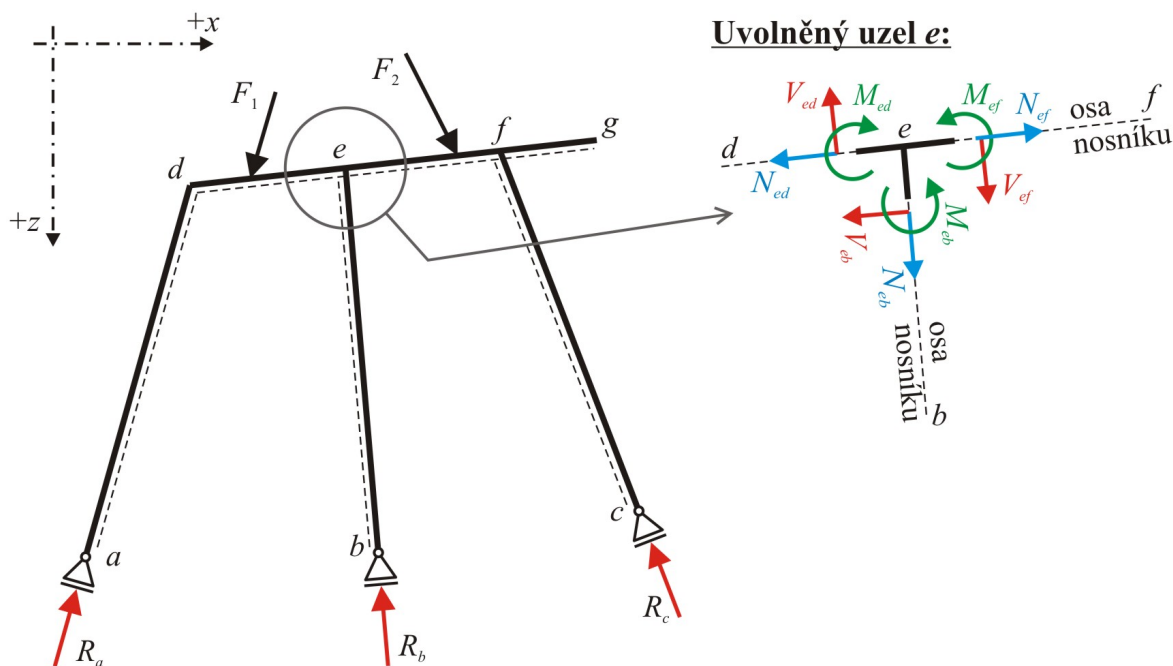
6.3 Kontrola rovnováhy ve styčnÍku

StyčnÍk si lze představit jako hmotný bod, v němž je spojeno několik prutů, což lze využít ke kontrole správnosti výpočtu vnitřních sil v jednotlivých prutech lomeného nosníku. Každý nosník totiž musí být v rovnováze jako celek, stejně tak, jako kterákoliv jeho část, kterou z nosníku vyjmeleme myšlenými řezy. StyčnÍk lze tedy pomyslně oddělit od prutů, které jsou v něm spojeny, a působení každého z těchto prutů lze vyjádřit prostřednictvím vnitřních sil (N , V , M), které na daném prutu vznikají v místě „uvolněného“ styčnÍku - viz obrázek 6.2.

Nejčastěji se tento princip používá pro kontrolu ohybových momentů u trojného (či vícenásobného) styčnÍku - tj. styčnÍk, který spojuje tři (a více) prutů. Všechny momenty se zakreslují ve skutečných smyslech svého působení a jsou k nim připsány jejich absolutní hodnoty

(viz řešení následujících příkladů). Algebraický součet všech těchto momentů pak má být roven nule, čímž je splněna momentová podmínka rovnováhy styčnicku. U styčníků, ve kterých se sbíhají dva pruty a nepůsobí v nich žádný osamělý moment, se rovnováha projeví tím, že ohybové momenty na koncích obou prutů jsou stejně velké (hodnota v rámovém rohu se takzvaně „překlápí“).

Kontrola silových podmínek rovnováhy se u staticky určitých konstrukcí příliš často nepoužívá, neboť může být výrazně náročnější. V silových podmínkách rovnováhy se totiž kombinují dva druhy vnitřních sil a pokud je některý z připojených prutů šikmý, je nutné dosazovat svislé a vodorovné složky normálových a posouvajících sil.



Obrázek 6.2: Kontrola rovnováhy trojného styčnicku

Poznámka:

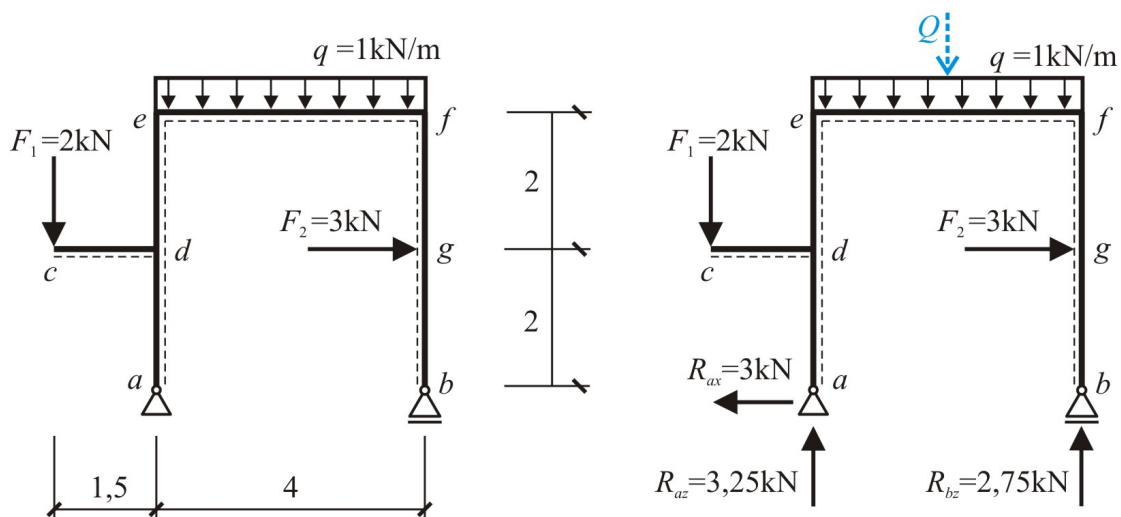
Pro označení vnitřních sil se zde používá dvou indexů (viz obrázky 6.4 a 6.5). Toto značení jasně definuje, ke kterému prutu se hodnota vnitřní síly vztahuje. První index udává místo (průřez), ve kterém jsou vnitřní síly počítány a druhý index specifikuje, pro který prut tyto hodnoty platí, s čímž obvykle souvisí také znaménková konvence.

Pro názornost jsou dva indexy použity u všech hodnot, i když v některých případech je dostačující označení pouze jedním indexem (pro normálovou a posouvající sílu v koncových bodech a pro ohybové momenty v místě dvojnásobného styčnicku - hodnoty jsou na obou prutech stejné, jak je vysvětleno v oddíle 6.3).

6.4 Řešené příklady

6.4.1 Příklad - rám 1

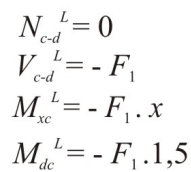
Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na pravoúhle lomeném nosníku na obrázku 6.3.



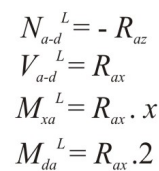
Obrázek 6.3: Zadání příkladu 6.4.1 včetně reakcí dle příkladu 3.3.8 z kapitoly 3

Řešení - rám 1

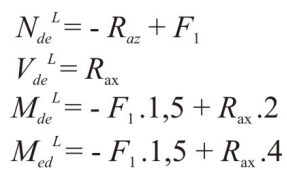
Vnitřní síly se určují postupně na jednotlivých prutech rámu. Postup je znázorněn na obrázcích 6.4 a 6.5, kde jsou vnitřní síly na uvolněných prutech zakresleny vždy v kladném smyslu.



$$\begin{aligned} N_{dc}^P &= F_2 - R_{ax} = 0 \\ V_{dc}^P &= -R_{az} - R_{bz} + Q \\ M_{dc}^P &= R_{bz} \cdot 4 - q \cdot 4^2/2 - R_{ax} \cdot 2 \end{aligned}$$

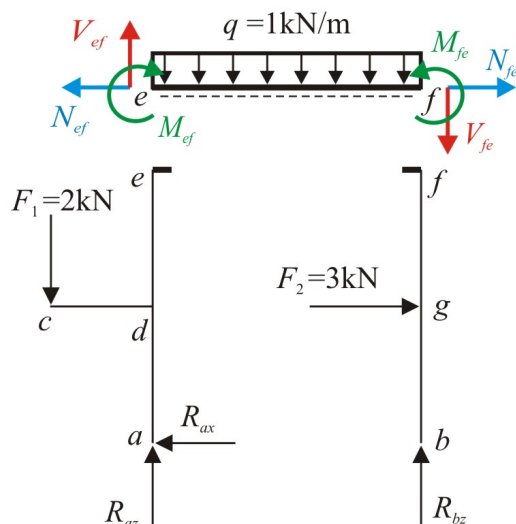


$$\begin{aligned} N_{da}^P &= -F_1 - Q + R_{bz} \\ V_{da}^P &= F_2 \\ M_{da}^P &= R_{bz} \cdot 4 - q \cdot 4^2/2 + F_1 \cdot 2 \end{aligned}$$

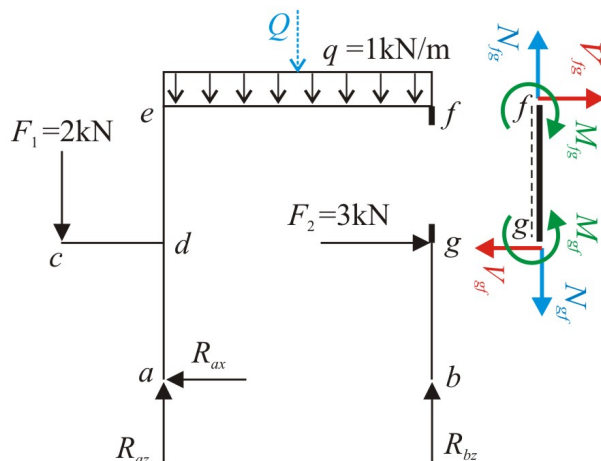


$$\begin{aligned} N_{ed}^P &= -Q + R_{bz} \\ V_{ed}^P &= F_2 \\ M_{de}^P &= R_{bz} \cdot 4 - q \cdot 4^2/2 \\ M_{ed}^P &= R_{bz} \cdot 4 + F_2 \cdot 2 - q \cdot 4^2/2 \end{aligned}$$

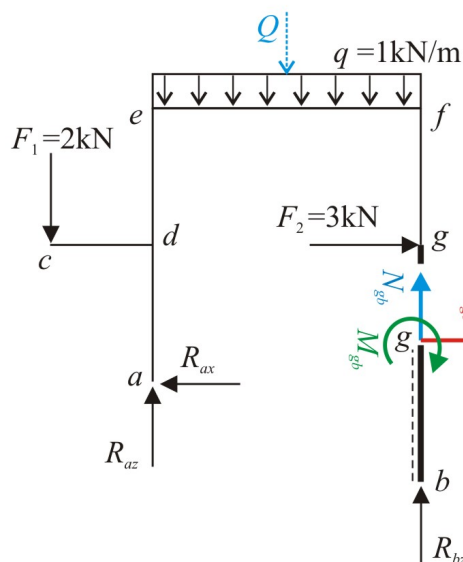
Obrázek 6.4: Výpočet vnitřních sil na jednotlivých prutech rámu z příkladu 6.4.1 - 1. část



$$\begin{aligned}
 N_{ef}^L &= R_{ax} & V_{ef}^L &= R_{az} - F_1 \\
 V_{xe}^L &= V_{ef} - q \cdot x \\
 M_{ef}^L &= -F_1 \cdot 1,5 + R_{ax} \cdot 4 \\
 M_{xe}^L &= M_{ef} + V_{ef} \cdot x - q \cdot x^2/2 \\
 N_{fe}^P &= F_2 & V_{fe}^P &= -R_{bz} \\
 V_{xf}^P &= V_{fe} + q \cdot x \\
 M_{fe}^P &= F_2 \cdot 2 \\
 M_{xf}^P &= M_{fe} - V_{fe} \cdot x - q \cdot x^2/2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N_{gf}^P &= -R_{bz} \\
 V_{gf}^P &= -F_2 \\
 M_{gf}^P &= 0 & M_{xg}^P &= F_2 \cdot x \\
 M_{fg}^P &= F_2 \cdot 2 \\
 N_{fg}^L &= -F_1 - Q + R_{az} \\
 V_{fg}^L &= -R_{ax} \\
 M_{fg}^L &= -F_1 \cdot 5,5 + R_{az} \cdot 4 + R_{ax} \cdot 4 - q \cdot 4^2/2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 N_{b-g}^P &= -R_{bz} \\
 V_{b-g}^P &= 0 \\
 M_{gb}^P &= 0 \\
 N_{gb}^L &= -F_1 - Q + R_{az} \\
 V_{gb}^L &= F_2 - R_{ax} = 0 \\
 M_{gb}^L &= -F_1 \cdot 5,5 + R_{az} \cdot 4 + R_{ax} \cdot 2 - q \cdot 4^2/2 = 0
 \end{aligned}$$

Obrázek 6.5: Výpočet vnitřních sil na jednotlivých prutech rámu z příkladu 6.4.1 - pokračování

Dosažením do rovnic na obrázcích 6.4 a 6.5 lze dopočítat potřebné hodnoty. Rovnice jsou pro názornost uvedeny vždy z levé i pravé strany, ale postačující je výpočet jen z jedné.

Normálové síly

$$N_{cd} = N_{dc} = 0; N_{ad} = N_{da} = -3,25\text{kN}; N_{de} = N_{ed} = -1,25\text{kN}; N_{ef} = N_{fe} = 3,0\text{kN}; \\ N_{fg} = N_{gb} = N_{bg} = -2,75\text{kN}$$

Posouvající síly

$$V_{cd} = V_{dc} = -2\text{kN}; V_{ad} = V_{de} = V_{ed} = 3,0\text{kN}; V_{ef} = 1,25\text{kN}; V_{fe} = -2,75\text{kN}; \\ V_{fg} = V_{gf} = -3,0\text{kN}; V_{bg} = V_{gb} = 0$$

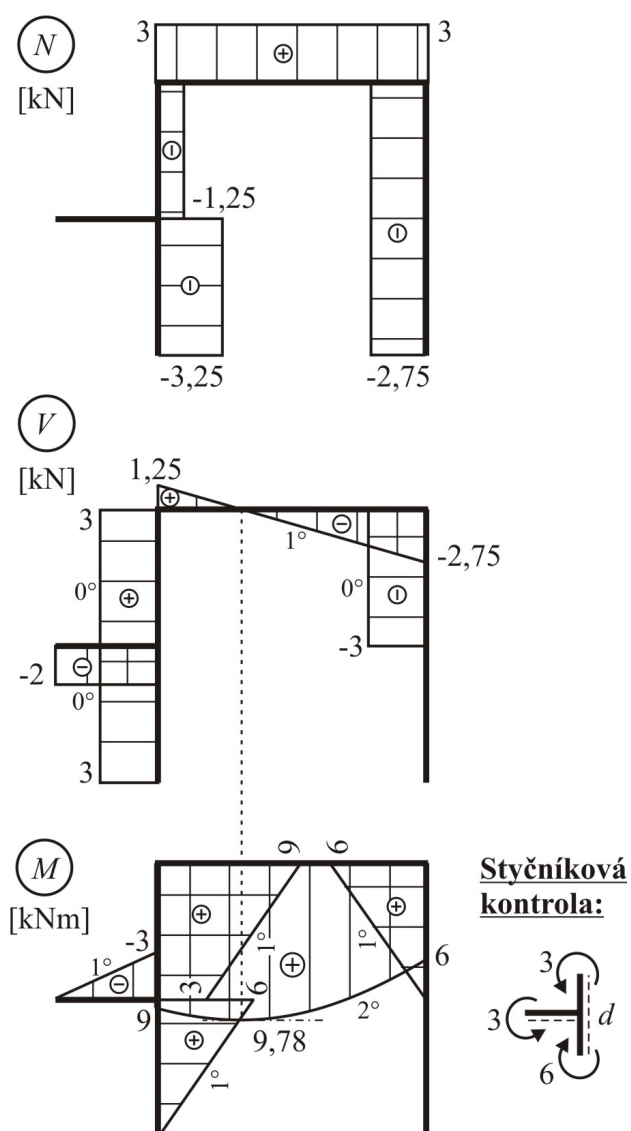
$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^L = V_{ef}/q = 1,25\text{m}; x_n^P = V_{fe}/q = 2,75\text{m}$$

Ohybové momenty

$$M_{ad} = M_{bg} = M_{cd} = M_{gf} = 0; M_{da} = 6,0\text{kNm}; M_{dc} = -3,0\text{kNm}; M_{de} = 3,0\text{kNm}; \\ M_{ed} = M_{ef} = 9,0\text{kNm}; M_{fe} = M_{fg} = 6,0\text{kNm}$$

$$\text{Výpočet extrémního momentu (v průřezu } n): M_n = 9,78\text{kNm}$$

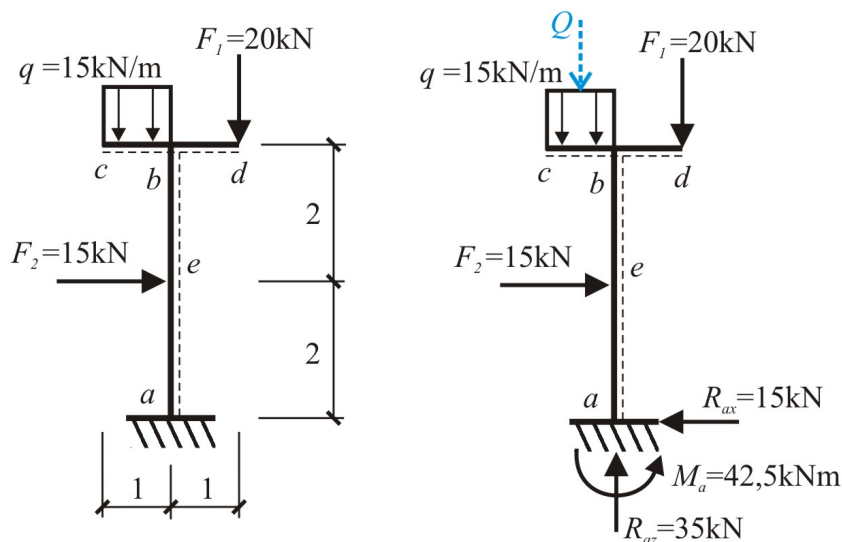
Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 6.6. Pro styčnick d je zde provedena také styčnicková kontrola.



Obrázek 6.6: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 6.4.1

6.4.2 Příklad - rám 2

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na pravoúhle lomeném nosníku na obrázku 6.7.



Obrázek 6.7: Zadání příkladu 6.4.2 včetně reakcí dle kapitoly 3

Normálové síly

$$N_a = N_{ba}^L = -R_{az} = -35\text{kN}; N_c = N_{bc}^L = 0; N_d = N_{bd}^P = 0$$

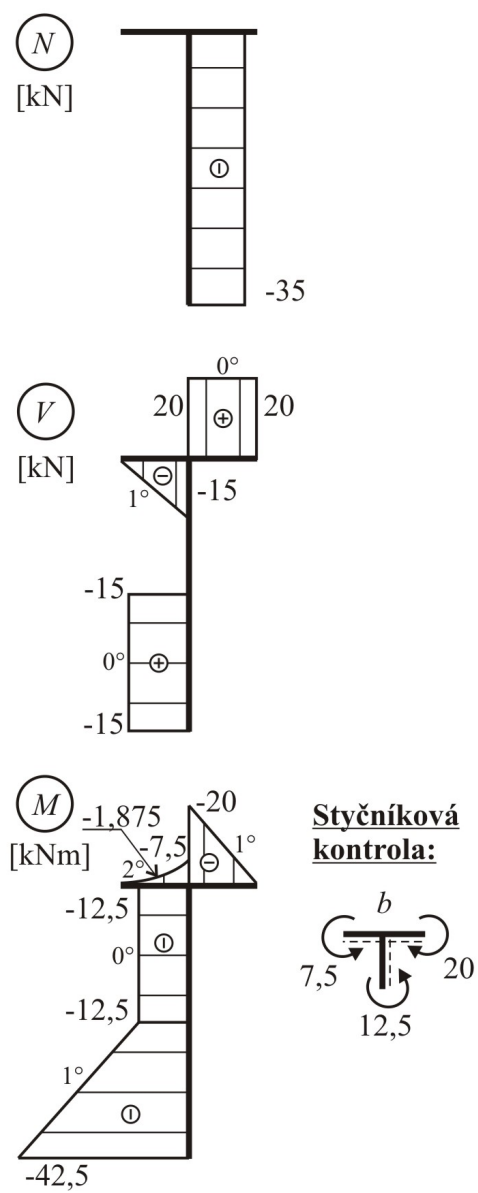
Posouvající síly

$$V_a = V_{ea}^L = R_{ax} = 15\text{kN}; V_{eb} = V_{be}^L = R_{ax} - F_2 = 0\text{kN}; V_{bc}^L = -Q = -15\text{kN}; V_d = V_{bd}^P = 20\text{kN}$$

Ohybové momenty

$$M_c = M_d = 0; M_{ae}^L = -M_a = -42\text{kNm}; M_{ea} = -M_a + R_{ax} \cdot 2 = -12,5\text{kNm}; M_{be} = -M_a + R_{ax} \cdot 4 - F_2 \cdot 2 = -12,5\text{kNm}; M_{bc} = -Q \cdot 0,5 = -7,5\text{kNm}; M_{cb}^L = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot 0,5^2 = -1,875\text{kNm}; M_{bd} = -F_1 \cdot 1 = -20\text{kNm};$$

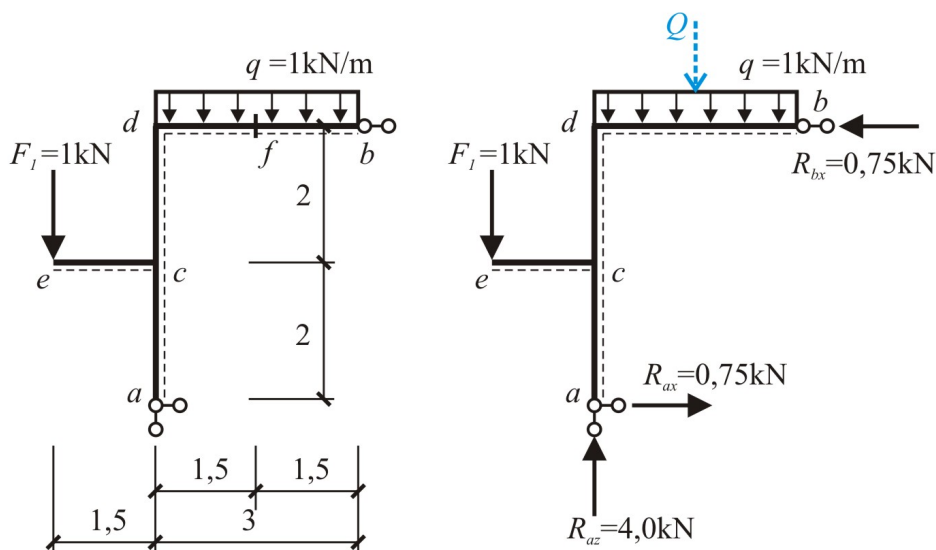
Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 6.8. Pro styčník b je provedena styčníková kontrola.



Obrázek 6.8: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 6.4.2

6.4.3 Příklad - rám 3

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na pravoúhle lomeném nosníku na obrázku 6.9.



Obrázek 6.9: Zadání příkladu 6.4.3 včetně reakcí dle kapitoly 3

Normálové síly

$$N_e = N_{ce}^L = 0; N_a = N_{ca}^L = -R_{az} = -4,0\text{kN}; N_{cd} = N_{dc}^L = -R_{az} + F_1 = -3,0\text{kN};$$

$$N_b = N_{db}^P = -R_{bx} = -0,75\text{kN}$$

Posouvající síly

$$V_a = V_{cd} = V_{dc}^L = -R_{ax} = -0,75\text{kN}; V_{ec} = V_{ce}^L = -F_1 = -1,0\text{kN}; V_b = 0; V_{db}^P = Q = 3,0\text{kN}$$

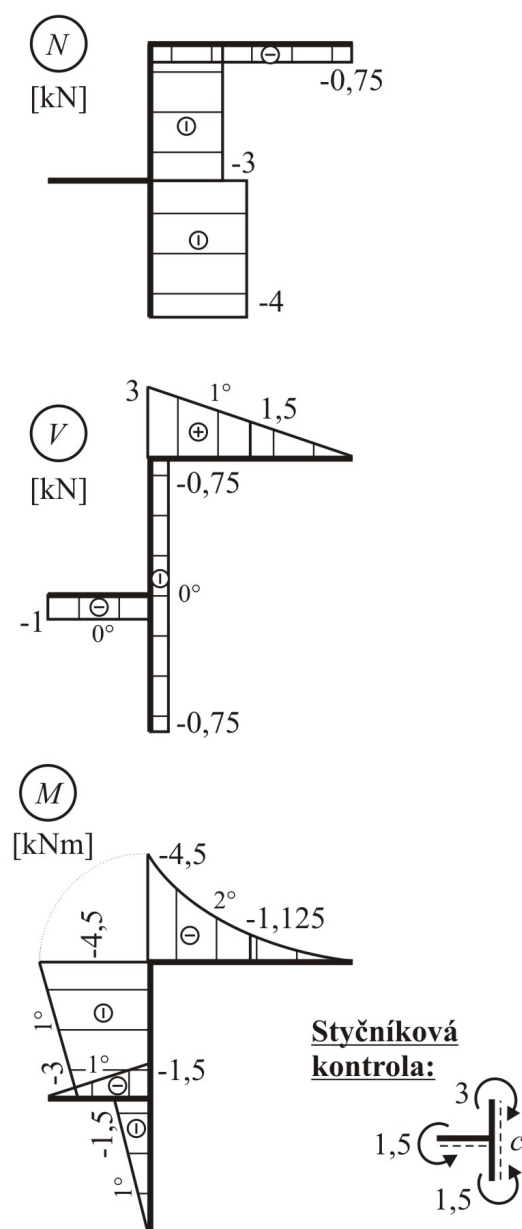
Ohybové momenty

$$M_a = M_e = M_b = 0; M_{ca}^L = -R_{ax} \cdot 2 = -1,5\text{kNm}; M_{ce}^L = -F_1 \cdot 1,5 = -1,5\text{kNm};$$

$$M_{cd}^L = -F_1 \cdot 1,5 - R_{ax} \cdot 2 = -3,0\text{kNm}; M_{dc} = M_{db}^P = -Q \cdot 1,5 = -4,5\text{kNm};$$

$$M_{\frac{d-b}{2}}^P = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot 1,5^2 = -1,125\text{kNm}$$

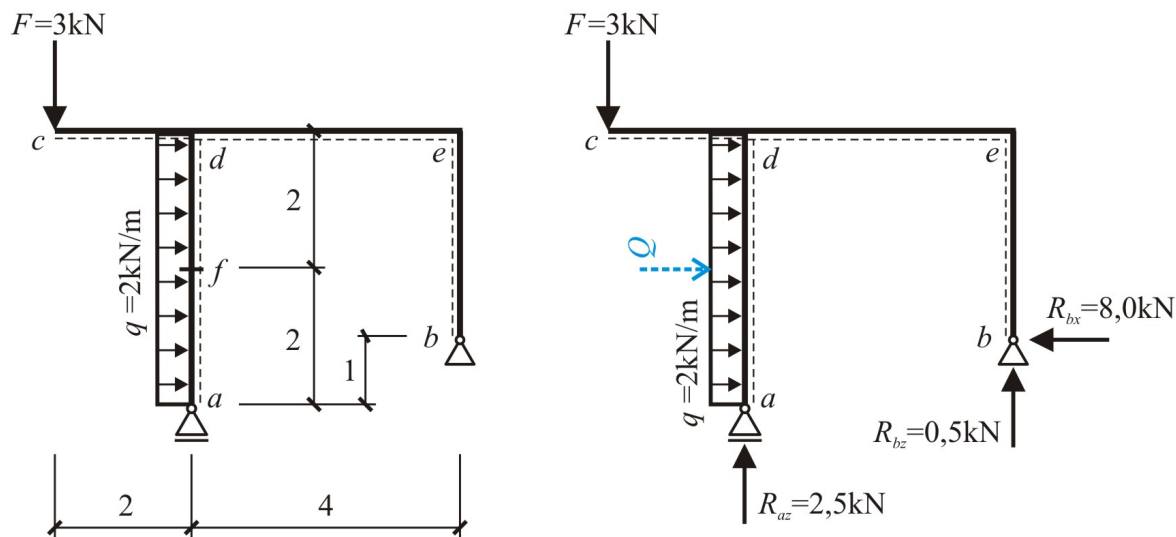
Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 6.10. Pro styčník c je provedena styčnicková kontrola.



Obrázek 6.10: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 6.4.3

6.4.4 Příklad - rám 4

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na pravoúhle lomeném nosníku na obrázku 6.11.



Obrázek 6.11: Zadání příkladu 6.4.4 včetně reakcí dle kapitoly 3

Normálové síly

$$N_c = N_{dc}^L = 0; N_a = N_{da}^L = -R_{az} = -2,5\text{kN}; N_{de} = N_{ed}^P = -R_{bx} = -8,0\text{kN};$$

$$N_b = N_{eb}^P = -R_{bz} = -0,5\text{kN}$$

Posouvající síly

$$V_a = 0; V_{da}^L = -Q = -8,0\text{kN}; V_c = V_{dc}^L = -F = -3,0\text{kN}; V_{de} = V_{ed}^L = -F + R_{az} = -0,5\text{kN};$$

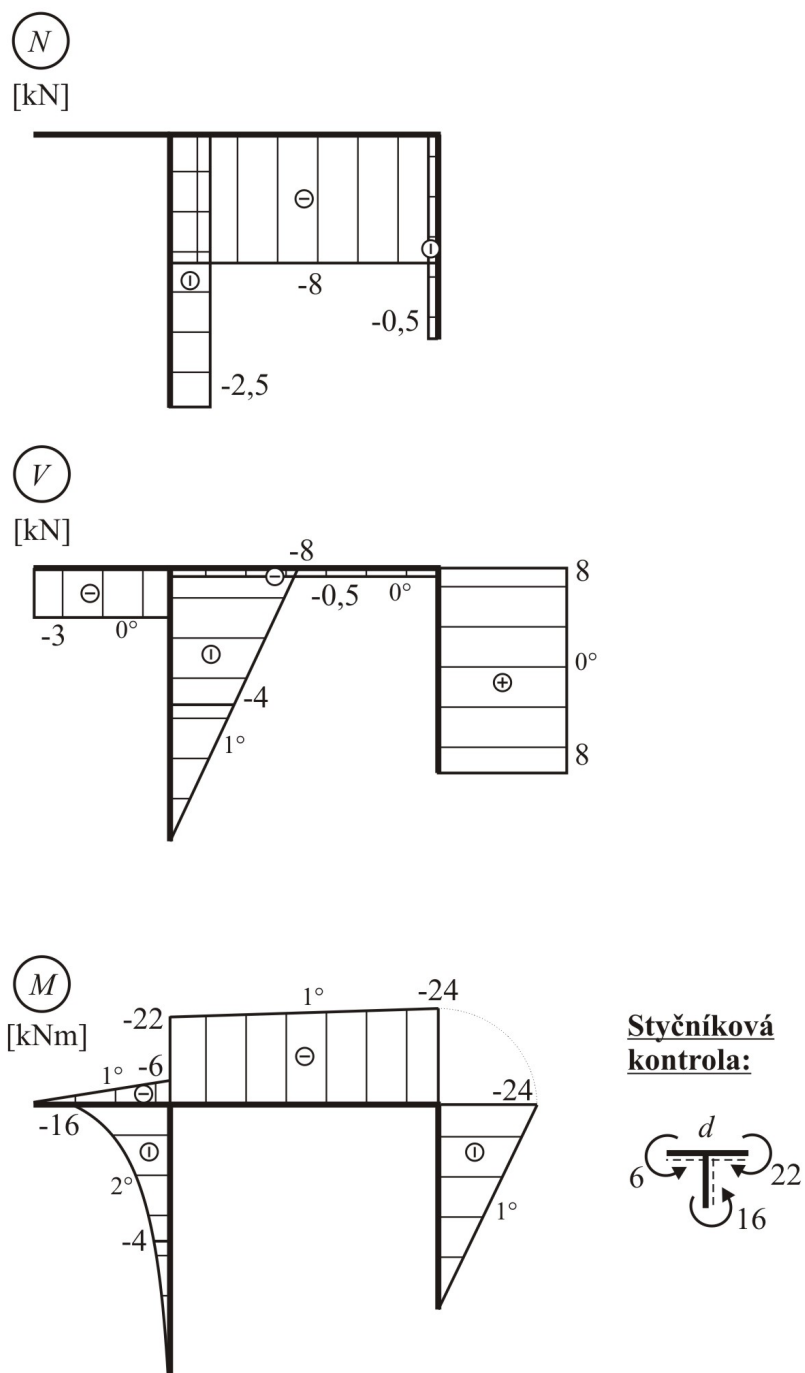
$$V_b = V_{eb}^P = R_{bx} = 8,0\text{kN}$$

Ohybové momenty

$$M_a = M_b = M_c = 0; M_{da}^L = -Q \cdot 2 = -16\text{kNm}; M_{\frac{a-d}{2}}^L = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot 2^2 = -4,0\text{kNm};$$

$$M_{dc}^L = -F \cdot 2 = -6,0\text{kNm}; M_{de}^L = -F \cdot 2 - Q \cdot 2 = -22\text{kNm}; M_{ed} = M_{eb}^P = -R_{bx} \cdot 3 = -24\text{kNm}$$

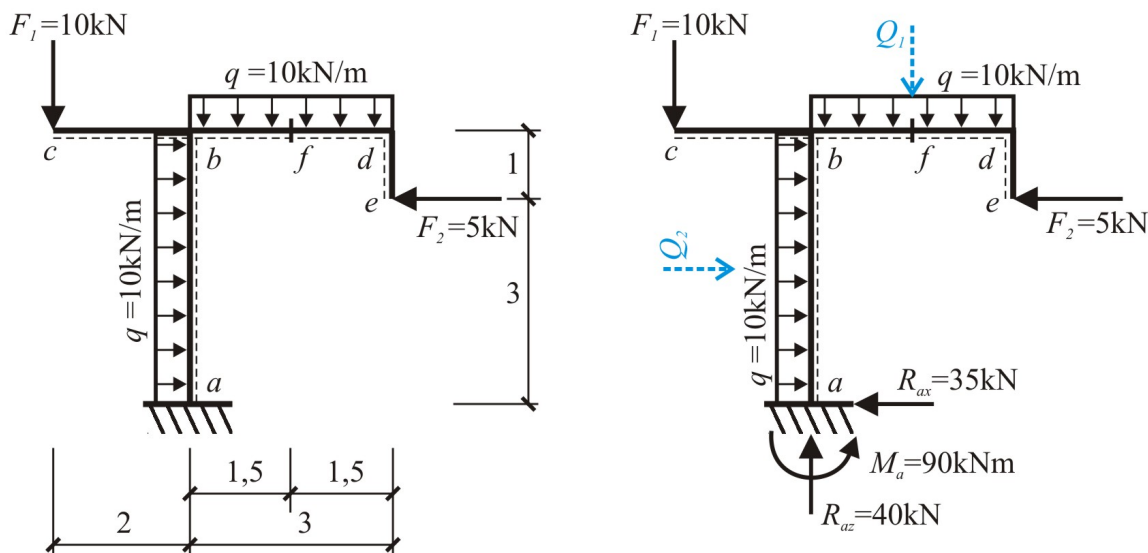
Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 6.12. Pro styčník d je provedena styčníková kontrola.



Obrázek 6.12: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 6.4.4

6.4.5 Příklad - rám 5

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na pravoúhle lomeném nosníku na obrázku 6.13.



Obrázek 6.13: Zadání příkladu 6.4.5 včetně reakcí dle kapitoly 3

Normálové síly

$$N_c = N_{bc}^L = 0; N_e = N_{de}^P = 0; N_a = N_{ba}^L = -R_{az} = -40\text{kN}; N_{db} = N_{bd}^P = -F_2 = -5,0\text{kN}$$

Posouvající síly

$$V_a^L = R_{ax} = 35\text{kN}; V_{dba}^L = R_{ax} - Q_2 = -5,0\text{kN}; V_c = V_{bc}^L = -F_1 = -10\text{kN}; V_{bd}^P = Q_1 = 30\text{kN}; V_{db}^P = 0; V_e = V_{de}^P = F_2 = 5,0\text{kN}$$

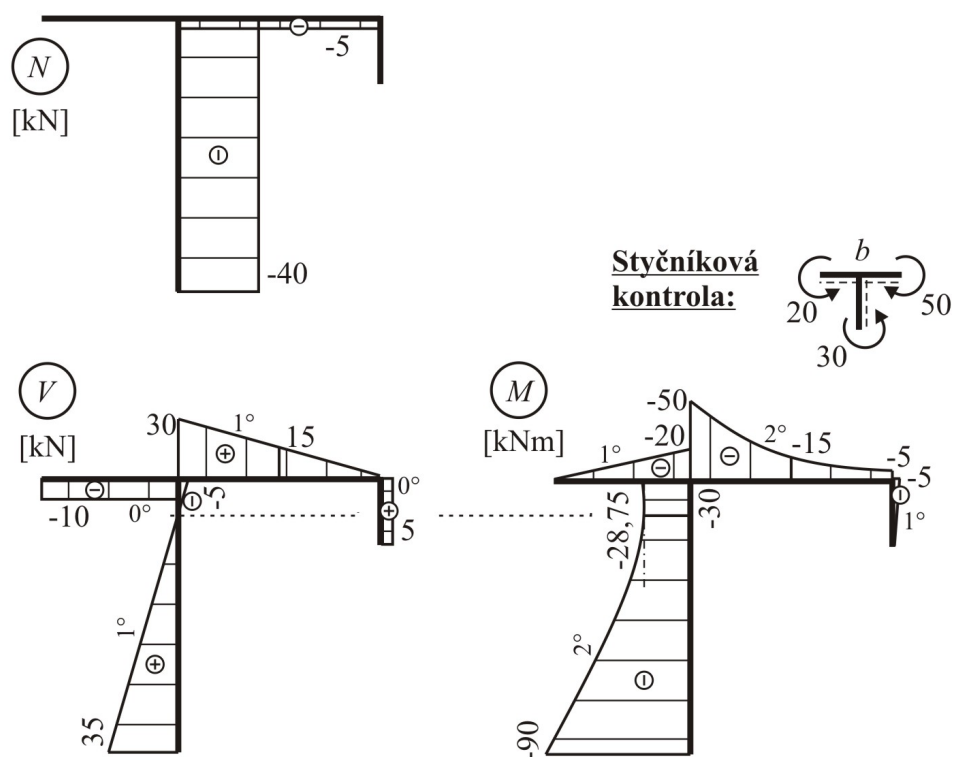
$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^L = V_a/q = 3,5\text{m}; x_n^P = V_{ba}/q = 0,5\text{m}$$

Ohybové momenty

$$M_c = M_e = 0; M_{ab}^L = -M_a = -90\text{kNm}; M_{ba}^L = -M_a + R_{ax} \cdot 4 - Q_2 \cdot 2 = -30\text{kNm}; M_{bc}^L = -F_1 \cdot 2 = -20\text{kNm}; M_{bd}^P = -F_2 \cdot 1 - Q_1 \cdot 1,5 = -50\text{kNm}; M_{b-d}^P = -F_2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 1,5^2 = -15\text{kNm}; M_{db} = M_{de}^P = -F_2 \cdot 1 = -5,0\text{kNm}$$

$$\text{Výpočet extrémního momentu (v průřezu } n): M_n^L = -M_a + R_{ax} \cdot x_n^L - \frac{1}{2} \cdot q \cdot (x_n^L)^2 = -28,75\text{kNm}$$

Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 6.14. Pro styčník b je provedena styčníková kontrola.



Obrázek 6.14: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 6.4.5

Kapitola 7

Vnitřní síly rovinně lomeného nosníku se šikmými pruty

Tento typ konstrukce je zvláštním případem lomeného nosníku z kapitoly 6. Od dříve řešeného pravoúhle lomeného nosníku se liší tím, že jeden nebo i více prutů nosníku jsou šikmé (ve smyslu kapitoly 5). Při řešení následujících úloh budou tedy kombinovány postupy popsané v kapitolách 5 a 6.

Výhodné je nejdříve vyřešit pruty, jejichž osy jsou rovnoběžné s osou x nebo z a následně pak řešit samostatně prut (pruty) šikmé. I zde postačí výpočet vnitřních sil pouze z jedné strany (z jedné části konstrukce), čímž si lze usnadnit rozkládání sil do lokálních složek (osové a kolmé). Pro názornost však budou v příkladech uváděny rozklady sil z obou stran.

7.1 Příklad - šikmý rám 1

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na lomeném nosníku na obrázku 7.1.

7.1.1 Řešení - šikmý rám 1

Pro výpočet vnitřních sil na šikmém prutu je třeba působící síly rozložit do lokálních (osových a kolmých) složek. V praxi postačí rozložit jen reakci R_{az} , jelikož zatížení působí kolmo k ose, ale z cvičných důvodů je zde proveden i rozklad sil působících na šikmý prut z pravé strany (viz obrázek 7.1).

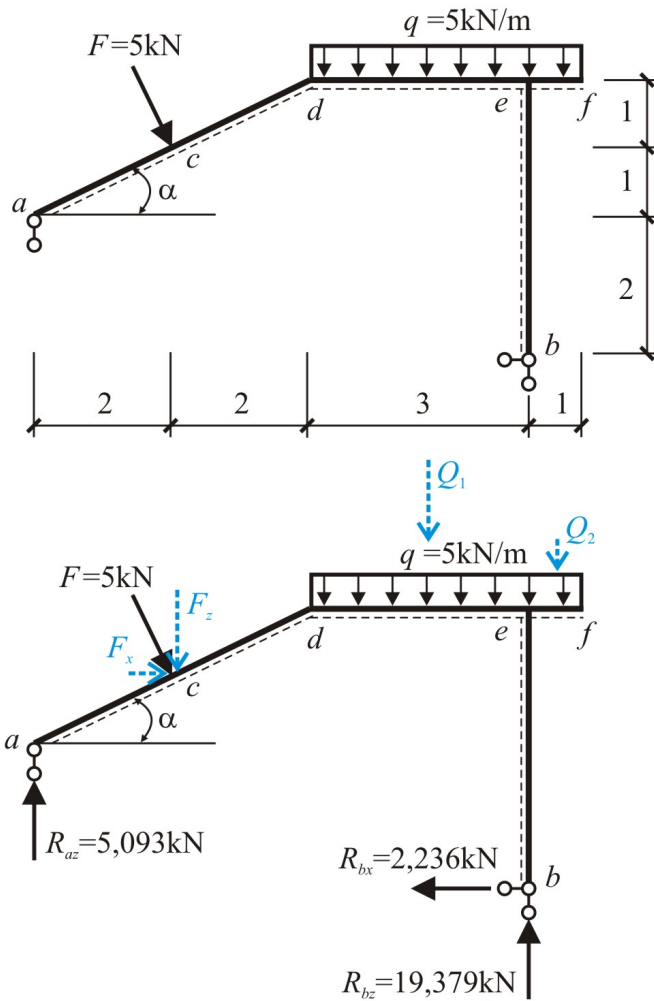
Přípravné výpočty

$$l_{ad} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \underline{2\sqrt{5}\text{m}};$$

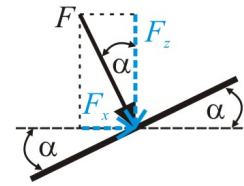
$$\sin \alpha = 2/l_{ad} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = 4/l_{ad} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pro výpočet reakcí (dle kapitoly 3) je potřeba rozložit působící sílu na osové složky:

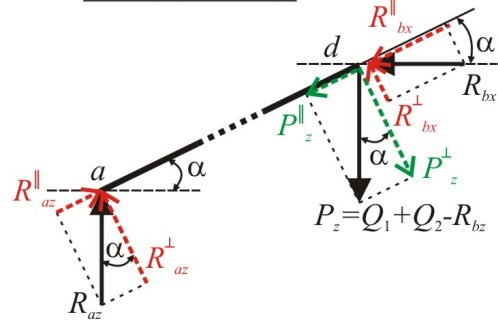
$$F_x = F \cdot \sin \alpha = \underline{2,236\text{kN}}; F_z = F \cdot \cos \alpha = \underline{4,472\text{kN}}$$



Rozklad síly v rovině:



Rozklady sil na složky osově a kolmé:



Obrázek 7.1: Zadání příkladu 7.1 včetně reakcí dle kapitoly 3 a rozkladu sil

Rozklad sil

Značení je převzato z obrázku 7.1. Jednotlivé lokální složky jsou vypočteny na základě rovnic 5.2 až 5.5 z kapitoly 5.

$$R_{az}^{\parallel} = 2,278\text{kN}; R_{az}^{\perp} = 4,555\text{kN}$$

$$R_{bx}^{\parallel} = 2,0\text{kN}; R_{bx}^{\perp} = 1,0\text{kN}$$

$$P_z = 0,621\text{kN} (= V_{de})$$

$$P_z^{\parallel} = 0,278\text{kN}; P_z^{\perp} = 0,555\text{kN}$$

Normálové síly

$$N_b = N_{eb}^P = -R_{bz} = -19,379\text{kN}; N_f = N_{ef}^P = 0; N_{de} = N_{ed}^P = -R_{bx} = -2,236\text{kN};$$

$$N_a = N_{da}^L = -R_{az}^{\parallel} = -2,278\text{kN} (= -R_{bx}^{\parallel} - P_z^{\parallel})$$

Posouvající síly

$$V_f = 0; V_{ef}^P = Q_2 = 5,0 \text{ kN}; V_b = V_{eb}^P = R_{bx} = 2,236 \text{ kN}; V_{ed}^P = Q_2 - R_{bz} = -14,279 \text{ kN};$$

$$V_{de}^L = R_{az} - F_z = 0,621 \text{ kN} (V_{de}^P = Q_1 - R_{bz} + Q_2); V_a = V_{ca}^L = R_{az}^\perp = 4,555 \text{ kN};$$

$$V_{cd} = V_{dc}^L = R_{az}^\perp - F = -0,445 \text{ kN} (= -R_{bx}^\perp + P_z^\perp)$$

Výpočet polohy nebezpečného průřezu n : $x_n^P = V_{ed}/q = 2,876 \text{ m}$; $x_n^L = V_{de}/q = 0,124 \text{ m}$

Ohybové momenty

$$M_a = M_b = M_f = 0; M_{eb}^P = -R_{bx} \cdot 4 = -8,94 \text{ kNm}; M_{ef}^P = -Q_2 \cdot 0,5 = -2,5 \text{ kNm};$$

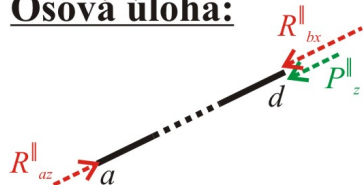
$$M_{\frac{e-f}{2}}^P = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot 0,5^2 = -0,625 \text{ kNm}; M_{ed}^P = -Q_2 \cdot 0,5 - R_{bx} \cdot 4 = -11,44 \text{ kNm};$$

$$M_c^L = R_{az} \cdot 2 = R_{az}^\perp \cdot \frac{l_{ad}}{2} = 10,19 \text{ kNm}; M_d^L = R_{az} \cdot 4 - F \cdot \frac{l_{ad}}{2} = R_{az}^\perp \cdot l_{ad} - F \cdot \frac{l_{ad}}{2} = 9,19 \text{ kNm}$$

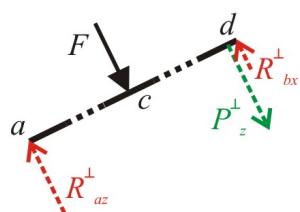
Výpočet extrémního momentu (v průřezu n): $M_n^L = M_d + V_{de} \cdot x_n^L - \frac{1}{2} \cdot q \cdot (x_n^L)^2 = 9,23 \text{ kNm}$

Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 7.2.

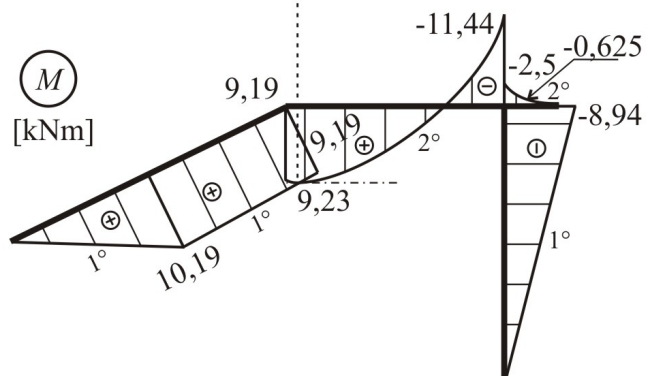
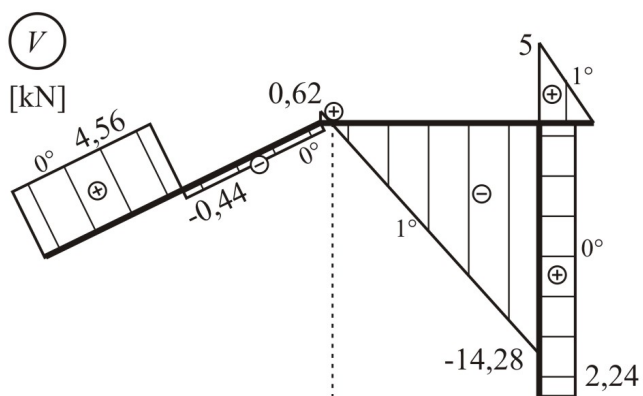
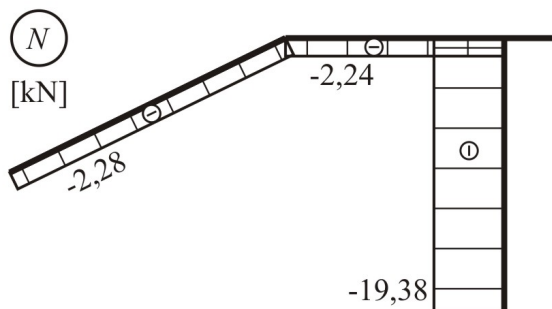
Osová úloha:



Příčná úloha:



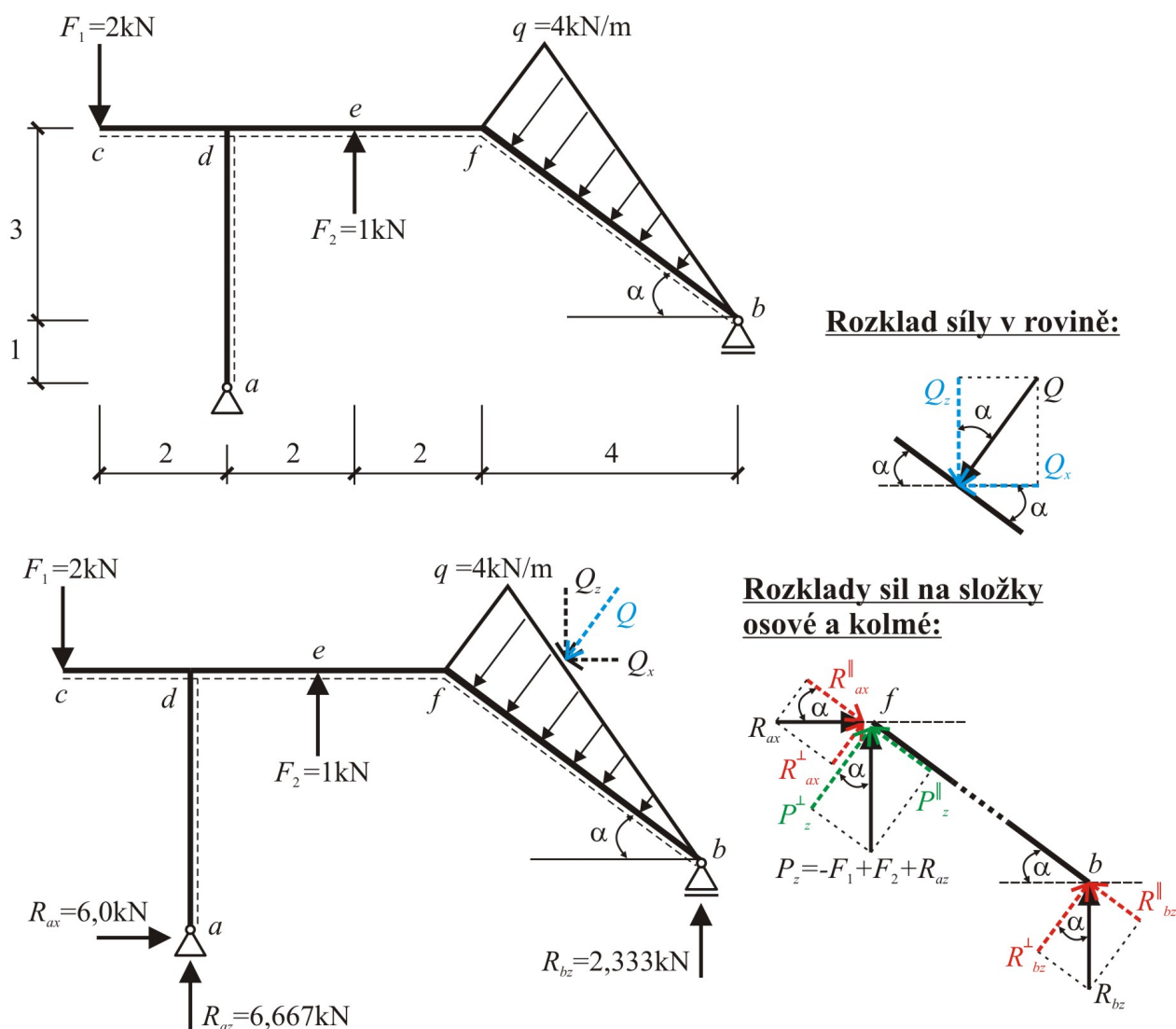
Styčnicková kontrola:



Obrázek 7.2: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 7.1

7.2 Příklad - šikmý rám 2

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na lomeném nosníku na obrázku 7.3.



Obrázek 7.3: Zadání příkladu 7.2 včetně reakcí dle kapitoly 3 a rozkladu sil

7.2.1 Řešení - šikmý rám 2

Pro výpočet vnitřních sil na šikmém prutu by stačilo rozložit jen reakci R_{bz} , ale z cvičných důvodů je také proveden rozklad sil působících na šikmý prut z levé strany (viz obrázek 7.3).

Přípravné výpočty

$$l_{bf} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \underline{5\text{m}};$$

$$\sin \alpha = 3/l_{bf} = \frac{3}{5}; \cos \alpha = 4/l_{bf} = \frac{4}{5}$$

$$Q = 0,5 \cdot q \cdot l_{bf} = \underline{10\text{kN}}$$

Pro výpočet reakcí (dle kapitoly 3) je potřeba rozložit náhradní břemeno na osově složky:

$$Q_x = Q \cdot \sin \alpha = \underline{6\text{kN}}; Q_z = Q \cdot \cos \alpha = \underline{8\text{kN}}$$

Rozklad sil

Značení je převzato z obrázku 7.3.

$$R_{bz}^{\parallel} = \underline{1,4\text{kN}}; R_{bz}^{\perp} = \underline{1,866\text{kN}}$$

$$R_{bx}^{\parallel} = \underline{4,8\text{kN}}; R_{bx}^{\perp} = \underline{3,6\text{kN}}$$

$$P_z = 5,667\text{kN} (= V_{fe})$$

$$P_z^{\parallel} = \underline{3,4\text{kN}}; P_z^{\perp} = \underline{4,533\text{kN}}$$

Normálové síly

$$N_a = N_{da}^L = -R_{az} = -6,667\text{kN}; N_c = N_{dc}^L = 0; N_{de} = N_{fe}^L = -R_{ax} = -6,0\text{kN};$$

$$N_b = N_{fb}^P = -R_{bz}^{\parallel} = -1,4\text{kN} (= -R_{ax}^{\parallel} + P_z^{\parallel})$$

Posouvající síly

$$V_c = V_{dc}^L = -F_1 = -2,0\text{kN}; V_a = V_{da}^L = -R_{ax} = -6,0\text{kN}; V_{de} = V_{ed}^L = -F_1 + R_{az} = 4,667\text{kN};$$

$$V_{ef} = V_{fe}^L = -F_1 + R_{az} + F_2 = 0,621\text{kN} (V_{fe}^P = Q_z - R_{bz}); V_b^P = -R_{bz}^{\perp} = -1,866\text{kN};$$

$$V_{fb}^P = -R_{bz}^{\perp} + Q = 8,133\text{kN} (= R_{ax}^{\perp} + P_z^{\perp})$$

Výpočet polohy nebezpečného průřezu n (pozor, jedná se o **trojúhelníkové zatížení!!!**):

$$x_n^P = \sqrt{\frac{2 \cdot (-V_b) \cdot l_{bf}}{q}} = 2,16\text{m}$$

Ohybové momenty

$$M_a = M_b = M_c = 0; M_{da}^L = -R_{ax} \cdot 4 = -24\text{kNm}; M_{dc}^L = -F_1 \cdot 2 = -4,0\text{kNm};$$

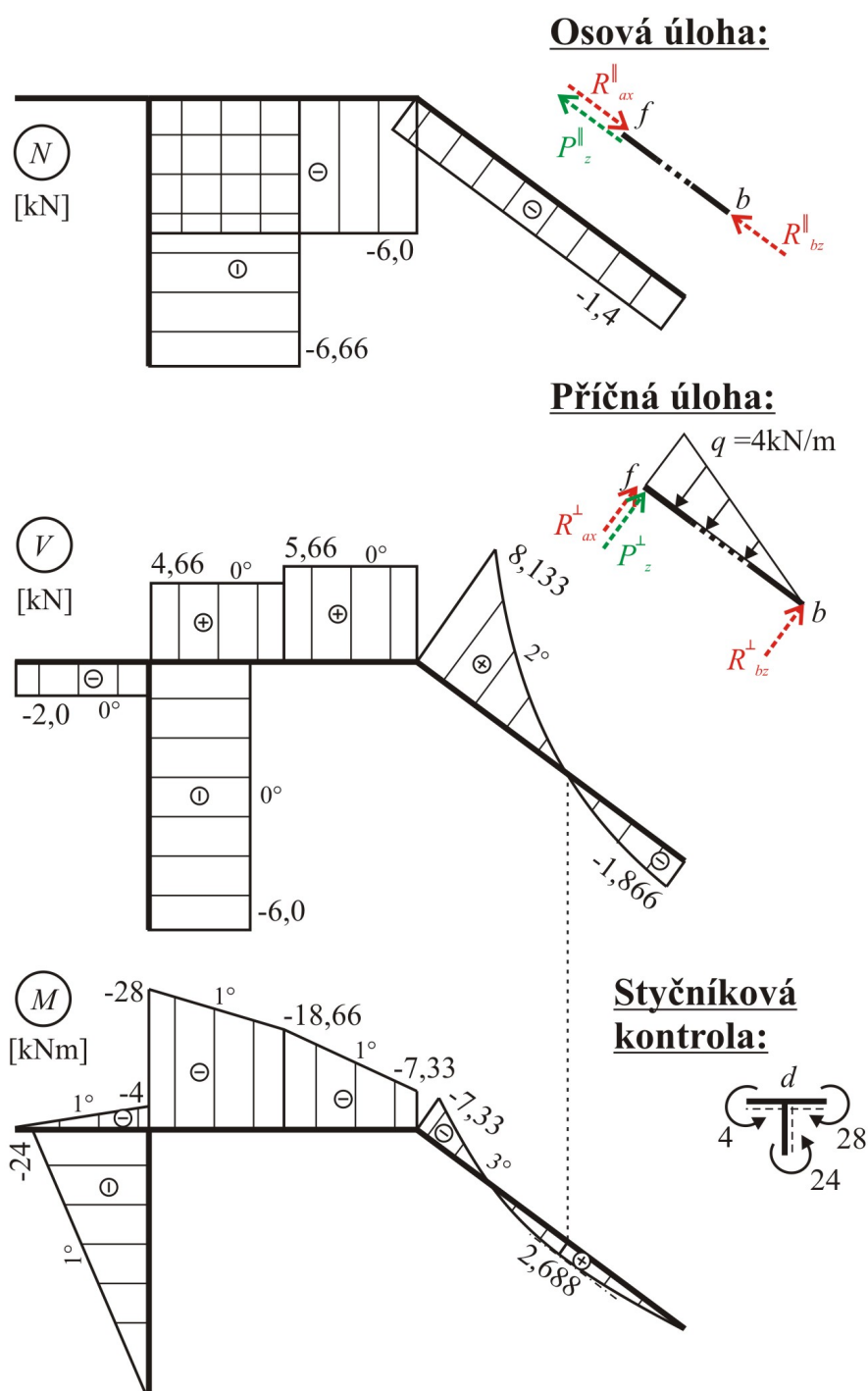
$$M_{de}^L = -F_1 \cdot 2 - R_{ax} \cdot 4 = -28\text{kNm}; M_e^L = -F_1 \cdot 4 - R_{ax} \cdot 4 + R_{az} \cdot 2 = -18,66\text{kNm};$$

$$M_f^P = R_{bz} \cdot 4 - Q \cdot \frac{l_{bf}}{2} = R_{bz}^{\perp} \cdot l_{bf} - Q \cdot \frac{l_{bf}}{2} = -7,33\text{kNm}$$

Výpočet extrémního momentu (v průřezu n) - pozor, jedná se o **trojúhelníkové zatížení!!!**:

$$M_n^P = R_{bz}^{\perp} \cdot x_n - \frac{q \cdot (x_n)^3}{6 \cdot l_{bf}} = 2,688\text{kNm}$$

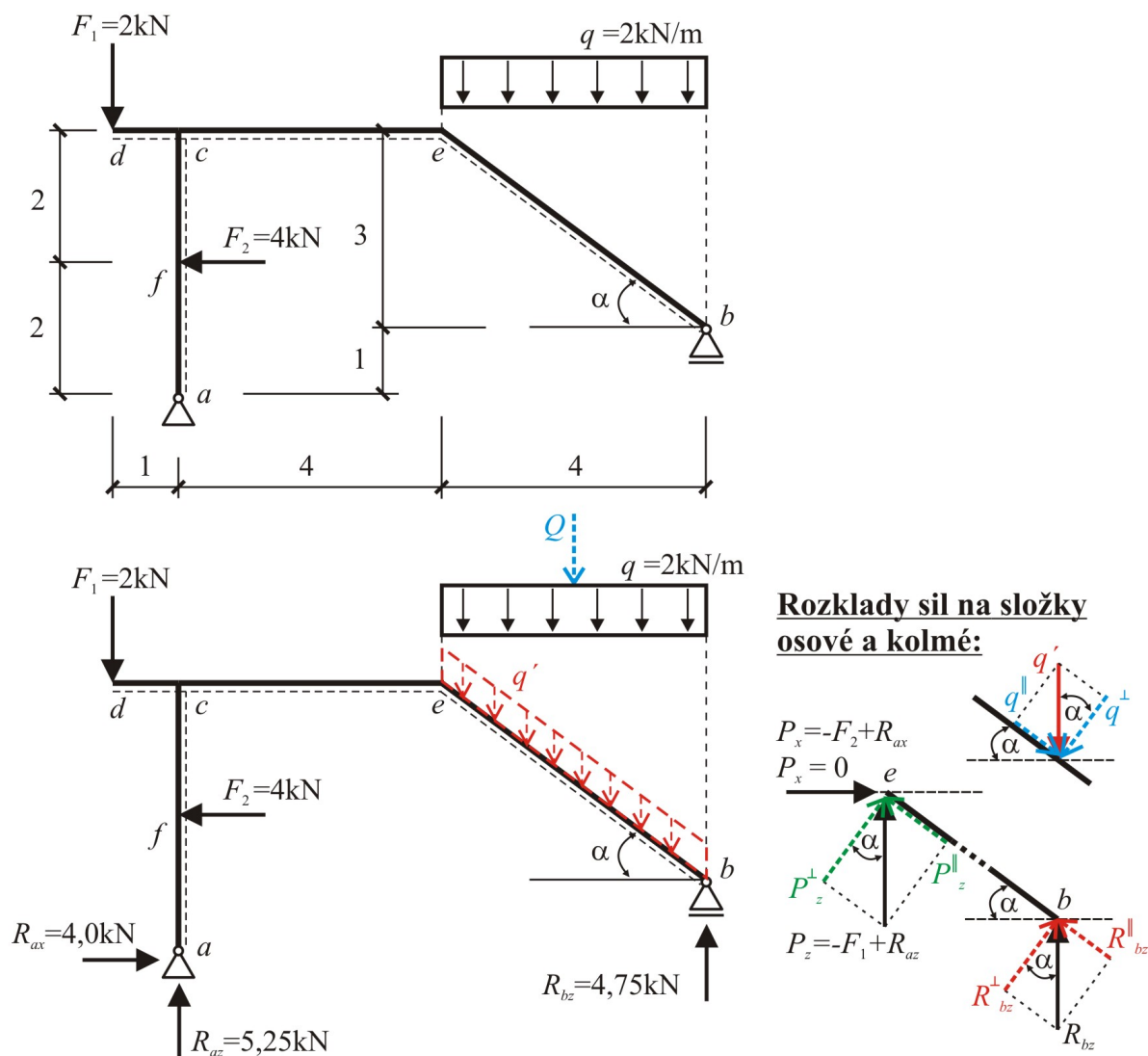
Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 7.4.



Obrázek 7.4: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 7.2

7.3 Příklad - šikmý rám 3

Spočítejte hodnoty a vykreslete průběhy vnitřních sil na lomeném nosníku na obrázku 7.5.



Obrázek 7.5: Zadání příkladu 7.3 včetně reakcí dle kapitoly 3 a rozkladu sil

7.3.1 Řešení - šikmý rám 3

Pro výpočet vnitřních sil na šikmém prutu by stačilo rozložit jen reakci R_{bz} , ale z cvičných důvodů je také proveden rozklad sil působících na šikmý prut z levé strany (viz obrázek 7.5).

Přípravné výpočty

$$l_{be} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \underline{5\text{m}};$$

$$\sin \alpha = 3/l_{be} = \frac{3}{5}; \cos \alpha = 4/l_{be} = \frac{4}{5}$$

$$Q = q \cdot 4 = \underline{8\text{kN}}$$

Náhradní břemeno má **svislý směr!**

Přepočet spojitého zatížení na intenzitu na šikmou délku: $q' = \frac{2 \cdot 4}{5} = 1,6\text{kN/m}$

Rozklad sil

Značení je převzato z obrázku 7.5.

$$R_{bz}^{\parallel} = \underline{2,85\text{kN}}; R_{bz}^{\perp} = \underline{3,8\text{kN}}$$

$$q'^{\parallel} = \underline{0,96\text{kN/m}}; q'^{\perp} = \underline{1,28\text{kN/m}}$$

$$P_z = 3,25\text{kN} (= V_{ec})$$

$$P_z^{\parallel} = \underline{1,95\text{kN}}; P_z^{\perp} = \underline{2,6\text{kN}}$$

Normálové síly

$$N_a = N_{ca}^L = -R_{az} = -5,25\text{kN}; N_d = N_{cd} = N_{ec}^L = 0; N_b^P = -R_{bz}^{\parallel} = -2,85\text{kN};$$

$$N_{eb}^P = -R_{bz}^{\parallel} + q'^{\parallel} \cdot l_{be} = 1,95\text{kN} (= P_z^{\parallel})$$

Posouvající síly

$$V_d = V_{cd}^L = -F_1 = -2,0\text{kN}; V_a = V_{fa}^L = -R_{ax} = -4,0\text{kN}; V_{fc} = V_{cf}^L = F_2 - R_{ax} = 0;$$

$$V_{ce} = V_{ec}^L = -F_1 + R_{az} = 3,25\text{kN} (V_{ec}^P = Q - R_{bz}); V_b^P = -R_{bz}^{\perp} = -3,8\text{kN};$$

$$V_{eb}^P = -R_{bz}^{\perp} + q'^{\perp} \cdot l_{be} = 2,6\text{kN} (= P_z^{\perp})$$

$$\text{Výpočet polohy nebezpečného průřezu } n: x_n^P = V_b/q'^{\perp} = 2,968\text{m}; x_n^L = V_{eb}/q'^{\perp} = 2,031\text{m}$$

Ohybové momenty

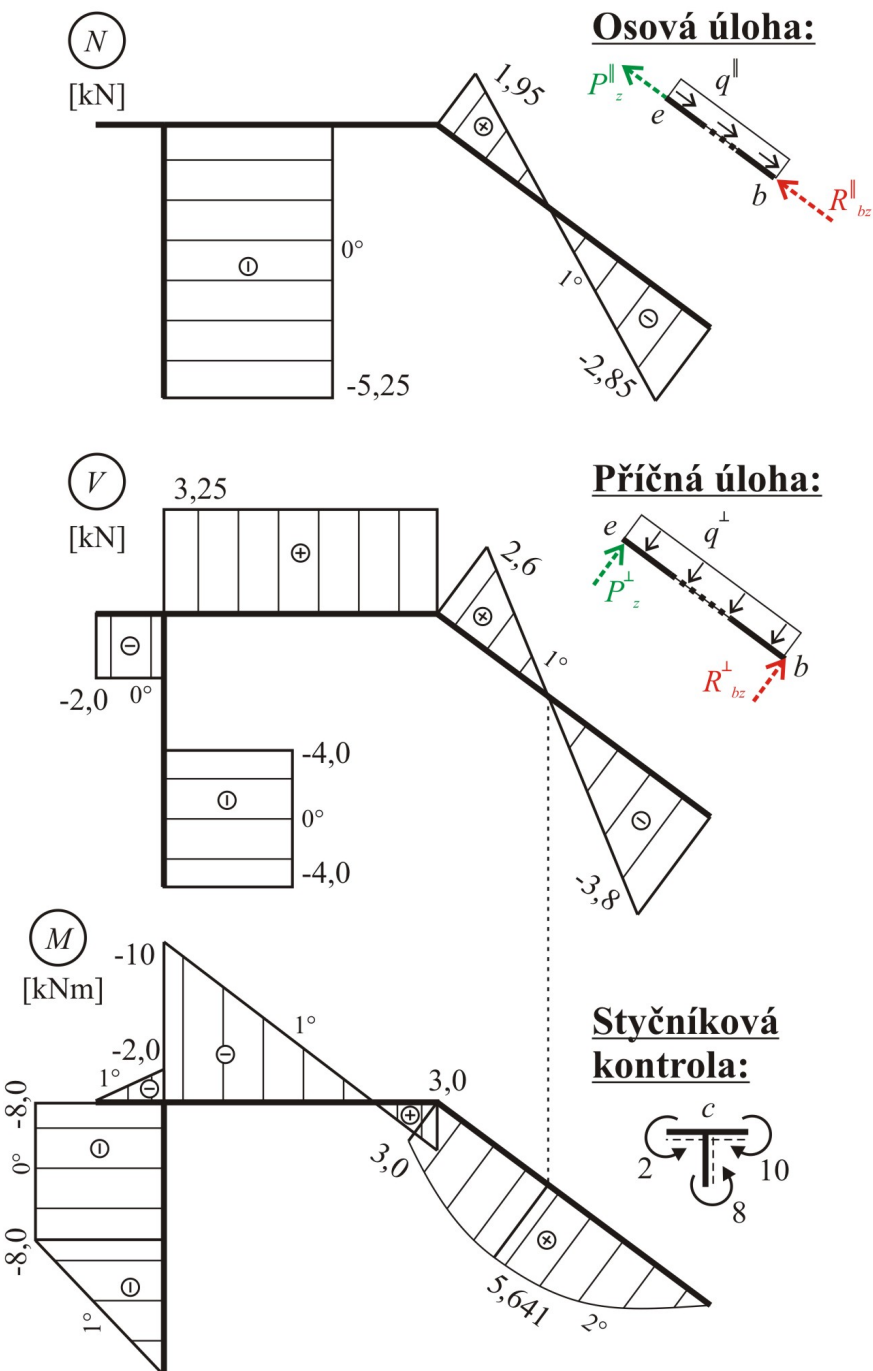
$$M_a = M_b = M_d = 0; M_f^L = -R_{ax} \cdot 2 = -8,0\text{kNm}; M_{cf}^L = -R_{ax} \cdot 4 + F_2 \cdot 2 = -8,0\text{kNm};$$

$$M_{cd}^L = -F_1 \cdot 1 = -2,0\text{kNm}; M_{ce}^L = -F_1 \cdot 1 - R_{ax} \cdot 4 + F_2 \cdot 2 = -10\text{kNm};$$

$$M_e^P = R_{bz} \cdot 4 - Q \cdot 2 = R_{bz}^{\perp} \cdot l_{bf} - \frac{1}{2} \cdot q'^{\perp} \cdot \left(\frac{l_{be}}{2}\right)^2 = 3,0\text{kNm}$$

$$\text{Výpočet extrémního momentu (v průřezu } n): M_n^P = R_{bz}^{\perp} \cdot x_n^P - \frac{1}{2} \cdot q'^{\perp} \cdot (x_n^P)^2 = 5,641\text{kNm}$$

Výsledné vykreslení vnitřních sil na rámu je na obrázku 7.6.



Obrázek 7.6: Výsledné průběhy vnitřních sil rámu z příkladu 7.3

7.4 Otázky

1. Zakreslete kladné směry všech vnitřních sil na rovinném obecně lomeném nosníku.
2. Na zvoleném příkladu graficky znázorněte rozdělení na osovou a příčnou úlohu u šikmého prutu, který je zatížen spojitým zatížením kolmým k jeho ose.
3. Na zvoleném příkladu graficky znázorněte rozdělení na osovou a příčnou úlohu u šikmého prutu, který je zatížen spojitým zatížením působícím na půdorysný průmět.

Kapitola 8

Vnitřní síly rovinně zakřiveného prutu

V této kapitole bude na příkladech vysvětleno řešení vnitřních sil rovinně zakřivených nosníků, jejichž střednici tvoří oblouk ve tvaru kvadratické paraboly [1]. Pro výpočet je počátek souřadnicové soustavy umístěn ve vrcholu nosníku, čímž jsou dány základní geometrické vztahy zakřiveného prutu:

rovnice paraboly

$$z = k \cdot x^2 \text{ [m] ,} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} \text{ [m}^{-1}\text{] ,} \quad (8.1)$$

rovnice sklonu střednice prutu (tečna ke střednici)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = 2k \cdot x \text{ [-] ,} \quad (8.2)$$

goniometrické funkce úhlu sklonu střednice prutu

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} \text{ [-] ,} \quad (8.3)$$

$$\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}} \text{ [-] .} \quad (8.4)$$

Jelikož sklon střednice zakřiveného nosníku je v každém jejím bodu jiný, mají v každém bodu jiný směr i posouvající a normálové síly. Pro usnadnění výpočtu se zavádějí tzv. pomocné vnitřní síly: *svislá* vnitřní síla S [kN] (ve směru osy z) a *vodorovná* (*horizontalní*) vnitřní síla H [kN] (ve směru osy x), které se jednoduše definují ze statického schématu zadání (např. příklad 8.1). Princip výpočtu i znaménková konvence těchto pomocných vnitřních sil S , H je shodná s výpočtem i znaménkovou konvencí posouvajících a normálových sil přímého vodorovného nosníku (svislá zleva je kladná směrem nahoru, svislá zprava je kladná směrem dolů, horizontální síly jsou kladné, směřují-li ven z prutu), viz např. obrázek 8.2 i další.

Rozkladem S , H sil do směru tečny ke střednici oblouku a kolmo ke střednici oblouku lze definovat normálové N [kN] a posouvající V [kN] síly v daném bodu pomocí tzv. transformačních vztahů (8.5) a (8.6). Schéma rozkladů S , H sil viz např. obrázek 8.2 i další. Princip výpočtu ohybových momentů M [kNm] je shodný jako u přímých prutů (kap 4) či lomených nosníků (kap 6).

Protože velikosti vnitřních sil jsou závislé nejen na velikosti a druhu zatížení, ale i na tvaru střednice, nelze jejich průběhy sestavit analytickým způsobem jako u přímých prutů či lomených nosníků. V případě požadavku definování vnitřních sil pouze v určitých bodech, počítají se vnitřní síly pouze v těchto bodech, jak je uvedeno v příkladech 8.1 až 8.6. V případě potřeby získání průběhů vnitřních sil po délce prutu je potřeba použít analytické řešení, které je vysvětleno na příkladu 8.7.

Transformační vztahy pro výpočet N , V sil, jejichž odvození je vysvětleno v příkladu 8.1 obr. 8.2, vztahy (8.21), (8.22) a (8.30), (8.31).

$$N = S \cdot \sin \psi + H \cdot \cos \psi \text{ [kN]} . \quad (8.5)$$

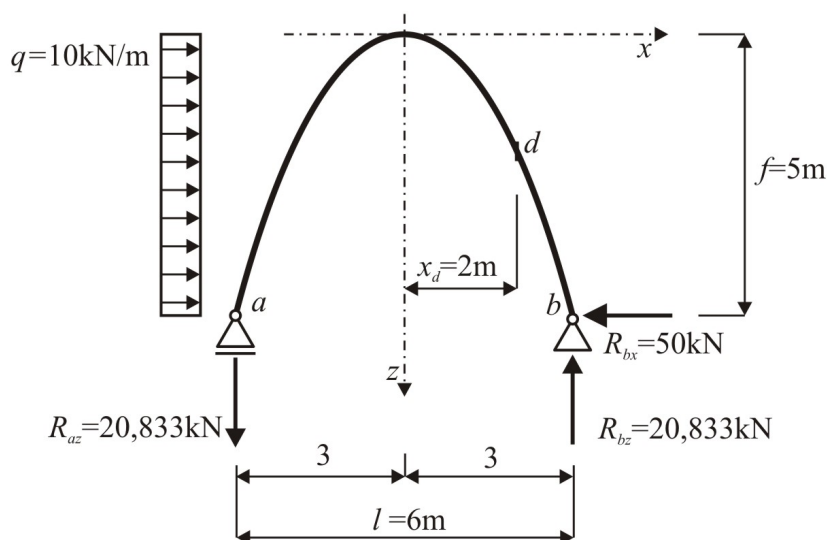
$$V = S \cdot \cos \psi - H \cdot \sin \psi \text{ [kN]} , \quad (8.6)$$

Poznámka:

Vnitřní síly lze počítat shodně jako u přímých prutů z levé i pravé strany s tím, že výpočet je většinou jednodušší i postačující z jedné z těchto stran. V následujících řešených příkladech je v rámci procvičení vysvětlen postup výpočtu zleva i zprava.

8.1 Příklad - oblouk 1

Spočítejte vnitřní síly v bodě d zakřiveného nosníku dle obrázku 8.1. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.



Obrázek 8.1: Schéma konstrukce příkladu 8.1

8.1.1 Řešení - oblouk 1

Rozbor geometrie

Souřadnice podporových bodů a a b určených ze zadání konstrukce:

$$x_a = -3 \text{ [m]} , \quad z_a = 5 \text{ [m]} , \quad x_b = 3 \text{ [m]} , \quad z_b = 5 \text{ [m]} , \quad (8.7)$$

rovnice paraboly dle (8.1):

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{5}{(\pm 3)^2} = 0,55 \text{ [m}^{-1}\text{]} , \quad (8.8)$$

$$z = k \cdot x^2 = 0,55 \cdot x^2 \text{ [m]} , \quad (8.9)$$

rovnice sklonu střednice prutu dle (8.2)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = 2k \cdot x = 2 \cdot 0,55 \cdot x = 1,11 \cdot x \text{ [-]} , \quad (8.10)$$

z -ová souřadnice bodu d z_d dle (8.9), je-li dle zadání konstrukce $x_d = 2 \text{ [m]}$

$$z_d = k \cdot x_d^2 = 0,55 \cdot 2^2 = 2,22 \text{ [m]} , \quad (8.11)$$

sklon střednice prutu v bodu d dle (8.10)

$$\operatorname{tg} \psi_d = 2k \cdot x_d = 1,11 \cdot x_d = 1,11 \cdot 2 = 2,22 \text{ [-]} , \quad (8.12)$$

goniometrické funkce úhlu sklonu střednice ψ_d v bodu d dle (8.3) a (8.4)

$$\cos \psi_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,4104 \text{ [-]} , \quad (8.13)$$

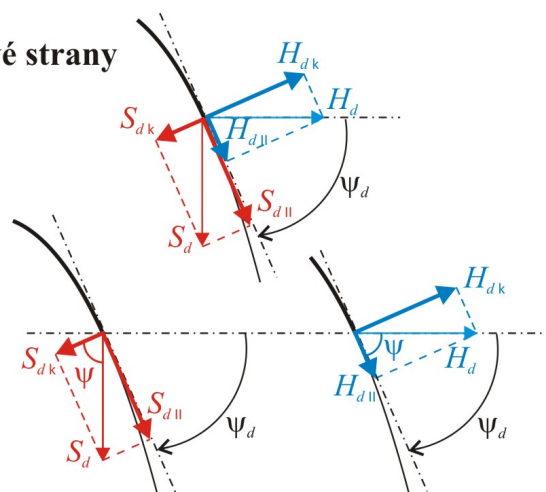
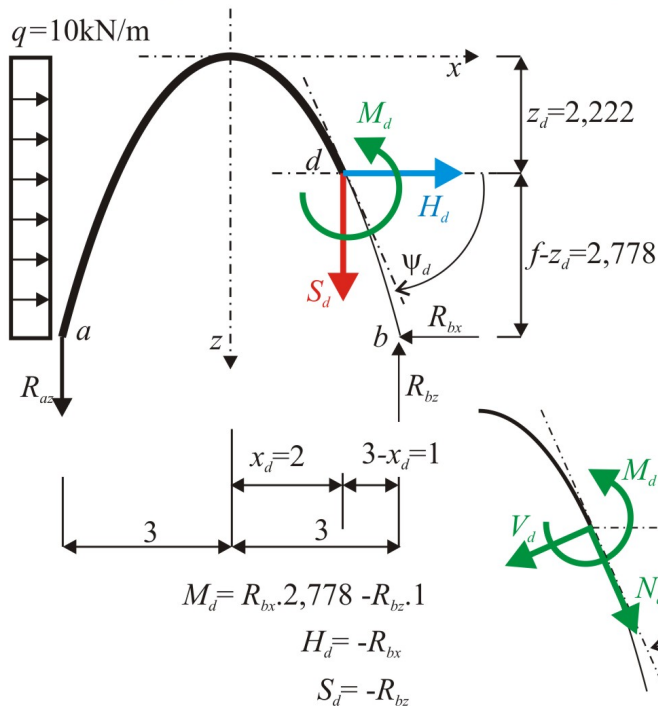
$$\sin \psi_d = \frac{\operatorname{tg} \psi_d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,91192 \text{ [-]} . \quad (8.14)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu d z pravé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_d, H_d dle výše uvedené znaménkové konvence i schéma vnitřních sil N_d, V_d, M_d viz obr. 8.2 nahoře.

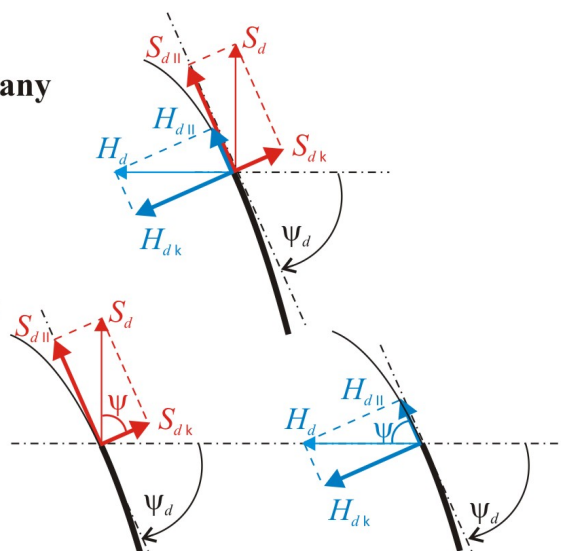
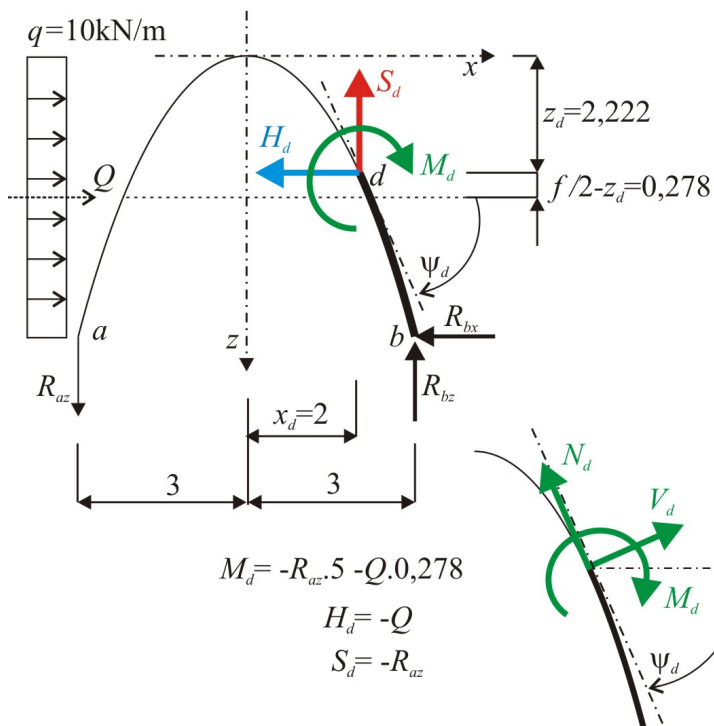
Pomocná svislá vnitřní síla S_d počítaná z pravé strany

$$S_d^P \equiv S_d = -R_{bz} = -20,833 \text{ [kN]} , \quad (8.15)$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu d z pravé stranyVnitřní síly N, V, M počítané z pravé strany

$$N_d = S_{d\parallel} + H_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d + H_d \cdot \cos \psi_d$$

$$V_d = S_{dk} - H_{dk} = S_d \cdot \cos \psi_d - H_d \cdot \sin \psi_d$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu d z levé stranyVnitřní síly N, V, M počítané z levé strany

$$N_d = S_{d\parallel} + H_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d + H_d \cdot \cos \psi_d$$

$$V_d = S_{dk} - H_{dk} = S_d \cdot \cos \psi_d - H_d \cdot \sin \psi_d$$

Obrázek 8.2: Schéma řešení příkladu 8.1

pomocná horizontální vnitřní síla H_d počítaná z pravé strany

$$H_d^P \equiv H_d = -R_{bx} = -50,0 \text{ [kN]} . \quad (8.16)$$

Rozklad pomocné svislé vnitřní síly S_d do složek kolmé $S_{d\perp}$ (v obr. 8.2 značeno S_{dk}) a rovnoběžné $S_{d\parallel}$ se střednicí oblouku:

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = -20,8\overline{33} \cdot 0,4104 = -8,549 \text{ [kN]} , \quad (8.17)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = -20,8\overline{33} \cdot 0,91192 = -18,998 \text{ [kN]} , \quad (8.18)$$

rozklad pomocné horizontální vnitřní síly H_d do složek kolmé $H_{d\perp}$ (v obr. 8.2 značeno H_{dk}) a rovnoběžné $H_{d\parallel}$ se střednicí oblouku:

$$H_{d\perp} = H_d \cdot \sin \psi_d = -50,0 \cdot 0,91192 = -45,596 \text{ [kN]} , \quad (8.19)$$

$$H_{d\parallel} = H_d \cdot \cos \psi_d = -50,0 \cdot 0,4104 = -20,52 \text{ [kN]} . \quad (8.20)$$

Normálová síla N_d je dána součtem všech rovnoběžných pomocných vnitřních sil v bodu d dle znaménkové konvence pro normálové síly (kladná vede ven z prutu)

$$\underline{N_d^P} \equiv N_d = S_{d\parallel} + H_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d + H_d \cdot \cos \psi_d = -18,998 + (-20,52) = \underline{-39,518 \text{ [kN]}} , \quad (8.21)$$

posouvající síla V_d je dána součtem všech kolmých pomocných vnitřních sil v bodu d dle znaménkové konvence pro posouvající síly (zprava je kladná směrem dolů)

$$\underline{V_d^P} \equiv V_d = S_{d\perp} - H_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d - H_d \cdot \sin \psi_d = -8,549 - (-45,596) = \underline{37,047 \text{ [kN]}} , \quad (8.22)$$

ohybový moment M_d počítaný zprava je dán součtem všech momentů působících na bod d zprava dle znaménkové konvence pro ohybové momenty (kladný natahuje spodní vlákna)

$$\underline{M_d^P} \equiv M_d = R_{bz} \cdot (3 - x_d) - R_{bx} \cdot (f - z_d) = 20,8\overline{33} \cdot 1 - 50 \cdot 2,778 = \underline{-118,0566 \text{ [kNm]}} . \quad (8.23)$$

Poznámka:

Rovnice (8.21) a (8.22) jsou zároveň odvozením transformačních vztahů (8.5) a (8.6).

Výpočet vnitřních sil v bodu d z levé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_d, H_d dle výše uvedené znaménkové konvence i schéma vnitřních sil N_d, V_d, M_d viz obr. 8.2 dole.

Pomocná svislá vnitřní síla S_d počítaná z levé strany

$$S_d^L \equiv S_d = -R_{az} = -20,833 \text{ [kN]} , \quad (8.24)$$

pomocná horizontální vnitřní síla H_d počítaná z levé strany

$$H_d^L \equiv H_d = -Q = -q \cdot f = -10 \cdot 5 = -50,0 \text{ [kN]} . \quad (8.25)$$

Rozklad pomocné svislé vnitřní síly S_d do složek kolmé $S_{d\perp}$ (v obr. 8.2 značeno S_{dk}) a rovnoběžné $S_{d\parallel}$ se střednicí oblouku:

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = -20,833 \cdot 0,4104 = -8,549 \text{ [kN]} , \quad (8.26)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = -20,833 \cdot 0,912 = -19,0 \text{ [kN]} , \quad (8.27)$$

rozklad pomocné horizontální vnitřní síly H_d do složek kolmé $H_{d\perp}$ (v obr. 8.2 značeno H_{dk}) a rovnoběžné $H_{d\parallel}$ se střednicí oblouku:

$$H_{d\perp} = H_d \cdot \sin \psi_d = -50,0 \cdot 0,9119 = -45,596 \text{ [kN]} , \quad (8.28)$$

$$H_{d\parallel} = H_d \cdot \cos \psi_d = -50,0 \cdot 0,4104 = -20,52 \text{ [kN]} . \quad (8.29)$$

Normálová síla N_d je dána součtem všech rovnoběžných pomocných vnitřních sil v bodu d dle znaménkové konvence pro normálové síly (kladná vede ven z prutu)

$$\underline{N_d^L} \equiv N_d = S_{d\parallel} + H_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d + H_d \cdot \cos \psi_d = -18,998 + (-20,52) = \underline{-39,518 \text{ [kN]}} , \quad (8.30)$$

posouvající síla V_d je dána součtem všech kolmých pomocných vnitřních sil v bodu d dle znaménkové konvence pro posouvající síly (zleva je kladná směrem nahoru)

$$\underline{V_d^L} \equiv V_d = S_{d\perp} - H_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d - H_d \cdot \sin \psi_d = -8,549 - (-45,596) = \underline{37,047 \text{ [kN]}} , \quad (8.31)$$

ohybový moment M_d počítaný zleva je dán součtem všech momentů působících na bod d zleva dle znaménkové konvence pro ohybové momenty (kladný natahuje spodní vlákna)

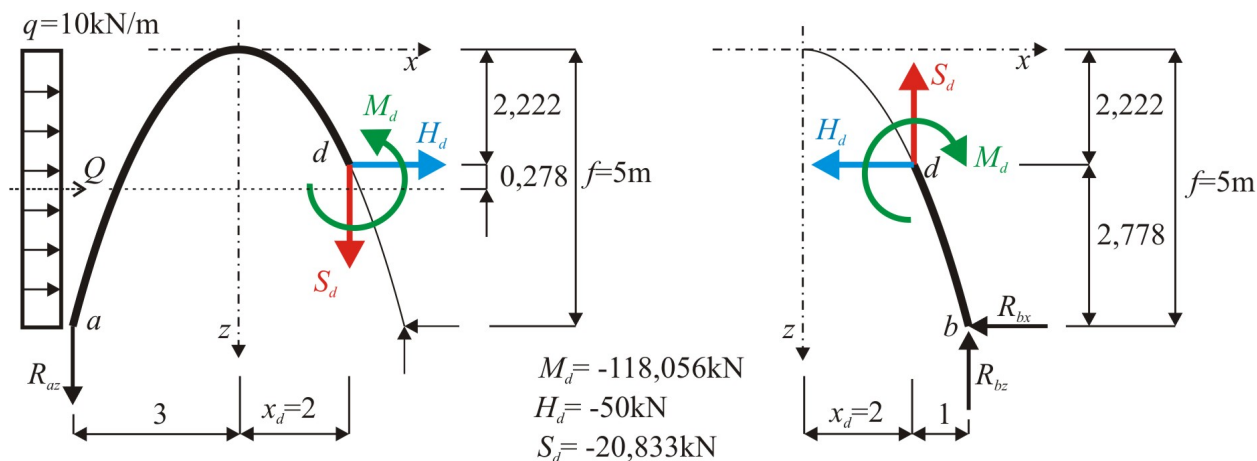
$$\underline{M_d^L} \equiv M_d = -R_{az} \cdot (3 + x_d) - Q \cdot \left(\frac{f}{2} - z_d\right) = -20,833 \cdot 5 - 50 \cdot 0,278 = \underline{-118,0566 \text{ [kNm]}} . \quad (8.32)$$

Poznámka:

Rovnice (8.30) a (8.31) jsou zároveň odvozením transformačních vztahů (8.5) a (8.6).

Alternativní způsob výpočtu vnitřních sil v bodu d , neboli kontrola rovnováhy uvolněných částí prutu

Tento výpočet je uveden pouze pro doplnění. Obecně platí, je-li konstrukce v rovnováze, musí být rovněž v rovnováze každá její pomyslně oddělená část. Účinek pomyslně odstraněných částí nahrazují vnitřní síly shodně jako při uvolnění prutů lomených nosníků (kap 6).



Obrázek 8.3: Rovnováha částí oblouku příkladu 8.1

V bodu d je veden pomyslný řez konstrukcí dle obr. 8.3. Na levé části oblouku je účinek odstraněné pravé části nahrazen pomocnými vnitřními silami S_d , H_d a ohybovým momentem M_d dle výše uvedené znaménkové konvence. Na pravé části oblouku je účinek odstraněné levé části nahrazen rovněž pomocnými vnitřními silami S_d , H_d a ohybovým momentem M_d dle výše uvedené znaménkové konvence (obr. 8.3). Pro obě uvolněné části oblouku musí být splněny podmínky rovnováhy, ve kterých vystupují neznámé složky vnitřních sil S_d , H_d a M_d . Řešením těchto rovnic se získají hodnoty vnitřních sil. Níže uvedené rovnice jsou vyjádřené ve znaménkové konvenci shodné s podmínkami rovnováhy při výpočtu reakcí.

Podmínky rovnováhy levé části (úsek ad):

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix} &= 0 : \\
 Q + H_d &= 0 \\
 10 \cdot 5 + H_d &= 0 \\
 \underline{H_d} &= -50 \text{ [kN]} ,
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned}
 \sum F_{iz} &= 0 : \\
 R_{az} + S_d &= 0 \\
 20,833 + S_d &= 0 \\
 \underline{S_d} &= -20,833 \text{ [kN]} ,
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

$$\sum M_{id} = 0 :$$

$$\begin{aligned} R_{az} \cdot (3 + x_d) + Q \cdot \left(\frac{f}{2} - z_d\right) + M_d &= 0 \\ 20,8\overline{33} \cdot 5 + 50 \cdot 0,278 + M_d &= 0 \\ \underline{M_d = -118,0566 \text{ [kN]}} . \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\sum M_{ia} = 0 : (\textit{kontrola})$$

$$\begin{aligned} -S_d \cdot (3 + x_d) - H_d \cdot (f - z_d) - Q \cdot \frac{f}{2} + M_d &= 0 \\ -(-20,8\overline{33}) \cdot 5 - (-50) \cdot 2,778 - 50 \cdot 2,5 + (-118,0566) &= 0 . \end{aligned} \quad (8.36)$$

Podmínky rovnováhy pravé části (úsek *bd*):

$$\sum F_{ix} = 0 :$$

$$\begin{aligned} -R_{bx} - H_d &= 0 \\ 50 - H_d &= 0 \\ \underline{H_d = -50 \text{ [kN]}} , \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\sum F_{iz} = 0 :$$

$$\begin{aligned} -R_{bz} - S_d &= 0 \\ -20,8\overline{33} - S_d &= 0 \\ \underline{S_d = -20,8\overline{33} \text{ [kN]}} , \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\sum M_{id} = 0 :$$

$$\begin{aligned} R_{bz} \cdot (3 - x_d) - R_{bx} \cdot (f - z_d) - M_d &= 0 \\ 20,8\overline{33} \cdot 1 - 50 \cdot 2,778 - M_d &= 0 \\ \underline{M_d = -118,0566 \text{ [kNm]}} . \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\sum M_{ib} = 0 : (\textit{kontrola})$$

$$\begin{aligned} -S_d \cdot (3 - x_d) + H_d \cdot (f - z_d) - M_d &= 0 \\ -(-20,8\overline{33}) \cdot 1 + (-50) \cdot 2,778 - (-118,0566) &= 0 . \end{aligned} \quad (8.40)$$

8.2 Příklad - oblouk 2

Spočítejte vnitřní síly v bodě c zakřiveného nosníku dle obrázku 8.4 nahoře. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.

8.2.1 Řešení - oblouk 2

Rozbor geometrie

Souřadnice podporových bodů a a b určených ze zadání konstrukce:

$$x_a = -5 \text{ [m]} , \quad z_a = 4 \text{ [m]} , \quad x_b = 5 \text{ [m]} , \quad z_b = 4 \text{ [m]} , \quad (8.41)$$

rovnice paraboly dle (8.1):

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{4}{(\pm 5)^2} = 0,16 \text{ [m}^{-1}\text{]} , \quad (8.42)$$

$$z = k \cdot x^2 = 0,16 \cdot x^2 \text{ [m]} , \quad (8.43)$$

rovnice sklonu střednice prutu dle (8.2)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = 2k \cdot x = 2 \cdot 0,16 \cdot x = 0,32 \cdot x \text{ [-]} , \quad (8.44)$$

z -ová souřadnice bodu c z_c dle (8.43), je-li dle zadání konstrukce $x_c = 2,5 \text{ [m]}$

$$z_c = k \cdot x_c^2 = 0,16 \cdot 2,5^2 = 1,0 \text{ [m]} , \quad (8.45)$$

sklon střednice prutu v bodu c dle (8.44)

$$\operatorname{tg} \psi_c = 2k \cdot x_c = 0,32 \cdot x_c = 0,32 \cdot 2,5 = 0,8 \text{ [-]} , \quad (8.46)$$

goniometrické funkce úhlu sklonu střednice ψ_c v bodu c dle (8.3) a (8.4)

$$\cos \psi_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,7809 \text{ [-]} , \quad (8.47)$$

$$\sin \psi_c = \frac{\operatorname{tg} \psi_c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,6247 \text{ [-]} . \quad (8.48)$$

Schéma konstrukce

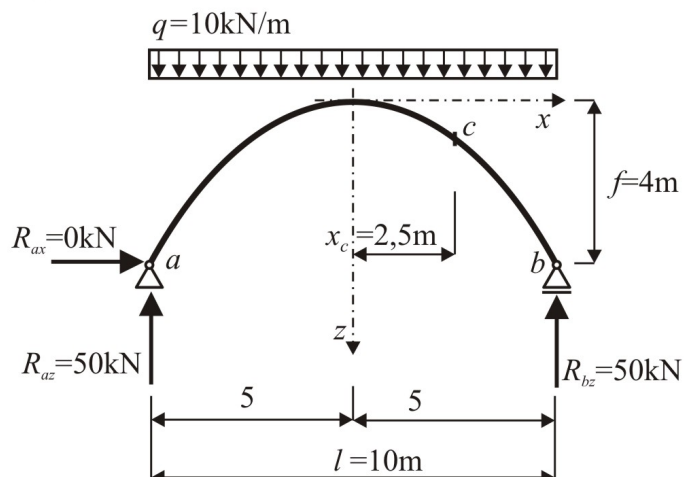


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu c z pravé strany

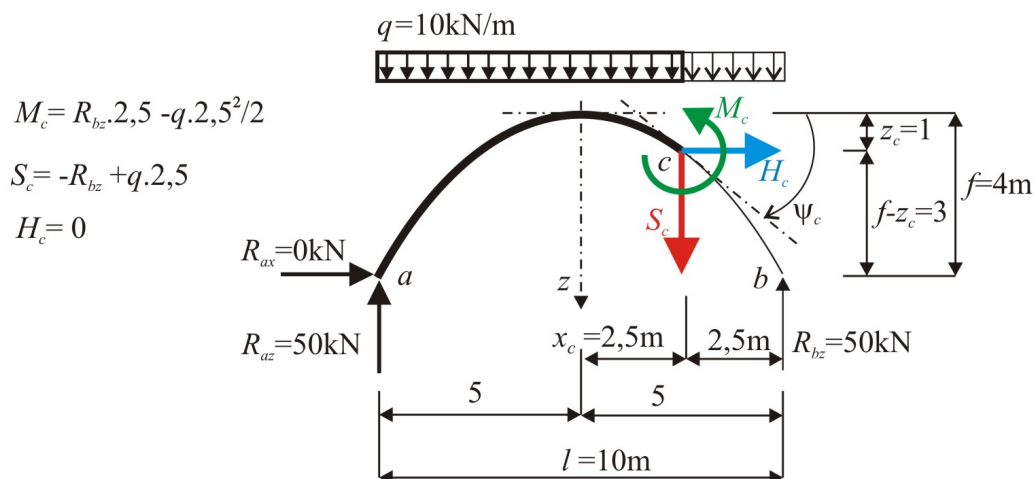
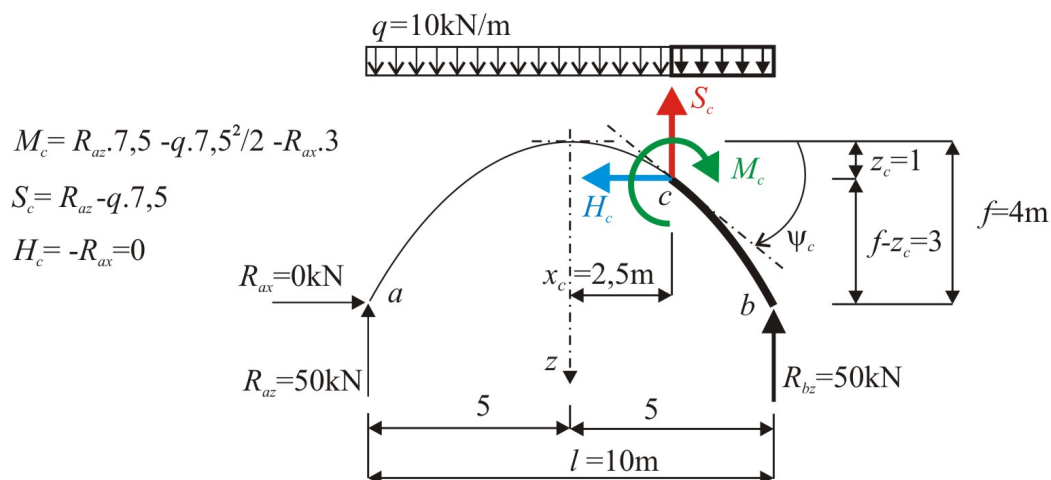


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu c z levé strany



Obrázek 8.4: Schéma konstrukce příkladu 8.2

Výpočet vnitřních sil v bodu c z pravé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_c, H_c dle výše uvedené znaménkové konvence i schéma vnitřních sil N_c, V_c, M_c viz obr. 8.4 uprostřed.

Pomocná svislá vnitřní síla S_c počítaná z pravé strany

$$S_c^P \equiv S_c = -R_{bz} + q \cdot (5 - x_c) = -50 + 10 \cdot 2,5 = -25 \text{ [kN]} , \quad (8.49)$$

pomocná horizontální vnitřní síla H_c je nulová, neboť se zde nevyskytují žádné síly ve směru osy x .

$$H_c^P \equiv H_c = 0 \text{ [kN]} . \quad (8.50)$$

Rozklad pomocné svislé vnitřní síly S_c do složek kolmé $S_{c\perp}$ a rovnoběžné se střednicí oblouku:

$$S_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_c = -25 \cdot 0,7809 = -19,5225 \text{ [kN]} , \quad (8.51)$$

$$S_{c\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c = -25 \cdot 0,6247 = -15,6175 \text{ [kN]} , \quad (8.52)$$

rozklad pomocné horizontální vnitřní síly H_c do složek kolmé $H_{c\perp}$ a rovnoběžné $H_{c\parallel}$ se střednicí oblouku není třeba počítat, neboť jsou nulové ($H_c = 0$, (8.50)).

Normálová síla N_c je dána součtem všech rovnoběžných pomocných vnitřních sil v bodu c dle znaménkové konvence pro normálové síly (kladná vede ven z prutu)

$$\underline{N_c^P} \equiv N_c = S_{c\parallel} + H_{c\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c + 0 = \underline{-15,6175 \text{ [kN]}} , \quad (8.53)$$

posouvající síla V_c je dána součtem všech kolmých pomocných vnitřních sil v bodu c dle znaménkové konvence pro posouvající síly (zprava je kladná směrem dolů)

$$\underline{V_c^P} \equiv V_c = S_{c\perp} - H_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_c - 0 = \underline{-19,5225 \text{ [kN]}} , \quad (8.54)$$

ohybový moment M_c počítaný zprava je dán součtem všech momentů působících na bod c zprava dle znaménkové konvence pro ohybové momenty (kladný natahuje spodní vlákna)

$$\underline{M_c^P} \equiv M_c = R_{bz} \cdot (5 - x_c) - q \cdot \frac{(5 - x_c)^2}{2} = 50 \cdot 2,5 - 10 \cdot \frac{2,5^2}{2} = \underline{93,75 \text{ [kNm]}} . \quad (8.55)$$

Poznámka:

Rovnice (8.53) a (8.54) jsou zároveň odvozením transformačních vztahů (8.5) a (8.6).

Výpočet vnitřních sil v bodu c z levé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_c, H_c dle výše uvedené znaménkové konvence i schéma vnitřních sil N_c, V_c, M_c viz obr. 8.4 dole.

Pomocná svislá vnitřní síla S_c počítaná z levé strany

$$S_c^L \equiv S_c = R_{az} - q \cdot (5 + x_c) = 50 - 10 \cdot 7,5 = -25 \text{ [kN]} , \quad (8.56)$$

pomocná horizontální vnitřní síla H_c je nulová, neboť se zde nevyskytují žádné síly ve směru osy x .

$$H_c^L \equiv H_c = 0 \text{ [kN]} . \quad (8.57)$$

Rozklad pomocné svislé vnitřní síly S_c do složek kolmé $S_{c\perp}$ a rovnoběžné $S_{c\parallel}$ se střednicí oblouku:

$$S_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_d = -25 \cdot 0,7809 = -19,5225 \text{ [kN]} , \quad (8.58)$$

$$S_{c\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c = -25 \cdot 0,6247 = -15,6175 \text{ [kN]} , \quad (8.59)$$

rozklad pomocné horizontální vnitřní síly H_c do složek kolmé $H_{c\perp}$ a rovnoběžné $H_{c\parallel}$ se střednicí oblouku není třeba počítat, neboť jsou nulové ($H_c = 0$, (8.57)).

Normálová síla N_c je dána součtem všech rovnoběžných pomocných vnitřních sil v bodu c dle znaménkové konvence pro normálové síly (kladná vede ven z prutu)

$$\underline{N_c^L} \equiv N_c = S_{d\parallel} + H_{d\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c + 0 = \underline{-15,6175 \text{ [kN]}} , \quad (8.60)$$

posouvající síla V_c je dána součtem všech kolmých pomocných vnitřních sil v bodu c dle znaménkové konvence pro posouvající síly (zleva je kladná směrem nahoru)

$$\underline{V_c^L} \equiv V_c = S_{d\perp} - H_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_c - 0 = -19,5225 \text{ [kN]} , \quad (8.61)$$

ohybový moment M_c počítaný zleva je dán součtem všech momentů působících na bod c zleva dle znaménkové konvence pro ohybové momenty (kladný natahuje spodní vlákna)

$$\underline{M_c^L} \equiv M_c = R_{az} \cdot (5 + x_c) - q \cdot \frac{(5 + x_c)^2}{2} - R_{ax} \cdot (f - z_c) = 50 \cdot 7,5 - 10 \cdot \frac{7,5^2}{2} - 0 = \underline{93,75 \text{ [kNm]}} . \quad (8.62)$$

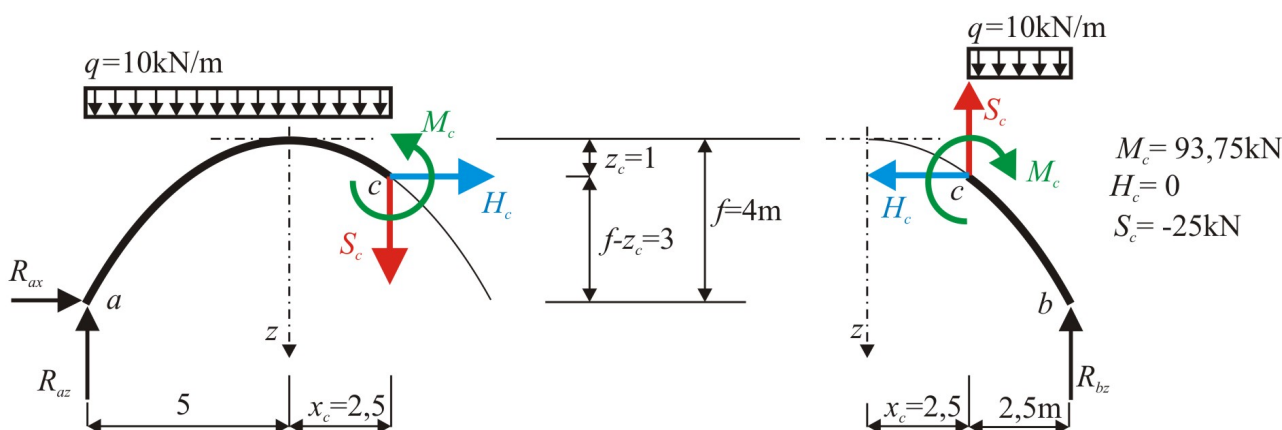
Poznámka:

Rovnice (8.60) a (8.61) jsou zároveň odvozením transformačních vztahů (8.5) a (8.6).

Alternativní způsob výpočtu vnitřních sil v bodu c , neboli kontrola rovnováhy uvolněných částí prutu

Tento výpočet je uveden pouze pro doplnění. Obecně platí, je-li konstrukce v rovnováze, musí být rovněž v rovnováze každá její pomyslně oddělená část. Účinek pomyslně odstraněných částí nahrazují vnitřní síly shodně jako při uvolnění prutů lomených nosníků (kap 6).

V bodu c je veden pomyslný řez konstrukcí dle obr. 8.3. Na levé části oblouku je účinek odstraněné pravé části nahrazen pomocnými vnitřními silami S_c , H_c a ohybovým momentem M_c dle výše uvedené znaménkové konvence. Na pravé části oblouku je účinek odstraněné levé části nahrazen rovněž pomocnými vnitřními silami S_c , H_c a ohybovým momentem M_c dle výše uvedené znaménkové konvence (obr. 8.5). Pro obě uvolněné části oblouku musí být splněny podmínky rovnováhy, ve kterých vystupují neznámé složky vnitřních sil S_c , H_c a M_c . Řešením těchto rovnic se získají hodnoty vnitřních sil. Níže uvedené rovnice jsou vyjádřené ve znaménkové konvenci shodné s podmínkami rovnováhy při výpočtu reakcí.



Obrázek 8.5: Rovnováha částí oblouku příkladu 8.2

Podmínky rovnováhy levé části (úsek ac):

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 : \\ R_{ax} + H_c &= 0 \\ 0 + H_c &= 0 \\ \underline{H_c} &= 0 \text{ [kN]} , \end{aligned} \tag{8.63}$$

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} &= 0 : \\ -R_{az} + q \cdot (5 + x_c) + S_c &= 0 \\ -50 + 10 \cdot 7,5 + S_c &= 0 \\ \underline{S_c} &= -25,0 \text{ [kN]} , \end{aligned} \tag{8.64}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ic} &= 0 : \\ - R_{az} \cdot (5 + x_c) + q \cdot \frac{(5 + x_c)^2}{2} - H_c \cdot (f - z_c) + M_c &= 0 \\ - 50 \cdot 7,5 + 10 \cdot \frac{7,5^2}{2} - 0 + M_c &= 0 \\ \underline{M_c = 93,75 \text{ [kNm]}} .\end{aligned}\tag{8.65}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ia} &= 0 : (\textit{kontrola}) \\ - S_s \cdot (5 + x_c) - H_c \cdot (f - z_c) - q \cdot \frac{7,5^2}{2} + M_c &= 0 \\ - (-25) \cdot 7,5 - 0 - 10 \cdot \frac{7,5^2}{2} + 93,75 &= 0 .\end{aligned}\tag{8.66}$$

Podmínky rovnováhy pravé části (úsek *bc*):

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 : \\ - H_c &= 0 \\ \underline{H_c = 0 \text{ [kN]}} ,\end{aligned}\tag{8.67}$$

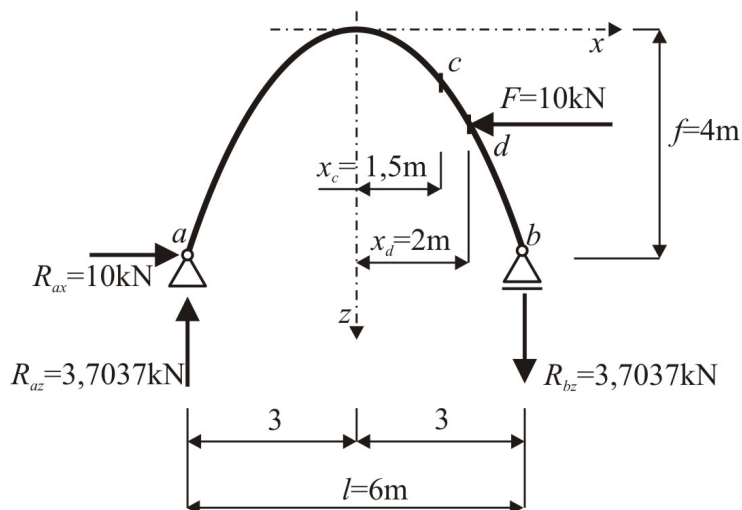
$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0 : \\ q \cdot (5 - x_c) - R_{bz} - S_c &= 0 \\ 10 \cdot 2,5 - 50 - S_c &= 0 \\ \underline{S_c = -25,0 \text{ [kN]}} ,\end{aligned}\tag{8.68}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ic} &= 0 : \\ R_{bz} \cdot (5 - x_c) - q \cdot \frac{(5 - x_c)^2}{2} - M_c &= 0 \\ 50 \cdot 2,5 - 10 \cdot \frac{2,5^2}{2} - M_c &= 0 \\ \underline{M_c = 93,75 \text{ [kNm]}} .\end{aligned}\tag{8.69}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ib} &= 0 : (\textit{kontrola}) \\ - S_c \cdot (5 - x_c) + H_c \cdot (f - z_c) + q \cdot \frac{(5 - x_c)^2}{2} - M_c &= 0 \\ - (-25,0) \cdot 2,5 + 0 + 10 \cdot \frac{2,5^2}{2} - 93,75 &= 0 .\end{aligned}\tag{8.70}$$

8.3 Příklad - oblouk 3

Spočítejte vnitřní síly v bodech c a d zakřiveného nosníku dle obrázku 8.6. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.



Obrázek 8.6: Schéma konstrukce příkladu 8.3

8.3.1 Řešení - oblouk 3

Rozbor geometrie

Souřadnice podporových bodů a a b určených ze zadání konstrukce:

$$x_a = -3 \text{ [m]}, \quad z_a = 4 \text{ [m]}, \quad x_b = 3 \text{ [m]}, \quad z_b = 4 \text{ [m]}, \quad (8.71)$$

rovnice paraboly dle (8.1):

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{4}{(\pm 3)^2} = 0,44 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad (8.72)$$

$$z = k \cdot x^2 = 0,44 \cdot x^2 \text{ [m]}, \quad (8.73)$$

rovnice sklonu střednice prutu dle (8.2)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{dx} = 2k \cdot x = 2 \cdot 0,44 \cdot x = 0,88 \cdot x \text{ [-]}, \quad (8.74)$$

z -ová souřadnice bodu c z_c dle (8.73), je-li dle zadání konstrukce $x_c = 1,5 \text{ [m]}$

$$z_c = k \cdot x_c^2 = 0,44 \cdot 1,5^2 = 1,0 \text{ [m]}, \quad (8.75)$$

sklon střednice prutu v bodu c dle (8.74)

$$\operatorname{tg} \psi_c = 2k \cdot x_c = 0,88 \cdot x_c = 0,88 \cdot 1,5 = 1,33 [-], \quad (8.76)$$

goniometrické funkce úhlu sklonu střednice ψ_c v bodu c dle (8.3) a (8.4)

$$\cos \psi_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,60 [-], \quad (8.77)$$

$$\sin \psi_c = \frac{\operatorname{tg} \psi_c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,80 [-]. \quad (8.78)$$

z -ová souřadnice bodu d z_d dle (8.73), je-li dle zadání konstrukce $x_c = 2,0$ [m]

$$z_d = k \cdot x_d^2 = 0,44 \cdot 2,0^2 = 1,77 [\text{m}], \quad (8.79)$$

sklon střednice prutu v bodu d dle (8.74)

$$\operatorname{tg} \psi_d = 2k \cdot x_d = 0,88 \cdot x_d = 0,88 \cdot 2,0 = 1,77 [-], \quad (8.80)$$

goniometrické funkce úhlu sklonu střednice ψ_d v bodu d dle (8.3) a (8.4)

$$\cos \psi_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,49026 [-], \quad (8.81)$$

$$\sin \psi_d = \frac{\operatorname{tg} \psi_d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,871576 [-]. \quad (8.82)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu c

Schéma pro výpočet vnitřních sil S_c, H_c dle výše uvedené znaménkové konvence i schéma vnitřních sil N_c, V_c, M_c z levé i pravé strany viz obr. 8.7. Výpočet je jednoduchý, proto jsou zde uvedeny pouze výsledky:

$$H_c = -10,0 [\text{kN}], \quad S_c = 3,7037 [\text{kN}], \quad (8.83)$$

$$N_c = -3,037 [\text{kN}], \quad V_c = 10,22 [\text{kN}], \quad M_c = 13,33 [\text{kNm}]. \quad (8.84)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu d

Výpočet je složitější, neboť v bodu d je osamělé zatížení vodorovnou silou F . V tomto bodu tudíž dochází ke skokové změně horizontální síly a stejně jako u přímých prutů, i tady je nutno spočítat 2 hodnoty této síly: H_{da} v limitní vzdálenosti (limitně) vlevo od síly F a H_{db} limitně vpravo od síly F . S_d i M_d mají limitně vlevo i vpravo od bodu d neměnné hodnoty ($S_{da} \equiv S_{db} \equiv S_d$), ($M_{da} \equiv M_{db} \equiv M_d$). Výpočet lze opět provést z obou stran, což je v této kapitole v rámci procvičení provedeno, přičemž postačující je výpočet pouze z jedné strany.

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu c z pravé strany

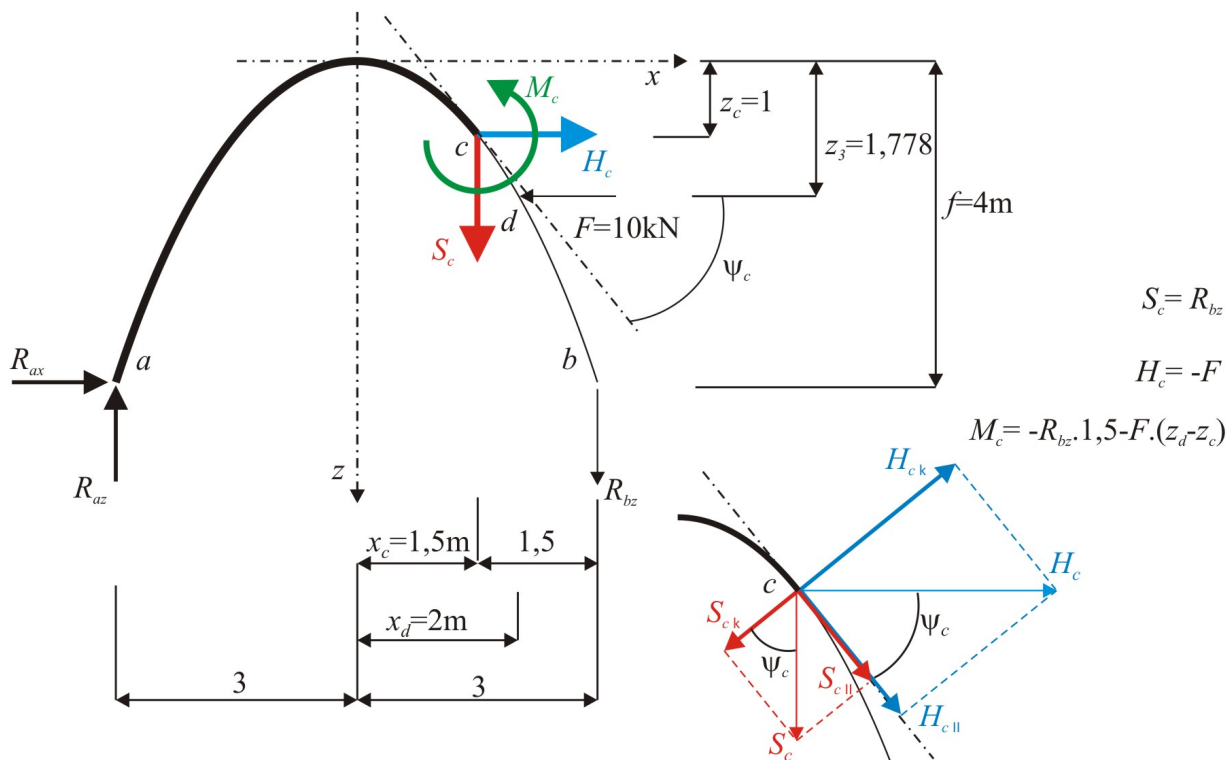
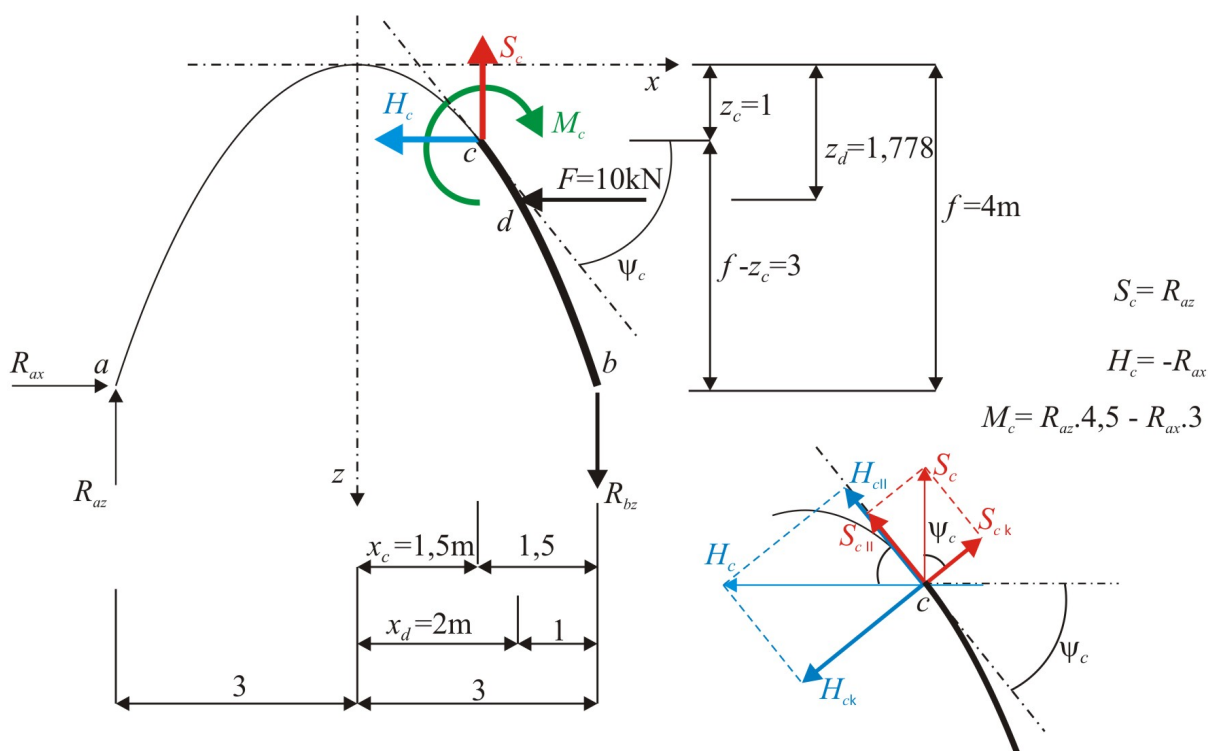


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu c z levé strany



Obrázek 8.7: Schéma řešení příkladu 8.3 - bod c

Výpočet vnitřních sil v bodu d z levé strany**Výpočet vnitřních sil v bodu da z levé strany**

Sledovaný bod da leží vlevo-v limitní vzdálenosti (limitně) od působíště síly F , tudíž na úseku $a - d$. Síla F tedy působí na úseku $d - b$. Schéma řešení je na obrázku 8.8 nahoře.

$$S_{da}^L \equiv S_d^L = R_{az} = 3,7037 \text{ [kN]} , \quad (8.85)$$

$$H_{da}^L = -R_{ax} = -10,0 \text{ [kN]} , \quad (8.86)$$

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = 3,7037 \cdot 0,49026 = 1,8158 \text{ [kN]} , \quad (8.87)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = 3,7037 \cdot 0,871576 = 3,2281 \text{ [kN]} , \quad (8.88)$$

$$H_{da\parallel} = H_{da} \cdot \cos \psi_d = -10,0 \cdot 0,49026 = -4,9026 \text{ [kN]} , \quad (8.89)$$

$$H_{da\perp} = H_{da} \cdot \sin \psi_d = -10,0 \cdot 0,87158 = -8,7158 \text{ [kN]} , \quad (8.90)$$

$$\underline{N_{da}^L} = S_{d\parallel} + H_{da\parallel} = 3,2281 + (-4,9026) = \underline{-1,675 \text{ [kN]}} , \quad (8.91)$$

$$\underline{V_{da}^L} = S_{d\perp} - H_{da\perp} = 1,8158 - (-8,7158) = \underline{10,532 \text{ [kN]}} , \quad (8.92)$$

$$\underline{M_{da}^L} \equiv \underline{M_{db}^L} \equiv M_d^L = Raz \cdot (3 + x_d) - R_{ax} \cdot (f - z_d) = Raz \cdot 5 - R_{ax} \cdot 2,22 = \underline{-3,7037 \text{ [kNm]}} . \quad (8.93)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu db z levé strany

Sledovaný bod db leží vpravo-v limitní vzdálenosti (limitně) od působíště síly F , tudíž na úseku $b - d$. Síla F tedy působí na úseku $d - a$. Schéma řešení je na obrázku 8.8 dole.

$$S_{db}^L \equiv S_d^L = R_{az} = 3,7037 \text{ [kN]} , \quad (8.94)$$

$$H_{db}^L = -R_{ax} + F = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.95)$$

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = 3,7037 \cdot 0,49026 = 1,8158 \text{ [kN]} , \quad (8.96)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = 3,7037 \cdot 0,871576 = 3,2281 \text{ [kN]} , \quad (8.97)$$

$$H_{da\parallel} = H_{da} \cdot \cos \psi_d = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.98)$$

$$H_{da\perp} = H_{da} \cdot \sin \psi_d = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.99)$$

$$\underline{N_{db}^L} = S_{d\parallel} + H_{da\parallel} = 3,2281 + 0 = \underline{3,2281 \text{ [kN]}} , \quad (8.100)$$

$$\underline{V_{db}^L} = S_{d\perp} - H_{db\perp} = 1,8158 - 0 = \underline{1,8158 \text{ [kN]}} , \quad (8.101)$$

$$\underline{M_{db}^L} \equiv M_{da}^L \equiv M_d^L = Raz \cdot (3 + x_d) - R_{ax} \cdot (f - z_d) = \underline{-3,7037 \text{ [kNm]}} . \quad (8.102)$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu d_a z levé strany (bod d_a nalevo od d).

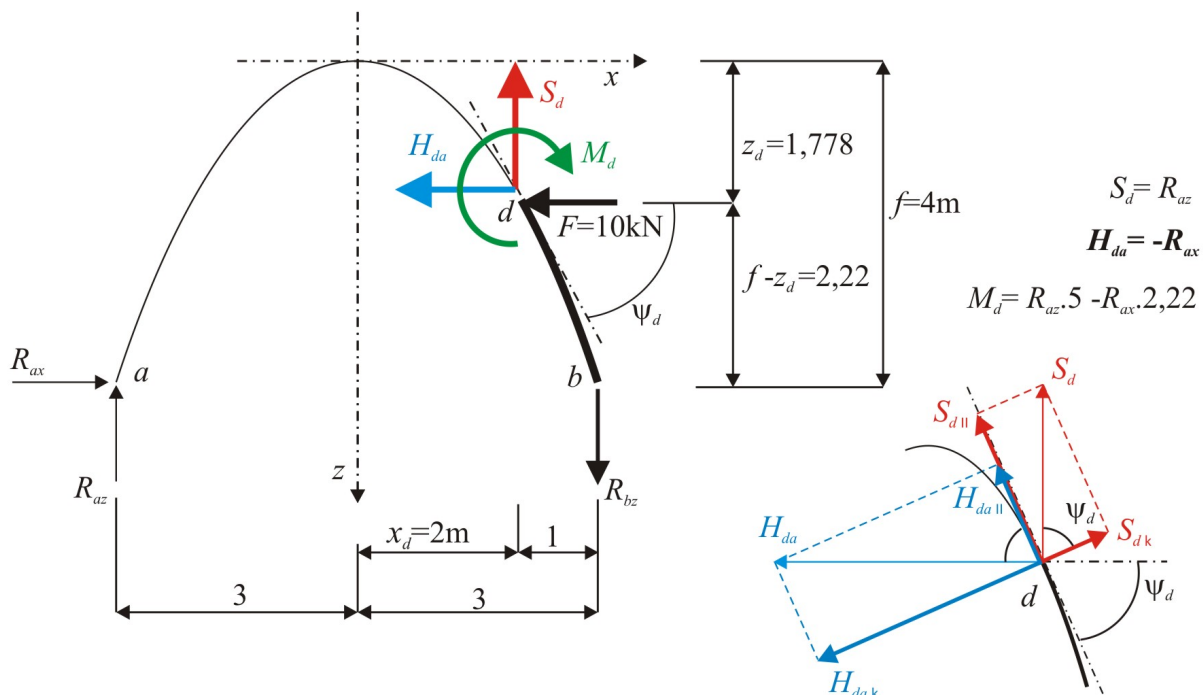
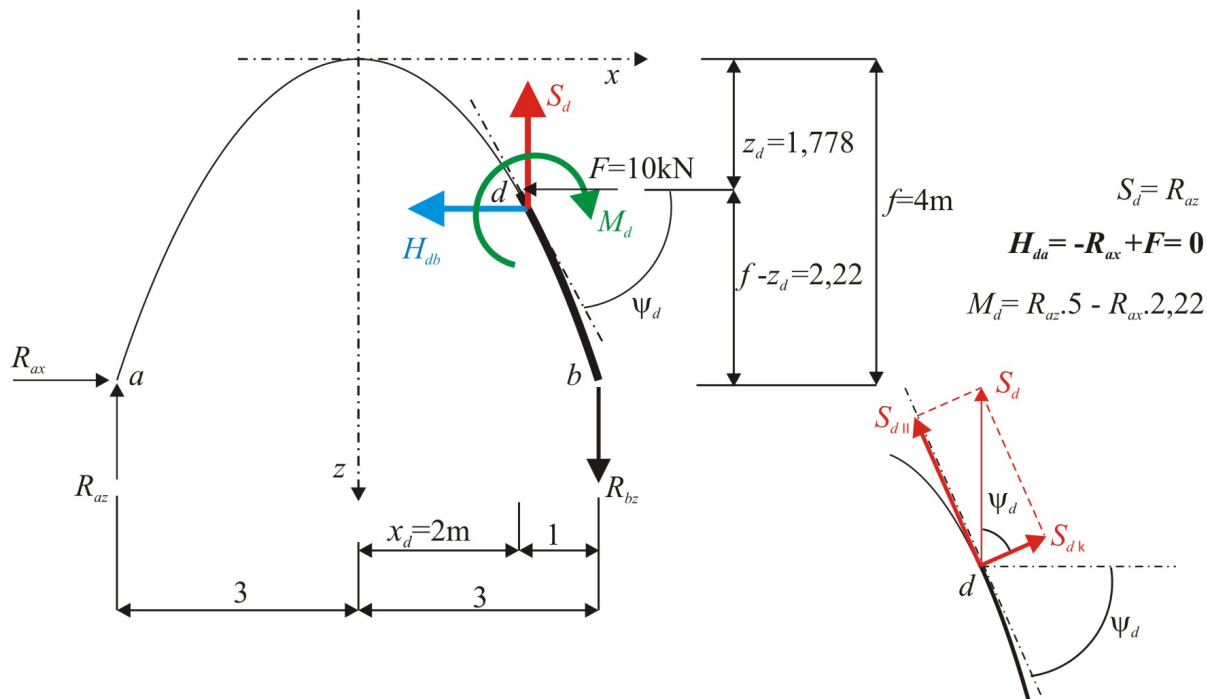


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d_b z levé strany (bod d_b napravo od d).



Obrázek 8.8: Schéma řešení příkladu 8.3 - bod d , řešení zleva

Výpočet vnitřních sil v bodu d z pravé strany**Výpočet vnitřních sil v bodu db z pravé strany**

Sledovaný bod db leží vpravo-v limitní vzdálenosti (limitně) od působíště síly F , tudíž na úseku $b - d$. Síla F tedy působí na úseku $d - a$. Schéma řešení je na obrázku 8.9 nahoře.

$$S_{db}^P \equiv S_d^P = R_{bz} = 3,7037 \text{ [kN]} , \quad (8.103)$$

$$H_{db}^L = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.104)$$

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = 3,7037 \cdot 0,49026 = 1,8158 \text{ [kN]} , \quad (8.105)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = 3,7037 \cdot 0,871576 = 3,2281 \text{ [kN]} , \quad (8.106)$$

$$H_{db\perp} = H_{db} \cdot \sin \psi_d = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.107)$$

$$H_{db\parallel} = H_{db} \cdot \cos \psi_d = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.108)$$

$$\underline{N_{db}^P} = S_{d\parallel} + H_{db\parallel} = 3,2281 + 0 = \underline{3,2281 \text{ [kN]}} , \quad (8.109)$$

$$\underline{V_{db}^P} = S_{d\perp} - H_{db\perp} = 1,8158 - 0 = \underline{1,8158 \text{ [kN]}} , \quad (8.110)$$

$$\underline{M_{db}^P} \equiv M_{da}^P \equiv M_d^P = -R_{bz} \cdot (3 - x_d) = \underline{-3,7037 \text{ [kNm]}} . \quad (8.111)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu da z pravé strany

Sledovaný bod da leží vlevo-v limitní vzdálenosti (limitně) od působíště síly F , tudíž na úseku $a - d$. Síla F tedy působí na úseku $d - b$. Schéma řešení je na obrázku 8.9 dole.

$$S_{da}^P \equiv S_d^L = R_{bz} = 3,7037 \text{ [kN]} , \quad (8.112)$$

$$H_{da}^P = -F = -10,0 \text{ [kN]} , \quad (8.113)$$

$$S_{d\perp} = S_d \cdot \cos \psi_d = 3,7037 \cdot 0,49026 = 1,8158 \text{ [kN]} , \quad (8.114)$$

$$S_{d\parallel} = S_d \cdot \sin \psi_d = 3,7037 \cdot 0,871576 = 3,2281 \text{ [kN]} , \quad (8.115)$$

$$H_{da\parallel} = H_{da} \cdot \cos \psi_d = -10,0 \cdot 0,49026 = -4,9026 \text{ [kN]} , \quad (8.116)$$

$$H_{da\perp} = H_{da} \cdot \sin \psi_d = -10,0 \cdot 0,87158 = -8,7158 \text{ [kN]} , \quad (8.117)$$

$$\underline{N_{da}^P} = S_{d\parallel} + H_{da\parallel} = 3,2281 + (-4,9026) = \underline{-1,6745 \text{ [kN]}} , \quad (8.118)$$

$$\underline{V_{da}^P} = S_{d\perp} - H_{da\perp} = 1,8158 - (-8,7158) = \underline{10,532 \text{ [kN]}} , \quad (8.119)$$

$$\underline{M_{da}^P} \equiv M_{db}^P \equiv M_d^P = -R_{bz} \cdot (3 - x_d) = \underline{-3,7037 \text{ [kNm]}} . \quad (8.120)$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu d_b z pravé strany (bod d_b napravo od d).

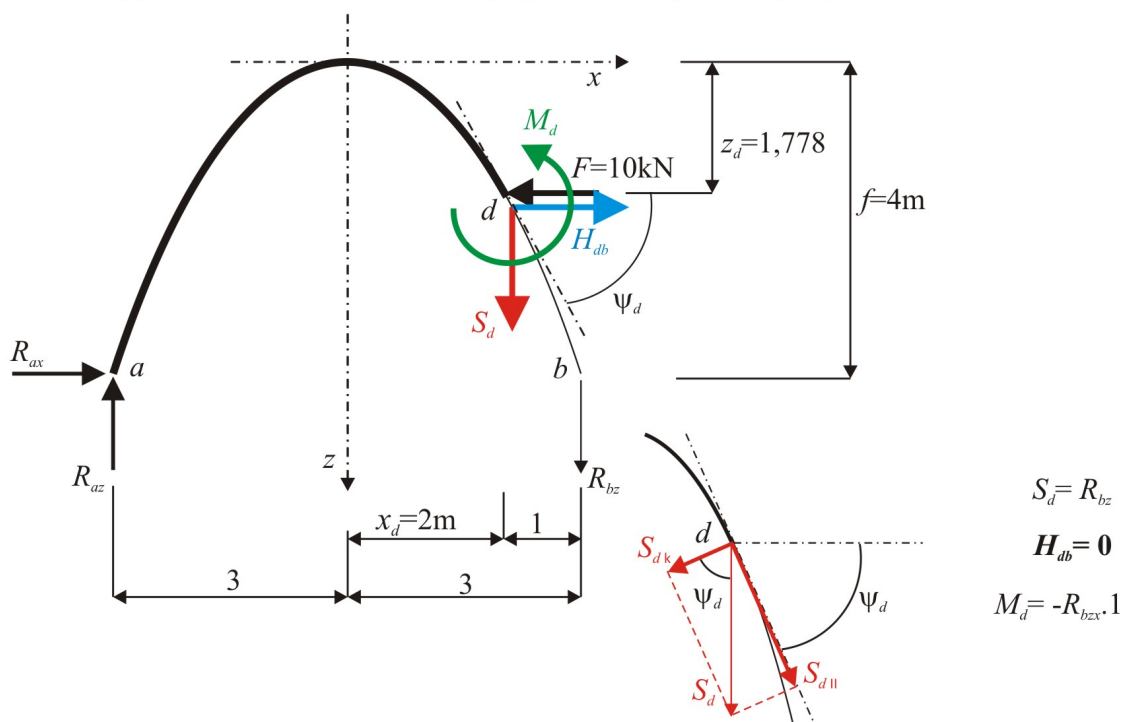
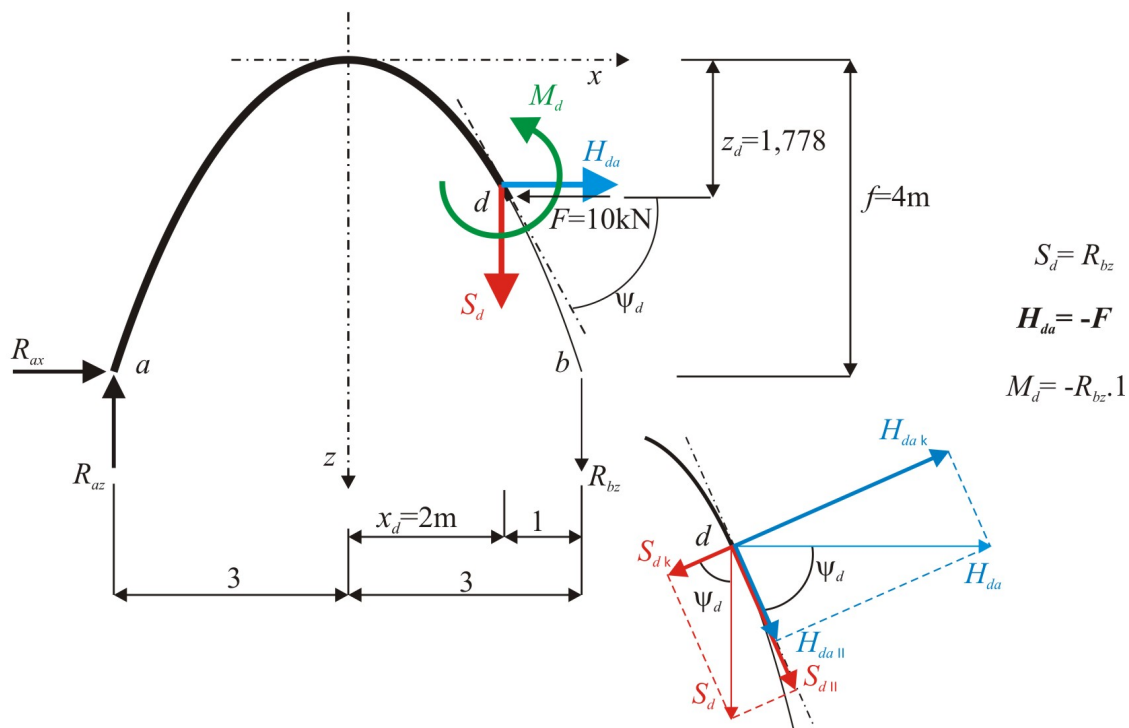


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodu d_a z pravé strany (bod d_a nalevo od d).



Obrázek 8.9: Schéma řešení příkladu 8.3 - bod d, řešení zprava

Kontroly rovnováhy částí oblouků

Jedná se o doplňkové výpočty.

Kontrola rovnováhy úseku $\underline{a-d_a}$ (obr. 8.10 vlevo nahoře)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 : \\ R_{ax} + H_{da} &= 0 \\ 10 + (-10) &= 0,\end{aligned}\tag{8.121}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0 : \\ -R_{az} + S_d &= 0 \\ -3,7 + 3,7 &= 0,\end{aligned}\tag{8.122}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{id} &= 0 : \\ -R_{az} \cdot 5 + R_{ax} \cdot 2, \overline{22} + M_c &= 0 \\ -3,7037 \cdot 5 + 10 \cdot 2, \overline{22} + (-3,7037) &= 0,\end{aligned}\tag{8.123}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ia} &= 0 : (alternativa) \\ -S_d \cdot 5 - H_{da} \cdot 2, \overline{22} + M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 5 - (-10) \cdot 2, \overline{22} + (-3,7037) &= 0.\end{aligned}\tag{8.124}$$

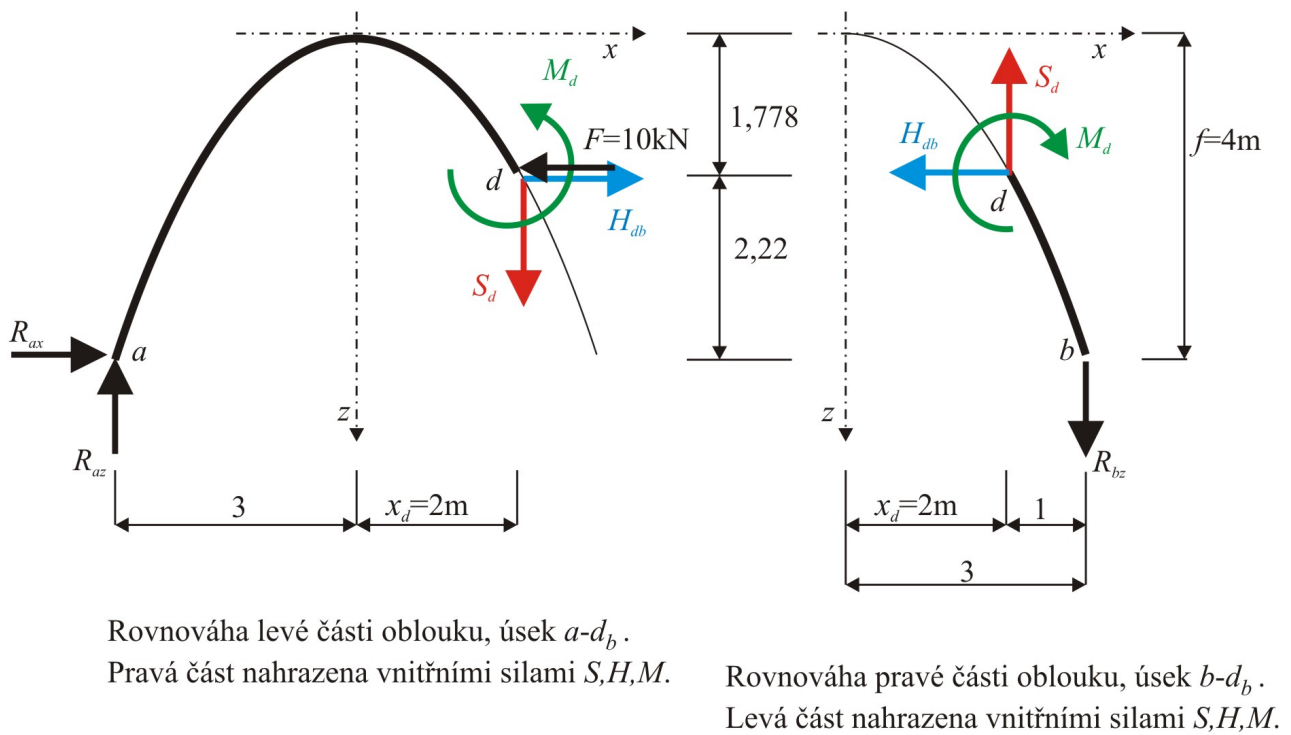
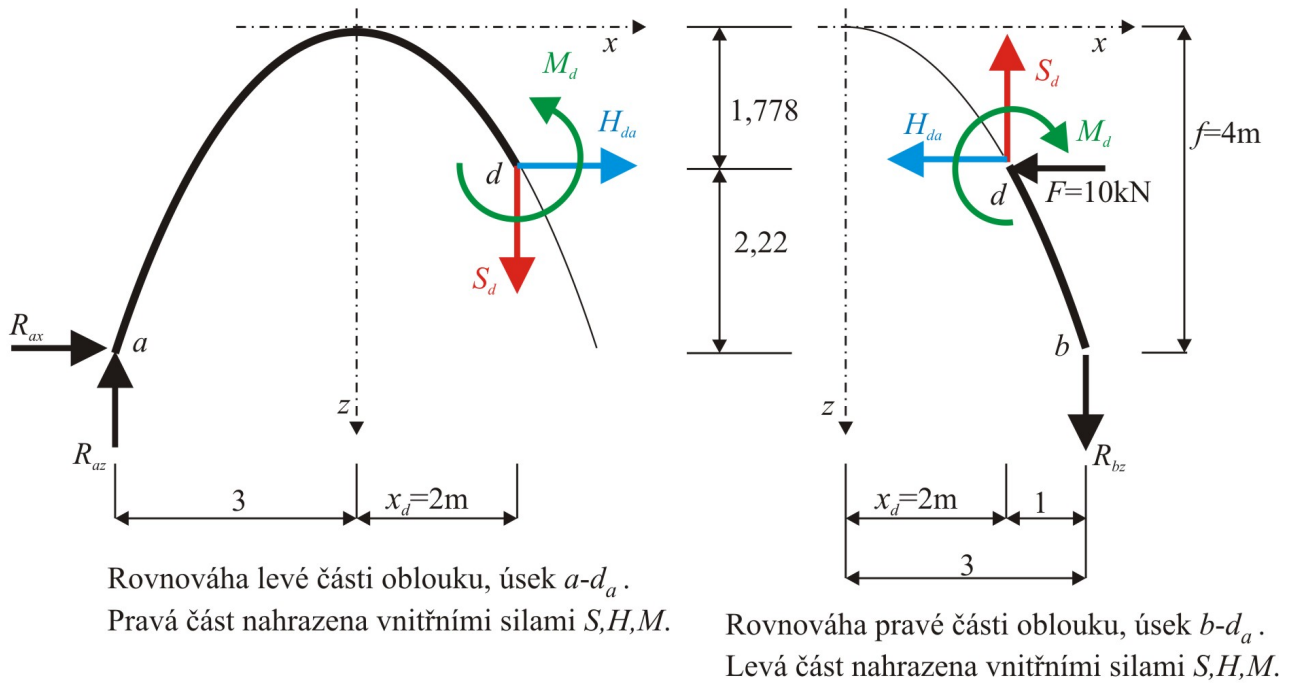
Kontrola rovnováhy úseku $\underline{b-d_a}$ (obr. 8.10 vpravo nahoře)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 : \\ -F - H_{da} &= 0 \\ (-10) - (-10) &= 0,\end{aligned}\tag{8.125}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0 : \\ R_{bz} - S_d &= 0 \\ 3,7 - 3,7 &= 0,\end{aligned}\tag{8.126}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{id} &= 0 : \\ -R_{bz} \cdot 1 - M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 1 - (-3,7037) &= 0,\end{aligned}\tag{8.127}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ib} &= 0 : (alternativa) \\ -S_d \cdot 1 + H_{da} \cdot 2, \overline{22} + F \cdot 2, \overline{22} - M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 1 + (-10) \cdot 2, \overline{22} + 10 \cdot 2, \overline{22} - (-3,7037) &= 0.\end{aligned}\tag{8.128}$$



Obrázek 8.10: Rovnováha částí oblouku příkladu 8.3

Kontrola rovnováhy úseku a – d_b

(obr. 8.10 vlevo dole)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 : \\ R_{ax} + H_{db} - F &= 0 \\ 10 + 0 - 10 &= 0,\end{aligned}\tag{8.129}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0 : \\ -R_{az} + S_d &= 0 \\ -3,7 + 3,7 &= 0,\end{aligned}\tag{8.130}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{id} &= 0 : \\ -R_{az} \cdot 5 + R_{ax} \cdot 2, \overline{22} + M_c &= 0 \\ -3,7037 \cdot 5 + 10 \cdot 2, \overline{22} + (-3,7037) &= 0,\end{aligned}\tag{8.131}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ia} &= 0 : (alternativa) \\ -S_d \cdot 5 - H_{db} \cdot 2, \overline{22} + F \cdot 2, \overline{22} + M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 5 - 0 + 10 \cdot 2, \overline{22} + (-3,7037) &= 0.\end{aligned}\tag{8.132}$$

Kontrola rovnováhy úseku b – d_b

(obr. 8.10 vpravo dole)

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 : \\ -H_{db} &= 0 \\ -0 &= 0,\end{aligned}\tag{8.133}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0 : \\ R_{bz} - S_d &= 0 \\ 3,7 - 3,7 &= 0,\end{aligned}\tag{8.134}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{id} &= 0 : \\ -R_{bz} \cdot 1 - M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 1 - (-3,7037) &= 0,\end{aligned}\tag{8.135}$$

$$\begin{aligned}\sum M_{ib} &= 0 : (alternativa) \\ -S_d \cdot 1 + H_{db} \cdot 2, \overline{22} - M_d &= 0 \\ -3,7037 \cdot 1 + 0 - (-3,7037) &= 0.\end{aligned}\tag{8.136}$$

8.4 Příklad - oblouk 4

Spočítejte vnitřní síly v bodech c a d zakřiveného nosníku dle obrázku 8.11. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.

Řešení - oblouk 4

Rozbor geometrie

$$x_a = -3 \text{ [m]} , \quad z_a = 4 \text{ [m]} , \quad x_b = 3 \text{ [m]} , \quad z_b = 4 \text{ [m]} , \quad (8.137)$$

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = 0,44 \text{ [m}^{-1}\text{]} , \quad (8.138)$$

$$z = k \cdot x^2 = 0,44 \cdot x^2 \text{ [m]} , \quad (8.139)$$

$$\operatorname{tg} \psi = 2k \cdot x = 0,88 \cdot x \text{ [-]} , \quad (8.140)$$

$$z_c = k \cdot x_c^2 = 0,44 \text{ [m]} , \quad (8.141)$$

$$\operatorname{tg} \psi_c = 2k \cdot x_c = 0,88 \text{ [-]} , \quad (8.142)$$

$$\cos \psi_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,7474 \text{ [-]} , \quad (8.143)$$

$$\sin \psi_c = \frac{\operatorname{tg} \psi_c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_c}} = 0,6644 \text{ [-]} . \quad (8.144)$$

$$z_d = k \cdot x_d^2 = 1,77 \text{ [m]} , \quad (8.145)$$

$$\operatorname{tg} \psi_d = 2k \cdot x_d = 1,77 \text{ [-]} , \quad (8.146)$$

$$\cos \psi_d = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,49026 \text{ [-]} , \quad (8.147)$$

$$\sin \psi_d = \frac{\operatorname{tg} \psi_d}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_d}} = 0,871576 \text{ [-]} . \quad (8.148)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu c

Schéma pro výpočet vnitřních sil viz obr. 8.11.

Schéma konstrukce

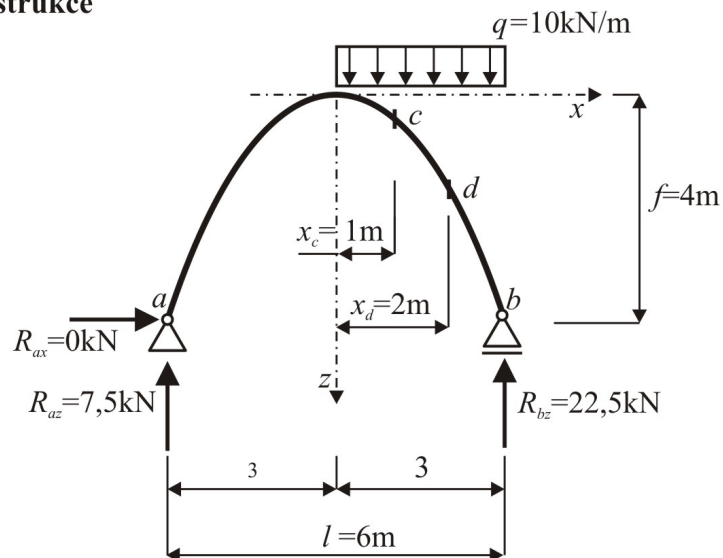


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě c z pravé strany

$$M_c = R_{bz} \cdot 2 - q \cdot 2^2 / 2$$

$$H_c = 0$$

$$S_c = -R_{bz} + q \cdot 2$$

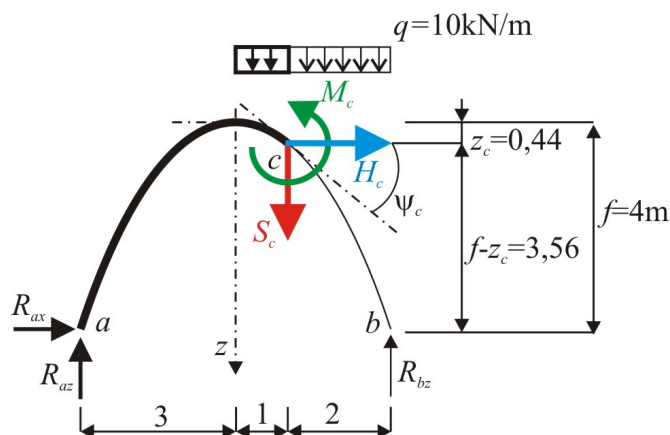
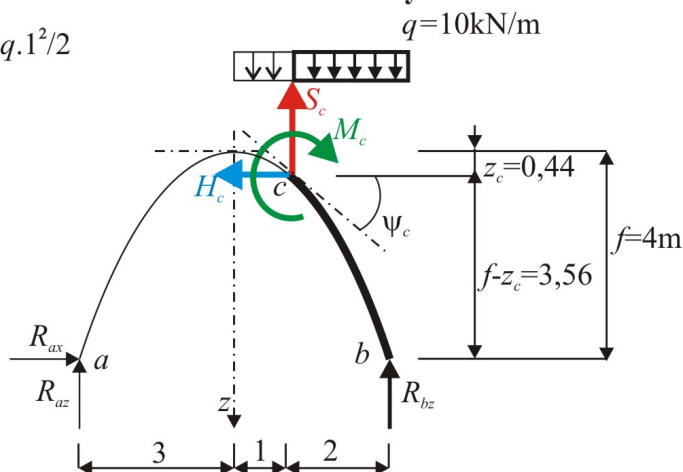


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě c z levé strany

$$M_c = R_{az} \cdot 4 - R_{ax} \cdot 3,56 - q \cdot 1^2 / 2$$

$$H_c = -R_{ax} = 0$$

$$S_c = R_{az} - q \cdot 1$$



Obrázek 8.11: Schéma konstrukce příkladu 8.4

Výpočet vnitřních sil v bodu c z pravé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_c, H_c dle výše uvedené znaménkové konvence viz obr. 8.11 uprostřed.

$$S_c^P \equiv S_c = -R_{bz} + q \cdot 2 = -2,5 \text{ [kN]} , \quad (8.149)$$

$$H_c^P \equiv H_c = 0 \text{ [kN]} . \quad (8.150)$$

$$S_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_c = -2,5 \cdot 0,7474 = -1,8685 \text{ [kN]} , \quad (8.151)$$

$$S_{c\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c = -2,5 \cdot 0,6644 = -1,661 \text{ [kN]} , \quad (8.152)$$

$$\underline{N_c^P} = S_{c\parallel} + H_{c\parallel} = S_{c\parallel} + 0 = \underline{-1,661 \text{ [kN]}} , \quad (8.153)$$

$$\underline{V_c^P} = S_{c\perp} - H_{c\perp} = S_{c\perp} - 0 = \underline{-1,869 \text{ [kN]}} , \quad (8.154)$$

$$\underline{M_c^P} = R_{bz} \cdot 2 - q \cdot \frac{(2)^2}{2} = \underline{25 \text{ [kNm]}} . \quad (8.155)$$

Výpočet vnitřních sil v bodu c z levé strany

Schéma pomocných vnitřních sil S_c, H_c dle výše uvedené znaménkové konvence viz obr. 8.11 dole.

$$S_c^L \equiv S_c = R_{az} - q \cdot 1 = -2,5 \text{ [kN]} , \quad (8.156)$$

$$H_c^L \equiv H_c = 0 \text{ [kN]} . \quad (8.157)$$

$$S_{c\perp} = S_c \cdot \cos \psi_c = -2,5 \cdot 0,7474 = -1,8685 \text{ [kN]} , \quad (8.158)$$

$$S_{c\parallel} = S_c \cdot \sin \psi_c = -2,5 \cdot 0,6644 = -1,661 \text{ [kN]} , \quad (8.159)$$

$$\underline{N_c^L} = S_{c\parallel} + H_{c\parallel} = S_{c\parallel} + 0 = \underline{-1,661 \text{ [kN]}} , \quad (8.160)$$

$$\underline{V_c^L} = S_{c\perp} - H_{c\perp} = S_{c\perp} - 0 = \underline{-1,869 \text{ [kN]}} , \quad (8.161)$$

$$\underline{M_c^L} = R_{az} \cdot 4 - q \cdot \frac{(1)^2}{2} = \underline{25 \text{ [kNm]}} . \quad (8.162)$$

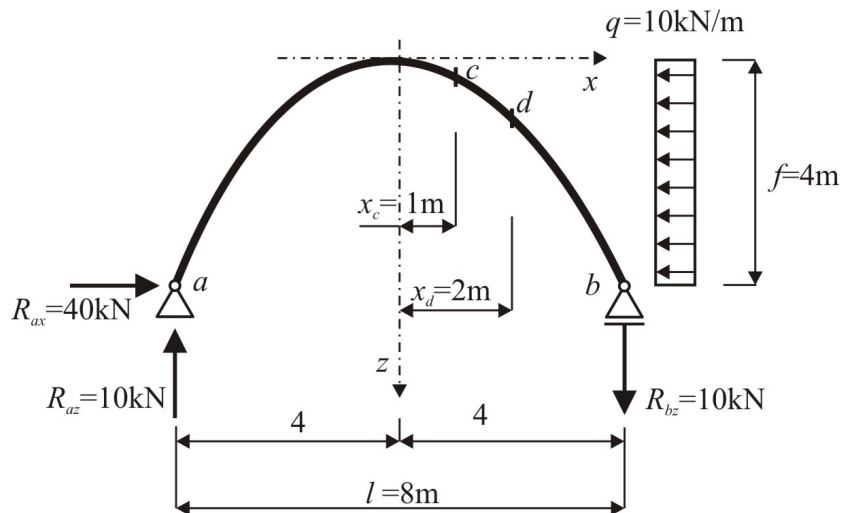
Hodnoty vnitřních sil v bodu d

$$H_d = 0 \text{ [kN]} , \quad S_d = -12,5 \text{ [kN]} , \quad (8.163)$$

$$N_d = -10,895 \text{ [kN]} , \quad V_d = -6,128 \text{ [kN]} , \quad M_d = 17,5 \text{ [kNm]} . \quad (8.164)$$

8.5 Příklad - oblouk 5

Spočítejte vnitřní síly v bodech c a d zakřiveného nosníku dle obrázku 8.12. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.



Obrázek 8.12: Schéma konstrukce příkladu 8.5

8.5.1 Řešení - oblouk 5

Výsledky řešení pro bod c

$$k = 0,25 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad z_c = 0,25 \text{ [m]}, \quad \sin \psi_c = 0,4472 \text{ [-]}, \quad \cos \psi_c = 0,8944 \text{ [-]}, \quad (8.165)$$

$$H_c = -37,5 \text{ [kN]}, \quad S_c = 10,0 \text{ [kN]}, \quad (8.166)$$

$$N_c = -12,298 \text{ [kN]}, \quad V_c = -24,596 \text{ [kN]}, \quad M_c = -100,3125 \text{ [kNm]}. \quad (8.167)$$

Výsledky řešení pro bod d

Schéma řešení z pravé i levé strany viz obrázek 8.13.

$$k = 0,25 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad z_d = 1,0 \text{ [m]}, \quad \sin \psi_d = \cos \psi_d = 0,7071 \text{ [-]}, \quad (8.168)$$

$$H_d = -30,0 \text{ [kN]}, \quad S_d = 10,0 \text{ [kN]}, \quad (8.169)$$

$$N_d = 28,28 \text{ [kN]}, \quad V_d = -14,142 \text{ [kN]}, \quad M_d = -65,0 \text{ [kNm]}. \quad (8.170)$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d z pravé strany

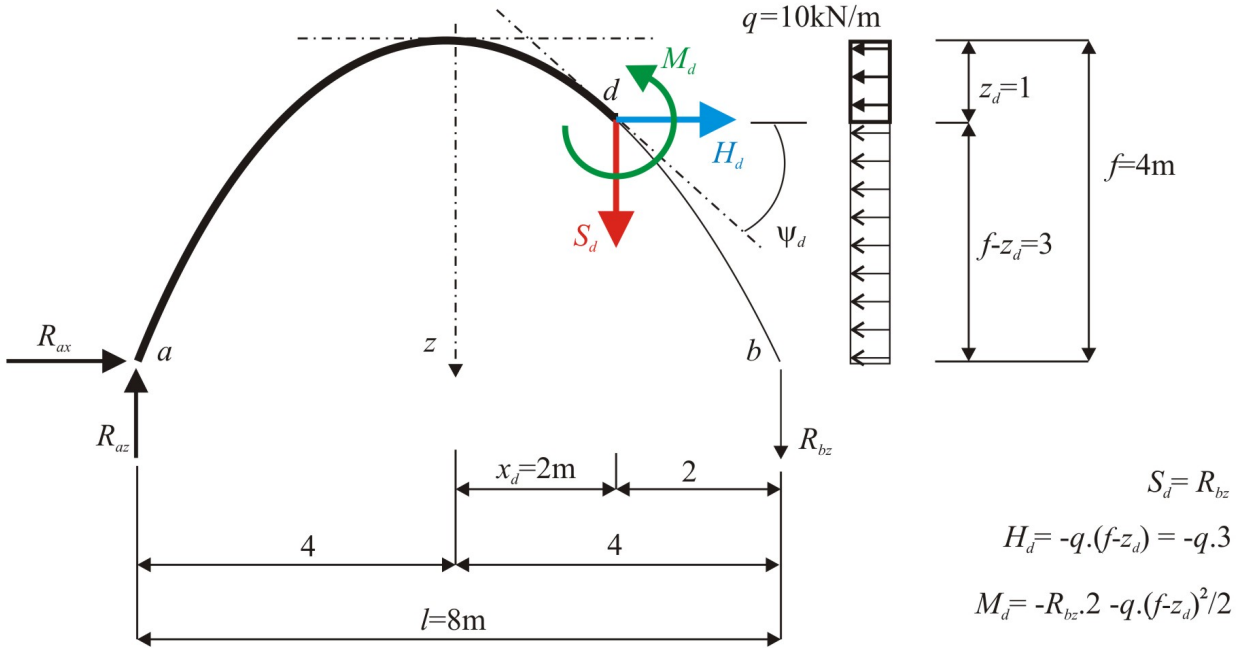
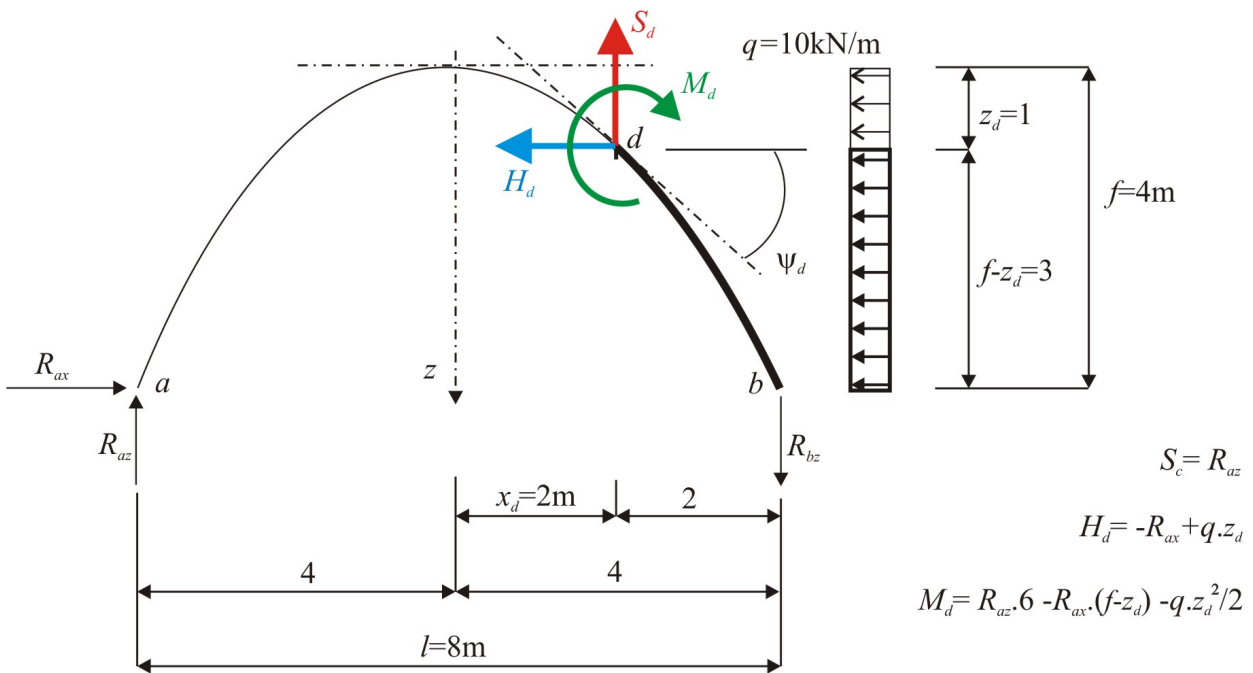


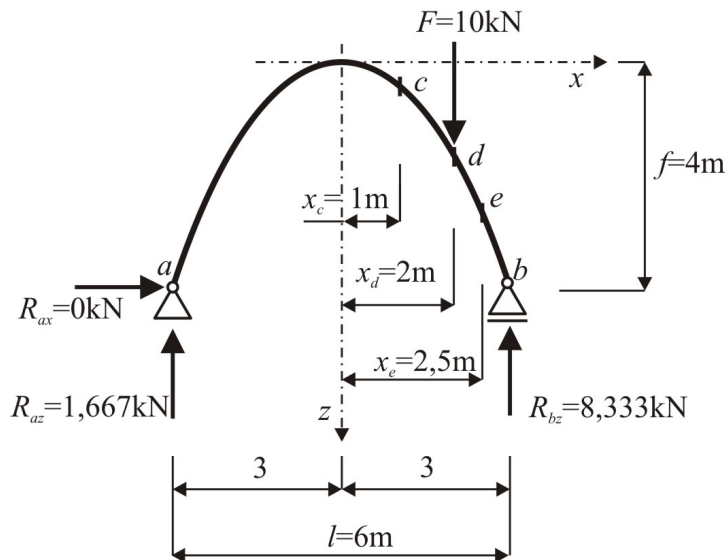
Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d z levé strany



Obrázek 8.13: Schéma řešení příkladu 8.5 - bod d

8.6 Příklad - oblouk 6

Spočítejte vnitřní síly v bodech c , d a e zakřiveného nosníku dle obrázku 8.14. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.



Obrázek 8.14: Schéma konstrukce příkladu 8.6

8.6.1 Řešení - oblouk 6

Výsledky řešení pro bod c

$$k = 0,44 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad z_c = 1,0 \text{ [m]}, \quad \sin \psi_c = 0,80 \text{ [-]}, \quad \cos \psi_c = 0,60 \text{ [-]}, \quad (8.171)$$

$$H_c = 0 \text{ [kN]}, \quad S_c = 1,66 \text{ [kN]}, \quad (8.172)$$

$$N_c = -1,33 \text{ [kN]}, \quad V_c = 0,99 \text{ [kN]}, \quad M_c = 6,66 \text{ [kNm]}. \quad (8.173)$$

Výsledky řešení pro bod e

$$k = 0,44 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad z_e = 2,77 \text{ [m]}, \quad \sin \psi_e = 0,91192 \text{ [-]}, \quad \cos \psi_e = 0,41036 \text{ [-]}, \quad (8.174)$$

$$H_e = 0 \text{ [kN]}, \quad S_e = -8,33 \text{ [kN]}, \quad (8.175)$$

$$N_e = -7,5993 \text{ [kN]}, \quad V_e = -3,4197 \text{ [kN]}, \quad M_e = 4,166 \text{ [kNm]}. \quad (8.176)$$

Výsledky řešení pro bod d

Řešení vnitřních sil bodu d je podobné s řešením bodu d v příkladu 8.3. Prut je v tomto místě zatížen svislým osamělým zatížením, což způsobí skokovou změnu svislé pomocné vnitřní síly, kterou je nutné definovat limitně vlevo S_{da} i limitně vpravo S_{db} od bodu d . Skoková změna se projeví také v normálové N_{da}, N_{db} i posouvající síle V_{da}, V_{db} . Horizontální pomocná vnitřní síla H_d i ohybový moment M_d jsou v bodu d neměnné.

Schéma řešení bodu d_a i d_b z pravé strany viz obrázek 8.15, z levé strany viz obrázek 8.16.

$$k = 0,44 \text{ [m}^{-1}\text{]} , \quad z_d = 1,77 \text{ [m]} , \quad \sin \psi_d = 0,87158 \text{ [-]} , \quad \cos \psi_d = 0,49026 \text{ [-]} , \quad (8.177)$$

$$H_d = 0 \text{ [kN]} , \quad (8.178)$$

$$M_d = 8,33 \text{ [kNm]} . \quad (8.179)$$

$$S_{da} = 1,66 \text{ [kN]} , \quad S_{db} = -8,33 \text{ [kN]} , \quad (8.180)$$

$$N_{da} = 1,4556 \text{ [kN]} , \quad N_{db} = -7,2633 \text{ [kN]} , \quad (8.181)$$

$$V_{da} = 0,8188 \text{ [kN]} , \quad V_{db} = -4,0858 \text{ [kN]} . \quad (8.182)$$

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d_b z pravé strany (bod d_b napravo od d).

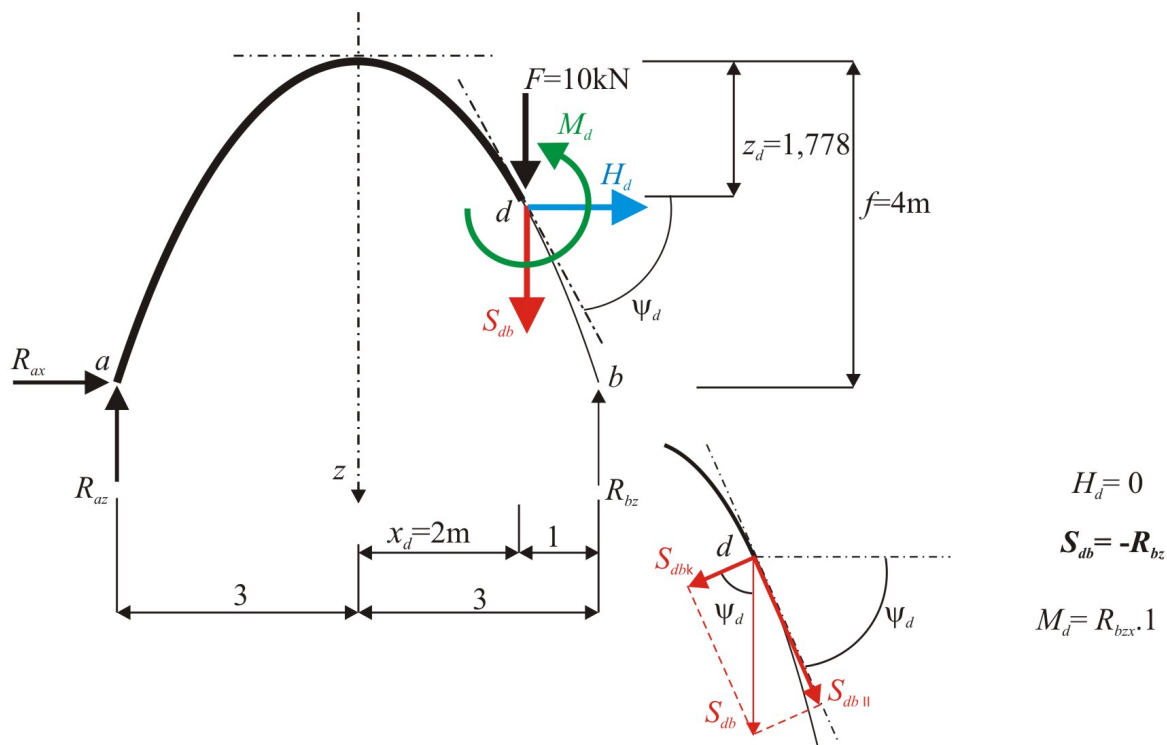
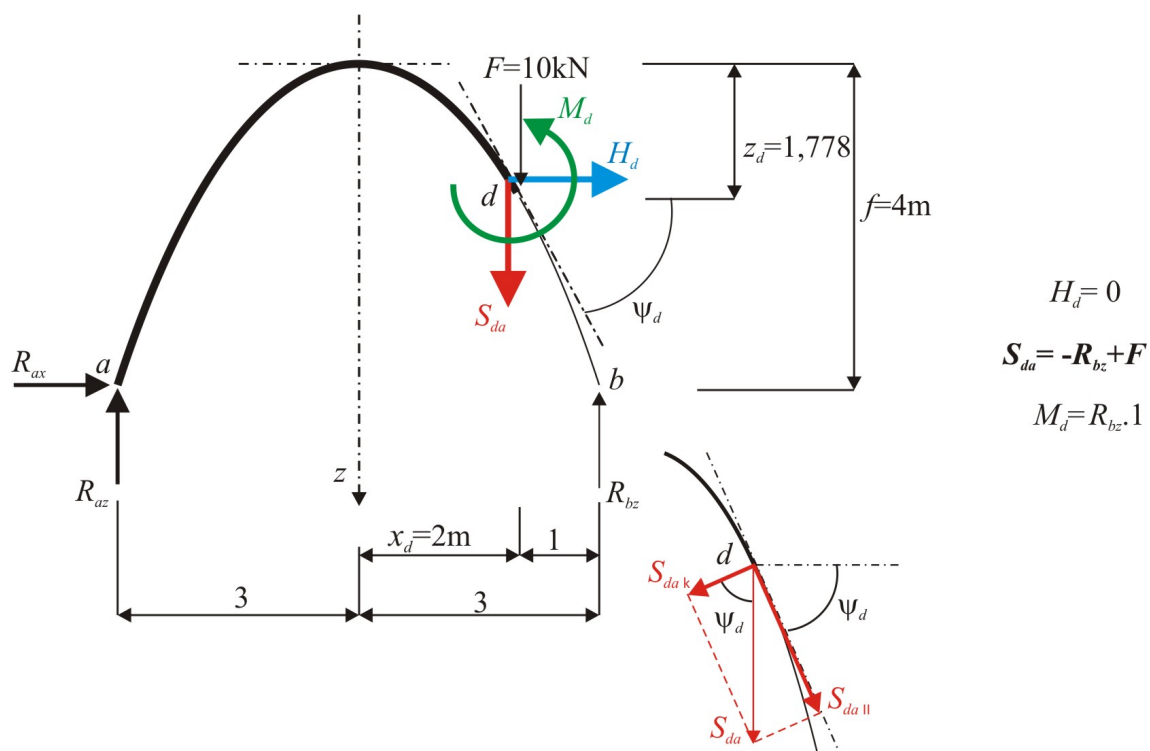


Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d_a z pravé strany (bod d_a nalevo od d).



Obrázek 8.15: Schéma řešení příkladu 8.6 - bod d , řešení zprava

Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d_a z levé strany (bod d_a nalevo od d).

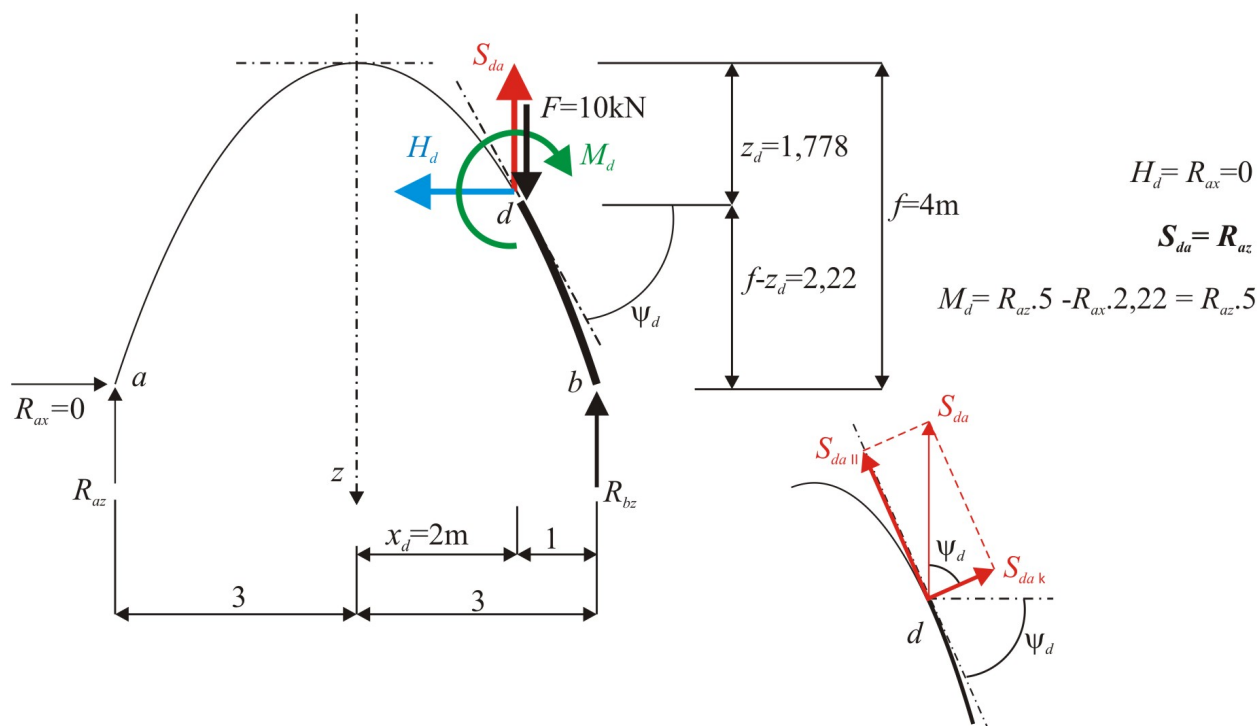
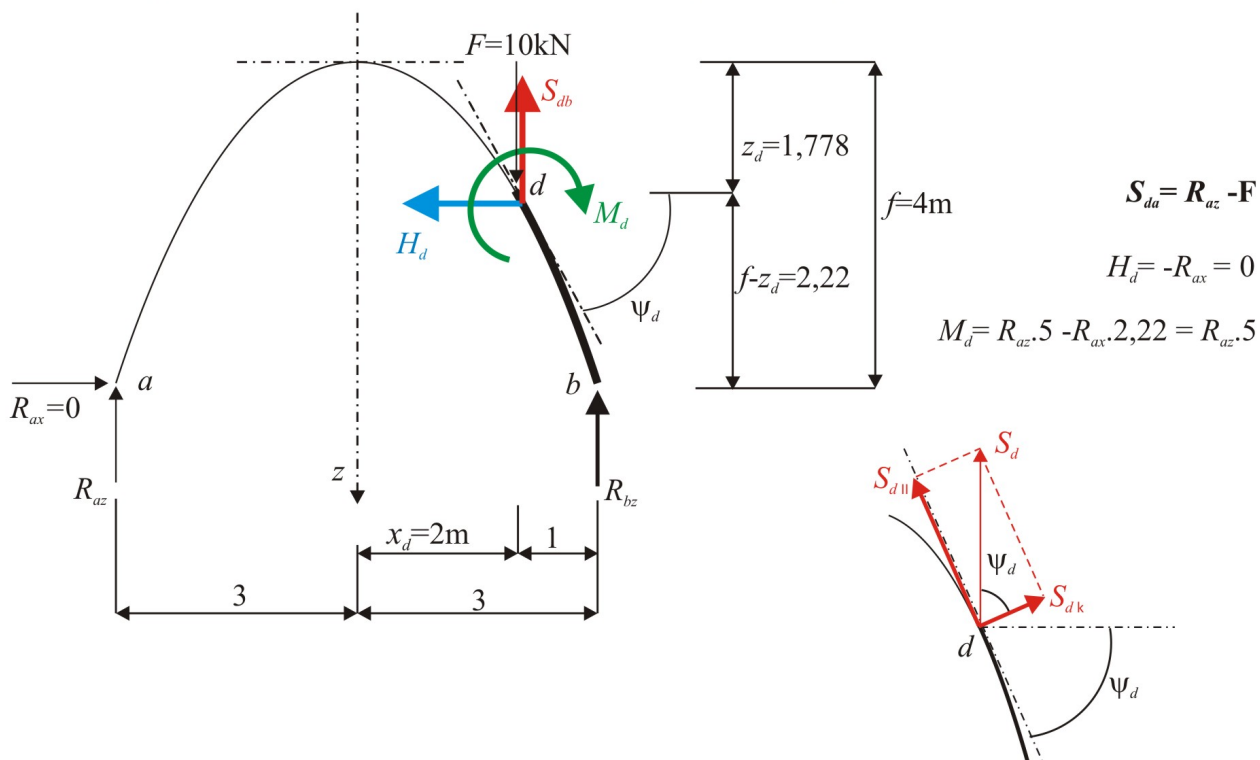


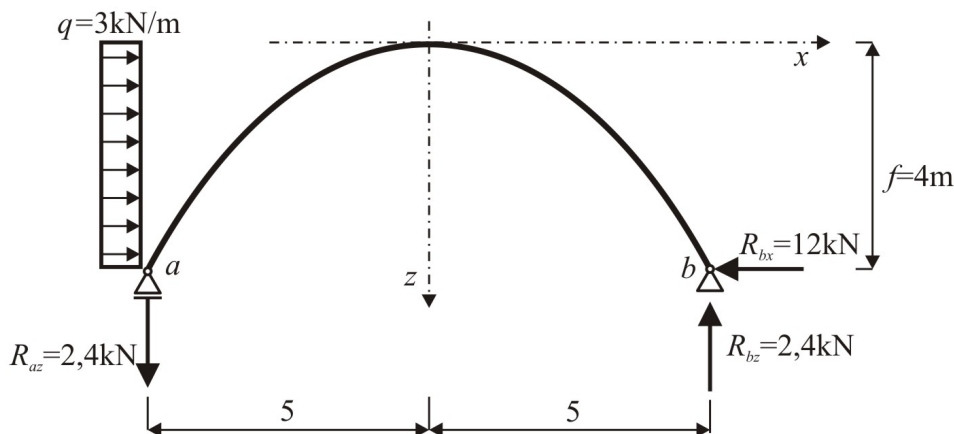
Schéma výpočtu vnitřních sil v bodě d_b z levé strany (bod d_b napravo od d).



Obrázek 8.16: Schéma řešení příkladu 8.6 - bod d , řešení zleva

8.7 Příklad - oblouk 7

Spočítejte vnitřní síly po celé délce zakřiveného nosníku dle obrázku 8.17. Průběhy vnitřních sil vykreslete. Hodnoty reakcí jsou převzaty z kapitoly 3.



Obrázek 8.17: Schéma konstrukce příkladu 8.7

8.7.1 Řešení - oblouk 7

Obecné rovnice

Je zadáno definovat vnitřní síly po celé délce zakřiveného nosníku. Pro řešení tohoto typu úlohy je potřeba definovat všechny rovnice v obecném tvaru, které budou následně využity pro analytické řešení pomocí tabulkového výpočtu, tedy v software excelu.

Souřadnice podporových bodů a a b určených ze zadání konstrukce:

$$x_a = -5 \text{ [m]}, \quad z_a = 4 \text{ [m]}, \quad x_b = 5 \text{ [m]}, \quad z_b = 4 \text{ [m]}, \quad (8.183)$$

rovnice paraboly dle (8.1)

$$k = \frac{z_a}{x_a^2} = \frac{z_b}{x_b^2} = \frac{4}{(\pm 5)^2} = 0,16 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad (8.184)$$

rovnice z -ové souřadnice paraboly dle (8.1)

$$z(x) = k \cdot x^2 = 0,16 \cdot x^2 \text{ [m]}, \quad (8.185)$$

rovnice sklonu střednice prutu dle (8.2)

$$\operatorname{tg} \psi(x) = \frac{dz}{dx} = 2k \cdot x = 2 \cdot 0,16 \cdot x = 0,32 \cdot x \text{ [-]}, \quad (8.186)$$

rovnice goniometrických funkcí úhlu sklonu střednice dle (8.3) a (8.4)

$$\cos \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi(x)}} [-] , \quad (8.187)$$

$$\sin \psi(x) = \frac{\operatorname{tg} \psi(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi(x)}} [-] , \quad (8.188)$$

rovnice pomocné svislé vnitřní síly $S(x)$, která je po celé délce oblouku konstantní

$$S(x) = -R_{az} = -2,40 \text{ [kN]} , \quad (8.189)$$

rovnice pomocné horizontální vnitřní síly $H(x)$ pro levou část oblouku ($x_a \leq x \leq 0$)

$$H(x)^L = -q \cdot z(x) = -q \cdot k \cdot x^2 = -0,48 \cdot x^2 \text{ [kN]} , \quad (8.190)$$

rovnice pomocné horizontální vnitřní síly $H(x)$ v pravé části oblouku ($0 \leq x \leq x_b$), která je zde konstantní

$$H(x)^P = -Q = -12,0 \text{ [kN]} , \quad (8.191)$$

pro výpočet vnitřních sil $N(x)$, $V(x)$ se využijí transformační vztahy (8.5) a (8.6)

$$N(x) = S(x) \cdot \sin \psi(x) + H(x) \cdot \cos \psi(x) \text{ [kN]} , \quad (8.192)$$

$$V(x) = S(x) \cdot \cos \psi(x) - H(x) \cdot \sin \psi(x) \text{ [kN]} , \quad (8.193)$$

rovnice ohybového momentu $M(x)$ pro levou část oblouku ($x_a \leq x \leq 0$)

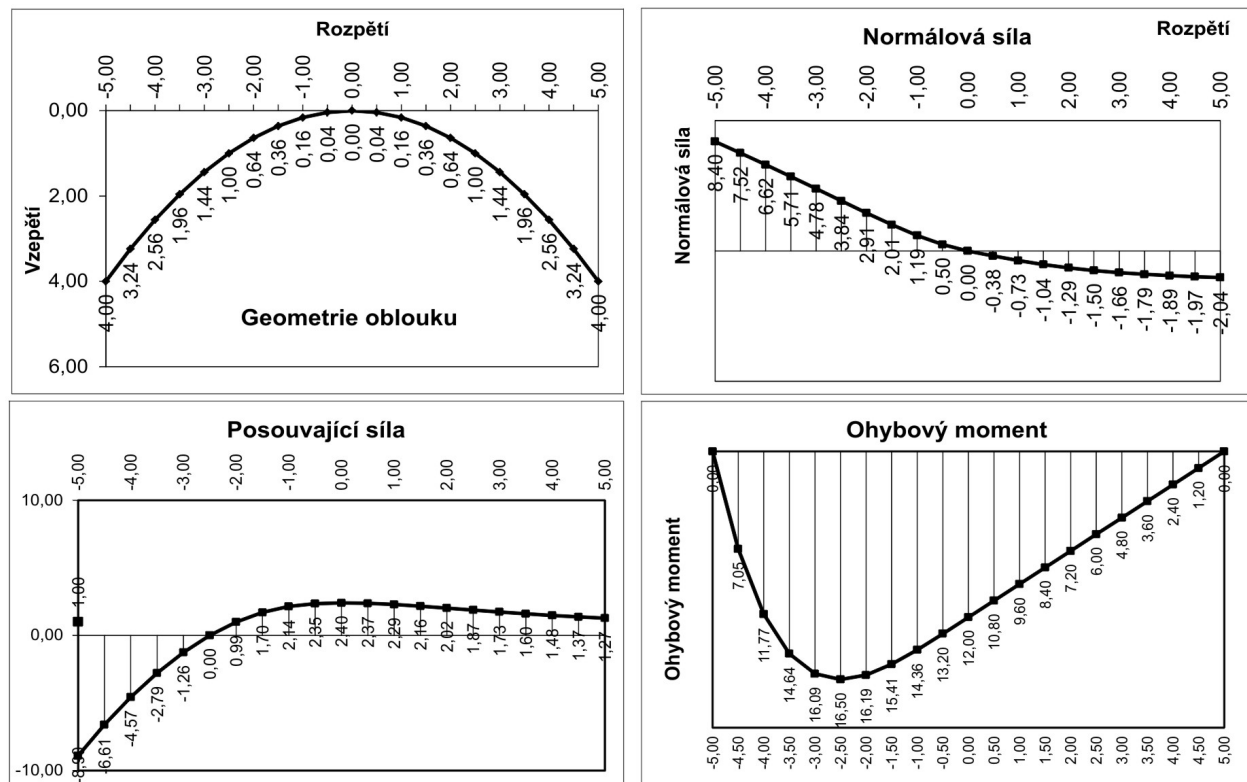
$$M(x)^L = R_{az} \cdot (5 + x) - q \cdot \frac{(f - z(x))^2}{2} \text{ [kNm]} , \quad (8.194)$$

rovnice ohybového momentu $M(x)$ pro pravou část oblouku ($0 \leq x \leq x_b$)

$$M(x)^P = R_{az} \cdot (5 + x) - Q \cdot \left(\frac{f}{2} - z(x)\right) \text{ [kNm]} . \quad (8.195)$$

Definování vnitřních sil pomocí tabulkového výpočtu

Rozpětí oblouku $x_a \leq x \leq x_b$ je rozděleno na určitý počet dílků (čím hustější dělení, tím přesnější výpočet) a pro každý hraniční bod jsou pomocí rovnic (8.185) až (8.195) definovány požadované veličiny dle tabulky v obrázku 8.18. Z vypočtených hodnot je možné vykreslit průběhy vnitřních sil (obr. 8.18).



x	z	tg ψ	ψ [rad]	ψ [deg]	cos ψ	sin ψ	H [kN]	S [kN]	N [kN]	V [kN]	M [kNm]
-6,00	3,00	-1,000000	-0,785398	-45,000000	0,707107	-0,707107	-8,000000	17,500000	-18,031223	6,717514	0,000000
-5,40	2,43	-0,900000	-0,732815	-41,987212	0,743294	-0,668965	-8,000000	15,100000	-16,047721	5,872024	5,220000
-4,80	1,92	-0,800000	-0,674741	-38,659808	0,780869	-0,624695	-8,000000	12,700000	-14,180578	4,919473	9,480000
-4,20	1,47	-0,700000	-0,610726	-34,992020	0,819232	-0,573462	-8,000000	10,300000	-12,460518	3,850390	12,780000
-3,60	1,08	-0,600000	-0,540420	-30,963757	0,857493	-0,514496	-8,000000	7,900000	-10,924460	2,658228	15,120000
-3,00	0,75	-0,500000	-0,463648	-26,565051	0,894427	-0,447214	-8,000000	5,500000	-9,615092	1,341641	16,500000
-2,40	0,48	-0,400000	-0,380506	-21,801409	0,928477	-0,371391	-8,000000	3,100000	-8,579125	-0,092848	16,920000
-1,80	0,27	-0,300000	-0,291457	-16,699244	0,957826	-0,287348	-8,000000	0,700000	-7,863754	-1,628305	16,380000
-1,20	0,12	-0,200000	-0,197396	-11,309932	0,980581	-0,196116	-8,000000	-1,700000	-7,511248	-3,235916	14,880000
-0,60	0,03	-0,100000	-0,099669	-5,710593	0,995037	-0,099504	-8,000000	-4,100000	-7,552332	-4,875682	12,420000
0,00	0,00	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000	0,000000	-8,000000	-6,500000	-8,000000	-6,500000	9,000000
0,60	0,03	0,100000	0,099669	5,710593	0,995037	0,099504	-8,000000	-6,500000	-8,607072	-5,671712	5,340000
1,20	0,12	0,200000	0,197396	11,309932	0,980581	0,196116	-8,000000	-6,500000	-9,119400	-4,804845	2,160000
1,80	0,27	0,300000	0,291457	16,699244	0,957826	0,287348	-8,000000	-6,500000	-9,530372	-3,927088	-0,540000
2,40	0,48	0,400000	0,380506	21,801409	0,928477	0,371391	-8,000000	-6,500000	-9,841853	-3,063973	-2,760000
3,00	0,75	0,500000	0,463648	26,565051	0,894427	0,447214	-8,000000	-6,500000	-10,062306	-2,236068	-4,500000
3,60	1,08	0,600000	0,540420	30,963757	0,857493	0,514496	-8,000000	-6,500000	-10,204166	-1,457738	-5,760000
4,20	1,47	0,700000	0,610726	34,992020	0,819232	0,573462	-8,000000	-6,500000	-10,281361	-0,737309	-6,540000
4,80	1,92	0,800000	0,674741	38,659808	0,780869	0,624695	-8,000000	-6,500000	-10,307468	-0,078087	-6,840000
5,40	2,43	0,900000	0,732815	41,987212	0,743294	0,668965	-8,000000	-6,500000	-10,294624	0,520306	-6,660000
6,00	3,00	1,000000	0,785398	45,000000	0,707107	0,707107	-8,000000	-6,500000	-10,253048	1,060660	-6,000000

Obrázek 8.18: Průběhy vnitřních sil příkladu 8.7

Kapitola 9

Rovinné nosníkové soustavy : Gerberův nosník

Spojité nosník s vloženými klouby se nazývá také Gerberovým nosníkem. Jedná se o kinematically i staticky určitou konstrukci, která se skládá z několika prutů spojených vnitřními momentovými klouby, jednou vnější vazbou, která brání proti posunutí ve směru prutů (směr vodorovný), a více než dvěma vazbami, které brání posunutí ve směru kolmém k osám prutů (směr svislý). Na Gerberově nosníku lze pozorovat krajní a vnitřní podpory a krajní či vnitřní pole, čímž se rozumí část Gerberova nosníku mezi sousedními podporami. V některých případech lze v Gerberově nosníku použít v krajní podpoře také dokonalé vetknutí.

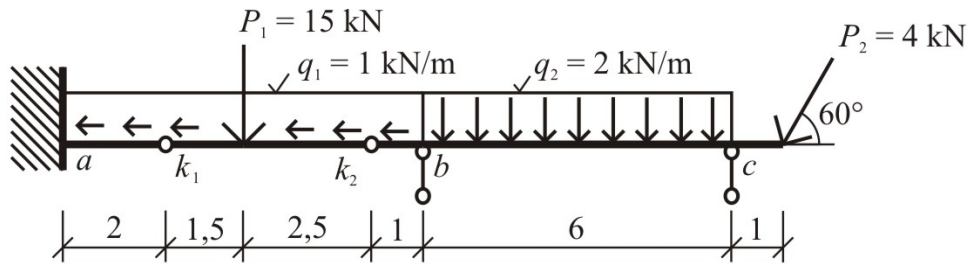
Při statickém řešení spojitého nosníku s vloženými klouby se nejprve provádí rozklad na osovou a příčnou úlohu. **Osová úloha** se váže k jedné vazbě bránící vodorovnému posunutí a veškerému působícímu vodorovnému zatížení. Jedná se o staticky určitou úlohu, která se vložením kloubů nemění. **Příčná úloha** má spojitost s více než 2 svislými vazbami a zatížením, které působí v příčném směru. Spojitý nosník bez vložených kloubů je staticky neurčitou (kinematically přeurčitou) úlohou. Kompenzace statické neurčitosti se provádí právě vkládáním kloubů, jejichž počet je roven $n_k = v_e - 2$. Platí zásada, že do staticky neurčitého spojitého nosníku je nutno vložit tolik kloubů, kolik činí počet vnitřních podpor nosníku zvětšený o jedničku za každé případné vetknutí konce.

Gerberův nosník se skládá z nosníků nesoucích a nesených. **Nesoucí nosníky** jsou dostatečně podepřeny vnějšími vazbami, jejich nosná funkce je zachována i při odstranění nesených nosníků. Naopak **nesené nosníky** jsou podepřeny také konci nosníků nesoucích, bez nichž není jejich nosná funkce zaručena.

Statické řešení spočívá v určení interakcí, reakcí a vnitřních sil nejprve na částech **nesených**. Pak se části **nesoucí** zatíží opačně orientovanými interakcemi ve vnitřních vazbách a určí se na nich zbývající reakce a vnitřní síly.

9.1 Příklad 1

Určete reakce a vnitřní síly na Gerberově nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 9.1.



Obrázek 9.1: Statické schéma Gerberova nosníku příkladu 1

9.1.1 Zatížení

Náhradní břemeno Q_2 je rovno $q_2 \cdot 6 = 12$ [kN]. Rozložené složky břemene P_2 se rovnají $P_{2x} = P_2 \cdot \cos(60^\circ) = 2$ [kN] a $P_{2z} = P_2 \cdot \sin(60^\circ) = 3,4641$ [kN].

9.1.2 Výpočet interakcí a reakcí

Výpočet interakcí a reakcí se provádí v následujících krocích:

a) Osová úloha:

$$R_{a,x} = q_1 \cdot 7 + P_{2x} = 9,0 \text{ [kN]} (\rightarrow), \quad (9.1)$$

b) Nesená část $k_1 - k_2$:

$$R_{k_1} = \frac{P_1 \cdot 2,5}{4} = 9,375 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.2)$$

$$R_{k_2} = \frac{P_1 \cdot 1,5}{4} = 5,625 \text{ [kN]} (\uparrow). \quad (9.3)$$

c) Nesoucí část $a - k_1$ (konzolový nosník):

$$R_{a,z} = R_{k_1} = 9,375 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.4)$$

$$M_{a,y} = R_{k_1} \cdot 2 = 18,75 \text{ [kNm]} (\text{proti}). \quad (9.5)$$

d) Nesoucí část $k_2 - d$ (prostý nosník s převislými konci):

$$R_{c,z} = \frac{1}{6} \cdot (R_{k_2} \cdot 1 + Q_2 \cdot 3 + P_{2z} \cdot 7) = 9,104 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.6)$$

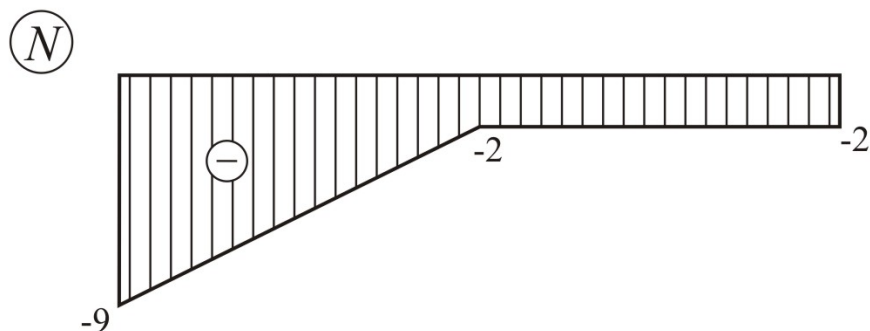
$$R_{b,z} = \frac{1}{6} \cdot (R_{k_2} \cdot 7 + Q_2 \cdot 3 - P_{2z} \cdot 1) = 11,985 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.7)$$

e) Kontrola $R_z = 0$:

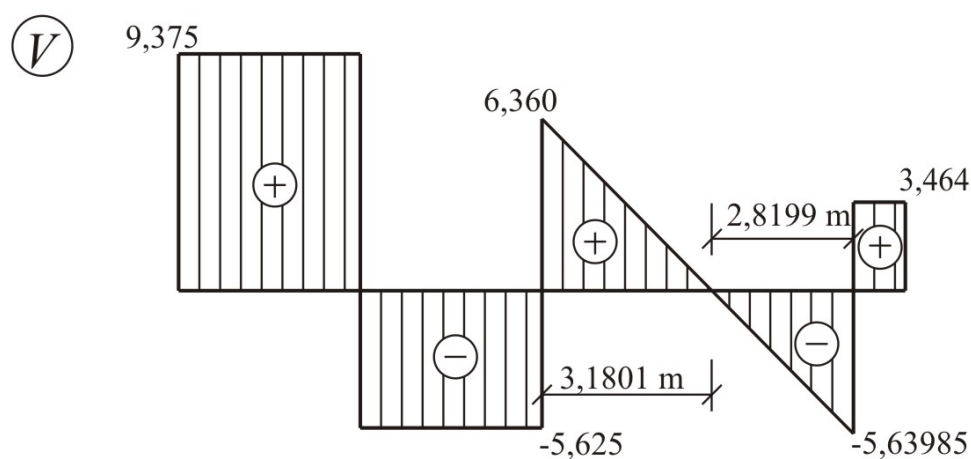
$$R_{a,z} + R_{b,z} + R_{c,z} = P_1 + Q_2 + P_{2z}. \quad (9.8)$$

9.1.3 Výpočet vnitřních sil

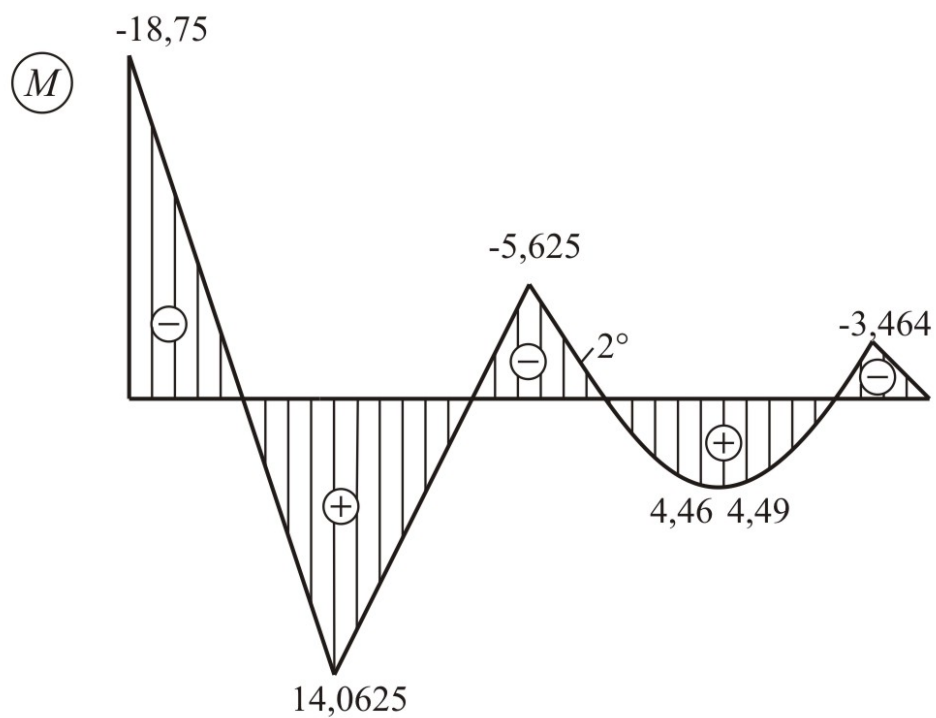
Výpočet vnitřních sil se pak provádí s využitím podmínek rovnováhy tradičním způsobem. Výsledné průběhy normálových a posouvajících sil jsou uvedeny na obr. 9.2 a 9.3. Průběhy ohybových momentů jsou pak zobrazeny na obr. 9.4.



Obrázek 9.2: Průběh normálových sil na Gerberově nosníku z příkladu 1



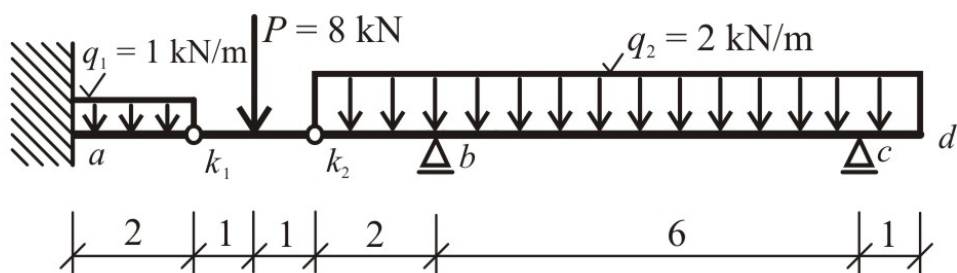
Obrázek 9.3: Průběh posouvajících sil na Gerberově nosníku z příkladu 1



Obrázek 9.4: Průběh ohybových momentů na Gerberově nosníku z příkladu 1

9.2 Příklad 2

Určete reakce a vnitřní síly na Gerberově nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 9.5.



Obrázek 9.5: Statické schéma Gerberova nosníku příkladu 2

9.2.1 Výpočet interakcí a reakcí

Výpočet interakcí a reakcí se provádí v následujících krocích:

a) Nesená část $k_1 - k_2$:

$$R_{k_1} = R_{k_2} = \frac{P}{2} = 4 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.9)$$

b) Nesoucí část $a - k_1$ (**konzolový nosník**):

$$R_{a,z} = R_{k_1} + q_1 \cdot 2 = 6 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.10)$$

$$M_{a,y} = R_{k_1} \cdot 2 + \frac{q_1 \cdot 2^2}{2} = 10 \text{ [kNm]} (\text{proti}). \quad (9.11)$$

c) Nesoucí část $k_2 - d$ (**prostý nosník s převislými konci**):

$$R_{c,z} = \frac{1}{6} \cdot \left(-R_{k_2} \cdot 2 - \frac{q_2 \cdot 2^2}{2} + \frac{q_2 \cdot 7^2}{2} \right) = 6,167 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.12)$$

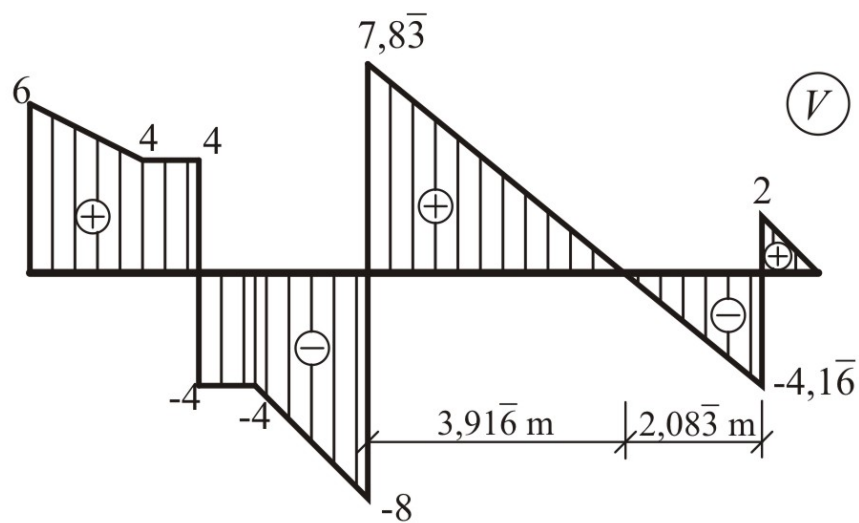
$$R_{b,z} = \frac{1}{6} \cdot \left(R_{k_2} \cdot 8 + \frac{q_2 \cdot 8^2}{2} - \frac{q_2 \cdot 1^2}{2} \right) = 15,833 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (9.13)$$

d) **Kontrola** $R_z = 0$:

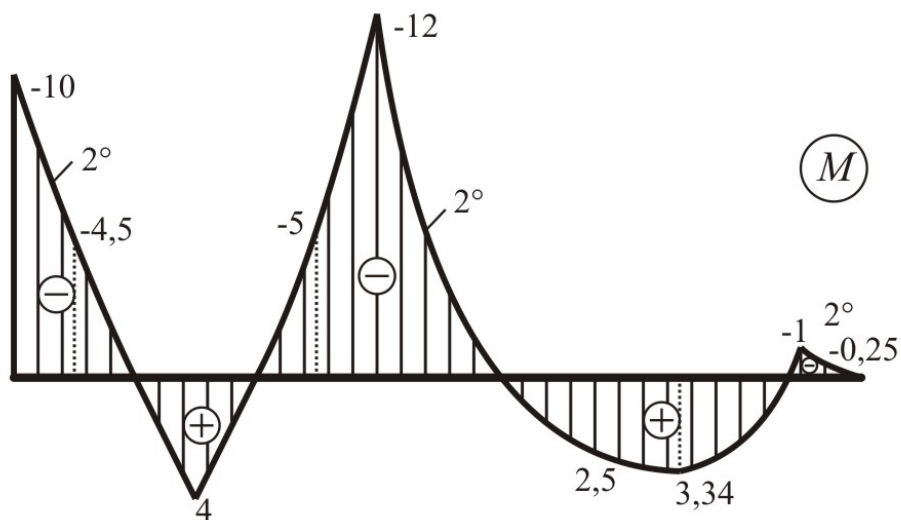
$$R_{a,z} + R_{b,z} + R_{c,z} = q_1 \cdot 2 + P + q_2 \cdot 9. \quad (9.14)$$

9.2.2 Výpočet vnitřních sil

Výpočet vnitřních sil se pak provádí s využitím podmínek rovnováhy tradičním způsobem. Výsledné průběhy posouvajících sil jsou uvedeny na obr. 9.6. Průběhy ohybových momentů jsou pak zobrazeny na obr. 9.7.



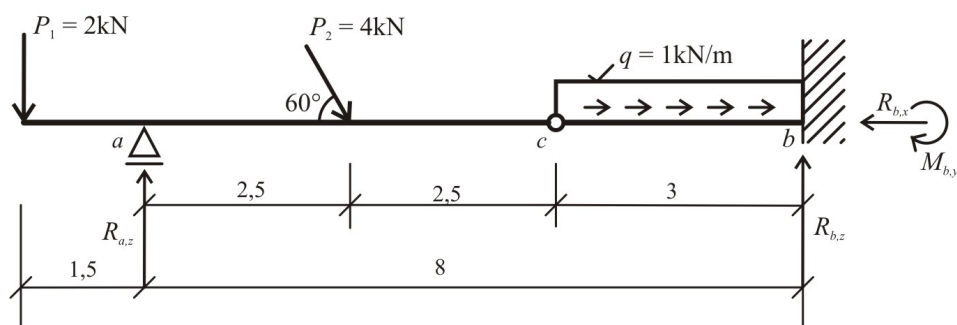
Obrázek 9.6: Průběh posouvajících sil na Gerberově nosníku z příkladu 2



Obrázek 9.7: Průběh ohybových momentů na Gerberově nosníku z příkladu 2

9.3 Příklad 3

Určete reakce a vnitřní síly na Gerberově nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 9.8.

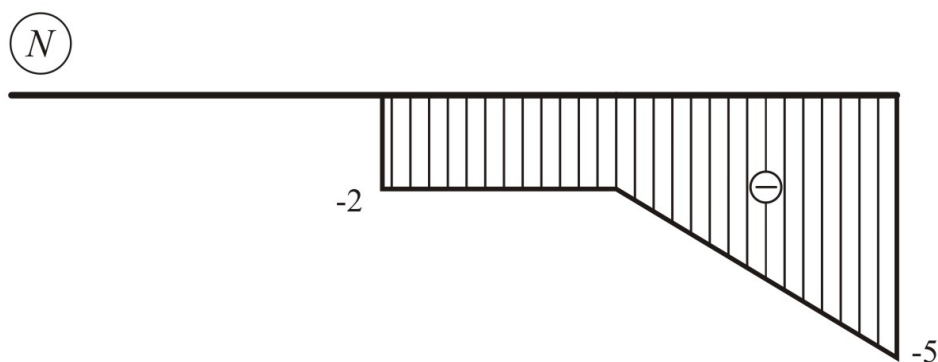


Obrázek 9.8: Statické schéma Gerberova nosníku příkladu 3

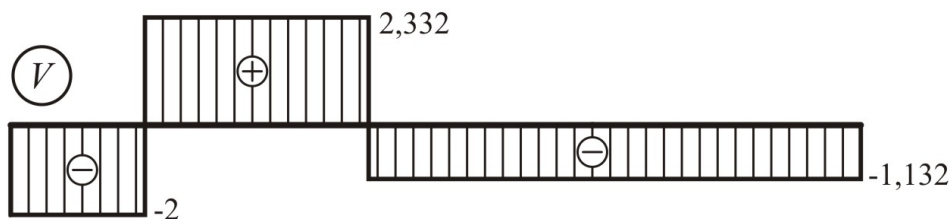
9.3.1 Výsledné hodnoty reakcí a průběhy vnitřních sil

Správné hodnoty reakcí jsou: $H_b = R_{cx} = 5 \text{ [kN]}$ ($\leftarrow$), $R_a = R_{az} = 4,332 \text{ [kN]}$ ($\uparrow$), $R_b = R_{bz} = 1,132 \text{ [kN]}$ ($\uparrow$) a $M_b = M_{by} = 3,396 \text{ [kNm]}$ (po).

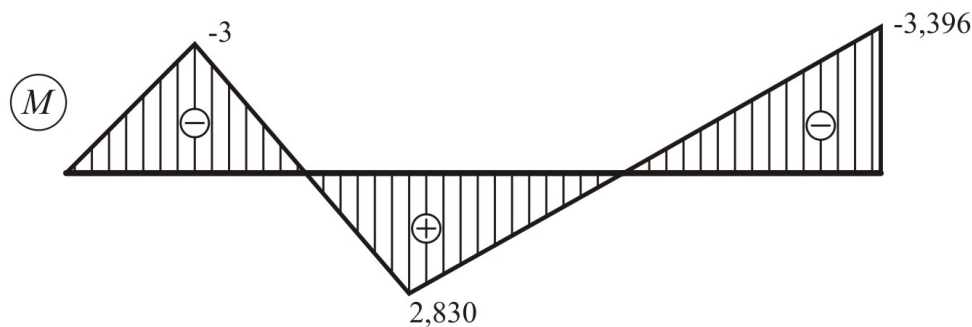
Výsledné průběhy normálových a posouvajících sil jsou uvedeny na obr. 9.9 a 9.10, průběhy ohybových momentů pak na obr. 9.11.



Obrázek 9.9: Průběh normálových sil na Gerberově nosníku z příkladu 3



Obrázek 9.10: Průběh posouvajících sil na Gerberově nosníku z příkladu 3



Obrázek 9.11: Průběh ohybových momentů na Gerberově nosníku z příkladu 3

9.4 Příklad 4

Určete reakce a vnitřní síly na Gerberově nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 9.12. Při řešení využijte symetrii konstrukce.

9.4.1 Výpočet interakcí a reakcí

Výpočet interakcí a reakcí se provádí v následujících krocích:

a) Nesená část k_1 – osa symetrie:

Interakce (reakce) v kloubu k_1 se určí pro zatěžovací obrazec z obr. 9.13:

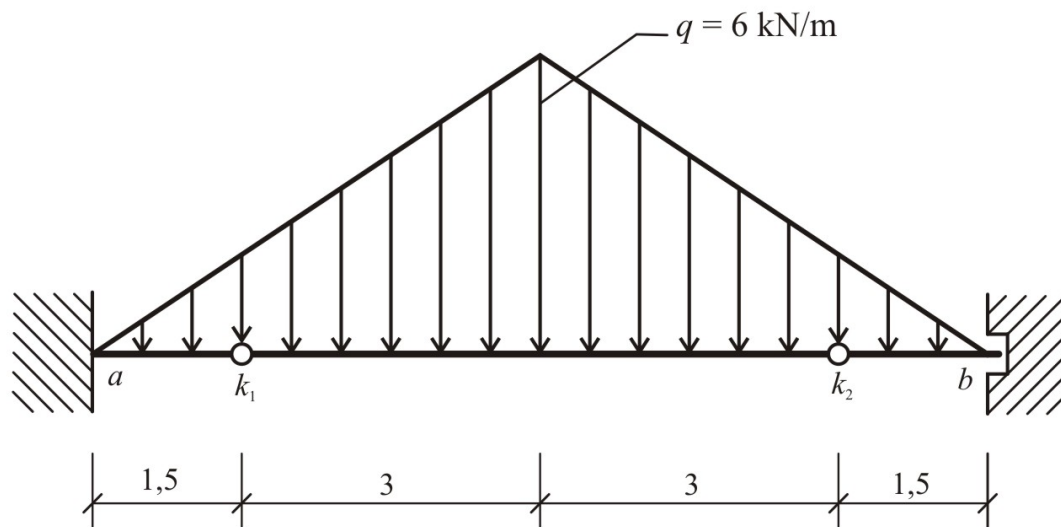
$$R_{k_1} = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 12 \text{ [kN]} . \quad (9.15)$$

b) Nesoucí část $a - k_1$:

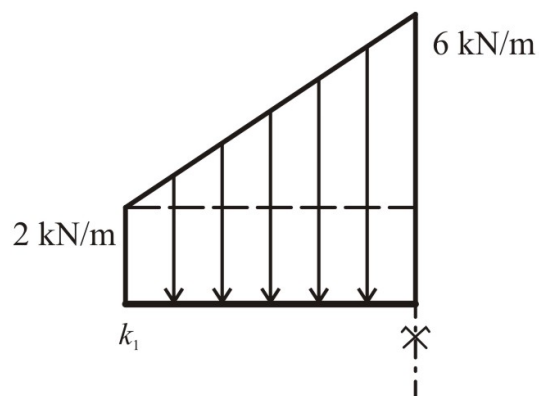
Interakce (akce) v kloubu k_1 představuje zatížení působící na část nesoucí, kterou tvoří konzolový nosník (viz schéma na obr. 9.14). Reakce ve vetknutí se pak určí:

$$R_{a,z} = R_{k_1} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 = 13,5 \text{ [kN]} (\uparrow) , \quad (9.16)$$

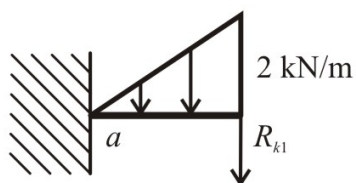
$$M_{a,y} = R_{k_1} \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 1 = 19,5 \text{ [kNm]} (\text{po}) . \quad (9.17)$$



Obrázek 9.12: Statické schéma Gerberova nosníku příkladu 4



Obrázek 9.13: Zatížení na části nesené na levé polovině Gerberova nosníku z příkladu 4.



Obrázek 9.14: Statické schéma na části nesoucí na levé polovině Gerberova nosníku z příkladu 4.

9.4.2 Výsledné hodnoty reakcí a průběhy vnitřních sil

Správné hodnoty reakcí jsou tedy: $R_{az} = R_{bz} = 13,5$ [kN] ($\uparrow$) a $M_{ay} = M_{by} = 19,5$ [kNm] (proti, po).

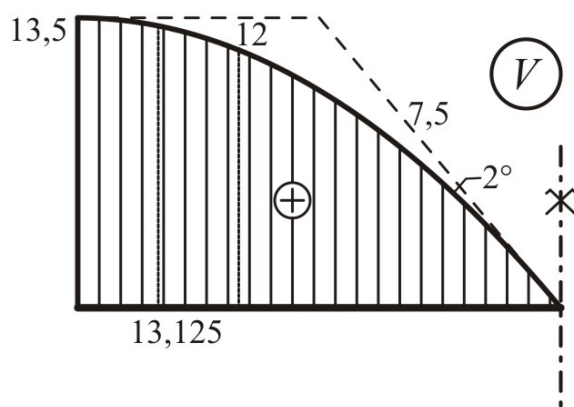
Průběh ohybových momentů je dán kubickou parabolou s rovnicí:

$$M_{(x)}^L = -M_{a,y} + R_{a,z} \cdot x - \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot 4,5} . \quad (9.18)$$

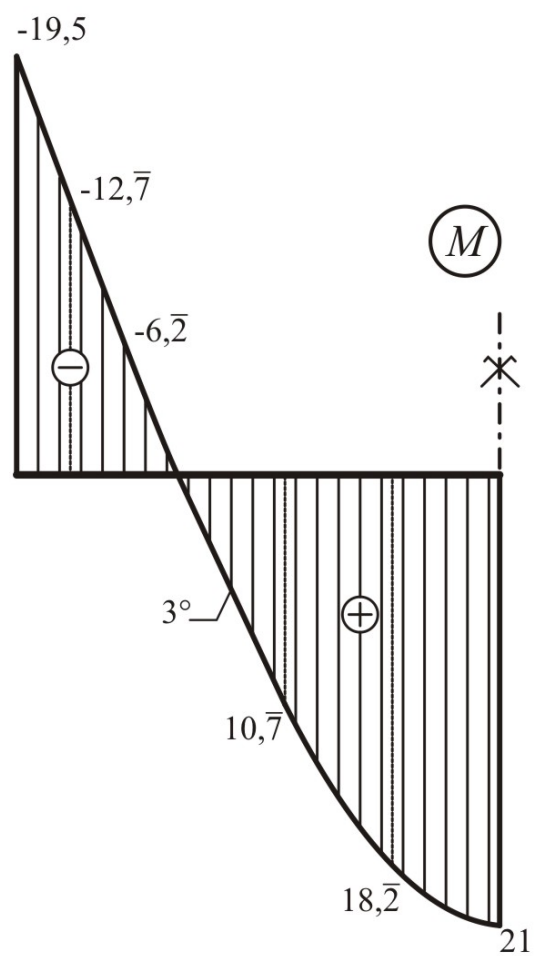
Největší ohybový moment se nachází v průřezu s nulovou hodnotou posouvající síly, tedy uprostřed nosníku ($x = 4,5$ [m]). Po dosazení do 9.18 lze získat hodnotu:

$$M_{max}^L = -M_{a,y} + R_{a,z} \cdot 4,5 - \frac{q \cdot 4,5^3}{6 \cdot 4,5} = -19,5 + 13,5 \cdot 4,5 - \frac{q \cdot 4,5^2}{6} = 21 \text{ [kNm]} . \quad (9.19)$$

Výsledné průběhy posouvajících sil a ohybových momentů jsou uvedeny na obr. 9.15 a 9.16.



Obrázek 9.15: Průběh posouvajících sil na levé polovině Gerberova nosníku z příkladu 4. V pravé části konstrukce bude průběh asymetrický.



Obrázek 9.16: Průběh ohybových momentů na levé polovině Gerberova nosníku z příkladu 4. Na pravé polovině bude průběh symetrický.

Kapitola 10

Rovinné nosníkové soustavy: trojkloubový nosník bez táhla a s táhlem

10.1 Trojkloubový rám

Trojkloubový rám se skládá ze dvou rovinně lomených nosníků v rovinné úloze s kloubovým spojením a podepřením dvěma kloubovými vodorovně i svisle neposuvnými podporami. Pokud by byl rovinně lomený nosník v rovinné úloze se dvěma kloubovými vodorovně i svisle neposuvnými podporami, jednalo by se o tzv. dvojkloubový rám, který je 1x kinematicky přeurčitý a 1x staticky neurčitý. Vložením 1 vnitřního momentového kloubu vznikne soustava kinematicky i staticky určitá.

Při výpočtu celkem 4 neznámých reakcí ve vnějších vazbách se využijí 3 podmínky rovnováhy a podmínka, že ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu je nulový. Tuto vnitřní sílu lze počítat z obou stran, čímž lze získat dostatečné množství výpočetních podmínek i ke kontrole.

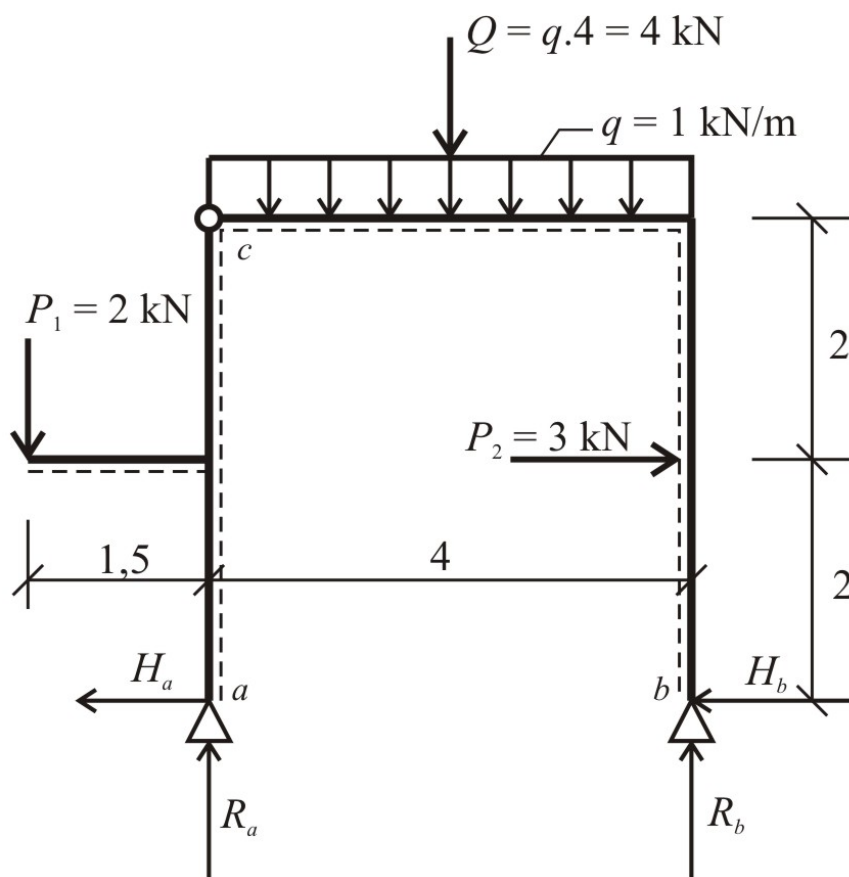
Jednotný postup pro výpočet reakcí ve vnějších vazbách pak může vypadat následovně:

1. Součet statických momentů na celé konstrukci k pravé podpoře $\sum M_b = 0$,
2. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zleva $M_c^L = 0$,
3. Součet statických momentů na celé konstrukci k levé podpoře $\sum M_a = 0$,
4. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zprava $M_c^P = 0$,
5. Kontrolní součet všech vnějších sil ve svislém směru $R_z = 0$,
6. Kontrolní součet všech vnějších sil ve vodorovném směru $R_x = 0$.

V případě, že vnější vazby v bodech a a b neleží ve stejné výškové úrovni, rovnice 1 a 2, resp. 3 a 4 představují dvojici soustav 2 rovnic o dvou neznámých. V opačném případě mohou být rovnice 1 až 4 při vhodném pořadí ve výpočtu vždy jen s jednou neznámou.

10.2 Příklad 1

Postup výpočtu reakcí a vnitřních sil lze procvičit u trojkloubového rámu, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 10.1.



Obrázek 10.1: Schéma trojkloubového rámu z příkladu 1

10.2.1 Výpočet reakcí

1. Součet statických momentů na celé konstrukci k levé podpoře:

$$\sum M_a = 0 : -P_1 \cdot 1,5 + Q \cdot 2 + P_2 \cdot 2 - R_b \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_b = 2,75 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (10.1)$$

2. Součet statických momentů na celé konstrukci k pravé podpoře:

$$\sum M_b = 0 : R_a \cdot 4 - P_1 \cdot 5,5 - Q \cdot 2 + P_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_a = 3,25 \text{ [kN]} (\uparrow), \quad (10.2)$$

3. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zleva:

$$M_c^L = 0 : H_a \cdot 4 - P_1 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow H_a = 0,75 \text{ [kN]} (\leftarrow), \quad (10.3)$$

4. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zprava:

$$M_c^P = 0 : H_b \cdot 4 + R_b \cdot 4 + P_2 \cdot 2 - Q \cdot 2 = 0 \Rightarrow H_b = 2,25 \text{ [kN]} (\leftarrow), \quad (10.4)$$

5. Kontrolní součet všech vnějších sil ve vodorovném směru $R_x = 0$.

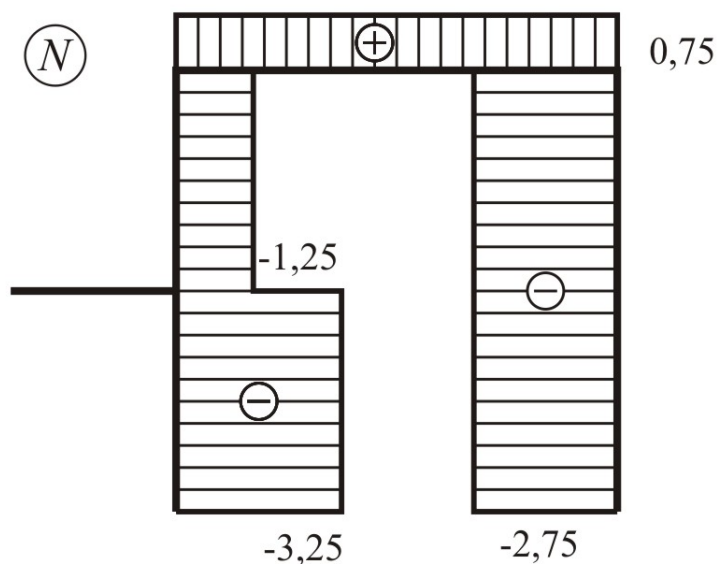
$$R_x = 0 : -H_a - H_b + P_2 = 0. \quad (10.5)$$

6. Kontrolní součet všech vnějších sil ve svislém směru:

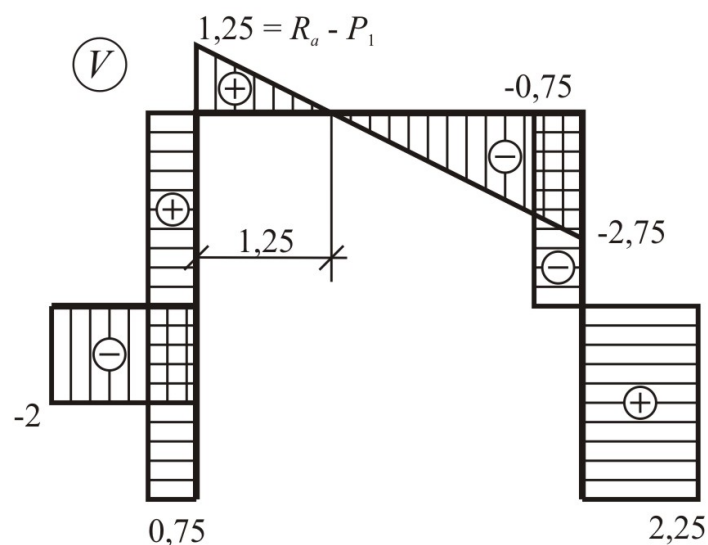
$$R_z = 0 : R_a + R_b - P_1 - Q = 0, \quad (10.6)$$

10.2.2 Průběhy vnitřních sil

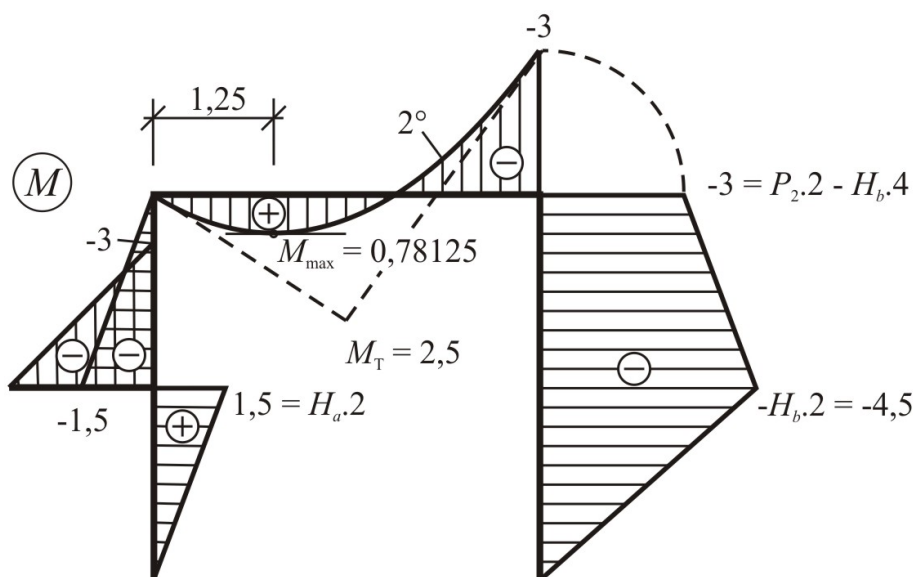
Výpočet vnitřních sil se pak provádí s využitím podmínek rovnováhy tradičním způsobem. Výsledné průběhy normálových a posouvajících sil jsou uvedeny na obr. 10.2 a 10.3, průběhy ohybových momentů pak na obr. 10.4.



Obrázek 10.2: Průběh normálových sil na trojkloubovém rámu z příkladu 1



Obrázek 10.3: Průběh posouvajících sil na trojkloubovém rámu z příkladu 1



Obrázek 10.4: Průběh ohybových momentů na trojkloubovém rámu z příkladu 1

10.3 Trojkloubový rám s táhlem

U trojkloubového rámu vznikají vodorovné složky reakcí (jsou větší čím menší je převýšení kloubu oproti spojnici podporových bodů). Zachycení těchto vodorovných účinků je někdy obtížné, neboť konstrukce může být uložena na zdech nebo štíhlých sloupech, které nemusí být schopny tyto vodorovné síly unést. Řešením je proto využití táhla, které vodorovné účinky přenáší. Konstrukce, na které trojkloubový rám spočívá, pak není zatížena vodorovnými účinky

(pokud na trojkloubový rám ale nepůsobí vodorovné zatížení).

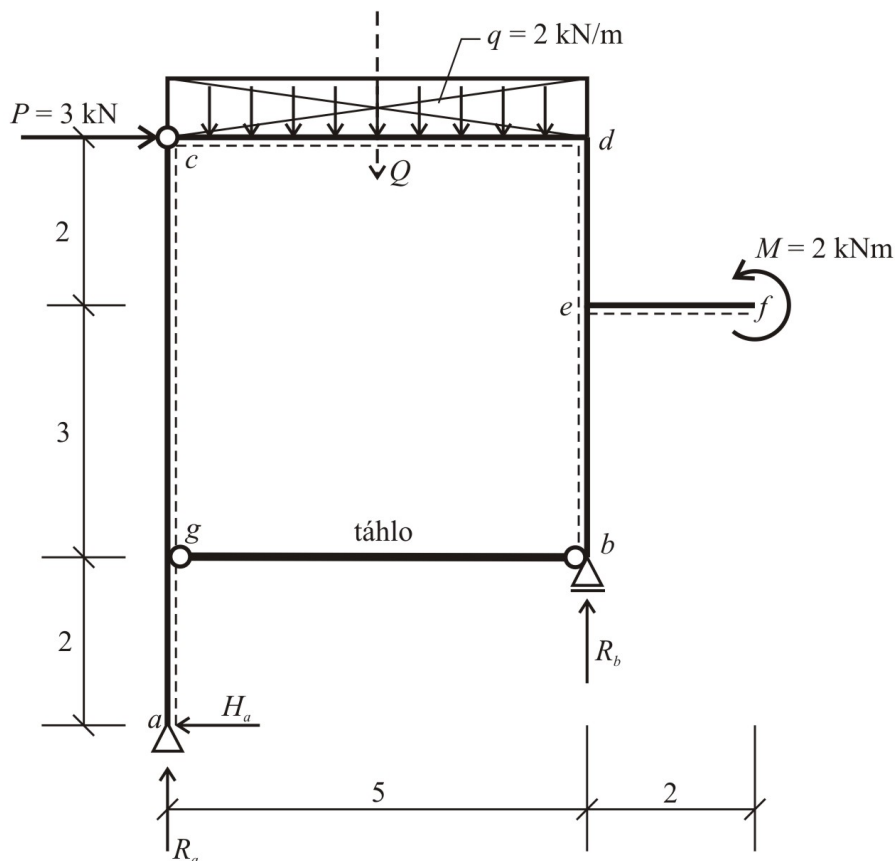
Postup pro výpočet reakcí ve vnějších vazbách se pak neliší od výpočtu např. u lomeného nosníku:

1. Součet statických momentů na celé konstrukci k levé podpoře $\sum M_a = 0 \Rightarrow R_{bz}$,
2. Součet statických momentů na celé konstrukci k pravé podpoře $\sum M_b = 0 \Rightarrow R_{az}$,
3. Součet všech vnějších sil ve vodorovném směru $R_x = 0 \Rightarrow R_{ax}$ nebo R_{bx} .
4. Kontrolní součet všech vnějších sil ve svislém směru $R_z = 0$.

Normálová síla v táhle N_t se pak určí z podmínky, která se váže k vnitřnímu momentovému kloubu - ohybový moment je v něm nulový. Tuto vnitřní sílu lze počítat z obou stran, čímž lze kromě určení hodnoty síly v táhle N_t provést také její kontrolu.

10.4 Příklad 2

Postup výpočtu reakcí, síly v táhle N_t a vnitřních sil lze procvičit u trojkloubového rámu s táhlem, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 10.5.



Obrázek 10.5: Schéma trojkloubového rámu s táhlem z příkladu 2

10.4.1 Výpočet reakcí

Výpočet reakcí je následující:

1. Součet statických momentů na celé konstrukci k levé podpoře:

$$\sum M_a = 0 : -Q \cdot 2,5 - P \cdot 7 + M + R_b \cdot 5 = 0 \Rightarrow R_b = 8,8 \text{ [kN]} (\uparrow) , \quad (10.7)$$

2. Součet všech vnějších sil ve vodorovném směru:

$$R_x = 0 : -H_a + P = 0 \Rightarrow H_a = 3 \text{ [kN]} (\leftarrow) , \quad (10.8)$$

3. Součet statických momentů na celé konstrukci k pravé podpoře:

$$\sum M_b = 0 : -R_a \cdot 5 + Q \cdot 2,5 - P \cdot 5 + M - H_a \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_a = 1,2 \text{ [kN]} (\uparrow) , \quad (10.9)$$

4. Kontrolní součet všech vnějších sil ve svislém směru:

$$R_z = 0 : R_a + R_b - Q = 0 . \quad (10.10)$$

10.4.2 Výpočet síly v táhle

Sílu v táhle N_t lze s využitím schématu na obr. 10.6 určit následujícím způsobem:

1. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zleva:

$$M_c^L = 0 : H_a \cdot 7 - N_t \cdot 5 = 0 \Rightarrow N_t = 4,2 \text{ [kN]} , \quad (10.11)$$

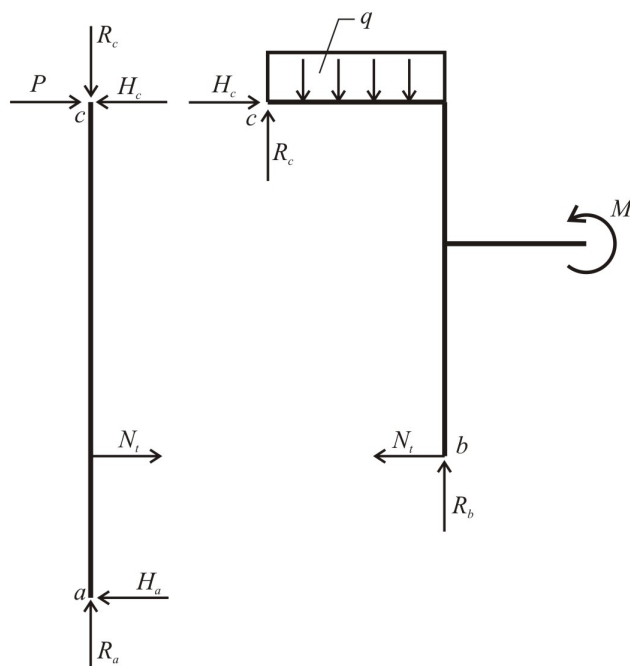
2. Ohybový moment ve vnitřním momentovém kloubu počítaný zprava:

$$M_c^P = 0 : M + R_b \cdot 5 - N_t \cdot 5 - Q \cdot 2,5 = 0 \Rightarrow N_t = 4,2 \text{ [kN]} . \quad (10.12)$$

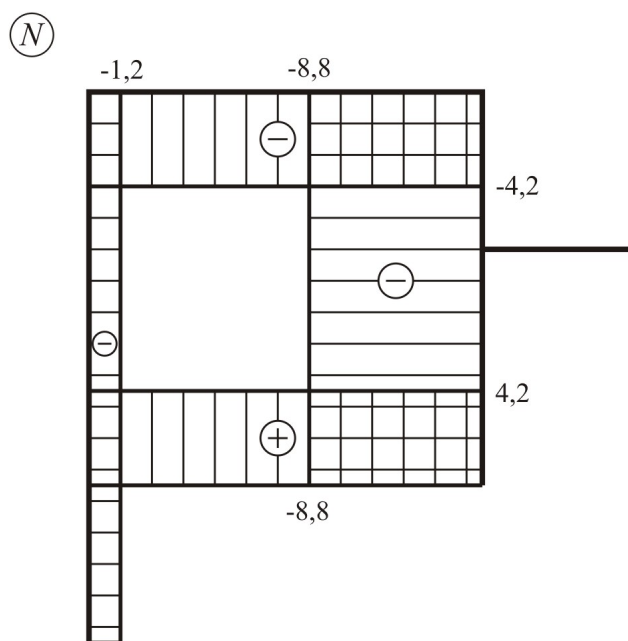
10.4.3 Průběhy vnitřních sil

Výpočet vnitřních sil se pak provádí s využitím podmínek rovnováhy tradičním způsobem. Výsledné průběhy normálových a posouvajících sil jsou uvedeny na obr. 10.7 a 10.8. Průběhy ohybových momentů jsou pak zobrazeny na obr. 10.9.

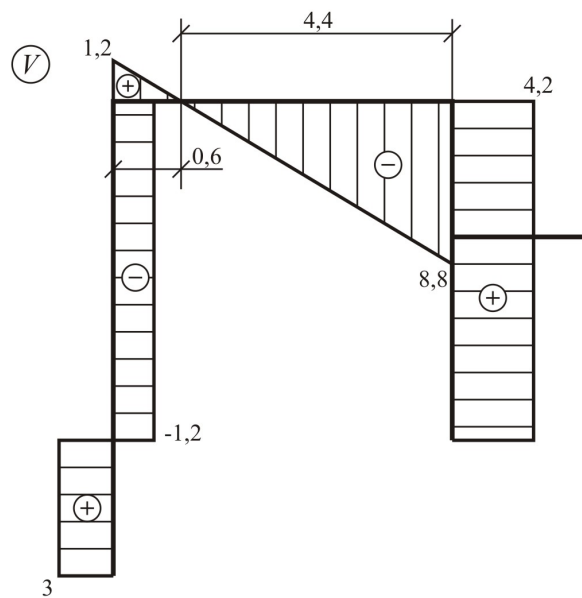
VÝPOČET VNITŘNÍCH VAZEB (INTERAKCÍ):



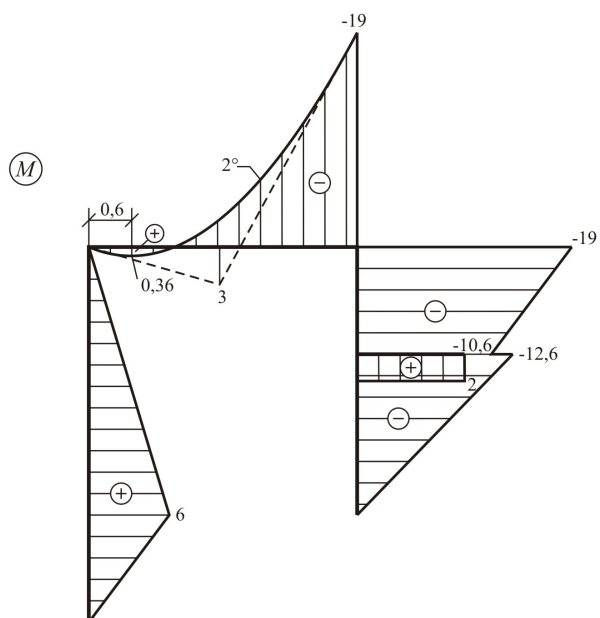
Obrázek 10.6: Schéma pro určení síly v táhle trojkloubovém rámu s táhlem z příkladu 2



Obrázek 10.7: Průběh normálových sil na trojkloubovém rámu s táhlem z příkladu 2



Obrázek 10.8: Průběh posouvajících sil na trojkloubovém rámu s táhlem z příkladu 2



Obrázek 10.9: Průběh ohybových momentů na trojkloubovém rámu s táhlem z příkladu 2

Kapitola 11

Rovinné nosníkové soustavy : Příhradový nosník

Příhradový nosník je rovinná nosníková soustava tvořena z jednotlivých prutů navzájem kloubově spojených ve styčnících (uzlech). Osy všech prutů leží v téže rovině. Příhradový nosník je zatížen zpravidla jen bodovým zatížením ve styčnících a v důsledku toho vznikají v konstrukci pouze normálové síly. Pokud na některý prut nosníku působí také mimostyčnickové zatížení, transformuje se se toto zatížení ještě před výpočtem vnitřních sil na zatížení styčnickové [1].

Další výklad bude zaměřen na řešení vnitřních sil zjednodušenou styčnickovou metodou a metodou průsečnou v Ritterově úpravě. Metoda styčnicková je založena na řešení rovnováhy ve styčnících, metoda průsečná na řešení rovnováhy pomyslně oddělené části konstrukce. Správnou volbou podmínky rovnováhy je možné spočítat hledanou normálovou sílu právě z této jediné rovnice.

U metody průsečné je nutné dodržet tyto zásady:

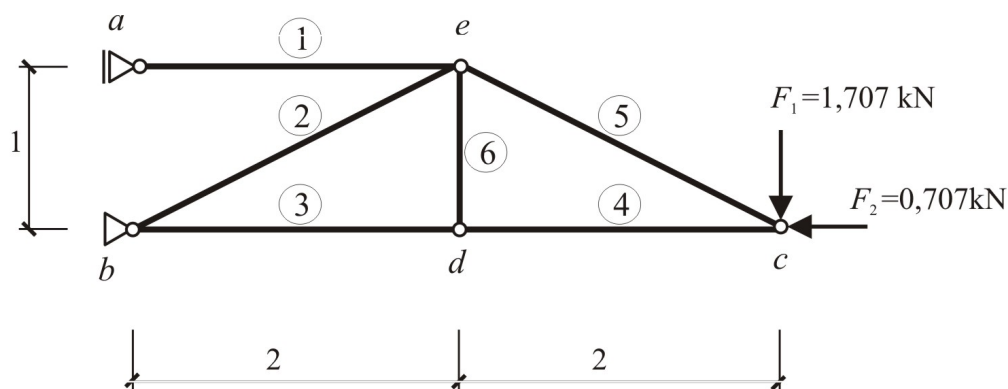
1. Příhradová konstrukce je myšleným řezem rozdělena na **2 samostatné části**.
2. Řez je veden **právě přes 3 pruty**, z nichž alespoň 1 je prut, z něž je potřeba zjistit normálovou sílu.
3. Tyto 3 pruty se **nesmí protínat v jednom bodě**.

11.1 Příklad - příhradová konstrukce 1

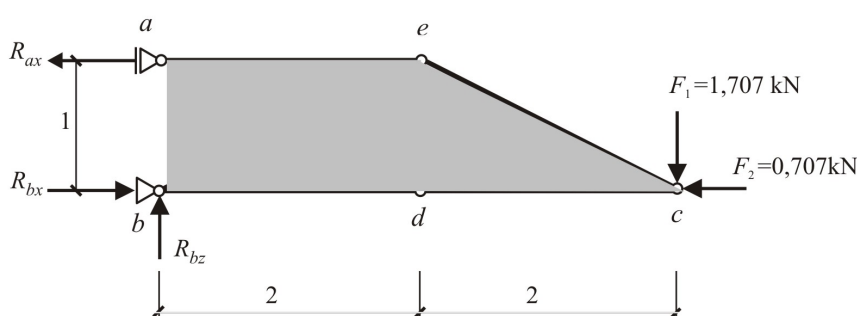
Spočítejte vnitřní síly konstrukce zjednodušenou styčnickovou metodou, jejíž schéma je na obrázku 11.1. Délkové rozměry jsou v [m] .

Výpočet reakcí a goniometrie šikmých prutů

U výpočtu reakcí je potřeba uvažovat konstrukci jako tuhý celek podle obrázku 11.2 a neznámé složky reakcí spočítat klasickým způsobem pomocí podmínek rovnováhy, z kterých v tomto případě vychází:



Obrázek 11.1: Schéma konstrukce příkladu 11.1



Obrázek 11.2: Schéma pro výpočet reakcí příkladu 11.1

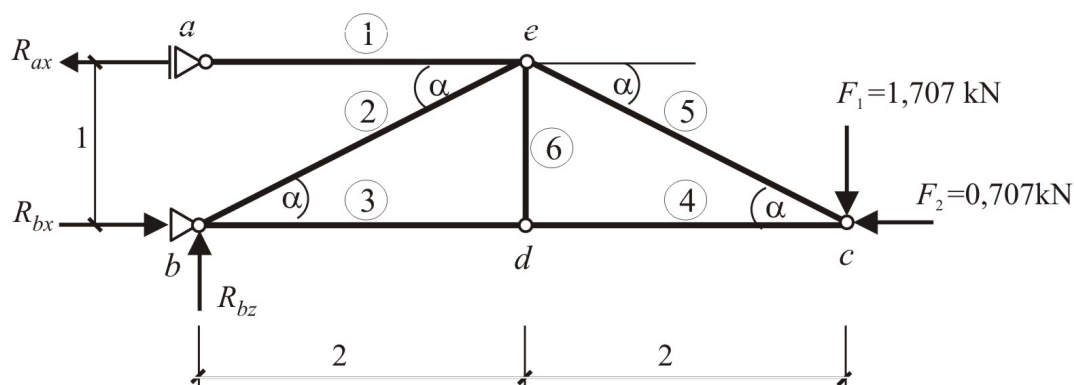
$$\begin{aligned} R_{ax} &= 6,828 \text{ [kN]} , \\ R_{bx} &= 7,535 \text{ [kN]} , \\ R_{bz} &= 1,707 \text{ [kN]} . \end{aligned} \quad (11.1)$$

Před řešením vnitřních sil je nutné definovat goniometrické funkce úhlů sklonu šikmých prutů (nikoli hodnoty těchto úhlů). Následně je doporučeno zakreslit uvažované úhly do schématu podle obrázku 11.3. Je na čtenáři potvrdit:

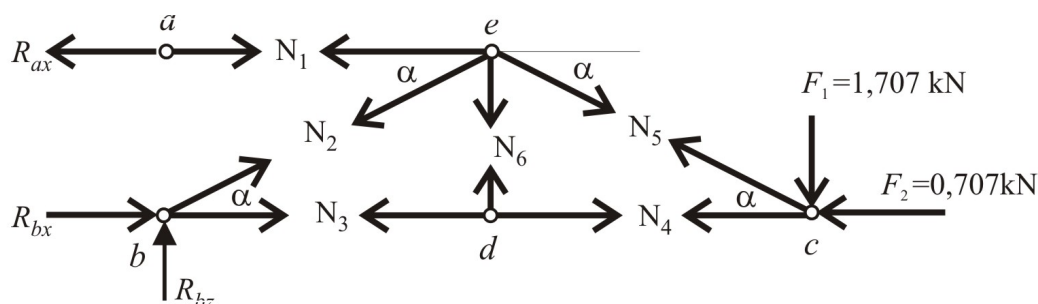
$$\begin{aligned} l_2 &= l_5 = 2,236 \text{ [m]} , \\ \sin \alpha &= 0,4472 \text{ [-]} , \\ \cos \alpha &= 0,8944 \text{ [-]} . \end{aligned} \quad (11.2)$$

Výpočet vnitřních sil zjednodušenou styčnickovou metodou

Schéma uvolnění všech styčníků dané konstrukce a nahrazení účinků odebraných prutů osovými silami je na obrázku 11.4. Princip výpočtu zjednodušenou styčnickovou metodou spočívá v tom, že rovnováha v jednotlivých styčnících se řeší postupně. Jelikož bod (styčník) v rovině má 2 stupně volnosti a pro jeho řešení jsou k dispozici 2 silové podmínky rovnováhy, je nutné začít s výpočtem styčnicku, ve kterém jsou pouze 2 neznámé hodnoty vnitřních sil. V příkladu 11.1 se jedná o styčnicku b nebo c . Specifický je styčník a , ve kterém je pouze jedna neznámá normálová síla.



Obrázek 11.3: Schéma geometrie nosníku příkladu 11.1



Obrázek 11.4: Schéma pro řešení styčnickovou metodu

Je na čtenáři potvrdit níže uvedené výsledky:

Rovnováha ve styčnicku a :

Řešením podmínky rovnováhy ve směru osy x vychází:

$$N_1 = R_{ax} = 6,828 \text{ [kN]} . \quad (11.3)$$

Rovnováha ve styčnicku b :

Řešením podmínky rovnováhy ve směru osy z vychází:

$$\begin{aligned} N_{2z} &= N_2 \cdot \sin \alpha \text{ [kN]} , \\ N_2 &= -3,817 \text{ [kN]} . \end{aligned} \quad (11.4)$$

Řešením podmínky rovnováhy ve směru osy x vychází:

$$\begin{aligned} N_{2x} &= N_2 \cdot \cos \alpha \text{ [kN]} , \\ N_3 &= -4,121 \text{ [kN]} . \end{aligned} \quad (11.5)$$

Rovnováha ve styčnicku e :

Ve styčnicku e jsou již známy velikosti sil N_1 (z rovnováhy ve styčnicku a) a N_2 (z rovnováhy ve styčnicku b). Řešením podmínek rovnováhy ve styčnicku e ve směrech os x i z (soustava 2 rovnic o 2 neznámých) vychází:

$$\begin{aligned} N_5 &= 3,817 \text{ [kN]} , \\ N_6 &= 0,0 \text{ [kN]} . \end{aligned} \quad (11.6)$$

Rovnováha ve styčnicku c:

Ve styčnicku c je známá N_5 z rovnováhy ve styčnicku e . Řešením podmínky rovnováhy ve styčnicku c ve směru osy x vychází:

$$N_4 = -4,121 \text{ [kN]} . \quad (11.7)$$

Rovnováha ve styčnicku d:

Rovnováhu ve styčnicku d není nutné řešit, všechny hodnoty vnitřních sil definovány. Je ovšem možné provést kontrolu, zda opravdu součet všech sil působících na styčník d v obou směrech je nulový.

Závěrečný výpis:

Na závěr vyřešené úlohy je potřeba přehledně vypsát hodnoty všech reakcí i normálových sil včetně znamének.

$$\begin{aligned} R_{ax} &= 6,828 \text{ [kN]} , \\ R_{bx} &= 7,535 \text{ [kN]} , \\ R_{bz} &= 1,707 \text{ [kN]} , \\ N_1 &= 6,828 \text{ [kN]} , \\ N_2 &= -3,817 \text{ [kN]} , \\ N_3 &= -4,121 \text{ [kN]} , \\ N_4 &= -4,121 \text{ [kN]} , \\ N_5 &= 3,817 \text{ [kN]} , \\ N_6 &= 0,0 \text{ [kN]} . \end{aligned} \quad (11.8)$$

11.2 Příklad - příhradová konstrukce 2

Spočítejte vnitřní síly konstrukce z příkladu 11.1 zmetodou průsečnou v Ritterově úpravě, jejíž schéma je na obrázku 11.1. Délkové rozměry jsou v [m] .

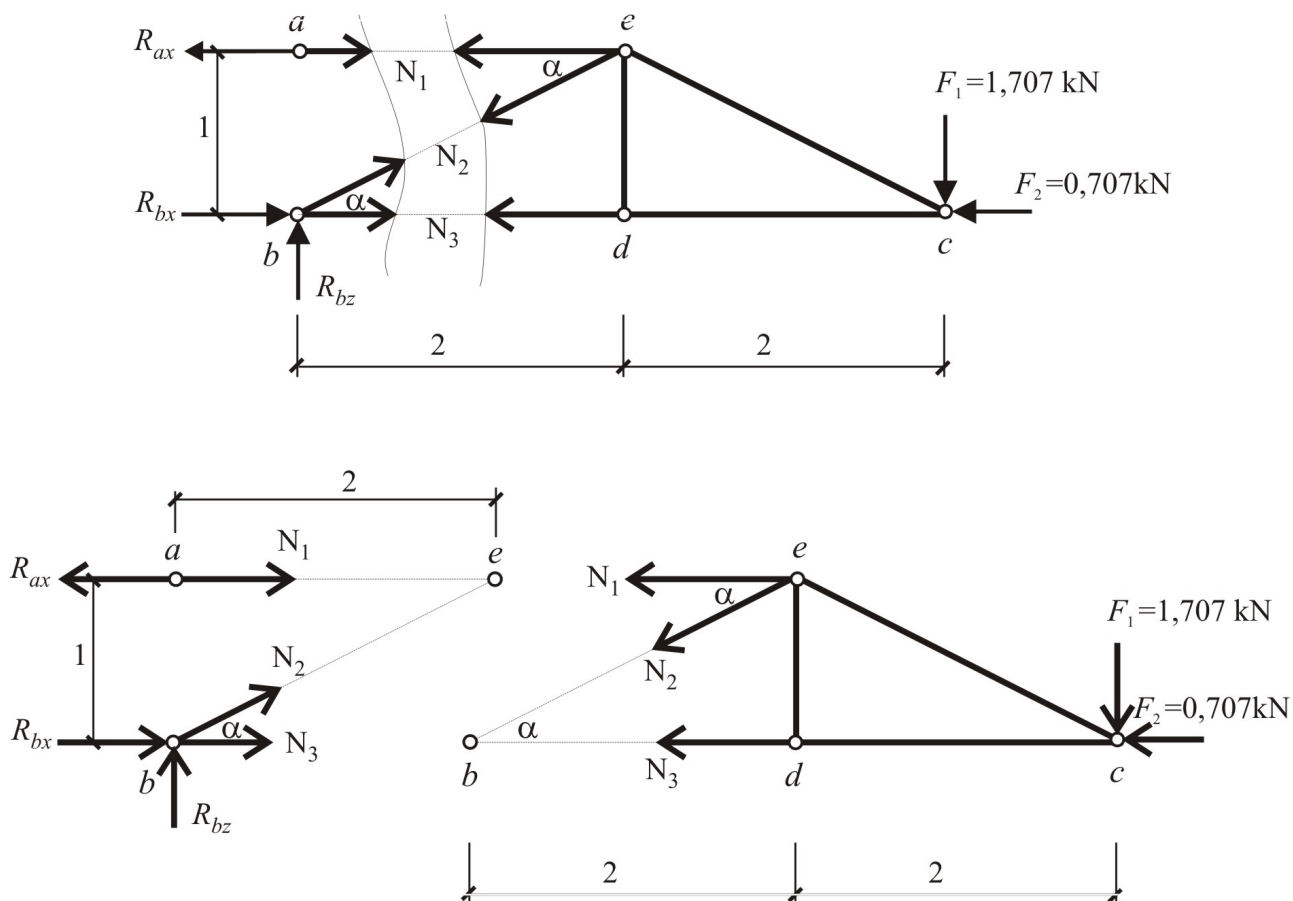
Metodou průsečnou v Ritterově úpravě je možno spočítat všechny normálové síly, neboť splňují podmínky uvedené v úvodu kapitoly. Pokud by některá z vnitřních sil jednu z podmínek nesplňovala, bylo by nutné její hodnotu dopočítat zjednodušenou styčníkovou metodou.

Výpočet normálové síly N_1 :

Pro výpočet síly N_1 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.5. Pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) je vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu b , k tzv. momentovému středu síly N_1 , neboť zbývající 2 neznámé v daném řezu N_2 a N_3 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu b síly R_{ax} a N_1 , v pravé části pak N_1 a F_1 .

Při správném řešení vyjde z obou řešení:

$$N_1 = 6,828 \text{ [kN]} . \quad (11.9)$$



Obrázek 11.5: Schéma pro řešení metodou průsečnou, síly N_1 , N_2 a N_3

Výpočet normálové síly N_2 :

Pro výpočet síly N_2 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.5 nebo podle obrázku 11.6.

V případě volby řezu dle 11.6 je pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu d , k tzv. momentovému středu síly N_2 , neboť zbývající 2 neznámé v daném řezu N_4 a N_6 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu b síly R_{bz} a z -ová složka síly N_2 , v pravé části pak x -ová složka síly N_2 a síly F_1 i R_{ax} .

V případě volby řezu dle 11.5 vystupují zbývající 2 neznámé v řezu N_1 a N_3 . Tyto síly jsou rovnoběžné, tudíž nelze najít bod (momentový střed síly N_2), ke kterému by tyto síly současně nevytvářely otáčivý účinek. Je potřeba zvolit **silovou** podmínku rovnováhy pro obě pomyslně oddělené části. Opět platí pravidlo, že je vhodné zvolit podmínku rovnováhy tak, aby síly, které není potřeba řešit v rovnici nefigurovaly. Toto je možné pouze v případě, bude-li zvolena silová podmínka rovnováhy ve **směru kolmém ke zbývajícím rovnoběžným silám** N_1 a N_3 , tedy v **tomto případě** ve směru osy z . V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu b síly R_{bz} a z -ová složka síly N_2 , v pravé části pak z -ová složka síly N_2 a síla F_1 .

Při správném řešení vyjde ze všech řešení:

$$N_2 = -3,817 \text{ [kN]}. \quad (11.10)$$

Výpočet normálové síly N_3 :

Pro výpočet síly N_3 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.5 nebo 11.7. V případě volby řezu dle 11.5 je pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) je vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu e , k tzv. momentovému středu síly N_3 , neboť zbývající 2 neznámé v řezu N_1 a N_2 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu e síly N_3 , R_{bx} a R_{bz} , v pravé části pak N_3 , F_1 a F_2 .

Při správném řešení vyjde z obou řešení:

$$N_3 = -4,121 \text{ [kN]}. \quad (11.11)$$

Výpočet normálové síly N_4 :

Pro výpočet síly N_4 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.6. Pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) je vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu e , k tzv. momentovému středu síly N_4 , neboť zbývající 2 neznámé v řezu N_2 a N_6 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu e síly N_4 , R_{bx} a R_{bz} , v pravé části pak N_4 , F_1 a F_2 .

Při správném řešení vyjde z obou řešení:

$$N_4 = -4,121 \text{ [kN]}. \quad (11.12)$$

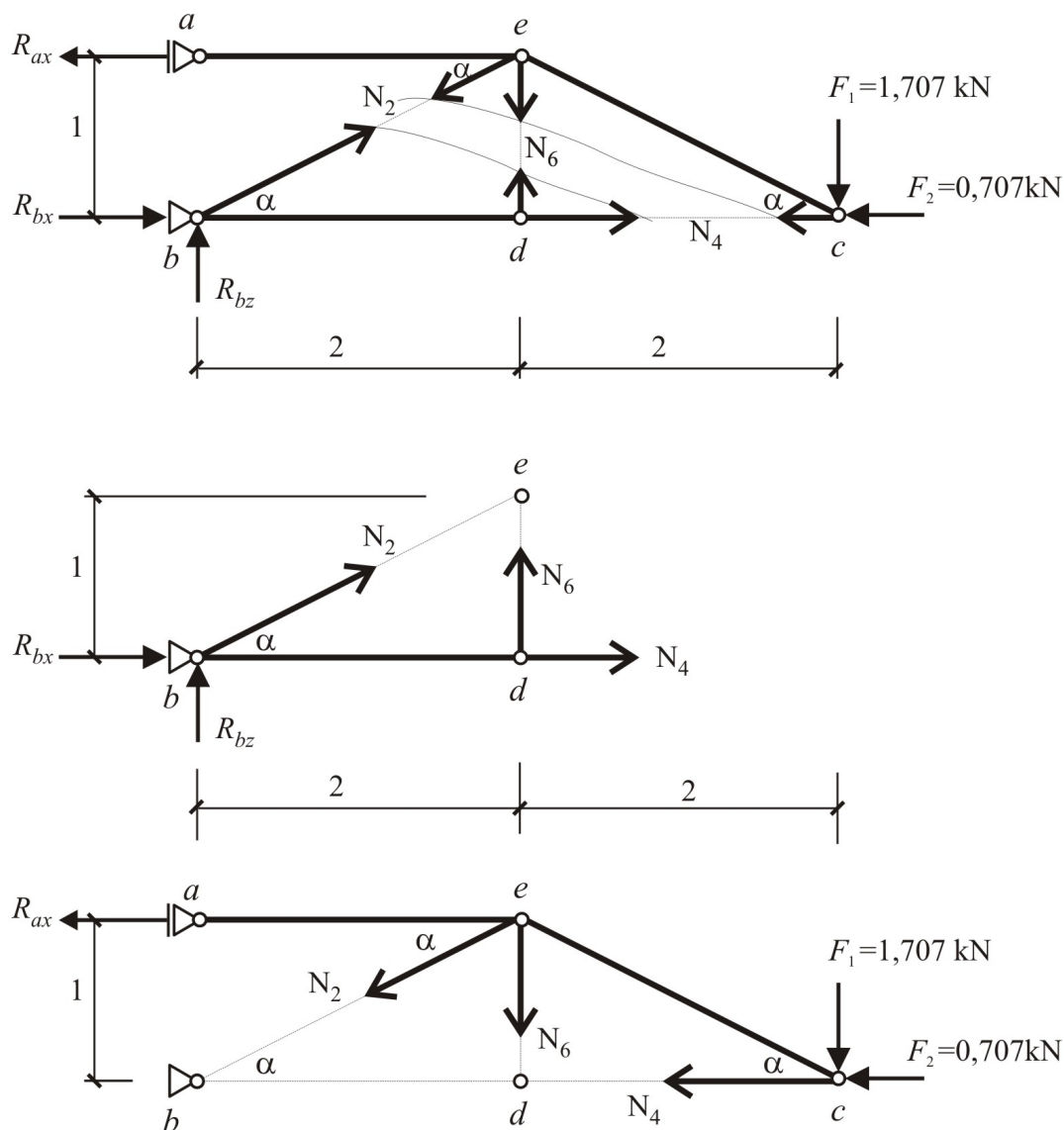
Výpočet normálové síly N_5 :

Pro výpočet síly N_5 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.7. Pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) je vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu d , k tzv. momentovému středu síly N_5 , neboť zbývající 2 neznámé v řezu N_3 a N_6 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí

moment k bodu d x -ová složka síly N_5 a síly R_{ax} i R_{bz} , v pravé části pak z -ová složka síly N_5 a síla F_1 .

Při správném řešení vyjde z obou řešení:

$$N_5 = 3,817 \text{ [kN]} . \quad (11.13)$$



Obrázek 11.6: Schéma pro řešení metodou průsečnou, síly N_2 , N_4 a N_6

Výpočet normálové síly N_6 :

Pro výpočet síly N_6 je potřeba provést myšlený řez podle obrázku 11.6 nebo podle obrázku 11.7.

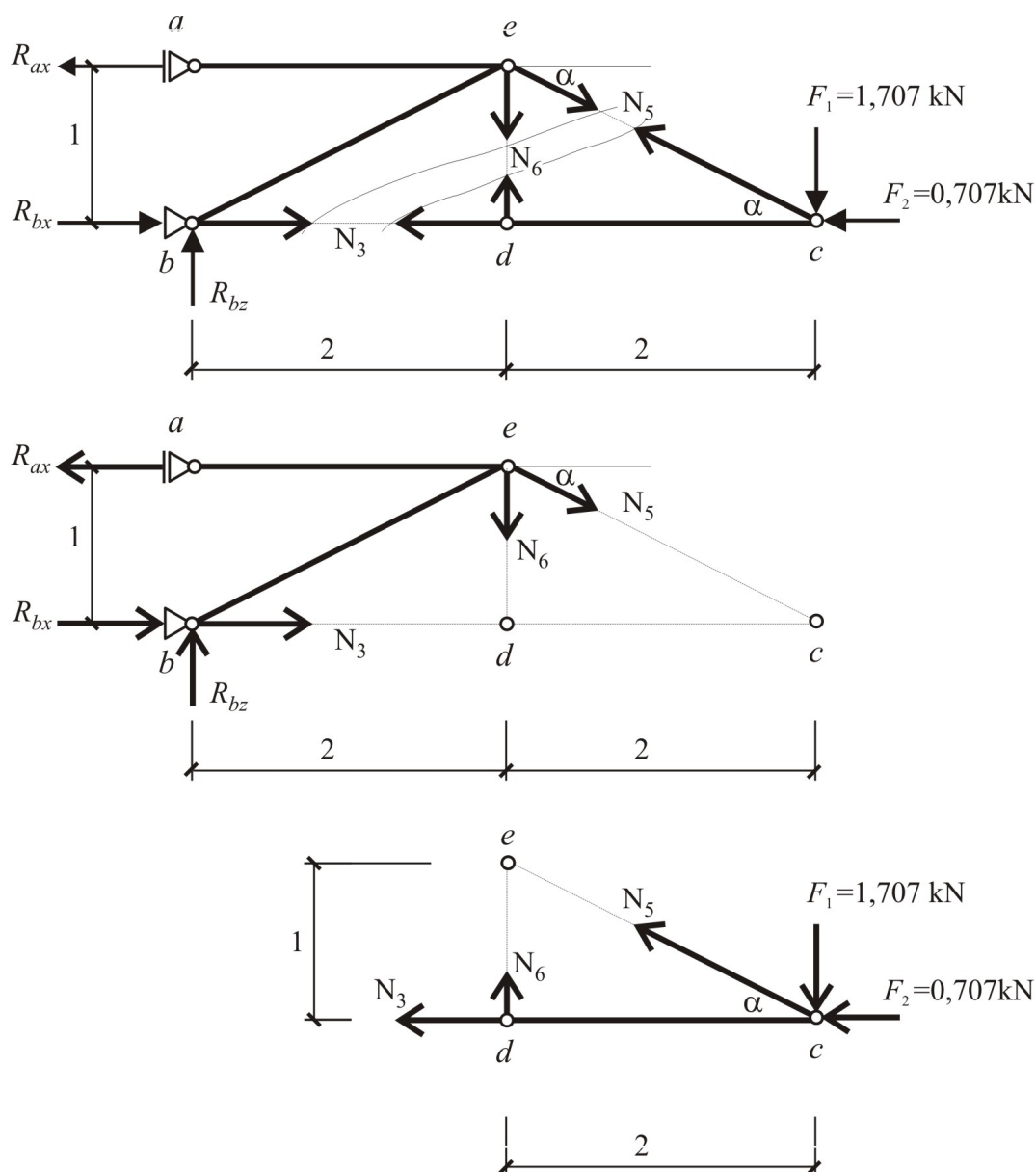
V případě volby řezu dle 11.6 je pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu b , k tzv. momentovému středu síly N_6 , neboť zbývající 2 neznámé v řezu N_2 a N_4 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytváří moment k bodu b pouze síla N_6 , v pravé části N_6 , R_{ax} a síla F_1 .

V případě volby řezu dle 11.7 je pro obě pomyslně oddělené části konstrukce (levou i pravou) vhodné zvolit **momentovou** podmínku rovnováhy k bodu c , k tzv. momentovému středu síly N_6 , neboť zbývající 2 neznámé v řezu N_3 a N_5 tímto bodem procházejí a v rovnici nefigurují. V levé části pomyslně oddělené konstrukce vytvářejí moment k bodu c síly N_6 , R_{ax} a R_{bz} , v pravé části pak pouze síla N_6 .

Při správném řešení vyjde z obou řešení:

$$N_6 = 0,0 \text{ [kN]} . \quad (11.14)$$

Na závěr vyřešené úlohy je potřeba přehledně vypsát hodnoty všech reakcí i normálových sil včetně znamének, jak bylo uvedeno v příkladu 11.1.



Obrázek 11.7: Schéma pro řešení metodou průsečnou, síly N_3 , N_5 a N_6

11.3 Příklad - příhradová konstrukce 3

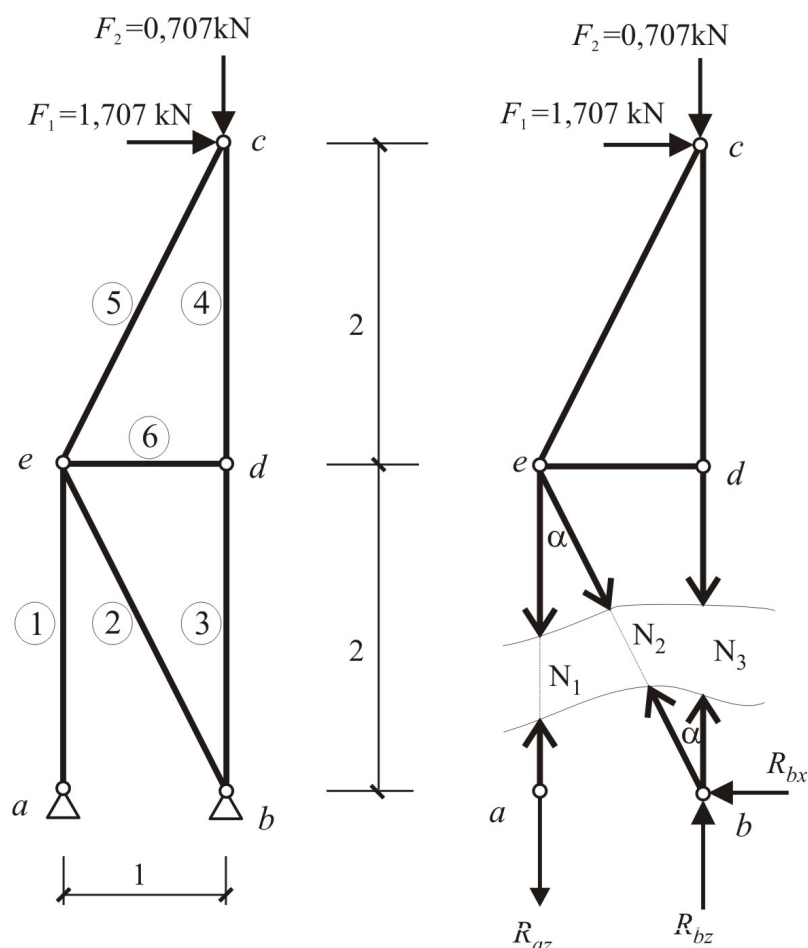
Spočítejte vnitřní síly konstrukce z příkladu 11.3 z metodou průsečnou v Ritterově úpravě, jejíž schéma je na obrázku 11.8. Délkové rozměry jsou v [m] .

Příhradová konstrukce je shodná s konstrukcí v příkladu 11.2, je však otočená o 90° . Jediná změna ve výpočtu oproti předešlému příkladu spočívá v řešení síly N_2 pomocí myšleného řezu dle obrázku 11.8.

Jelikož zbývající neznámé síly N_1 a N_3 jsou rovnoběžné a ve směru osy z , je nutné v **tomto případě** sestavit **silovou podmínku rovnováhy** pro obě pomyslně oddělené části ve směru osy x , čímž se liší od předešlého příkladu.

Další postup i všechny výsledky jsou shodné s předešlým příkladem s tím, že jsou zaměněny všechny x -ové složky sil za z -ové.

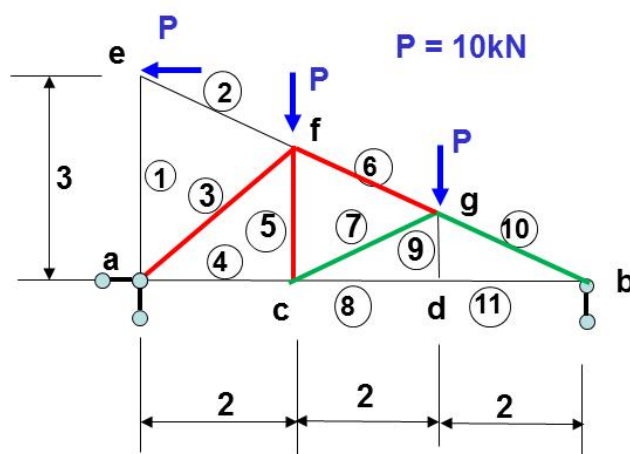
Na závěr vyřešené úlohy je potřeba přehledně vypsát hodnoty všech reakcí i normálových sil včetně znamének, jak bylo uvedeno v příkladu 11.1.



Obrázek 11.8: Schéma pro řešení metodou průsečnou, síly N_1 , N_2 a N_3

11.4 Příklad - příhradová konstrukce 4

Spočítejte vnitřní síly konstrukce, jejíž schéma je na obrázku 11.9. Délkové rozměry jsou v [m] .



Obrázek 11.9: Schéma průřezu příkladu 11.4

Nápověda pro řešení metodou průsečnou:

Metodou průsečnou lze řešit normálové síly všech prutů kromě N_1 a N_{11} , které nesplňují podmínky uvedené v úvodu kapitoly. Je nutné jejich hodnotu dopočítat zjednodušenou styčnickovou metodou.

U všech normálových sil šikmých prutů kromě N_{10} je nutné dávat velký pozor na sestavování momentových podmínek rovnováhy, neboť v rovnicích figurují jejich složky x -ové i z -ové současně. U některých sil při výpočtu z obou stran, u některých pouze z jedné strany.

Výsledky řešení

$$\begin{aligned}
 R_{ax} &= 10,0 \text{ (} \rightarrow \text{) [kN] ,} \\
 R_{ay} &= 10,0 \text{ (} \uparrow \text{) [kN] ,} \\
 R_{bz} &= 5,0 \text{ (} \uparrow \text{) [kN] ,} \\
 N_1 &= -5,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_2 &= 11,18 \text{ [kN] ,} \\
 N_3 &= -14,14 \text{ [kN] ,} \\
 N_4 &= 0,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_5 &= 5,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_6 &= 0,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_7 &= -11,18 \text{ [kN] ,} \\
 N_8 &= 10,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_9 &= 0,0 \text{ [kN] ,} \\
 N_{10} &= -11,18 \text{ [kN] ,} \\
 N_{11} &= 10,0 \text{ [kN] .}
 \end{aligned} \tag{11.15}$$

Kapitola 12

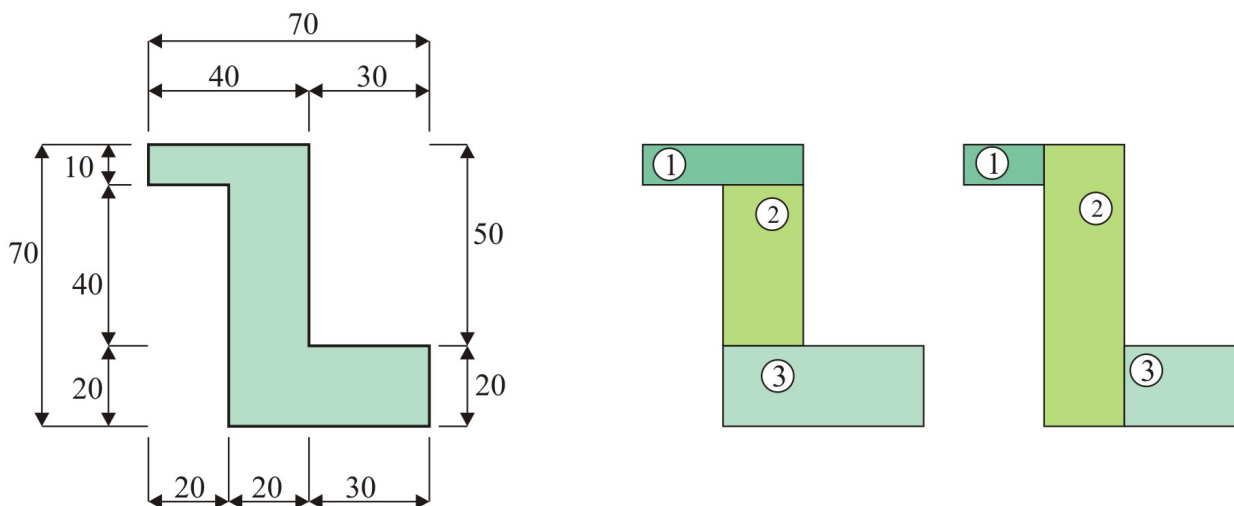
Průřezové charakteristiky

V této kapitole bude na příkladech vysvětlen výpočet průřezových charakteristik složených průřezů [1], které jsou potřebné jak pro dimenzování prutů (stanovení únosnosti, napětí i přetvoření (předmět Pružnost a plasticita)), tak i při výpočtu staticky neurčitých konstrukcí (předměty Pružnost a plasticita i další navazující).

V prvním příkladu 12.1 je uveden popis výpočtu i s podrobným komentářem, čímž je částečně vysvětlena také teorie dané problematiky.

12.1 Příklad - složený průřez 1

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu dle obrázku 12.1 vlevo. Rozměry jsou v [mm] .



Obrázek 12.1: Schéma průřezu příkladu 12.1

12.1.1 Plocha složeného průřezu [m²]

Každý složený průřez je potřeba rozdělit na dílčí základní plochy. Možností se nabízí více, např. obr. 12.1. Výsledná plocha průřezu je pak dána součtem dílčích základních. Pro řešení

průřezových charakteristik námi zadaného průřezu je použito rozdělení dle obr. 12.1 uprostřed nebo obr. 12.2.

$$\begin{aligned}A_1 &= 40 \cdot 10 = 400 \text{ [mm}^2\text{]} , \\A_2 &= 20 \cdot 40 = 800 \text{ [mm}^2\text{]} , \\A_3 &= 50 \cdot 20 = 1000 \text{ [mm}^2\text{]} , \\A &= \sum A_i = 2,2 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]} .\end{aligned}\tag{12.1}$$

Poznámka

V případě otvoru v průřezu se při výpočtu celkové plochy jeho dílčí plocha odečítá.

12.1.2 Statický moment plochy [m³]

Stejně jako statický moment síly (kap. 2) je možné definovat statický moment plochy vztažený k libovolné ose (S_x , S_z). Pokud není určeno jinak, je u výpočtu těžiště (viz dále) výhodné pomocnou (výchozí) souřadnou soustavu $\bar{x}\bar{z}$, ke které bude počítán statický moment plochy vést s počátkem v levém horním rohu složeného průřezu (obr. 12.2). Tím je zajištěno, že všechny dílčí plochy i vzdálenosti jejich těžišť jsou v kladném směru os .

Velikost momentu je dán součinem velikosti plochy a její vzdálenosti od osy, přičemž působíště příslušné plochy je uvažováno její těžiště. Znaménková konvence statického momentu plochy je shodná jako u statického momentu síly (kladný směr otáčení je proti směru hodinových ručiček). Velikosti dílčích ploch jsou známy z (12.1), polohy dílčích těžišť lze jednoduše definovat dle obr. 12.2.

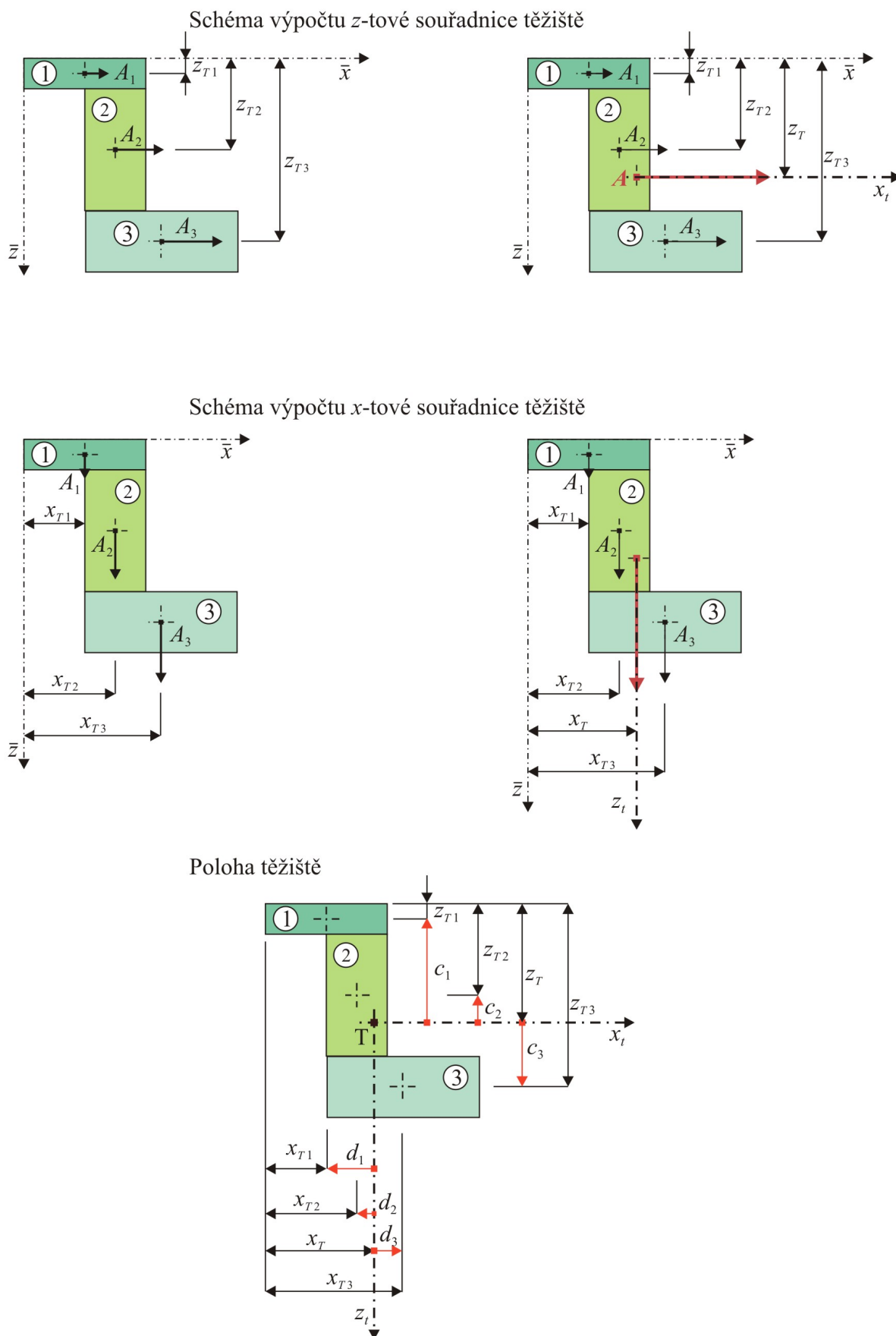
Statický moment plochy se používá při výpočtu těžiště složené plochy, viz následující kapitola.

$$\begin{aligned}S_{x,i} &= A_i \cdot z_{Ti} \text{ [m}^3\text{]} , \\S_{z,i} &= -A_i \cdot x_{Ti} \text{ [m}^3\text{]} .\end{aligned}\tag{12.2}$$

Poznámka

Stejně jako u soustav sil (kap. 2) platí:

Součet statických momentů všech dílčích ploch průřezu k libovolné ose je shodný se statickým momentem celkové plochy ke stejné ose.



Obrázek 12.2: Schéma pro výpočet těžiště průřezu příkladu 12.1

12.1.3 Poloha těžiště složeného průřezu [m]

Těžiště složeného obrazce se počítá ze známých vztahů, které byly získány s využitím pravidla uvedeného v poznámce výše:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_{T,i}}{\sum A_i} \text{ [m] ,} \quad (12.3)$$

$$z_T = \frac{\sum A_i \cdot z_{T,i}}{\sum A_i} \text{ [m] .} \quad (12.4)$$

Pro odvození těchto vztahů je potřeba zavést do těžišť dílčích ploch T_i fiktivní síly o velikosti daných ploch A_i ve směru os x nebo z dle obr. 12.2. Tím se získají 2 soustavy fiktivních rovnoběžných sil, které mají shodné vlastnosti se skutečnou soustavou rovnoběžných sil (kap. 2). Definováním statického středu těchto rovnoběžných sil jsou dány souřadnice těžiště složeného obrazce.

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{\sum A_i \cdot x_{T,i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_{T,1} + A_2 \cdot x_{T,2} + A_3 \cdot x_{T,3}}{A} \\ &= \frac{400 \cdot 20 + 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 45}{2,2 \cdot 10^3} , \\ &= \underline{35,0 \text{ [mm]}} . \end{aligned} \quad (12.5)$$

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\sum A_i \cdot z_{T,i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot z_{T,1} + A_2 \cdot z_{T,2} + A_3 \cdot z_{T,3}}{A} \\ &= \frac{400 \cdot 5 + 800 \cdot 30 + 1000 \cdot 60}{2,2 \cdot 10^3} , \\ &= \underline{39,09 \text{ [mm]}} . \end{aligned} \quad (12.6)$$

Pomocí vztahů (12.5) a (12.6) jsou definovány souřadnice těžiště celého složeného obrazce vzhledem k pomocným osám $\bar{x}$; $\bar{z}$: $T \equiv [35,0 ; 39,09] \text{ [mm]}$. Tímto bodem jsou vedeny těžištní osy x_t ; z_t (obr. 12.2 dole), které se tímto stávají základními osami dalšího výpočtu a pomocné ($\bar{x}$; $\bar{z}$) již nebudou jeho součástí.

Poznámka

V případě otvoru v průřezu, budou členy příslušné tomuto otvoru $[A_i \cdot x_{T,i}]$ v rovnici (12.5) a $[A_i \cdot z_{T,i}]$ v rovnici (12.6) odečítány.

Pro následující výpočty bude třeba stanovit vzdálenosti těžišť dílčích ploch T_i od obou os těžištních x_t ; z_t . Vzdálenosti tzv. *ramena* se vyjadřují ve **skutečných hodnotách** (nikoli absolutních). Je-li těžiště dílčí plochy T_i v kladném směru od osy x_t (případně z_t), má vzdálenost tohoto těžiště od příslušné osy kladnou hodnotu, je-li v záporném směru od těžištních os, má hodnotu zápornou.

Ramena těžišť T_i od osy x_t se značí c_i , od osy z_t pak d_i a jsou dány vztahy:

$$\begin{aligned}c_i &= z_{T,i} - z_T \text{ [m]} , \\d_i &= x_{T,i} - x_T \text{ [m]} .\end{aligned}\tag{12.7}$$

$$\begin{aligned}c_1 &= z_{T,1} - z_T = 5 - 39,09 = -34,09 \text{ [mm]} , \\c_2 &= z_{T,2} - z_T = 30 - 39,09 = -9,09 \text{ [mm]} , \\c_3 &= z_{T,3} - z_T = 60 - 39,09 = 20,91 \text{ [mm]} .\end{aligned}\tag{12.8}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= x_{T,1} - x_T = 20 - 35 = -15,0 \text{ [mm]} , \\d_2 &= x_{T,2} - x_T = 30 - 35 = -5,0 \text{ [mm]} , \\d_3 &= x_{T,3} - x_T = 45 - 35 = 10,0 \text{ [mm]} .\end{aligned}\tag{12.9}$$

12.1.4 Momenty setrvačnosti (MS) základních průřezů [m⁴]

Moment setrvačnosti je kvadratický moment plochy vztažený k jedné (libovolné) ose a je definován základním obecným vztahem:

$$\begin{aligned}I_x &= \int \int_A z^2 \, dA \text{ [m}^4\text{]} , \\I_z &= \int \int_A x^2 \, dA \text{ [m}^4\text{]} ,\end{aligned}\tag{12.10}$$

kde x, z je vzdálenost plochy A od definované osy z , respektive x .

MS nabývá nejmenší hodnoty, je-li vztažen k osám procházejícím těžištěm, jedná se o **centrální moment setrvačnosti**, těžištní osy pak centrální osy setrvačnosti. MS nabývá pouze kladných hodnot, neboť vzdálenost x , respektive z jsou 2krát mocněny a je tudíž jedno, zda se jedná o vzdálenost v kladném či záporném směru od sledované osy.

Poznámka

Ve stavební mechanice bývá nejčastějším požadavkem stanovení právě tohoto **centrálního MS**. V běžné praxi se však často hovoří o "momentu setrvačnosti" s tím, že se automaticky uvažuje "centrální moment setrvačnosti".

Rovnice pro výpočet momentů setrvačnosti (centrálních MS) základních průřezů

Řešením integrálů (12.10) se získají známé vzorce pro MS základních průřezů (kruh, mezikruží, obdélník, čtverec, trojúhelník...).

Zadaný složený průřez příkladu 12.1 je tvořen třemi obdélníky. Rovnice pro výpočet momentu setrvačnosti obdélníku k jeho vlastním těžištním osám v obecném tvaru jsou:

$$\begin{aligned}I_x &= \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \text{ [m}^4\text{]} , \\I_z &= \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 \text{ [m}^4\text{]} .\end{aligned}\tag{12.11}$$

Poznámka

Platí obecné pravidlo, že veličina, která je v základních rovnicích (12.11) mocněna představuje rozměr, jež je kolmý k dané ose. Konkrétně viz. (12.12) a (12.13).

Momenty setrvačnosti dílčích ploch zadaného průřezu

Jedná se o momenty setrvačnosti $I_{x,i}$; $I_{z,i}$ dílčích ploch A_i vztažených k jejich vlastním těžištním osám $x_{t,i}$; $z_{t,i}$:

$$\begin{aligned} I_{x,1} &= \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 10^3 = 3,333 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]} = 3,333 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_{x,2} &= \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 40^3 = 0,1066 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} = 0,1066 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_{x,3} &= \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 20^3 = 33,333 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]} = 33,333 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]} . \end{aligned} \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} I_{z,1} &= \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 40^3 = 53,33 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]} = 53,33 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_{z,2} &= \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 20^3 = 26,66 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]} = 26,66 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_{z,3} &= \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 50^3 = 208,33 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]} = 208,33 \cdot 10^{-9} \text{ [m}^4\text{]} . \end{aligned} \quad (12.13)$$

12.1.5 Momenty setrvačnosti průřezů k posunutým osám [m⁴]

MS průřezu k libovolné posunuté ose ($\bar{x}$), resp. ($\bar{z}$) je definován tzv. Steinerovou větou:

$$\begin{aligned} I_{\bar{x}} &= I_x + A \cdot c^2 \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_{\bar{z}} &= I_z + A \cdot d^2 \text{ [m}^4\text{]} , \end{aligned} \quad (12.14)$$

kde:

A [m²] plocha průřezu,

I_x , I_z [m⁴] ... centrální momenty setrvačnosti průřezu,

c , d [m] vzdálenost těžiště průřezu od posunuté osy $\bar{x}$, resp. $\bar{z}$.

12.1.6 Centrální momenty setrvačnosti složeného průřezu [m⁴]

Moment setrvačnosti složeného průřezu k určité ose je dán součtem momentů setrvačnosti dílčích ploch k této ose. Pokud se jedná o osu procházející těžištěm, jedná se o centrální MS. Matematicky toto popisuje opět Steinerova věta (??):

$$\begin{aligned} I_x &= \sum (I_{x,i} + A_i \cdot c_i^2) \text{ [m}^4\text{]} , \\ I_z &= \sum (I_{z,i} + A_i \cdot d_i^2) \text{ [m}^4\text{]} , \end{aligned} \quad (12.15)$$

kde:

A_i [m²] plocha dílčích průřezů (12.1),

$I_{x,i}$, $I_{z,i}$ [m⁴] ... momenty setrvačnosti (centrální) dílčích průřezů (12.12) a (12.13),

c_i , d_i [m] ramena těžišť (12.8) a (12.9),

a tím:

$$\begin{aligned}
 \underline{I_x} &= [I_{x,1} + A_1 \cdot c_1^2] + [I_{x,2} + A_2 \cdot c_2^2] + [I_{x,3} + A_3 \cdot c_3^2] \\
 &= [3,33 \cdot 10^3 + 400 \cdot (-34,9)^2] \\
 &\quad + [106,66 \cdot 10^3 + 800 \cdot (-9,09)^2] \\
 &\quad + [33,33 \cdot 10^3 + 1000 \cdot (20,91)^2] \\
 &= \underline{1,1115 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4]} = \underline{1,115 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4]} ,
 \end{aligned} \tag{12.16}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{I_z} &= [I_{z,1} + A_1 \cdot d_1^2] + [I_{z,2} + A_2 \cdot d_2^2] + [I_{z,3} + A_3 \cdot d_3^2] \\
 &= [53,33 \cdot 10^3 + 400 \cdot (-15,0)^2] \\
 &\quad + [26,66 \cdot 10^3 + 800 \cdot (-5,0)^2] \\
 &\quad + [208,33 \cdot 10^3 + 1000 \cdot (10,0)^2] \\
 &= \underline{0,49833 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4]} = \underline{0,49833 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4]} .
 \end{aligned} \tag{12.17}$$

Poznámka

Člen $[I_{x,1} + A_1 \cdot c_1^2]$ v rovnici (12.16) vyjadřuje moment setrvačnosti průřezu 1 vztažený k těžištní ose celého průřezu x_t . Analogicky to platí pro další členy i průřezy v rovnicích (12.16) a (12.17). Součtem momentů setrvačnosti všech dílčích průřezů vzhledem k těžištní ose se získá centrální moment setrvačnosti celého průřezu, což je slovní vyjádření Steinerovy věty (12.14) i rovnic (12.16) a (12.17).

Poznámka

V případě otvoru v průřezu, budou členy příslušné tomuto otvoru $[I_{x,i} + A_i \cdot c_i^2]$ v rovnici (12.16) a $[I_{z,i} + A_i \cdot d_i^2]$ v rovnici (12.17) odečítány.

12.1.7 Deviační moment $[\text{m}^4]$

Deviační moment je důležitou veličinou pro definování hlavních centrálních MS (kap. 12.1.6). Jedná se o kvadratický moment plochy vztažený k dvěma vzájemně kolmým osám a je definován základním obecným vztahem:

$$D_{xz} = \int \int_A x \cdot z \, dA \text{ [m}^4] , \tag{12.18}$$

kde:

$A \text{ [m}^2]$ plocha průřezu,

$x \text{ [m]}$ vzdálenost plochy A od definované osy z ,

$z \text{ [m]}$ vzdálenost plochy A od definované osy x ,

Deviační moment nabývá kladných i záporných hodnot, znaménko závisí na součinu vzdáleností os $x \cdot z$. Pro jednoose či dvouose symetrické průřezy má vždy nulovou hodnotu.

Poznámka

Stejně jako momenty setrvačnosti i deviační momenty je možné vztahovat k libovolným (vzájemně kolmým) osám nebo k osám (vzájemně kolmým) procházejícím těžištěm. V druhém případě se jedná o centrální deviační moment. Ve stavební mechanice bývá nejčastějším požadavkem stanovení právě tohoto **centrálního deviačního momentu**. V běžné praxi se však často hovoří o "deviačním momentu" s tím, že se automaticky uvažuje "centrální deviační moment".

Deviační momenty dílčích ploch zadaného průřezu

Zadaný složený průřez příkladu 12.1 je tvořen třemi obdélníky. Jedná se o symetrické průřezy, tudíž deviační momenty k jejich vlastním těžištním osám jsou nulové.

$$D_{xz,1} = D_{xz,2} = D_{xz,3} = 0 \text{ [m}^4\text{]} . \quad (12.19)$$

Deviační moment průřezu k posunutým osám [m⁴]

Deviační moment průřezu k libovolné posunutým osám $\bar{x}, \bar{z}$ nabývá kladných i záporných hodnot a stejně jako momenty setrvačnosti je definován Steinerovou větou:

$$D_{\bar{x}\bar{z}} = D_{xz} + A \cdot c \cdot d \text{ [m}^4\text{]} , \quad (12.20)$$

kde:

$A \text{ [m}^2\text{]}$ plocha průřezu,

$D_{xz} \text{ [m}^4\text{]}$ deviační moment průřezu vztažený k jeho vlastním těžištním osám,

$c, d \text{ [m]}$ vzdálenost těžiště průřezu od posunuté osy ($\bar{x}$), resp. ($\bar{z}$).

Deviační moment složeného průřezu [m⁴]

Deviační moment složeného průřezu k určité ose je dán součtem momentů setrvačnosti dílčích ploch k této ose. Matematicky toto popisuje opět Steinerova věta (12.20):

$$D_{xz} = \sum (D_{xz,i} + A_i \cdot c_i \cdot d_i) \text{ [m}^4\text{]} , \quad (12.21)$$

kde:

$A_i \text{ [m}^2\text{]}$ plocha dílčích průřezů (12.1),

$D_{xz,i} \text{ [m}^4\text{]}$ deviační momenty dílčích průřezů, tady v důsledku symetrie $D_{xz,i} = 0$,

$c_i, d_i \text{ [m]}$ ramena těžišť (12.8) a (12.9),

a tím:

$$\begin{aligned} D_{xz} &= [D_{xz,1} + A_1 \cdot c_1 \cdot d_1] + [D_{xz,2} + A_2 \cdot c_2 \cdot d_2] + [D_{xz,3} + A_3 \cdot c_3 \cdot d_3] \\ &= [0 + 0,4 \cdot 10^3 \cdot (-34,09) \cdot (-15,0)] \\ &\quad + [0 + 0,8 \cdot 10^3 \cdot (-9,09) \cdot (-5,0)] \\ &\quad + [0 + 1 \cdot 10^3 \cdot 20,91 \cdot 10,0] \\ &= \underline{0,45 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]}} = \underline{0,45 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}} . \end{aligned} \quad (12.22)$$

Poznámka

V případě otvoru v průřezu, budou členy příslušné tomuto otvoru $[D_{xz,i} + A_i \cdot c_i \cdot d_i]$ v rovnici (12.22) odečítány.

12.1.8 Hlavní centrální momenty setrvačnosti průřezu $[m^4]$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti $I_1 \equiv I_{max}$; $I_2 \equiv I_{min}$ jsou kvadratické momenty plochy vztažené k jedné z pootočených, vzájemně kolmých těžištních os x_1 ; z_2 , přičemž k jedné z os, např. x_1 nabývá maximálních hodnot a k druhé ose, tedy z_2 minimálních hodnot. Hlavní centrální MS jsou dány vztahem:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4 \cdot D_{xz}^2} \quad [m^4], \quad (12.23)$$

kde:

I_x , I_z $[m^4]$... centrální momenty setrvačnosti průřezu,

D_{xz} $[m^4]$ deviační moment průřezu (centrální),

a tím:

$$\begin{aligned} \underline{I_1} &= \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4 \cdot D_{xz}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1,1115 \cdot 10^6 + 0,49833 \cdot 10^6) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1,1115 \cdot 10^6 - 0,49833 \cdot 10^6)^2 + 4 \cdot (0,45 \cdot 10^6)^2} \\ &= \underline{1,3495 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4]} = \underline{1,3495 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4]}, \end{aligned} \quad (12.24)$$

$$\begin{aligned} \underline{I_2} &= \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_z) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_z)^2 + 4 \cdot D_{xz}^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1,1115 \cdot 10^6 + 0,49833 \cdot 10^6) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1,1115 \cdot 10^6 - 0,49833 \cdot 10^6)^2 + 4 \cdot (0,45 \cdot 10^6)^2} \\ &= \underline{0,2603 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4]} = \underline{0,2503 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4]}, \end{aligned} \quad (12.25)$$

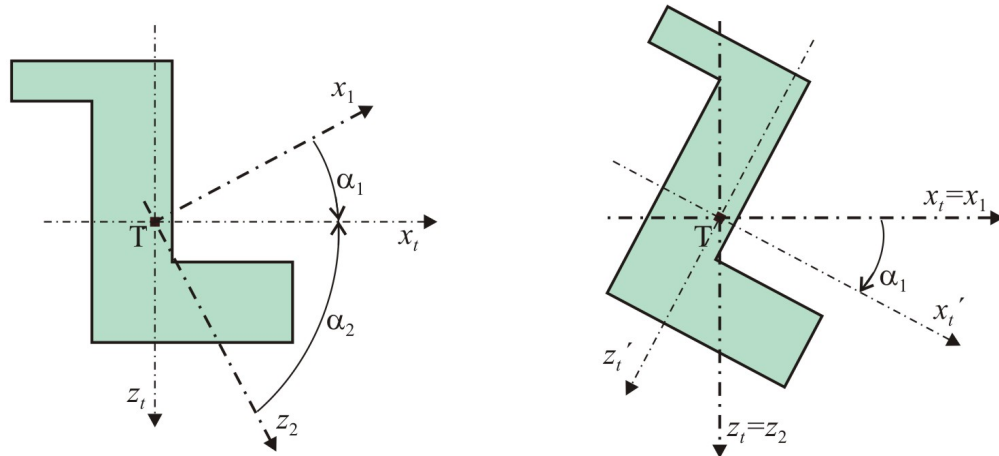
Poznámka

U symetrického průřezu není třeba I_1 ; I_2 počítat, neboť hlavní centrální moment setrvačnosti je shodný s centrálním momentem setrvačnosti s tím, že I_1 je větší z I_x ; I_z a I_2 menší z I_x ; I_z .

12.1.9 Natočení hlavních centrálních os

Natočení hlavních centrálních os x_1 ; z_2 , tedy os, ke kterým jsou vztaženy hlavní centrální MS I_1 ; I_2 se spočítají ze vztahů:

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha_1 &= \frac{I_1 - I_x}{D_{xz}} = \frac{1,3495 \cdot 10^6 - 1,1115 \cdot 10^6}{0,45 \cdot 10^6} = 0,5288 \quad [-] \\ \Rightarrow \underline{\alpha_1} &= \underline{27,87 \text{ [}^\circ\text{]}}, \end{aligned} \quad (12.26)$$



Obrázek 12.3: Schéma k hlavním centrálním MS příkladu 12.1

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{I_2 - I_x}{D_{xz}} = \frac{0,2603 \cdot 10^6 - 1,1115 \cdot 10^6}{0,45 \cdot 10^6} = -1,8915 \quad [-] \\ \Rightarrow \alpha_2 &= -62,13 \quad [^\circ], \end{aligned} \quad (12.27)$$

Úhel α_1 definuje pootočení těžištní osy x_t od hlavní centrální osy x_1 , úhel α_2 pak pootočení rovněž těžištní osy x_t od hlavní centrální osy z_2 . Kladný směr vede od kladného směru osy x ke kladnému směru osy z , tedy ve směru chodu hodinových ručiček, viz obrázek 12.3 vlevo. Úhel α_2 má zápornou hodnotu, čemuž odpovídá pootočení osy x_t od osy z_2 v záporném směru (proti chodu hodinových ručiček).

V inženýrské praxi se výsledky této úlohy využívají k případnému pootočení průřezu o úhel α_1 . Tím je dosaženo, že osa x_t se stává hlavní centrální osou x_1 ($x_t \equiv x_1$) a daný průřez má v této poloze největší hodnotu momentu setrvačnosti a tím i největší tuhost ohybu vzhledem k ose x , viz obrázek 12.3 vpravo. MS daného průřezu vzhledem k ose z je v tomto případě nejmenší.

Dojde-li k pootočení průřezu o úhel α_2 (je záporný-bude se jednat o pootočení proti směru chodu hodinových ručiček), bude dosaženo největší hodnoty MS i ohybové tuhosti vzhledem k ose z .

Poznámka

Shodné hodnoty I_1 ; I_2 budou dosaženy i při pootočení průřezu o dalších $180 [^\circ]$, tedy celkově o $207,87 [^\circ]$. Schématicky tuto situaci vystihuje řešení v příkladu 12.2.

12.1.10 Invariant součtu momentů setrvačnosti

Součet momentů setrvačnosti ke dvěma vzájemně kolmým osám setrvačnosti se při otáčení obou os kolem počátku nemění, zůstává invariantní. Musí být tedy splněna podmínka:

$$I_x + I_z = I_1 + I_2. \quad (12.28)$$

Po dosazení:

$$\begin{aligned}(1,115 \cdot 10^{-6} + 0,498\overline{33} \cdot 10^{-6}) &= (1,3495 \cdot 10^{-6} + 0,2603 \cdot 10^{-6}) \\ (1,6098 \cdot 10^{-6}) \text{ [m}^4] &= (1,6098 \cdot 10^{-6}) \text{ [m}^4] .\end{aligned}\tag{12.29}$$

Podmínka je splněna.

12.1.11 Polární moment setrvačnosti [m⁴]

Polární moment setrvačnosti je kvadratický moment plochy vztažený k jednomu bodu a je definován základním obecným vztahem:

$$I_p = \int \int_A p^2 \, dA \text{ [m}^4] .\tag{12.30}$$

Po dosazení s odkazem na (*odkaz Benebda*, , , , ,) se získá:

$$I_p = I_x + I_z \text{ [m}^4] ,\tag{12.31}$$

kde:

A_i [m²] plocha průřezu,

p [m] vzdálenost plochy A od definovaného bodu P ,

I_x [m⁴] moment setrvačnosti plochy vztažený k ose x s počátkem v bodu P ,

I_z [m⁴] moment setrvačnosti plochy vztažený k ose z s počátkem v bodu P .

Polární moment setrvačnosti nabývá pouze kladných hodnot. Stejně jako momenty setrvačnosti i polární moment setrvačnosti je možné vztahovat k libovolnému bodu nebo k přímo k těžišti. V druhém případě se jedná o centrální polární moment setrvačnosti. Ve stavební mechanice bývá nejčastějším požadavkem stanovení právě tohoto **centrálního polárního momentu setrvačnosti**. V běžné praxi se však často hovoří o "polárním momentu setrvačnosti" s tím, že se automaticky uvažuje "centrální polární moment setrvačnosti".

Polární moment setrvačnosti složeného průřezu [m⁴]

Polární moment setrvačnosti složeného průřezu se počítá ve vztahu (12.31). Pro průřez z příkladu 12.1 má (centrální) polární moment setrvačnosti hodnotu:

$$\begin{aligned}\underline{I_p} &= I_x + I_z \\ &= 1,115 \cdot 10^6 + 0,498\overline{33} \cdot 10^6 \\ &= \underline{1,61\overline{33} \cdot 10^6 \text{ [mm}^4]} = \underline{1,61\overline{33} \cdot 10^{-6} \text{ [m}^4]} .\end{aligned}\tag{12.32}$$

12.1.12 Rekapitulace základních pojmů

Moment setrvačnosti (MS) I_x ; I_z [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený k libovolné ose x resp. z .

Centrální moment setrvačnosti $I_x \equiv I_{x_t}$; $I_z \equiv I_{z_t}$ [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený k jedné z těžištních os x_t ; z_t .

Moment setrvačnosti $I_{x'}$; $I_{z'}$ [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený k libovolné pootočené ose x' resp. z' .

Hlavní moment setrvačnosti $I_1 \equiv I_{max}$; $I_2 \equiv I_{min}$ [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený k jedné z pootočených, vzájemně kolmých os x'_1 ; z'_2 , přičemž k jedné (x'_1) nabývá maximálních a k druhé (z'_2) minimálních hodnot.

Hlavní centrální moment setrvačnosti $I_1 \equiv I_{max}$; $I_2 \equiv I_{min}$ [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený k jedné z pootočených, vzájemně kolmých těžištních os $x_{t,1}$; $z_{t,2}$, přičemž k jedné ($x_{t,1}$) nabývá maximálních a k druhé ($z_{t,2}$) minimálních hodnot. U symetrického průřezu je hlavní centrální moment setrvačnosti shodný s centrálním momentem setrvačnosti.

Deviační moment D_{xz} [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený ke dvěma vzájemně kolmým osám x ; z .

Centrální deviační moment D_{xz} [m^4] - kvadratický moment plochy vztažený ke dvěma vzájemně kolmým těžištním osám x_t ; z_t .

Polární moment setrvačnosti I_p - kvadratický moment plochy vztažený k jednomu bodu (pólu).

Centrální polární moment setrvačnosti I_p - kvadratický moment plochy vztažený k těžišti.

Osy setrvačnosti - libovolně umístěné osy (např. $(\bar{x}; \bar{z})$), obr. 12.2), ke kterým jsou MS vztaženy.

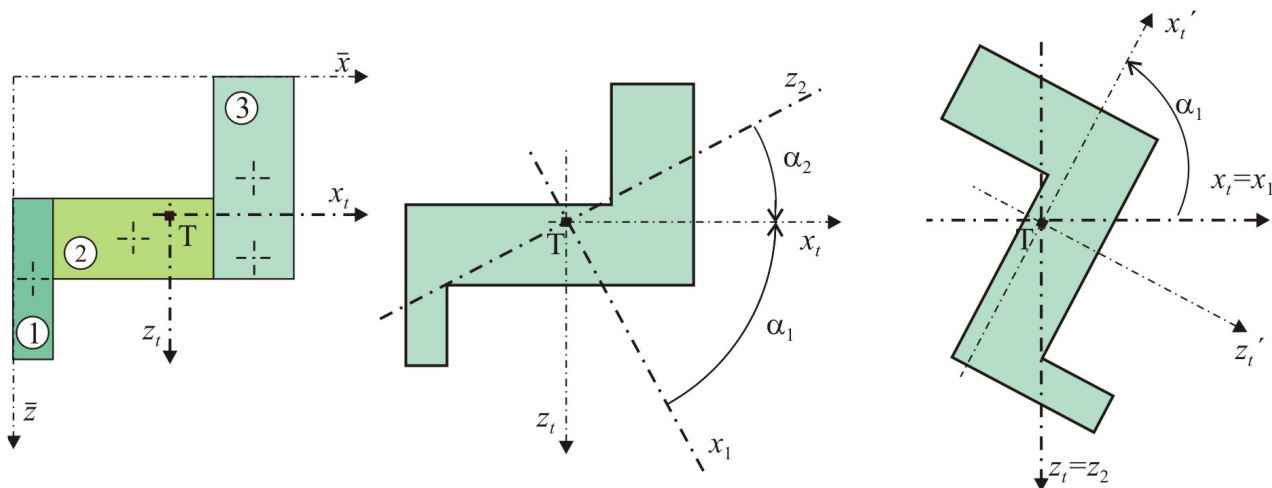
Centrální osy setrvačnosti - vzájemně kolmé osy procházející těžištěm x_t ; z_t .

Hlavní osy setrvačnosti - vzájemně kolmé osy x_1 ; z_2 pootočené tak, že $I_1 \equiv I_{x,max}$; $I_2 \equiv I_{z,min}$.

Hlavní centrální osy setrvačnosti - vzájemně kolmé osy procházející těžištěm $x_{t,1}$; $z_{t,2}$ pootočené tak, že $I_1 \equiv I_{x_t,max}$; $I_2 \equiv I_{z_t,min}$.

12.2 Příklad - složený průřez 2

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu, který má shodné rozměry jako v příkladu 12.1, ale jeho výchozí poloha je oproti předešlému zadání změněna dle obrázku 12.4 vlevo. Rozměry jsou v [mm] .



Obrázek 12.4: Schéma k příkladu 12.2

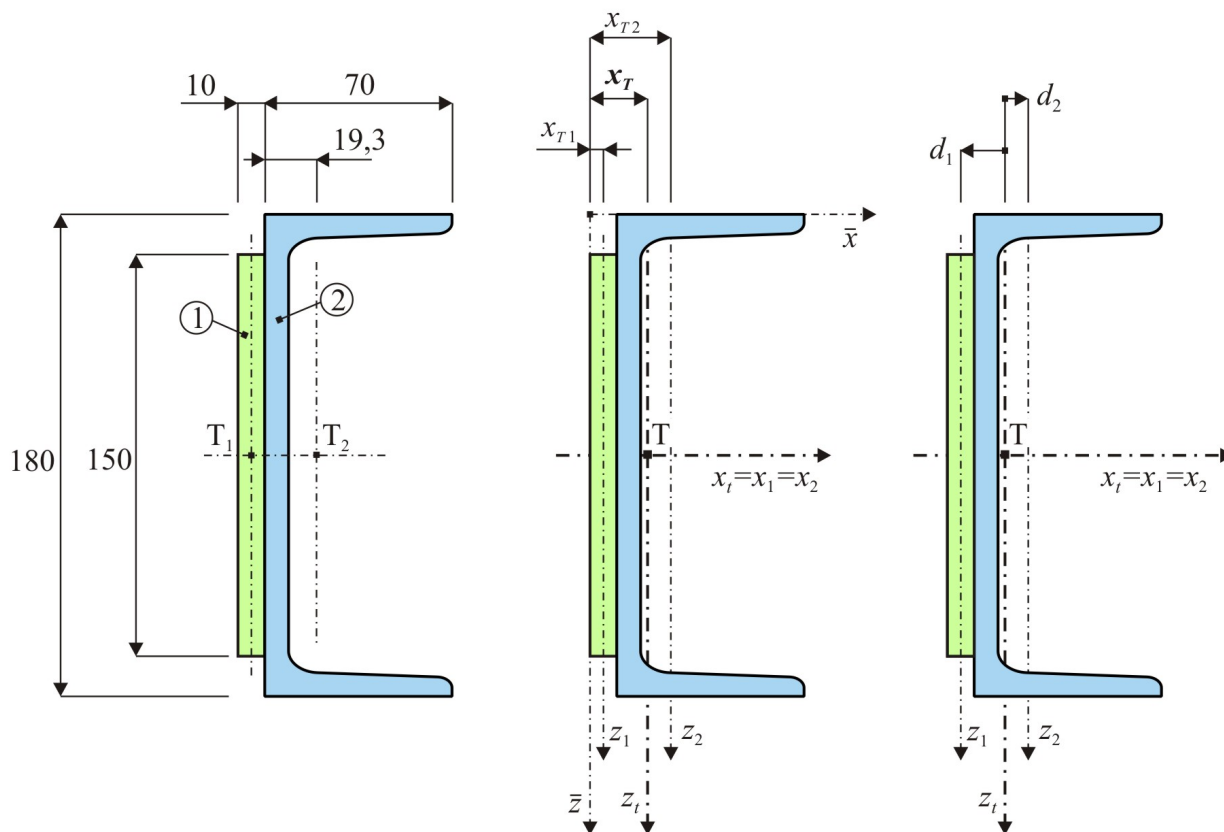
Výsledky řešení

Schéma k řešení hlavních centrálních momentů viz obr. 12.4 uprostřed a vpravo.

$$\begin{aligned}
 x_T &= 30,91 \text{ [mm]} , \\
 z_T &= 35,00 \text{ [mm]} , \\
 c_1 &= 15,0 \text{ [mm]} , \\
 c_2 &= 5,0 \text{ [mm]} , \\
 c_3 &= -10,0 \text{ [mm]} , \\
 d_1 &= -25,91 \text{ [mm]} , \\
 d_2 &= -0,91 \text{ [mm]} , \\
 d_3 &= 29,09 \text{ [mm]} , \\
 I_x &= 0,49833 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 I_z &= 1,115 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 D_{xz} &= -0,45 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 I_p &= 1,6133 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 I_1 &= 1,34955 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 I_2 &= 0,2503 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4] , \\
 \alpha_1 &= -62,13 \text{ [}^\circ] , \\
 \alpha_2 &= 27,87 \text{ [}^\circ] .
 \end{aligned} \tag{12.33}$$

12.3 Příklad - složený průřez 3

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu dle obrázku 12.5 vlevo. Rozměry jsou v [mm] .



Obrázek 12.5: Schéma příkladu 12.3

Výsledky řešení

Jedná se o složený svařovaný průřez, jehož jednu z dílčích ploch tvoří normalizovaný válcovaný průřez ($A_2 \equiv U180$). Plocha i hodnota momentů setrvačnosti válcovaného průřezu (12.34) jsou získané z ocelářských tabulek. Schéma k řešení těžiště průřezu i MS viz obr. 12.5 uprostřed a vpravo.

$$\begin{aligned} A_2 &= 2,8 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{] ,} \\ I_x &= 13,50 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{] ,} \\ I_z &= 1,13 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{] .} \end{aligned} \tag{12.34}$$

$$\begin{aligned}x_T &= 20,82 \text{ [mm]} , \\z_T &= 90,00 \text{ [mm]} , \\c_1 &= c_2 = 0 \text{ [mm]} , \\d_1 &= -15,82 \text{ [mm]} , \\d_2 &= 8,48 \text{ [mm]} ,\end{aligned}\tag{12.35}$$

$$\begin{aligned}I_x &= 16,3125 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\I_z &= 1,7193 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\I_p &= 18,0353 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\D_{xz} &= 0 \text{ [mm}^4\text{]} \dots \textit{symetrie} , \\I_1 &= I_x \dots \textit{symetrie} , \\I_2 &= I_z \dots \textit{symetrie} .\end{aligned}\tag{12.36}$$

12.4 Příklad - složený průřez 4

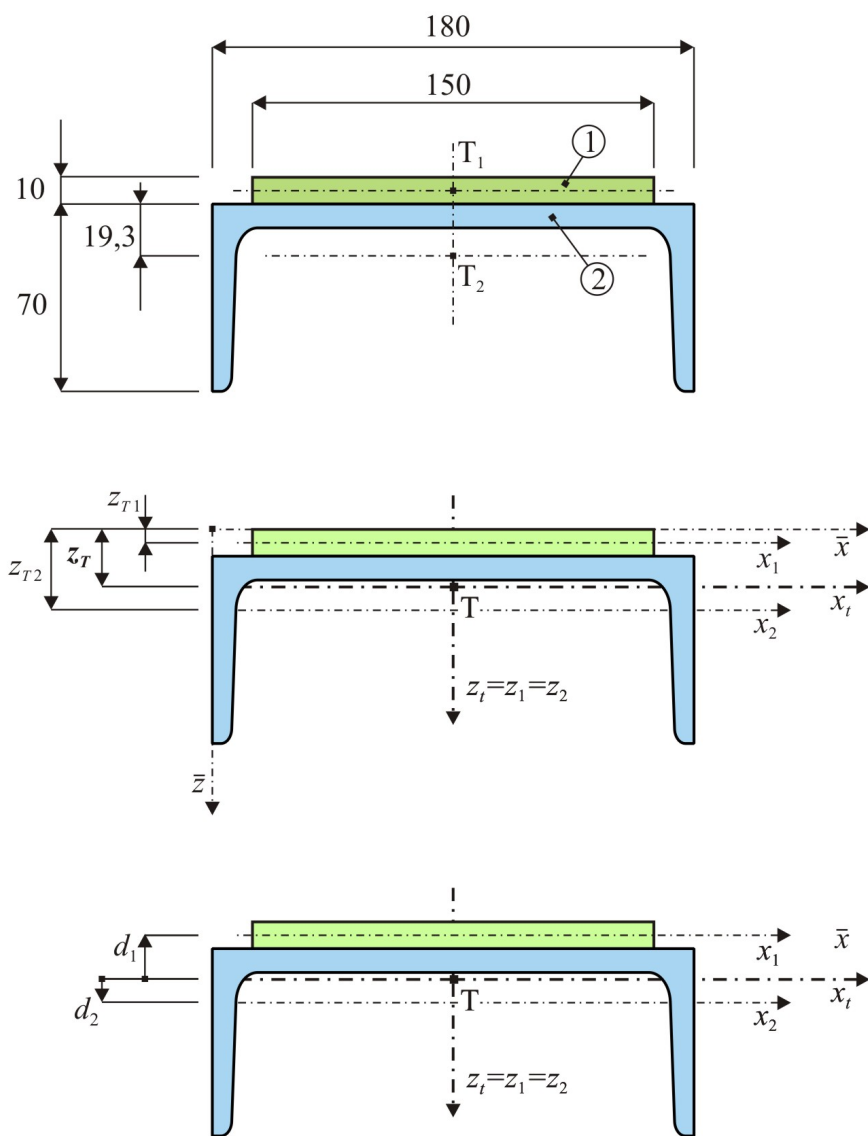
Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu, který má shodné rozměry jako v příkladu 12.3, ale jeho výchozí poloha je oproti předešlému zadání pootočena o 90° dle obrázku 12.6 nahoře. Rozměry jsou v [mm] .

Výsledky řešení

Schéma k řešení těžiště průřezu i MS viz obr. 12.6 uprostřed a dole.

$$\begin{aligned}A_2 &= 2,8 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} , \\I_x &= 1,13 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\I_z &= 13,50 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} .\end{aligned}\tag{12.37}$$

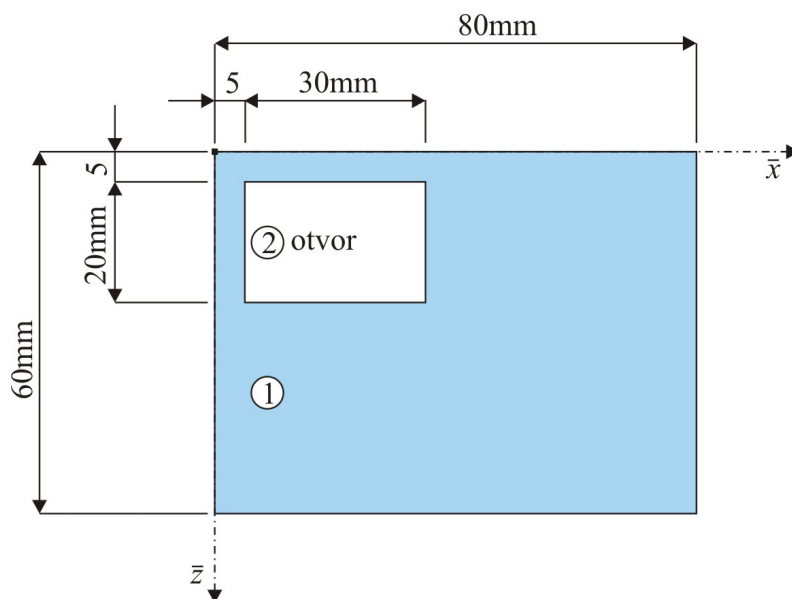
$$\begin{aligned}x_T &= 90,00 \text{ [mm]} , \\z_T &= 20,82 \text{ [mm]} , \\d_1 &= d_2 = 0 \text{ [mm]} , \\c_1 &= -15,82 \text{ [mm]} , \\c_2 &= 8,48 \text{ [mm]} ,\end{aligned}\tag{12.38}$$



Obrázek 12.6: Schéma příkladu 12.4

$$\begin{aligned}
 I_x &= 1,7193 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_z &= 16,3125 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_p &= 18,0353 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 D_{xz} &= 0 \text{ [mm}^4\text{]} \dots \textit{symetrie} , \\
 I_1 &= I_x \dots \textit{symetrie} , \\
 I_2 &= I_z \dots \textit{symetrie} .
 \end{aligned}
 \tag{12.39}$$

12.5 Příklad - složený průřez 5



Obrázek 12.7: Schéma příkladu 12.5

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu dle obrázku 12.7. Rozměry jsou v [mm] .

Výsledky řešení

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 4,8 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} , \\
 A_2 &= 0,6 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} , \\
 x_T &= 42,86 \text{ [mm]} , \\
 z_T &= 32,14 \text{ [mm]} , \\
 d_1 &= -2,86 \text{ [mm]} , \\
 d_2 &= -22,86 \text{ [mm]} , \\
 c_1 &= -2,14 \text{ [mm]} , \\
 c_2 &= -17,14 \text{ [mm]} ,
 \end{aligned}
 \tag{12.40}$$

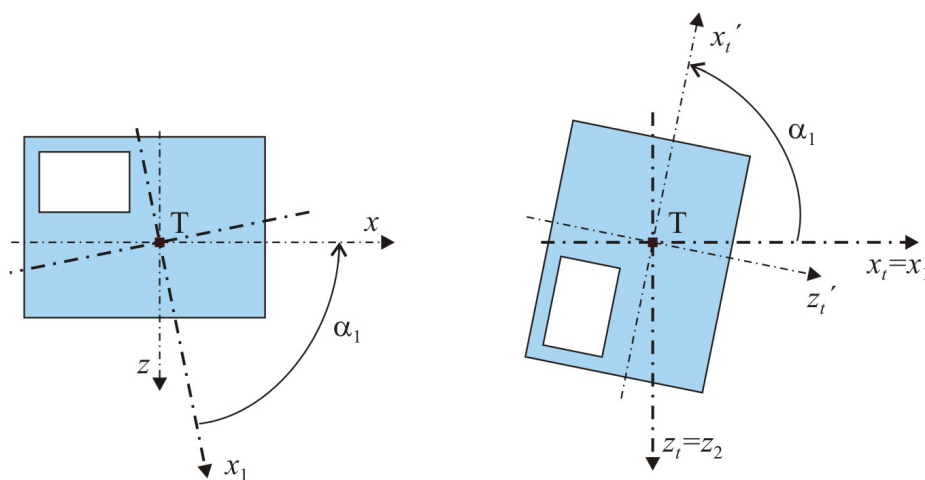
$$\begin{aligned}
 I_x &= 1,26571 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_z &= 2,24071 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_p &= 3,50642 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 D_{xz} &= -0,20571 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_1 &= 2,28233 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_2 &= 1,22409 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 \alpha_1 &= -78,56 \text{ [}^\circ\text{]} , \\
 \alpha_2 &= 11,44 \text{ [}^\circ\text{]} .
 \end{aligned}
 \tag{12.41}$$

Kontrola invariantu součtu MS:

$$\begin{aligned}
 (I_x + I_z) &= (I_1 + I_2) \\
 (1,26571 \cdot 10^6 + 2,24071 \cdot 10^6) &= (2,28233 \cdot 10^6 + 1,22409 \cdot 10^6) \\
 (3,50642 \cdot 10^6) \text{ [mm}^4] &= (3,50642 \cdot 10^6) \text{ [mm}^4] .
 \end{aligned}
 \tag{12.42}$$

Podmínka je splněna.

Schéma natočení hlavních centrálních os setrvačnosti viz obr. 12.8

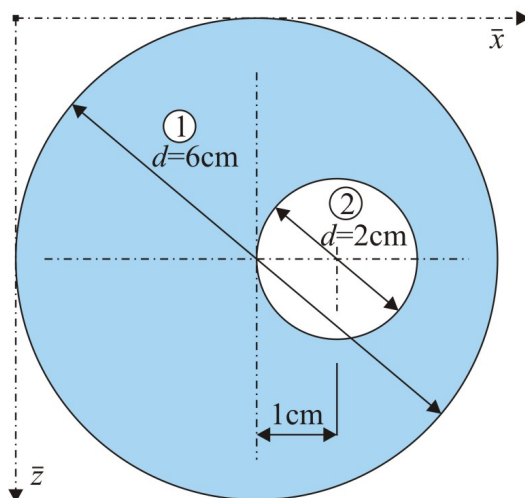


Obrázek 12.8: Schéma natočení hlavních centrálních os setrvačnosti příkladu 12.5

Poznámka

Jelikož průřez 2 je otvor, je nutné ve všech rovnicích členy týkající se tohoto průřezu odečítat.

12.6 Příklad - složený průřez 6



Obrázek 12.9: Schéma příkladu 12.6

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu dle obrázku 12.9. Rozměry jsou v [m] .

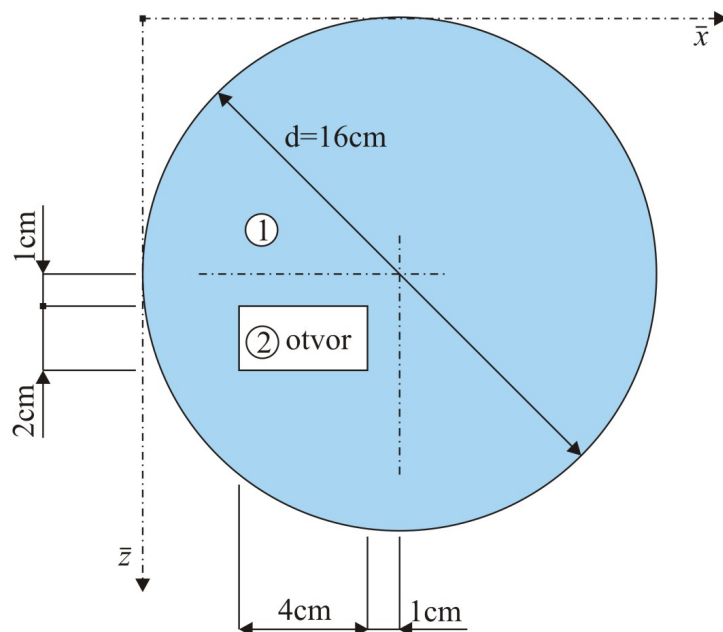
Výsledky řešení

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0,2826 \text{ [m}^2\text{]} , \\
 A_2 &= 0,0314 \text{ [m}^2\text{]} , \\
 x_T &= 0,2875 \text{ [m]} , \\
 z_T &= 0,3 \text{ [m]} , \\
 d_1 &= 0,0125 \text{ [m]} , \\
 d_2 &= 0,1125 \text{ [m]} , \\
 c_1 &= c_2 = 0 \text{ [m]} ,
 \end{aligned}
 \tag{12.43}$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= 62,8 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]} , \\
 I_z &= 59,2675 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]} , \\
 I_p &= 122,0675 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]} , \\
 D_{xz} &= 0 \text{ [m}^4\text{]} \dots \textit{symetrie} ,
 \end{aligned}
 \tag{12.44}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_x \dots \textit{symetrie} , \\
 I_2 &= I_z \dots \textit{symetrie} .
 \end{aligned}
 \tag{12.45}$$

12.7 Příklad - složený průřez 7



Obrázek 12.10: Schéma příkladu 12.7

Spočítejte průřezové charakteristiky průřezu dle obrázku 12.10. Rozměry jsou v [cm] .

Výsledky řešení

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 20,106 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} , \\
 A_2 &= 0,80 \cdot 10^3 \text{ [mm}^2\text{]} , \\
 x_T &= 81,24 \text{ [mm]} , \\
 z_T &= 79,17 \text{ [mm]} ,
 \end{aligned}
 \tag{12.46}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -1,24 \text{ [mm]} , \\
 d_2 &= -31,24 \text{ [mm]} , \\
 c_1 &= 0,83 \text{ [mm]} , \\
 c_2 &= 20,83 \text{ [mm]} , \\
 I_x &= 31,81 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_z &= 31,31 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_p &= 63,12 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 D_{xz} &= 49,99 \cdot 10^4 \text{ [mm}^4\text{]} \\
 I_1 &= 32,12 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 I_2 &= 31,00 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} , \\
 \alpha_1 &= 31,5 \text{ [}^\circ\text{]} , \\
 \alpha_2 &= 58,5 \text{ [}^\circ\text{]} .
 \end{aligned}
 \tag{12.47}$$

Kapitola 13

Otázky k dané problematice

1. Vysvětlete pojem výslednice soustavy sil a rovnovážná síla soustavy sil.
2. Vysvětlete rozdíl mezi podmínkami ekvivalence a podmínkami rovnováhy.
3. Vysvětlete pojem svazek sil.
4. Vysvětlete pojem obecná soustava sil.
5. Uveďte počet podmínek rovnováhy (resp. ekvivalence) pro přímkovou soustavu sil, pro svazek sil a pro obecnou soustavu sil v rovině.
6. Vysvětlete pojem statický moment síly k bodu.
7. Vysvětlete, co vyjadřuje tzv. Varignonova věta, uveďte příklad jejího použití.
8. Vysvětlete postup výpočtu ramene výslednice (resp. rovnovážné síly) vzhledem k počátku nebo k jinému bodu v případě soustavy rovnoběžných sil.
9. Vysvětlete pojem nosná stavebí konstrukce.
10. Vysvětlete rozdíl mezi vnitřní a vnější vazbou.
11. Nakreslete prostě podepřený nosník, zakreslete reakce a napište podmínky rovnováhy pro výpočet reakcí včetně kontroly.
12. Nakreslete konzolový nosník, zakreslete reakce a napište podmínky rovnováhy pro výpočet reakcí včetně kontroly.
13. Napište a zobrazte graficky na příkladě vztahy mezi zatížením, posouvajícími silami a ohybovými momenty na nosníku zatíženém bodovým zatížením.
14. Napište a zobrazte graficky na příkladě vztahy mezi zatížením, posouvajícími silami a ohybovými momenty na nosníku zatíženém spojitým rovnoměrným zatížením.
15. Napište a zobrazte graficky na příkladě vztahy mezi zatížením, posouvajícími silami a ohybovými momenty na nosníku zatíženém spojitým nerovnoměrným (trojúhelníkovým) zatížením.

-
16. Odvoďte a zobrazte graficky na příkladě výpočet nebezpečného průřezu na nosníku zatíženém spojitým rovnoměrným zatížením a spojitým nerovnoměrným (trojúhelníkovým) zatížením (z obou stran).
 17. Definujte, jakým způsobem může být šikmý nosník zatížen a jak může být zadána intenzita spojitého zatížení.
 18. Uveďte vztah mezi intenzitou téhož spojitého zatížení zadaného na půdorysný průmět a na šikmou délku a z jakého principu tento vztah vychází.
 19. Popište obecný postup řešení šikmého nosníku, jestliže je zatížen kolmo na svou osu.
 20. Popište obecný postup řešení šikmého nosníku, jestliže je zatížen spojitým zatížením působícím na půdorysný průmět.
 21. Charakterizujte rovinný pravoúhle lomený nosník.
 22. Co to jsou „styčníky“ (uzly) a jak je lze využít pro kontrolu např. ohybových momentů (naznačte také graficky).
 23. Vysvětlete pojem Rovinná nosníková soustava.
 24. Charakterizujte troujkloubový nosník.
 25. Charakterizujte troujkloubový nosník s táhlem.
 26. Charakterizujte Gerberův nosník.
 27. Vysvětlete rozdíl mezi monolitickým a kloubovým spojením prutů.
 28. Charakterizujte **obecně** normálovou sílu v libovolném bodě konstrukce, uveďte označení.
 29. Charakterizujte **obecně** posouvající sílu v libovolném bodě konstrukce, uveďte označení.
 30. Charakterizujte **obecně** ohybový moment v libovolném bodě konstrukce, uveďte označení.
 31. Charakterizujte rovinný zakřivený nosník.
 32. Charakterizujte rovinný příhradový nosník.
 33. Popište vnitřní síly rovinného příhradového nosníku.
 34. Vysvětlete pojem moment setrvačnosti.
 35. Vysvětlete pojem centrální moment setrvačnosti.
 36. Vysvětlete pojem deviační moment.
 37. Vysvětlete pojem polární moment setrvačnosti.
 38. Vysvětlete pojem invariant součtu momentů setrvačnosti.

Literatura

- [1] BENDA, J. a kol. *Stavební statika I.* VŠB-TU Ostrava 2005. ISBN 80-248-0771-8.
- [2] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. *Statika stavebních konstrukcí I.* VUTUM Brno 1998. ISBN 80-214-1204-6.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ