

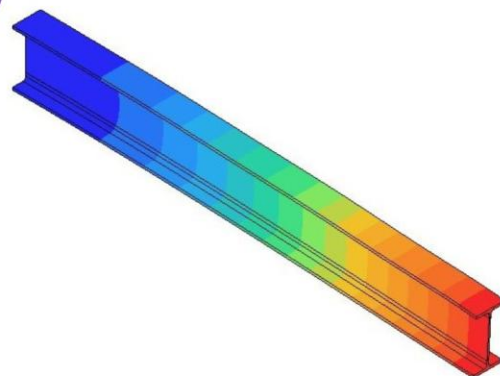
TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

**FAKULTA VÝROBNÝCH TECHNOLOGIÍ
SO SÍDLOM V PREŠOVE**

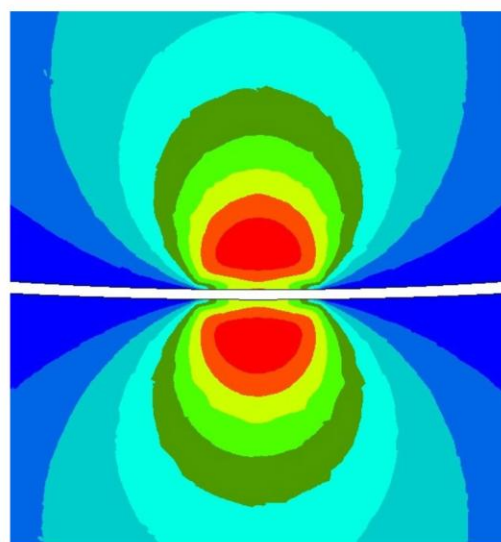
PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ I.

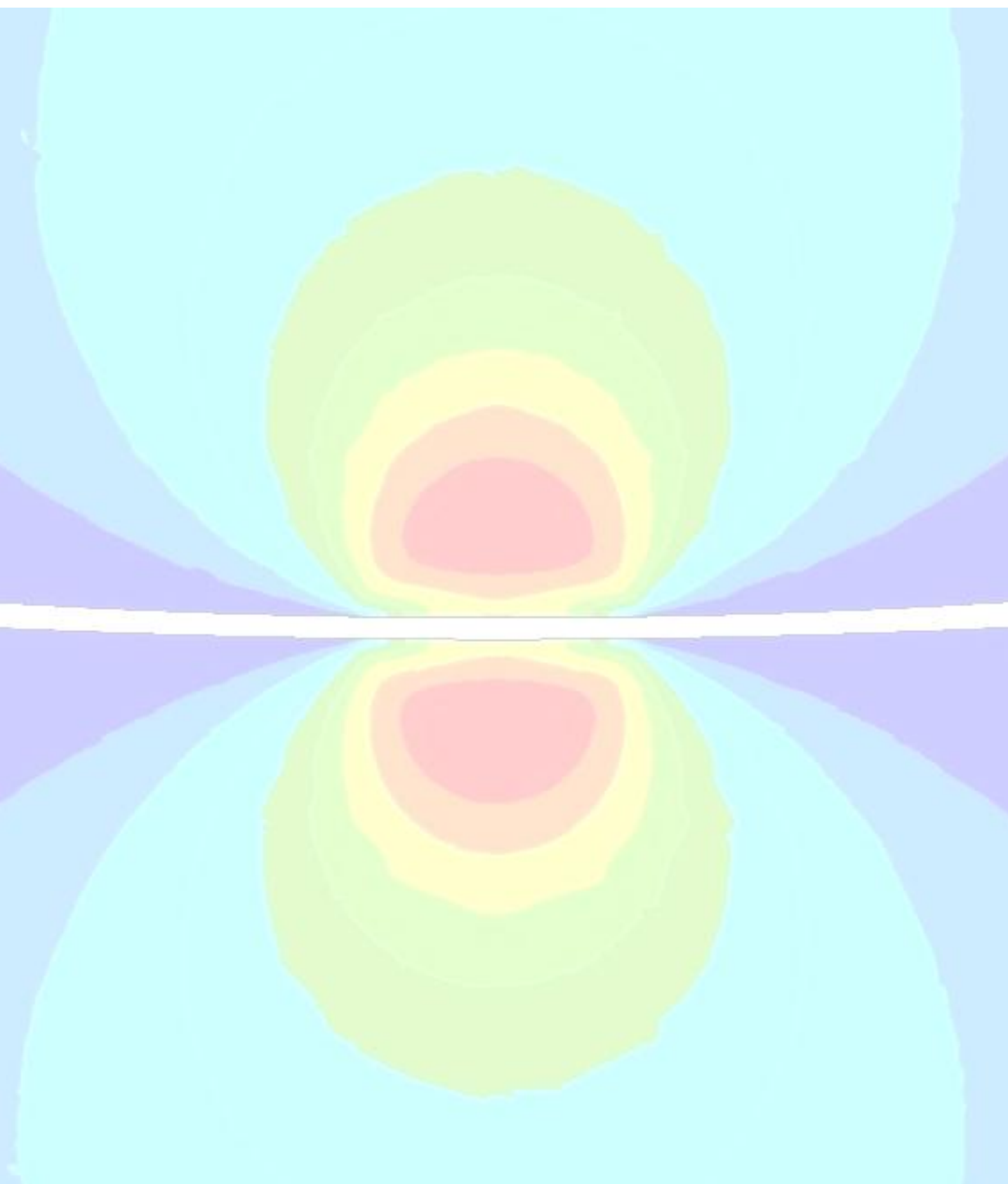
Teória a príklady

doc. Ing. Zuzana Murčinková, PhD.



PREŠOV 2013





The background features a central horizontal white line. Above and below this line are two large, overlapping, concentric circular shapes. The innermost circle is red, followed by yellow, green, and cyan. The outermost circle is a light blue. The overall effect is a stylized, colorful graphic.

Zuzana MURČINKOVÁ

PRUŽNOSTĚ A PEVNOSTĚ I.

Teória a príklady

2013



Lektori:

prof. Ing. Milan ŽMINDÁK, CSc., Katedra aplikovanej mechaniky,
Strojnícka fakulta, Žilinská univerzita

doc. Ing. Karel FRYDRÝŠEK, Ph.D., Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní,
Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava

Copyright ©

doc. Ing. Zuzana MURČINKOVÁ, PhD.

ISBN 978-80-553-1567-6

Úvod

Hlavným cieľom elektronickej vysokoškolskej učebnice zdarma je podpora získania vedomostí a znalostí zo základov mechaniky poddajných telies, hlavne princípov analytických výpočtových metód a dimenzovania konštrukčných prvkov v strojárstve, ktoré sú aplikované na základné druhy namáhania a ich kombináciu v oblasti pružnej odozvy materiálu na statické zaťaženie.

Elektronická vysokoškolská učebnica *Pružnosť a pevnosť I.: Teória a príklady* je poskytovaná zdarma a je určená ako podpora pre študentov predmetu Pružnosť a pevnosť v treťom semestri denného aj externého bakalárskeho štúdia na Fakulte výrobných technológií v Prešove TU v Košiciach, ale aj iným odborníkom zaoberajúcim sa touto tematikou. Zároveň publikácia skvalitňuje prípravu na kontrolné časti predmetu Pružnosť a pevnosť a slúži ako pomoc pri jeho úspešnom absolvovaní.

Elektronická vysokoškolská učebnica je rozčlenená do desiatich kapitol. Prvá kapitola zahŕňa problematiku základných pojmov, kapitoly 2, 4, 6 a 7 sa venujú základným druhom namáhania a výpočtom mechanických napätí a deformácií pri jednotlivých druhoch namáhania. Kapitola 3 sa venuje výpočtom prierezových charakteristík pre rôzne druhy prierezov. Elektronická vysokoškolská učebnica je kapitolou 5 obohatená o tematiku kompozitných materiálov ako predstaviteľov anizotropných, v súčasnosti nekonvenčných, avšak perspektívnych a čoraz viac používaných konštrukčných materiálov 21. storočia. Ďalej sa publikácia venuje témam teórie pružnosti (kapitola 8) a oblasti dimenzovania a hypotéz pevnosti (kapitola 9). Kapitola 10 zhŕňa poznatky a aplikuje ich na zložené (kombinované) namáhanie.

Kapitoly samozrejme obsahujú 50 riešených príkladov, ktoré podporujú možnosť hlbšieho pochopenia uvedenej problematiky. Text je vhodne doplnený o obrázky, ktorých je 201. Poznámky pod čiarou sú zamerané na zaujímavosti zo života historických osobností v oblasti mechaniky poddajných telies a pomáhajú priblížiť ich osobný život doplnený o fakty z ich odborného života.

Verím, že táto e-učebnica bude vhodnou študijnou podporou nielen počas semestra, pri príprave na skúšku, ale aj pre odbornú verejnosť.

Ďakujem recenzentom prof. Ing. Milanovi Žmindákovi, CSc. a doc. Ing. Karel Frydryšekovi, Ph.D., za ochotu, preštudovanie rukopisu a ich cenné pripomienky.

Chcela by som na tomto mieste úprimne poďakovať všetkým, ktorí svojim odborným, ale aj ľudským, prístupom prispeli k môjmu odbornému rastu: počas doktorandského štúdia na Strojníckej fakulte Žilinskej univerzity v odbore Aplikovaná mechanika to bol môj školiteľ prof. Dr. - Ing. Vladimír Kompiš, CSc., počas asistentského miesta na Fakulte výrobných technológií TU Košice so sídlom v Prešove prof. Ing. Gejza Eggenberger, DrSc. a doc. Ing. Ján Kochaník, CSc., ale aj počas vysokoškolského štúdia Dr.h.c. mult. prof. Ing. František Trebuňa, CSc. ako prednášajúci a skúšajúci predmet Pružnosť a pevnosť I. a II. a ďalší. Ďakujem.

Prešov, 2013



Autorka
zuzana.murcinkova@tuke.sk

Obsah

Úvod	I
Obsah	II
Označenie veličín	VII
1 Základné pojmy	1
1.1 Vonkajšie a vnútorné sily, metóda mysleneho (fiktívneho) rezu	2
1.1.1 Vonkajšie sily	2
1.1.2 Vnútorné sily	3
1.2 Základné druhy namáhania	5
1.2.1 Ťah /tlak	5
1.2.2 Krútenie	5
1.2.3 Ohyb	6
1.2.4 Šmyk (strih)	6
1.2.5 Príklady namáhania	6
1.3 Základné predpoklady riešenia úloh v Pružnosti a pevnosti	10
1.4 Mechanické vlastnosti materiálov	10
1.5 Hookeov zákon	12
2 Jednoduchý ťah/tlak	15
2.1 Poissonovo číslo	17
2.2 Riešenie staticky určitých úloh pri jednoduchom ťahu/tlaku	18
Príklad 2.1	19
Príklad 2.2	20
2.3 Riešenie staticky <u>neurčitých</u> úloh pri jednoduchom ťahu/tlaku	22
Príklad 2.3	22
Príklad 2.4	23
Príklad 2.5	24
2.4 Vplyv objemových síl	26
Príklad 2.6	26
2.5 Vplyv zmeny teploty na deformáciu	27
Príklad 2.7	28
2.6 Vplyv výrobných nepresností po montáži	28
Príklad 2.8	28
2.7 Dimenzovanie, návrh veľkosti prierezovej plochy A	29
Príklad 2.9	29

Príklad 2.10	30
Príklad 2.11	32
2.8 Využitie energetických princípov na určenie deformácie	33
2.8.1 Castiglianove vety	35
2.8.2 Mohr-Maxwellova veta	37
2.9 Výpočet posunutí styčníc prútových sústav využitím Castiglianovej vety	39
Príklad 2.12	40
Príklad 2.13	41
2.10 Výpočet posunutí styčníc prútových sústav využitím Mohr-Maxwellovej vety	42
Príklad 2.14	42
Príklad 2.15	44
3 Prierezové charakteristiky	49
3.1 Výpočet súradníc y_T a z_T ťažiska T zloženého prierezu	49
3.2 Určenie kvadratických momentov J_y , J_z pre obdĺžnikový prierez k centrálnym osiam	50
3.3 Určenie kvadratických momentov J_y , J_z k rovnobežným (posunutým) osiam, Steinerove vety	51
3.4 Postup riešenia prierezových charakteristík	51
3.5 Odvodenie polárneho kvadratického momentu J_p kruhového prierezu	55
Príklad 3.1	55
Príklad 3.2	56
Príklad 3.3	57
Príklad 3.4	59
Príklad 3.5	60
4 Jednoduché krútenie	62
4.1 Krútenie hriadeľov kruhového a medzikruhového prierezu	62
4.2 Postup pri výpočte staticky určitých konštrukcií namáhaných jednoduchým krútením	64
Príklad 4.1	65
Príklad 4.2	67
4.3 Postup pri výpočte staticky <u>neurčitých</u> konštrukcií namáhaných jednoduchým krútením	68
Príklad 4.3	69
4.4 Dimenzovanie pri krútení, návrh priemeru hriadeľa d	71
Príklad 4.4	71
Príklad 4.5	72

5 Izotropný, anizotropný, ortotropný a priečne izotropný materiál, materiálové konštanty	75
5.1 Izotropný materiál	75
5.2 Anizotropný materiál	77
5.3 Ortotropný materiál	78
5.4 Priečne izotropný materiál	79
5.5 Materiálové vlastnosti kompozitných materiálov	80
5.5.1 Využitie materiálov, experimentálne dáta versus výpočtové metódy	81
5.5.2 Rozdelenie kompozitných materiálov	83
5.5.3 Vlastnosti kompozitných materiálov	84
6 Rovinný ohyb	89
6.1 Vnútorne sily	90
6.1.1. Vzťahy medzi vnútornými silami	90
6.1.2 Zákonitosti priebehov vnútorných síl pri ohybe	91
Príklad 6.1	92
Príklad 6.2	93
Príklad 6.3	95
6.2 Rovinné lomené nosníky	97
Príklad 6.4	97
Príklad 6.5	99
Príklad 6.6	100
6.3 Normálové napätie pri rovinnom ohybe	102
6.4 Šmykové napätie pri rovinnom ohybe	105
6.5 Napätosť v nosníku	106
Príklad 6.7	107
Príklad 6.8	108
Príklad 6.9	109
6.6 Dimenzovanie nosníka	111
Príklad 6.10	112
Príklad 6.11	113
7 Výpočet deformácie pri ohybe	115
7.1 Metódy výpočtu deformácie nosníkov	116
7.1.1 Deformačná energia pri ohybe	116
7.1.2 Využitie Castiglianových viet	117
7.1.3 Využitie Mohr-Maxwellovej vety	117

7.1.4 Metóda integrovania diferenciálnej rovnice prihybovej čiary	118
7.1.5 Mohrova metóda	118
7.2 Riešené príklady s použitím uvedených metód	119
Príklad 7.1	119
Príklad 7.2	120
Príklad 7.3	120
Príklad 7.4	121
Príklad 7.5	122
Príklad 7.6	124
Príklad 7.7	124
Príklad 7.8	128
7.3 Využitie komerčného softvéru pre určenie vnútorných síl a deformačných veličín	130
8 Teória pružnosti, napätosť v bode telesa	136
8.1 Napätosť v bode telesa	136
8.2 Priamková napätosť	138
8.2.1 Mohrova kružnica pre priamkovú napätosť	140
8.3 Rovinná napätosť	140
8.3.1 Rovinná deformácia	143
8.3.2 Čistý šmyk	143
8.4 Priestorová napätosť	144
8.5 Deformácia v bode telesa	145
8.5.1 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri priamkovej napätosti	145
8.5.2 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri rovinatej napätosti	146
8.5.3 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri priestorovej napätosti	148
8.5.4 Deformačná energia pri priestorovej napätosti	150
9 Dimenzovanie konštrukčných prvkov	152
9.1 Hypotézy pevnosti	153
9.1.1 HMM hypotéza pevnosti, hypotéza maximálnej mernej deformačnej energie pre zmenu tvaru	153
9.1.2 Guestova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho šmykového napätia	154
9.1.3 Rankinova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho normálového napätia	155
9.1.4 Saint-Venantova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho pomerného predĺženia	155
9.2 Pevnostná kontrola s využitím hypotéz pevnosti	156

Príklad 9.1	156
10 Zložené (kombinované) namáhanie	157
10.1 Priestorový ohyb	157
Príklad 10.1	159
10.2 Excentrický ťah/tlak	161
10.2.1 Jadro prierezu	162
Príklad 10.2	163
Príklad 10.3	165
Príklad 10.4	166
Príklad 10.5	167
10.3 Súčasné pôsobenie ohybu a krutu	168
Príklad 10.6	169
Použitá literatúra	173
O autorke	

Označenie veličín

Veličina	Jednotka	Popis
A	m^2	prierezová plocha
D, d	m	priemer
D	m^4	deviačný moment
E	Pa	modul pružnosti v ťahu (Youngov modul pružnosti)
F	N	sila
G	Pa	modul pružnosti v šmyku
G	N	tiaž
i	m	kvadratický polomer (hlavná poloos elipsy kvadratických momentov)
J	m^4	kvadratický moment
J_y	m^4	kvadratický moment k osi y (osový kvadratický moment)
J_p	m^4	polárny kvadratický moment
k	-	koeficient bezpečnosti
$L_e (L_i)$	$J (Nm)$	práca vonkajších (vnútorných) síl
l	m	dĺžka
Δl	m	predĺženie
Δl_t	m	predĺženie od zmeny teploty
M	Nm	moment (krútiaci, ohybový)
m	$Nm \cdot m^{-1}$	spojitý moment
N	N	normálová (osová) sila
V	m^3	objem
p	Pa	úplné (výsledné) napätie
q	Nm^{-1}	spojité zaťaženie
p, q	m	úseky, ktoré vytína neutrálna os na osiach y, z
R, r	m	polomer
R	N	reakcia
R_u	Pa	medza úmernosti
R_p	Pa	medza pružnosti
R_e	Pa	medza klzu
R_m	Pa	medza pevnosti
R_{ur}	Pa	medza úmernosti v šmyku
R_{er}	Pa	medza klzu v šmyku

$R_{m\tau}$		Pa	medza pevnosti v šmyku
S		m^3	statický moment
T		Nm	krútiaci moment (vnútorná sila)
Δt		$^{\circ}C$	zmena teploty
U		J (Nm)	deformačná energia (potenciálna energia vnútorných síl)
U_e		J (Nm)	potenciálna energia vonkajších síl
V		N	posúvajúca (pričná) sila
u, v, w		m	posunutie v smere osí x, y, z
w		m	priehyb
W_K		m^3	modul prierezu v krútení
W_O		m^3	modul prierezu v ohybe
Λ	lambda	J/m^3	merná deformačná energia
Π	pí	J (Nm)	celková potenciálna energia
α	alfa	$^{\circ}C^{-1}$	súčiniteľ teplotnej rozťažnosti
γ	gama	-	skos
γ		Nm^{-2}	merná tiaž
δ	delta	m	posunutie
ε	epsilon	-	pomerné predĺženie
ϑ	théta	$rad.m^{-1}$	pomerný uhol skrútenia
μ	mí	-	Poissonovo číslo (používa sa aj označenie ν (<i>ní</i>))
ρ	ró	m	polomer krivosti
σ	sigma	Pa	normálové napätie
σ_D		Pa	dovolené normálové napätie
σ_{max}		Pa	maximálne normálové napätie
σ_{red}		Pa	redukované napätie
τ	tau	Pa	šmykové napätie
τ_D		Pa	dovolené šmykové napätie
τ_{max}		Pa	maximálne šmykové napätie
φ	fi	rad	uhol pootočenia, uhol skrútenia, uhol sklonu priehybovej čiary
φ_H		rad	uhol odklonu hlavných centrálnych osí

1 ZÁKLADNÉ POJMY



Predmet Pružnosť a pevnosť patrí k základným predmetom odborov strojného inžinierstva. Náplň tohto predmetu možno zaradiť do širšieho kontextu mechaniky telies.

Mechanika je odbor fyziky, ktorý sa zaoberá mechanickým pohybom, čiže premiestňovaním telies v čase a aj zmenami rozmerov a tvarov telies. Mechaniku možno rozdeliť na mechaniku tuhých telies, mechaniku poddajných telies a mechaniku tekutín (hydromechaniku a aeromechaniku). Predmet Pružnosť a pevnosť zahŕňa problematiku mechaniky poddajných telies. Teda vyšetruje pôsobenie vonkajšieho zaťaženia na teleso v statickej rovnováhe s uvažovaním jeho deformácie.

Mechanika tuhých telies vyšetruje pôsobenie vonkajšieho zaťaženia ne teleso v statickej rovnováhe bez uvažovania jeho deformácie. Táto časť mechaniky je zvyčajne zahrnutá v predmetoch s názvami Technická mechanika I., II. alebo Inžinierska mechanika I., II., resp. Statika, Kinematika, Dynamika.

Hmotné telesá sú oblasti s určitým objemom V a povrchom A a sú spojitely vyplnené hmotnými bodmi. Hmotný bod je časťou hmotného telesa s elementárnym objemom dV a elementárnym povrchom dA , ktorý obsahuje veľké množstvo elementárných častíc (atómov, molekúl) hmoty. Geometrickou interpretáciou hmotného bodu (jeho okolia) je diferenciálny element (obr. 1.1)



Obr. 1.1

Tuhé teleso je nedeformovateľné (idealizované) teleso, u ktorého sa pri pôsobení vonkajších síl nemení vzájomná poloha bodov A a B (na obr. 1.1, $\overline{AB} = \text{konšt.}$), t.j. nemení sa tvar a objem telesa. Naopak, poddajné teleso (pružné, plastické teleso) je deformovateľné teleso, t.j. teleso, ktoré mení svoje rozmery a tvar, čiže mení sa vzájomná poloha bodov ($\overline{AB} = \text{konšt.}$) telesa pri pôsobení vonkajších síl. Pružné (elastické) teleso je také teleso, ktoré sa pôsobením vonkajšej sily deformuje a po odstránení tejto sily sa vracia do pôvodného stavu (tvar, rozmery). Plastické (nepružné) telesá sa po pôsobení vonkajšej sily nevrátia do pôvodného stavu, zachovávajú si dosiahnutý deformovaný stav.

Pri výpočtoch zvyčajne neuvažujeme (zanedbávame) skutočné zloženie hmotného telesa (atóm, kryštalická mriežka, zrno). Ide o aproximáciu reálneho telesa. Hmotné poddajné teleso považujeme pri výpočtoch za spojité prostredie čiže kontinuum. Kontinuum je súvislé, nepretržité, spojité prostredie bez vnútornej (diskrétnej) štruktúry.

Podľa spôsobu aproximácie reálneho telesa možno predmet Pružnosť a pevnosť včleniť do mechaniky kontinua, ktorá sa zaoberá pevnými telesami a tekutinami (kvapaliny a plyny) bez zreteľa na diskretnú štruktúru. Za zvláštny prípad pevného telesa považuje poddajné teleso. Pri výpočtoch uvažujeme idealizované modely telies. Ide o matematickú abstrakciu (idealizáciu) reálnych telies, čo môžeme použiť pri výpočtoch z makroskopického hľadiska. Pri výpočte bez idealizácie telies vznikajú problémy spojené najmä so zložitou matematického modelu. Modely uvažujúce reálnu štruktúru materiálu telies sú pre bežné praktické výpočty nevhodné a nepotrebné, pretože nepotrebujeme vedieť, ktorý atóm prenesie

zaťaženie (mikroskopické hľadisko), ale skúmame odozvu telesa ako celku (makroskopické hľadisko).

Základnou úlohou mechaniky poddajných telies je skúmať odozvu deformovateľného (poddajného) telesa na pôsobenie vonkajšieho zaťaženia s ohľadom na vznik nebezpečného stavu. Pružnosť a pevnosť skúma vzťah zaťaženie – deformácia, resp. zaťaženie – napätie. Za nebezpečný stav považujeme poruchu materiálu telesa prekročením jeho pevnosti, neprimeranú (plastickú, pružno-plastickú) deformácia telesa alebo stratu stability.

Pružnosť je schopnosť pevných telies (materiálu, konštrukcie) nadobúdať svoj pôvodný tvar a rozmery aj po prerušení pôsobenia vonkajšieho zaťaženia. Takéto pevné telesá nazývame pružné telesá.

Pevnosť je schopnosť pevných telies preniesť zaťaženie (odolávať pôsobeniu vonkajšieho zaťaženia) bez porušenia. Čím väčšie zaťaženie pevné teleso prenesie, tým je pevnejšie. Mierou pevnosti je napätie. Napätie je mierou intenzity vnútorných síl.

Tuhosť je miera odporu telesa deformovať sa v dôsledku vonkajšieho zaťaženia. Čím väčšia miera odporu pevného telesa deformovať sa, t.j. čím je menšia deformácia, od vonkajšieho zaťaženia, tým je teleso tuhšie.

1.1 Vonkajšie a vnútorné sily. Metóda mysleneho rezu

Sily pôsobiace na poddajné teleso možno rozdeliť na:

- vonkajšie sily,
- vnútorné sily.

Možno použiť aj označenie vnútorné/vonkajšie silové veličiny, keďže nimi môžu byť aj momenty, teda silové dvojice pôsobiace na určitom ramene, ktorých rozmer je [Nm], nie [N], ako to je u síl.

Vonkajšie a vnútorné sily sú v rovnováhe. Vytvárajú zaťaženie telesa. Zaťaženie telesa je súhrn vonkajších účinkov pôsobiacich na teleso a súhrn vnútorných procesov v telese, ktorých dôsledkom je vznik deformácie a napätosti v telese.

Obsah predmetu Pružnosť a pevnosť možno definovať aj na základe síl pôsobiacich na teleso, a to: Pružnosť a pevnosť sa zaoberá deformáciou telies a stavom vnútorných síl, ktoré vznikajú v dôsledku pôsobenia vonkajších síl na poddajné teleso a ich vzájomných súvislostí.

1.1.1 Vonkajšie sily

Vonkajšie sily sa prenášajú na teleso pôsobením silového poľa (napr. gravitačné pole) alebo prostredníctvom vzájomných dotkových plôch telies. Aj reakcie vo väzbách patria do skupiny vonkajších síl.

Všetky vonkajšie sily možno súhrne označiť ako vonkajšie zaťaženie telesa. Spôsobujú vznik vnútorných síl a následne deformácie a napätosti v telese.

Podľa oblasti pôsobenia rozlišujeme vonkajšie sily na:

- sily objemové, ktoré pôsobia na celý objem telesa a na ktorýkoľvek jeho objemový element, napr. vlastná tiaž, zotrvačné sily, tepelné zaťaženie,
- sily povrchové, ktoré pôsobia na povrchu telesa, t.j. sily osamelé [N] (pôsobia v bode), líniové [Nm⁻¹] (spojité zaťaženie), plošné [Nm⁻²] (tlak) a silové dvojice, t.j. momenty [Nm],

Vonkajšie sily z hľadiska času pôsobenia možno deliť na:

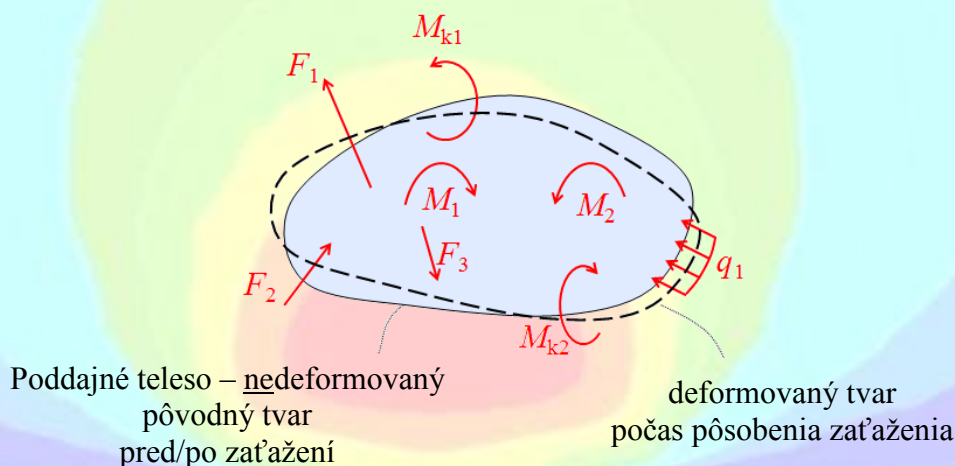
- trvalé sily, ktoré pôsobia po celý čas trvania konštrukcie, napr. jej vlastná tiaž a pod.,

- dočasné sily ktoré pôsobia počas určitého časového úseku, napr. prechod vlaku mostovou konštrukciou a pod.

Podľa charakteru pôsobenia možno vonkajšie sily ďalej deliť na:

- statické sily, ktorých veľkosť vzrastá postupne od nuly až na vlastnú menovitú hodnotu, napr. krútiaci moment z elektromotora na vstupný hriadeľ prevodovky,
- dynamické sily, ktoré vznikajú spravidla v krátkej časovej perióde (cyklicky – vonkajšie sily sa menia v čase periodicky a/alebo rázovo – vonkajšie sily pôsobia počas veľmi krátkeho časového intervalu, ide rádovo o milisekundy) a pritom aj súčiastky, na ktoré dynamické sily pôsobia, sú zvyčajne v pohybe, napr. pohyb piestu.

Vznik vnútorných síl môže spôsobiť aj vopred známa (predpísaná) deformácia, napr. montážna nepresnosť, lisovaný spoj, t.j. uloženie náboj – hriadeľ s presahom, predpísaný priehyb a pod.



Obr. 1.2

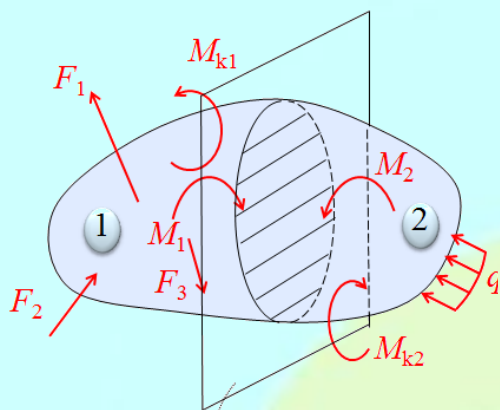
Obr. 1.2 zobrazuje poddajné teleso s pôsobiacimi vonkajšími silami (vonkajším zaťažením). Plnou čiarou je ohraničené poddajné teleso pred (resp. po) zaťažení. Čiarkovanou čiarou je zobrazený deformovaný tvar telesa vplyvom vonkajšieho zaťaženia, ktorým sú sily F_1 , F_2 , F_3 , spojitě zaťaženie q_1 , krútiace momenty M_{k1} , M_{k2} a ohybové momenty M_1 , M_2 .

1.1.2 Vnútorne sily

Vnútorne sily vznikajú pôsobením vonkajších síl na teleso. Snažia sa obnoviť pôvodný nedeformovaný tvar a rozmery telesa. Vnútorne sily pôsobia proti úsiliu vonkajších síl meniť rozmery a tvar telesa, resp. ho porušiť. Stupeň účinku vonkajších síl na deformované teleso číselne charakterizuje veľkosť vnútorných síl.

S touto myšlienkou vzniku vnútorných síl v telese prišiel Bernoulli pred približne 200 rokmi, čo bola v tej dobe prevratná myšlienka.

Veľkosť vnútorných síl určujeme metódou mysleného (fiktívneho) rezu. Táto metóda je univerzálna metóda na určovanie vnútorných síl bez ohľadu na druh namáhania. Pri metóde mysleného rezu rozdelíme jedným alebo viacerými myslennými rezmi teleso na jednotlivé časti. V jednotlivých rezoch vyšetríme vzniknuté vnútorné sily.



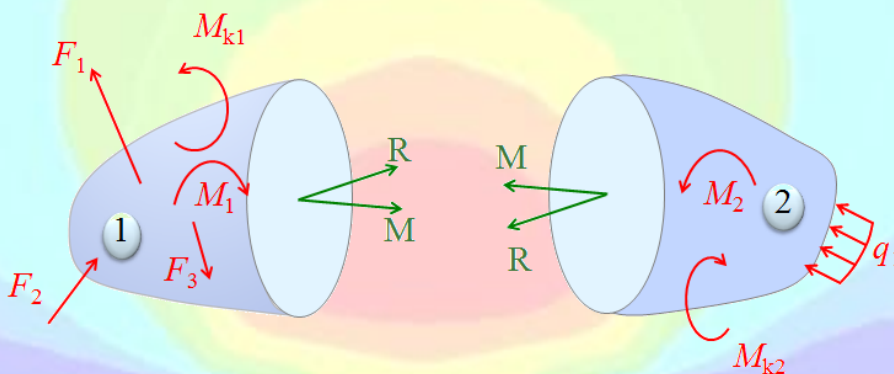
rovina myšleného rezu

Obr. 1.3

Obr. 1.3 znázorňuje rovinu myšleného rezu, ktorý rozdeľuje teleso na dve časti (1 a 2).

Určovanie vnútorných síl začína uvoľnením časti telesa oddelenej myšleným rezom. Ak je v statickej rovnováhe teleso, musí byť v statickej rovnováhe aj každá jeho časť, preto v reze musíme zaviesť vnútorné sily. Vnútorné sily sú zložkami týchto vektorov (obr. 1.4):

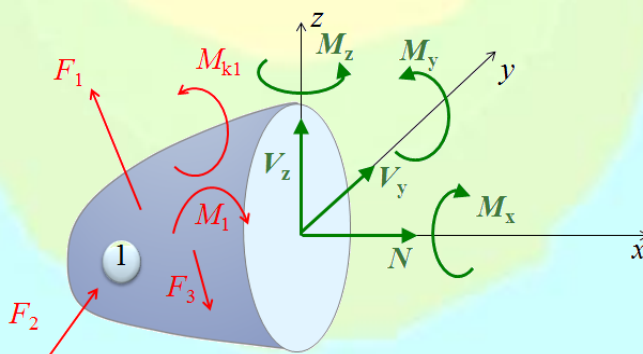
- vektor vnútorných síl \mathbf{R} ,
- vektor vnútorných momentov \mathbf{M} .



Obr. 1.4

V každom reze možno vnútorné sily rozložiť na zložku normálovú, ktorá je kolmá na rovinu rezu a dotyčnicovú (tangenciálnu), ktorá leží v rovine rezu. Vnútorné sily sú zobrazené na obr. 1.5 a sú nimi:

- osová (normálová) sila N ,
- posúvajúce (pričné) sily V_y, V_z ,
- krútiaci moment M_x (pri jednoduchom krútení označovaný ako T),
- ohybové momenty M_y, M_z



Obr. 1.5



1.2 Základné druhy namáhania

Pôsobenie vonkajších síl na teleso môže mať rôzny charakter. Hovoríme potom o namáhaní:

- ťahom a tlakom,
- krútením,
- ohybom,
- šmykom (strihom).

1.2.1 Ťah /tlak

Pri jednoduchom ťahu /tlaku zaťažujúce sily pôsobia v ťažisku prierezu v smere osi telesa (obr. 1.6). Teleso namáhané ťahom/tlakom sa nazýva prút (tyč). Pri jednoduchom ťahu/tlaku vzniká jediná vnútorná sila a tou je osová (normálová) sila N .



Obr. 1.6

Typickými predstaviteľmi telies namáhaných ťahom/tlakom sú prvky prútových sústav, laná, centricky tlačené stĺpy a pod.

Pri zmene pôsobiska zaťažujúcich síl mimo ťažisko prierezu okrem osovej sily N vznikajú aj ohybové momenty M_y a M_z . Ide o excentrický (nie jednoduchý) ťah /tlak, teda ide o zložené namáhanie, t.j. kombináciu jednoduchého ťahu /tlaku a ohybu.

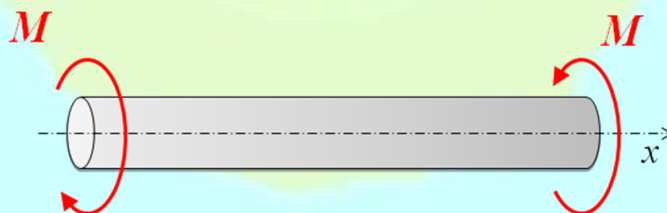


Obr. 1.7

Na obr. 1.7 je znázornený rozdiel v spôsobe zaťaženia medzi jednoduchým a excentrickým ťahom/tlakom, kde T je ťažisko a P je pôsobisko vonkajšej sily F .

1.2.2 Krútenie

Jednoduché krútenie (obr. 1.8) vzniká, ak zaťažujúce momenty M (alebo spojité krútiace momenty m) pôsobia v rovinách kolmých na os telesa a majú otáčavý účinok okolo osi telesa (x). Vznikajúca vnútorná sila je krútiaci moment T (z angl. torque). Teleso namáhané krútením sa nazýva hriadeľ.



Teleso namáhané krútením

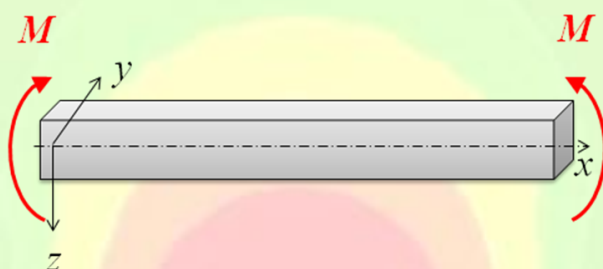
Obr. 1.8

Telesá namáhané krútením sú prvky vrtných súprav, lokomotív, tvarovacích a obrábacích strojov, t.j. vretená, hriadele a pod.

1.2.3 Ohyb

Rozlišujeme ohyb rovinný a priestorový (šikmý) (ich definície sú pri kapitolách 6 a 10.1). Vznikajúce vnútorné sily sú normálové (osové) sily N , priečne (posúvajúce) sily V , ohybové momenty M . Ak je ohybový moment M jedinou vnútornou silou vznikajúcou od vonkajšieho zaťaženia, potom hovoríme o čistom ohybe. Ak okrem ohybového momentu M , vzniká aj priečna sila V , potom hovoríme o priečnom ohybe. Obr. 1.9 ilustruje rovinný ohyb, vonkajšie zaťaženie - ohybový moment M pôsobí v rovine xz .

Telesá namáhané ohybom nazývame nosníky. Nosníky môžu byť priame, lomené, zakrivené. Telesami namáhanými na ohyb sú napr. rámové konštrukcie výrobných strojov (rovinné, priestorové), nosné konštrukcie stavieb a pod.

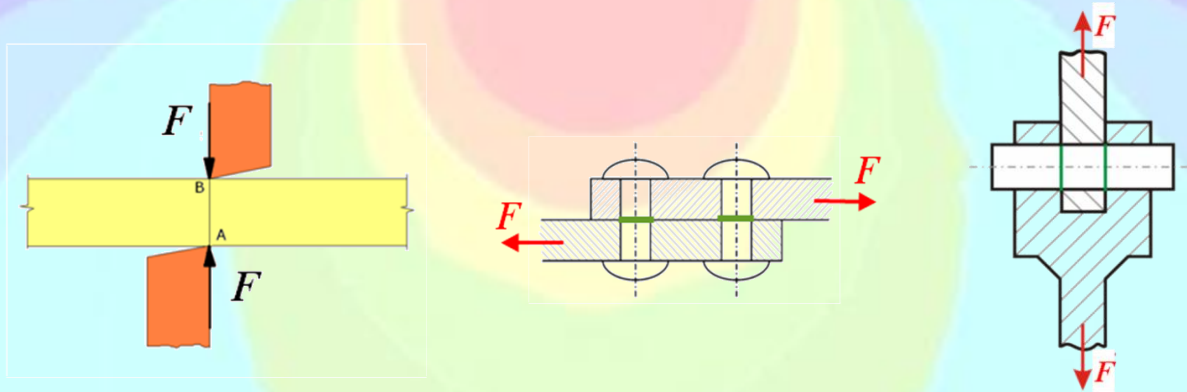


Teleso namáhané ohybom

Obr. 1.9

1.2.4 Šmyk (strih)

Ak zo všetkých vnútorných síl jedine priečne sily sú nenulové ($V \neq 0$) a ostatné sú nulové, pričom priečne sily majú snahu posunúť voči sebe dva rovnobežné prierezy, potom hovoríme o šmyku. U kovových prvkov namáhaných na šmyk hovoríme o strihu (obr. 1.10).



Obr. 1.10

Strihom sú namáhané všetky spojovacie prvky, ako sú nity, skrutky, zvary, perá, kolíky, čapy a pod.

1.2.5 Príklady namáhania

Na obr. 1.11 je uvedený príklad namáhania telesa (obrobku) ohybom od reznej radiálnej sily F_p . Vplyvom radiálnej reznej sily F_p dochádza k vzniku deformácie obrobku, čo má za následok v prípade upnutia medzi hroty vznik výsledného sudkovitého tvaru

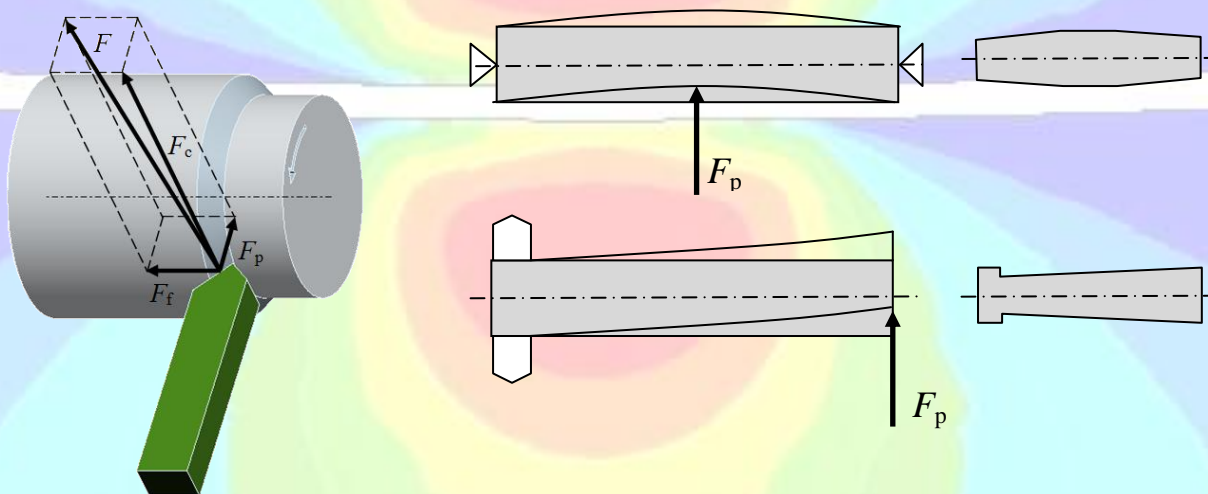
a v prípade upnutia do skľučovadla výsledného kužeľovitého tvaru v prípade, že upnutia považujeme za dokonale tuhé (obr. 1.11). Nepresnosť, respektíve odchýlka, od ideálneho tvaru spôsobená poddajnosťou obrobku a upnutia, pričom ostatné vplyvy neuvažujeme, sa dá vypočítať podľa vzťahov, ktoré si možno odvodiť využitím niektorej z metód výpočtu deformácie pri ohybe (kapitola 7). Výsledný tvar obrobku v prípade poddajných upnutí do skľučovadla a koníka sú na obr. 1.12. Obr. 1.13 znázorňuje priehybové krivky osi obrobku počas sústruženia pri upnutí skľučovadlo-koník, pričom poloha radiálnej reznej sily F_p je označená bodkou.

Zároveň pri sústružení je obrobok namáhaný krútením. Hodnota tangenciálnej (hlavnej reznej) sily F_c určuje krútiaci moment na vretene. Je potrebná aj na výpočet pevnosti nástroja a súčiastok mechanizmu obrábacieho stroja.

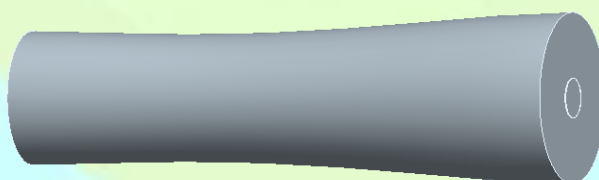
Axiálna rezná sila F_f má smer osi súčiastky. Spôsobuje namáhanie obrobku excentrickým tlakom. Jej veľkosť treba poznať pri výpočte posuvového mechanizmu obrábacieho stroja.

Obr. 1.14 znázorňuje vrtanie, kde vrták je príkladom telesa namáhaného jednoduchým tlakom, pričom hodnoty osovej sily v priebehu vrtania sú vpravo. A zároveň je vrták namáhaný krútením.

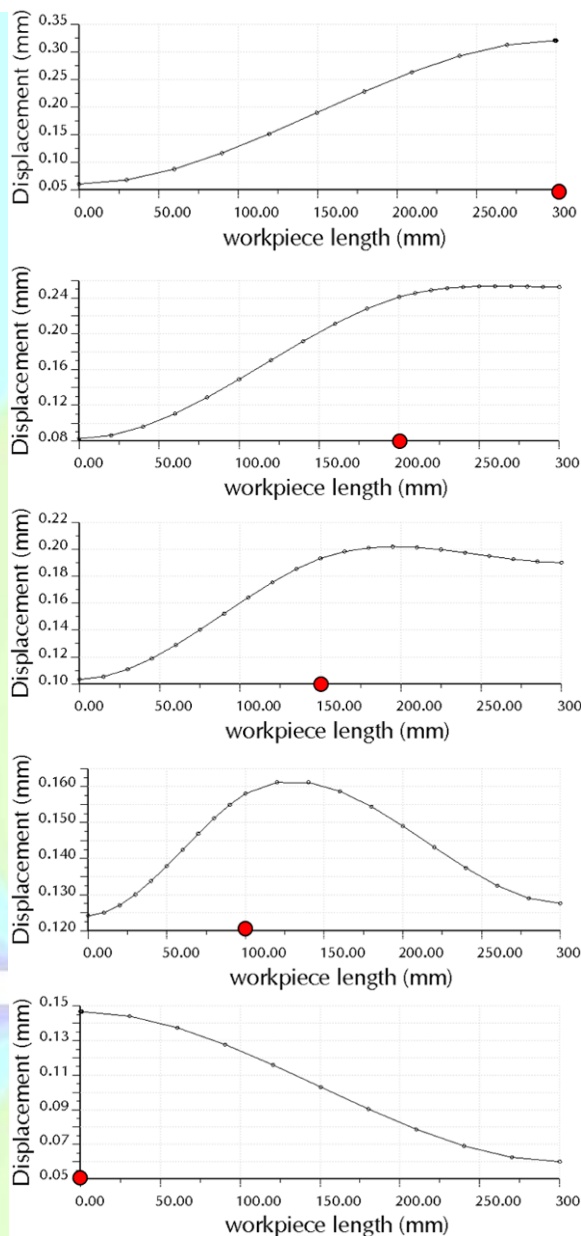
Obr. 1.15 poskytuje predstaviteľov súčiastok pre rôzne druhy namáhania ako aj obr. 1.16 a 1.17. Možno pozorovať, že zvyčajne pri konkrétnych praktických aplikáciách ide zvyčajne o kombináciu jednotlivých základných druhov namáhania, teda ide o kombinované (zložené) namáhanie (kapitola 10), ktoré možno riešiť superpozíciou v oblasti platnosti Hookeovho zákona.



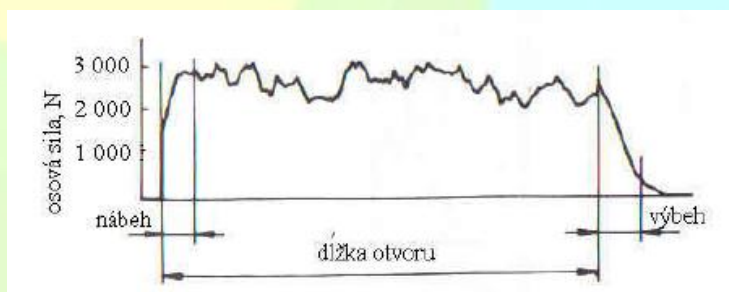
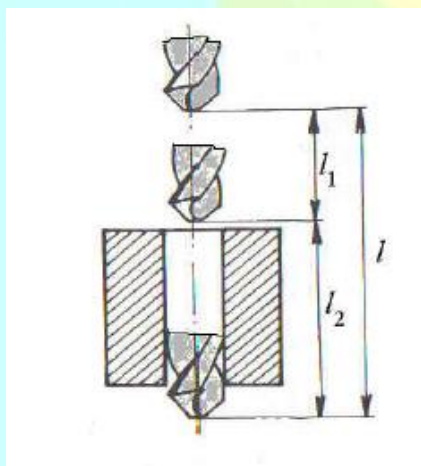
Obr. 1.11 [25, 26]



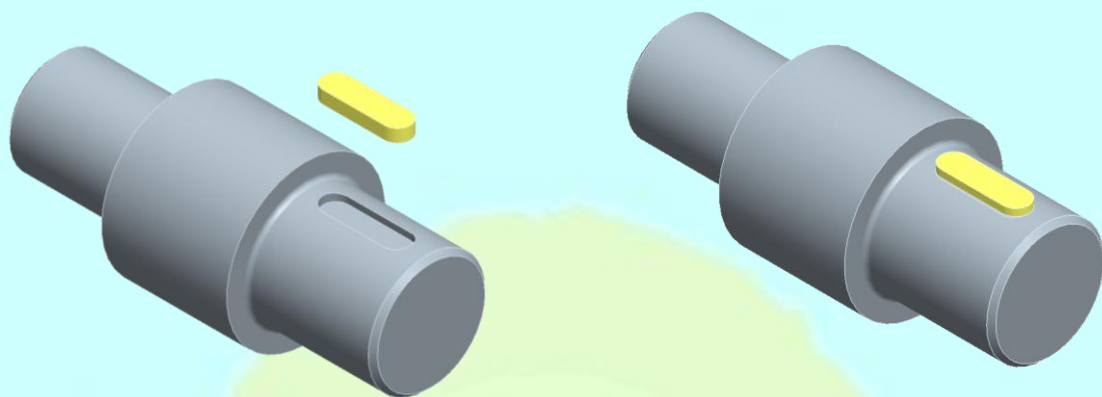
Obr. 1.12 [26]



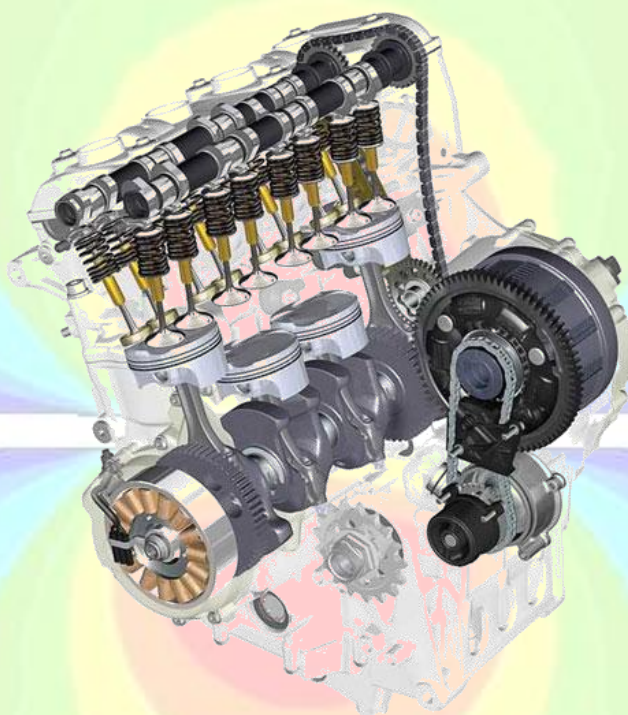
Obr. 1.13 [26]



Obr. 1.14 [25]



Obr. 1.15



Obr. 1.16



Obr. 1.17



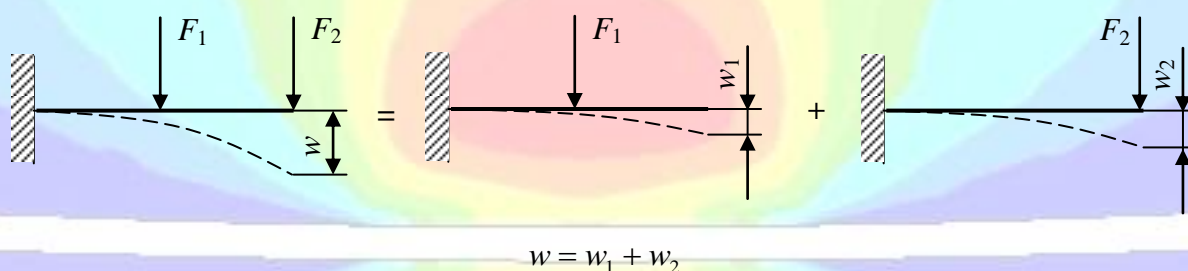
1.3 Základné predpoklady riešenia úloh v Pružnosti a pevnosti

Pri všetkých výpočtoch, je potrebné si uvedomiť, že sú vykonávané s určitými predpokladmi. Pri posúdení vierohodnosti získaných výsledkov je potrebné tieto predpoklady brať do úvahy.

Základné predpoklady riešenia úloh v rozsahu predmetu Pružnosť a pevnosť I. sú:

1. Materiál telesa je homogénny a izotropný, t.j. mechanicko-fyzikálne vlastnosti materiálu telesa sú vo všetkých bodoch a smeroch rovnaké.
2. Vzniknuté deformácie sú v porovnaní s rozmermi telesa veľmi malé.
3. Závislosť medzi napätiami a deformáciami je lineárna (platí Hookeov zákon). Ide o výpočet v oblasti pružných deformácií, resp. ide o lineárnu pružnosť a pevnosť.
4. Platí princíp superpozície, t.j. hodnotu ľubovoľnej veličiny (napr. veľkosť posunutia, priehybu) od sústavy síl možno určiť ako súčet hodnôt od jednotlivých síl, pričom nezáleží na poradí v akom na teleso pôsobia.
5. Počiatočnú napätosť považujeme za nulovú.

Použitie princípu superpozície je na obr. 1.18 aplikované na rovinný ohyb pre výpočet priehybu voľného konca votknutého nosníka. Výsledný priehyb w od dvoch vonkajších síl F_1 a F_2 možno vypočítať ako súčet priehybu w_1 od sily F_1 a priehybu w_2 od sily F_2 .



Obr. 1.18

Teleso má zvyčajne aj bez pôsobenia objemových a povrchových vonkajších síl určitú počiatočnú (vlastnú), napätosť, ktorá môže byť zvyšková, technologická a montážna. Všetky uvedené počiatočné napätosti sú spôsobené predchádzajúcim zaťažovaním telesa počas technologických operácií, napr. kalenie, zváranie, tvárnenie, trieskové obrábanie, pri výrobe a montáži. Počiatočná napätosť môže vzniknúť aj v priebehu prevádzky telesa (súčiastky, konštrukcie).



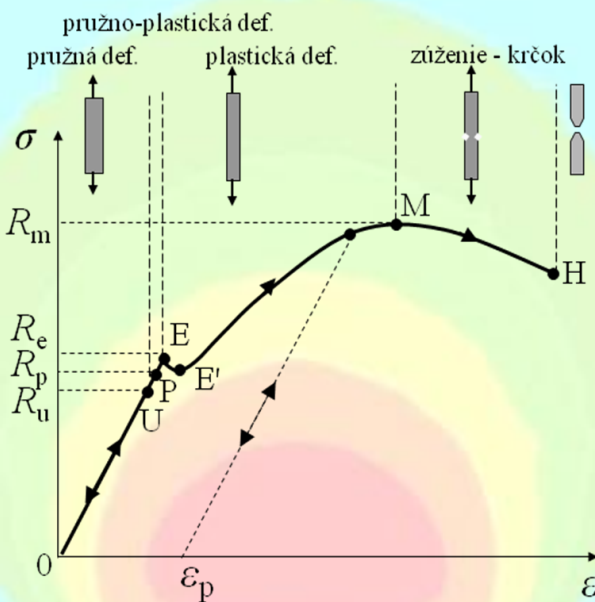
1.4 Mechanické vlastnosti materiálov

Mechanické vlastnosti konkrétnych konštrukčných materiálov sú určované experimentálne. Medzi základné skúšky materiálov patrí trhacia skúška ťahom. Pracovný ťahový diagram pre húževnatý materiál je na obr. 1.19. Typickým predstaviteľom húževnatých materiálov je oceľ.

Pracovný diagram vyjadruje závislosť medzi normálovým napätím σ a pomernou deformáciou ε (pomerné predĺženie): $\sigma(\varepsilon)$. Na grafe na obr. 1.19 možno rozlíšiť tieto významné body:

- bod 0 - počiatok, zodpovedá mu stav bez zaťaženia,
- bod U – normálové napätie, ktoré zodpovedá bodu U nazývame medza úmernosti R_u ,
- bod P - normálové napätie, ktoré zodpovedá bodu P nazývame medza pružnosti R_p , (pre ocele sa body U a P stotožňujú),

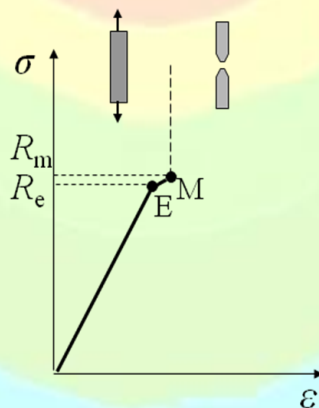
- bod E - normálové napätie, ktoré zodpovedá bodu E nazývame medza klzu R_e ,
- bod E' - normálové napätie, ktoré zodpovedá bodu E' nazývame dolná medza klzu,
- bod M - normálové napätie, ktoré zodpovedá bodu M nazývame medza pevnosti R_m ,
- bod H – pri normálovom napätí, ktoré zodpovedá bodu H, nastáva pretrhnutie vzorky, teda tvárny lom.



Obr. 1.19

Na úseku 0-U rastie deformácia priamo-úmerne s napätím. Ide o lineárnu závislosť medzi normálovým napätím σ a pomernou deformáciou ε . Teda tento úsek predstavuje oblasť platnosti Hookeovho zákona. Ďalej možno rozlíšiť úseky ťahového diagramu:

- 0-P - oblasť vzniku pružnej (vratnej, netrvalej) deformácie,
- P-E - oblasť vzniku pružno-plastickej deformácie,
- E-M - oblasť vzniku plastickej (nevratnej, trvalej) deformácie v dôsledku klzu (ε_p - plastická deformácia),
- M-H - oblasť vytvárania zúženia (krčku) vzorky.



Obr. 1.20

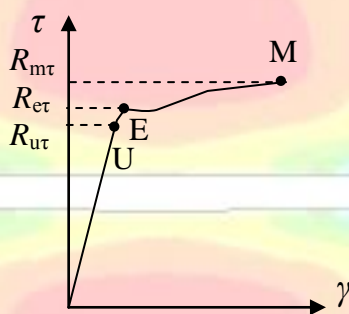
Húževnatý materiál je materiál, pri ktorom porucha nastáva po značných pružných a plastických deformáciách ako je možné vidieť na obr. 1.19. Veľké plastické deformácie sú pre väčšinu strojných súčiastok neprípustné.

V rozsahu predmetu Pružnosť a pevnosť I. sa zaoberáme pružnou odozvou materiálu na zaťaženie. Oblasť pružno-plastických deformácií je náročná tematika mimo rozsah základov Pružnosti a pevnosti I.

Pri krehkom materiáli (obr. 1.20) nastane porucha bez významnejších pružno-plastických deformácií. Medza klzu R_e sa nachádza blízko medze pevnosti R_m materiálu. Medza klzu R_e nie je jasne vyhranená. Krehký lom nastáva po vzniku trhliny prakticky ihneď. Rýchlosť šírenia trhliny je vysoká, u ocelí sa udáva cca 1000 m.s^{-1} . Šíreniu krehkej trhliny nemožno zabrániť znížením zaťaženia.

Medza klzu v ťahu je u väčšiny materiálov rovnaká ako medza klzu v tlaku. Existujú však aj materiály ako napr. liatina a betón, ktoré majú veľmi dobré mechanické vlastnosti v tlaku, v porovnaní s mechanickými vlastnosťami v ťahu. Pri dimenzovaní konštrukcií z týchto materiálov je potrebné rozlišovať a zohľadňovať aj druh namáhania, t.j. ťah alebo tlak.

Diagram závislosti medzi šmykovým napätím a skosom (skosením, t.j. uhlovou deformáciou), ktorý možno získať skúškou v krute je na obr. 1.21 je podobný ako pri skúške ťahom. Bodu U zodpovedá medza úmernosti v šmyku R_{ur} a bodu K zodpovedá medza klzu v šmyku R_{er} a bodu M medza pevnosti v šmyku R_{mr} .



Obr. 1.21



1.5 Hookeov zákon

Lineárnu závislosť medzi normálovým napätím σ a pomernou deformáciou ε do medze úmernosti R_u možno vyjadriť Hookeovým¹ zákonom pre jednoosovú napätosť (kapitola 8) v tvare:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.1)$$

¹



Robert Hooke (1635-1703, Anglicko) R. Hooke bol anglický prírodovedec a vynálezca, ktorý na pranie otca sa mal stať kňazom, potom hodinárom. Ako 13-ročný nastúpil na súkromnú školu. V osemnástich študoval na Oxforde a 28-ročný bol členom Kráľovskej spoločnosti, ktorej predsedom sa stal ako 29-ročný. Po požiari Londýna v roku 1666 sa stal vedúcim stavebných prác. Hooke navrhol spolu s Boylem použiť pre teplotu topenia ľadu 0°C a teplotu varu vody 100°C ako dva základné body stupnice. Zdokonalil mikroskop, pozoroval rastlinné bunky

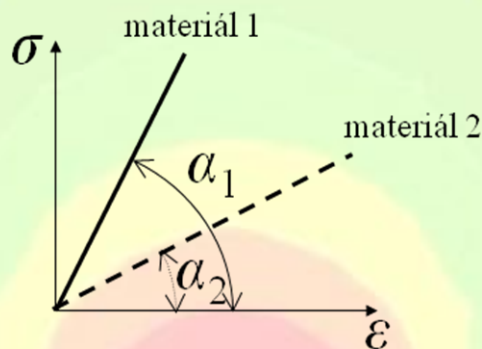
a štruktúru kovov. Jedným z jeho vynálezov bola konštrukcia presného časového stroja. Viedol vedecké spory s Newtonom. Hooke mal rád hlavolamy a na záver prednášky v roku 1676 uviedol výsledky svojich pozorovaní v tvare: CEIINOSSSTTUV. O dva roky vysvetlil hlavolam. Boli to podľa abecedy zoradené písmená vety: UT TENSIO SIC VIS, čo možno preložiť: Aká je sila, taká je odozva, čo je prvá doložená formulácia zákona elastického správania sa materiálu. Thomas Young pomenoval tento zákon Hookeov.

kde E je konštanta úmernosti pre daný materiál a nazývame ju modul pružnosti v ťahu a ε je pomerné predĺženie, resp. skrútenie. Modul pružnosti v ťahu vyjadruje odpor materiálu deformovať sa pri ťahu (Thomas Young², 1807).

Tabuľka 1.1 poskytuje prehľad modulov pružnosti v ťahu pre vybrané materiály.

Tab. 1.1

ocel'	$E = 2.10^5$ MPa
hliník	$E = 0,78.10^5$ MPa
guma	$E = 10-100$ MPa



Obr. 1.22

Obr. 1.22 znázorňuje pružnú časť ťahového diagramu dvoch materiálov. Modul pružnosti v ťahu možno určiť z ťahového diagramu, a to:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \quad (1.2)$$

Z uvedeného vyplýva, že $\alpha_1 > \alpha_2$, teda $E_1 > E_2$. Materiál 1 je tuhší ako materiál 2. Čím je krivka strmšia, t.j. čím je väčší uhol α , tým má materiál väčší modul pružnosti v ťahu E , t.j. materiál má väčší odpor deformovať sa.

Hookeov zákon pre čistý šmyk:

$$\tau = G \cdot \gamma \Rightarrow G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1.3)$$

kde τ je šmykové napätie, G je modul pružnosti v šmyku a γ je skos.

Modul pružnosti v šmyku pre ocel' je 8.10^4 MPa. Pre ocel' je modul pružnosti v ťahu približne 2,5-krát väčší ako modul pružnosti v šmyku.

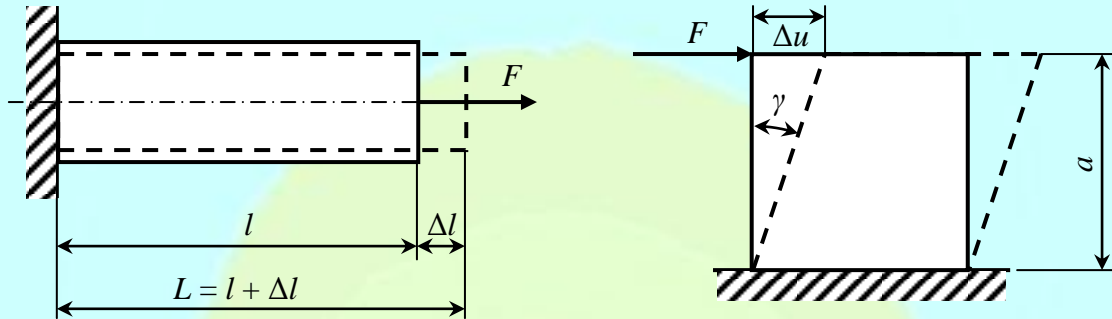
Vo vzťahoch (1.1) a (1.3) vystupujú veličiny ε a γ , čo sú pomerné deformácie. V prípade skúšok ťahom a krutom môžeme skúmať deformáciu elementu. Dôjde k zmene dĺžok (predĺženie a skrútenie) alebo k zmene pravých uhlov (obr. 1.23).

²



Thomas Young (1773-1829, Anglicko) T. Young bol lekár, fyzik a egyptológ. Ako 2-ročný plynule čítal a od ôsmich rokov sa vážne zaujímal o matematiku a geodéziu. Ako 14-ročný čítal knihy vo francúzštine, taliančine, nemčine a latinčine. Mal veľké nadanie na jazyky. Naučil sa aj po arabsky, starogrécky a hebrejsky. Od roku 1802 bol profesorom Prírodnej filozofie na londýnskom Kráľovskom inštitúte. T. Young prispel k rozlíšeniu hieroglyfickej abecedy. V roku 1807 spresnil Hookeovo tvrdenie a zaviedol modul pružnosti v ťahu E .

$$\varepsilon = \frac{L-l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$
$$\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma = \frac{\Delta u}{a}$$
(1.4)



Obr. 1.23



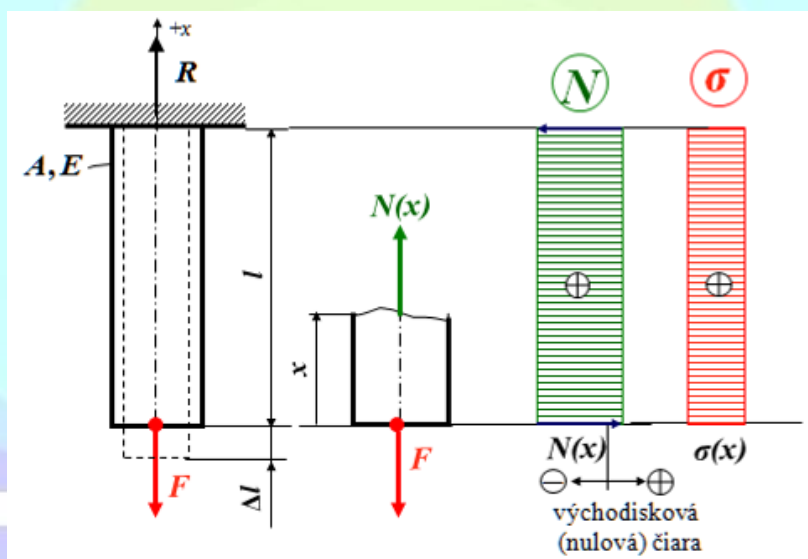
2 JEDNODUCHÝ ŤAH/TLAK

Pri jednoduchom ťahu/tlaku v myslenom pričnom reze prúta vzniká jediná vnútorná sila, a to osová (normálová) sila N . Osová sila N pôsobí v osi prúta, ktorá je spojnicou ťažísk jeho priereзов.

Na obr. 2.1³ je prezentovaná metóda mysleného rezu pre prút konštantného prierezu, ktorý je zaťažený na konci osamelou silou F . Výsledné priebehy osovej sily N a normálového napätia σ sú na obr. 2.1.

Neznámu osovú silu na obr. 2.1 určíme zo statickej podmienky rovnováhy pre mysleným rezom odrezanú časť prúta. Osovú silu orientujeme kolmo na rovinu rezu (t.j. v smere normály roviny rezu). Osovú silu považujeme za kladnú, ak pôsobí von z roviny rezu.

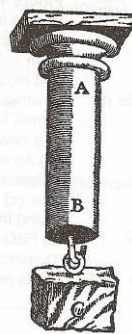
$$\sum F_{ix} = 0; N(x) - F = 0 \Rightarrow N(x) = F \quad (2.1)$$



Obr. 2.1

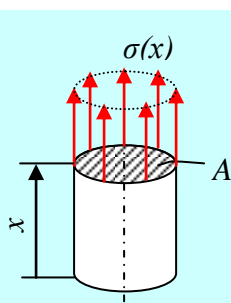
Pre normálové napätie σ pri jednoduchom ťahu/tlaku (obr. 2.2) možno napísať:

3



Galileo Galilei (1564 – 1642, Taliansko) bol jedným z prvých, ktorí sa snažili matematicky porozumieť ako telesá a materiály odpovedajú na zaťaženie. G. Galilei študoval medicínu, zaujímala ho však matematika a aj napriek otcovmu presvedčeniu, že bude mať lepší život, ak bude lekár, začal študovať aj matematiku. Roku 1632 vydal slávny spis Dialóg. Toto dielo zohralo dôležitú úlohu v histórii astronómie, aj v mechanike. Rozvinul v ňom myšlienky kinematiky definoval pojem rýchlosti a zrýchlenia. V roku 1633 musel 70-ročný Galilei odvolať svoje učenie. Dielo Dialóg bolo zakázané. V roku 1636 dokončil svoje druhé hlavné dielo Rozhovory a matematické dôkazy o dvoch nových vedách, o mechanike a pohybe telies. Dielo obsahuje náuku o pevnosti telies. Galilei tu odvodil základné poznatky o pevnosti prútov v ťahu, uviedol zákony o páke, zákony o pevnosti hranolovitých a valcovitých prútov pri rôznom zaťažení. Podporil Kopernikovu hypotézu, podľa ktorej Zem spolu s ostatnými planétami krúži okolo Slnka.

Galileova škica telesa namáhaného ťahom.



Obr. 2.2

$$N = \int_{(A)} \sigma dA \quad (2.2)$$

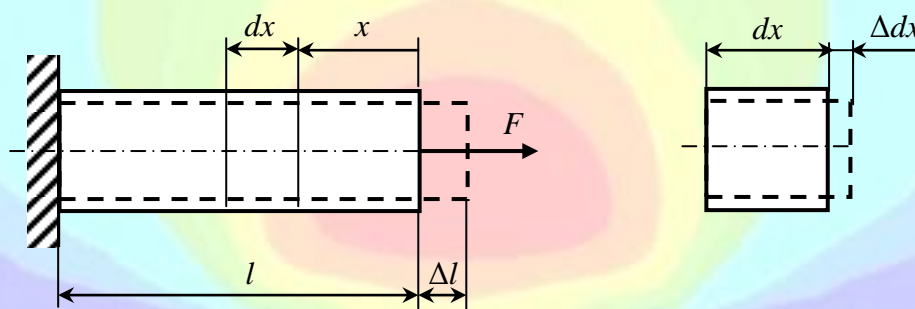
kde A je veľkosť prierezovej plochy prúta. Keďže veľkosť normálového napätia σ pri ťahu/tlaku je v každom bode prierezu rovnaká, potom:

$$N = \sigma \int_{(A)} dA \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}, \text{ Pa; MPa}=10^6\text{Pa} \quad (2.3)$$

Normálové napätie je rozložené v priereze rovnomerne, takže všetky body prierezu sú rovnako nebezpečné.

Zaťaženie silou F v smere osi spôsobuje predĺženie, resp. skrátenie, o Δl . Absolútne (celkové) predĺženie Δl (obr. 2.3) odvodíme z Hookeovho zákona:

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) \Rightarrow \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} \quad (2.4)$$



Obr. 2.3

Po dosadení (2.3) a (2.4) do vzťahu pre pomerné predĺženie elementu dx (obr. 2.3) dostávame:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \Rightarrow \Delta dx = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx \quad (2.5)$$

Po integrácii:

$$\int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx \Rightarrow \Delta l = \int_{(l)} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx \quad (2.6)$$

Vzťah (2.6) možno použiť v prípade, ak $N \neq \text{konšt.}$, $A \neq \text{konšt.}$. Napríklad pre kužeľový prút, u ktorého sa prierezová plocha spojitne mení po jeho dĺžke ($A \neq \text{konšt.}$) alebo v prípade zohľadnenia vlastnej tiaže prúta (obr. 2.13), kedy osová sila N nie je konštantná na dĺžke l ($N \neq \text{konšt.}$).

Ak $N = \text{konšt.}$ aj $A = \text{konšt.}$, potom absolútne predĺženie Δl vypočítame:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (2.7)$$

kde l je dĺžka prúta, resp. úseku. Súčin $E \cdot A$ označujeme ako tuhosť v ťahu.

Pre výpočet pomerného predĺženia ε platí:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.8)$$

Ide o predĺženie/skrátenie pripadajúce na celkovú dĺžku prúta. Pomerné predĺženie ε je bezrozmerná veličina.

Ak sa prút predĺži ($\Delta l > 0$), aj pomerné predĺženie ε je kladné ($\varepsilon > 0$), prút je zaťažený ťahom a sila F je ťahová sila.

Ak sa prút skráti $\Delta l < 0$, pomerné predĺženie ε je záporné ($\varepsilon < 0$), prút je zaťažený tlakom a sila F je tlaková sila.



2.1 Poissonovo číslo

Z pozorovania deformácie ťahaného prúta sa okrem predĺženia Δl prút priečne skrúti (zúži) (obr. 2.4). Poissonovo⁴ číslo μ („mí“) je tzv. koeficient priečného zúženia. Používa sa aj označenia ν („ní“). Ide o bezrozmernú veličinu.

Os prúta na obr. 2.4 je os x -ová, v smere ktorej pôsobí sila F . V priečnom priereze (kolmo na smer namáhania) sú orientované osi y a z podľa obr. 2.4. Pre pomerné deformácie v smere jednotlivých osí možno písať:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\Delta l}{l} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\Delta b}{b} = -\mu \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\Delta c}{c} = -\mu \cdot \varepsilon_x = \varepsilon_y \Rightarrow \mu = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Poissonovo číslo μ vyjadruje pomer medzi pomerným priečnym skrútením (zúžením) ε_y , resp. ε_z , a pomerným pozdĺžnym predĺžením ε_x pri namáhaní ťahom. Alebo inak: Poissonovo číslo vyjadruje koľkonásobne je pomerné priečne skrútenie (zúženie) ε_y , resp. ε_z , menšie ako pomerné pozdĺžne predĺženie ε_x pri namáhaní ťahom.

Poissonovo číslo je materiálová konštanta a pre štandardné konštrukčné materiály sa pohybuje v rozmedzí: $0 \leq \mu \leq 0,5$. V tab. 2.1 sú zostupne uvedené Poissonove čísla niektorých materiálov.

Niekedy sa používa aj veličina Poissonova konštanta, čo je prevrátená hodnota Poissonovho čísla a označuje sa m :

$$m = \frac{1}{\mu} \quad (2.10)$$

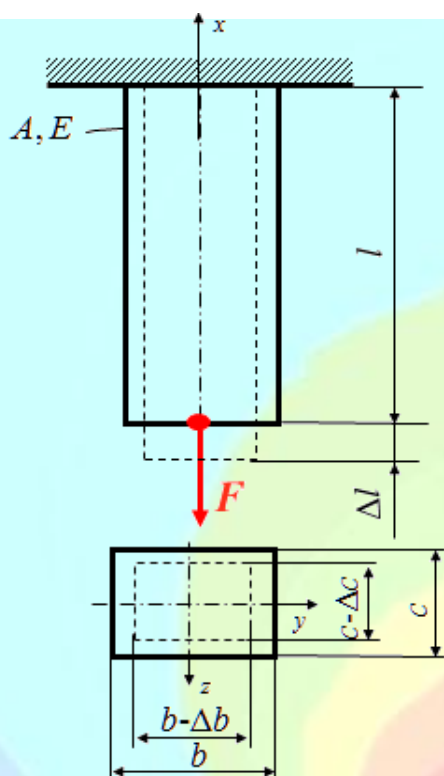
Pre izotropné materiály je hodnota Poissonovho čísla nezávislá na smere zaťažovania. Pre anizotropné materiály, napr. drevo, vláknové kompozity, sa hodnota Poissonovho čísla mení podľa orientácie vlákien a smeru zaťažovania.

⁴



Siméon Denis Poisson (1781-1840, Francúzsko) (čítaj: poason) bol francúzsky fyzik, matematik, astronóm. Bol synom vojaka, ktorý dezertoval kvôli obmedzovaniu dôstojníkom, a ktorý neskôr bol úradníkom v mestečku pri Paríži, kde sa S. Poisson narodil. V chlapčenskom veku začal zaučať aj Siméona, ale zdalo sa mu, že syn nie je vhodný pre duševnú prácu, preto ho dal do učenia k holičovi, odkiaľ sa vrátil späť k otcovi. Do rúk sa mu dostal časopis Polytechnickej školy, kde začal riešiť úlohy. Otec ho dal do školy, odkiaľ sa dostal na Polytechnickú školu, kde bol žiakom

Lagrangea a Laplacea, ktorí objavili jeho schopnosti v matematike. Stal sa profesorom mechaniky na Sorbone v Paríži v roku 1809 a členom Akadémie vied v roku 1812. Poisson sa zaoberal aj elastickým správaním materiálov a prvýkrát v roku 1829 na prednáške zaviedol koeficient, ktorý je dnes známy ako Poissonovo číslo.

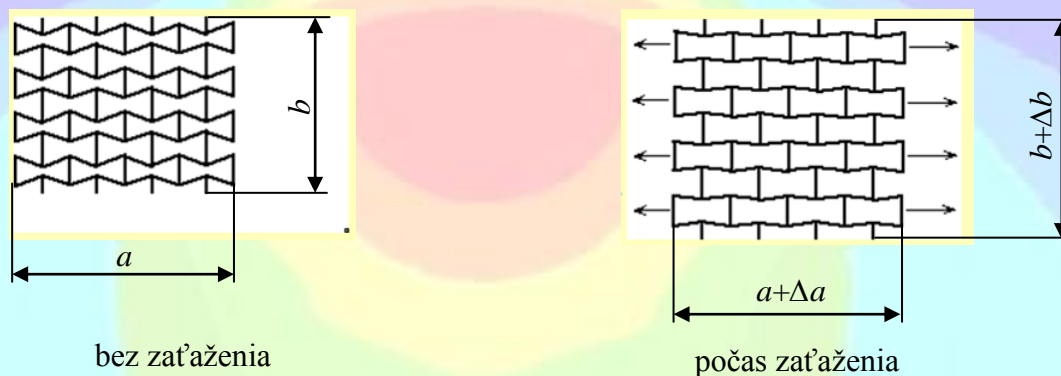


Obr. 2.4

Tab. 2.1

Materiál	μ
guma	$\sim 0,50$
zlato	0,42 – 0,44
meď	0,35
titán	0,34
hliník	0,33
vápnik	0,31
ocel'	0,27 – 0,30
liatina	0,21 – 0,26
betón	0,20
sklo	0,18 – 0,3
korok	$\sim 0,00$

Existujú v súčasnosti aj špeciálne materiály, ktoré sa nesprávajú štandardne, teda pri pozdĺžnom predĺžení nenastáva priečne zúženie, ale naopak. Hodnota Poissonovho čísla je pre takéto materiály záporná. Príkladom materiálu so záporným Poissonovým číslom je tzv. auxetický materiál na obr. 2.5.

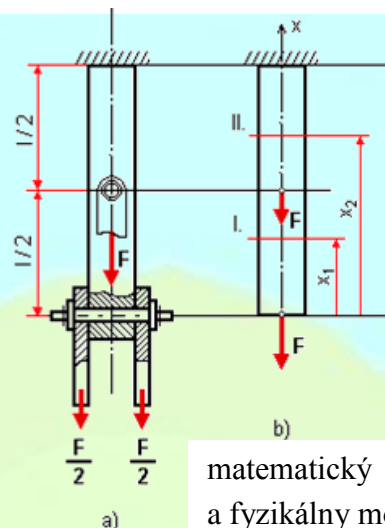


Obr. 2.5

2.2 Riešenie staticky určitých úloh pri jednoduchom ťahu/tlaku

Veľmi dôležitou časťou riešenia je zostavenie správneho matematického a fyzikálneho modelu riešenej úlohy (obr. 2.6) tak, aby model poskytoval výsledky, ktoré čo najviac zodpovedajú skutočnosti. Stupeň zjednodušenia skutočnosti by nemal podstatne skresľovať výsledky, inak možno model považovať za nesprávny. Ďalej, pri riešení úloh spôsob ich výpočtu závisí od stupňa statickej neurčitosti úlohy.





Obr. 2.6 [6]

Postup riešenia staticky určitých úloh pri ťahu - tlaku je nasledovný:

1. Podľa počtu nespojitosti prierezu a zaťaženia prúta si zvolíme príslušný počet myslenných rezov.
2. Do myslenných rezov vložíme výslednice vnútorných síl, t.j. osové sily $N(x_i)$ v kladnom zmysle (t.j. von z rezu).
3. Zo statických podmienok rovnováhy odrezanej časti prúta určíme osové sily $N(x_i)$ v jednotlivých myslenných rezoch.
4. Vypočítame normálové napätia $\sigma(x_i)$ v príslušných rezoch.
5. Vypočítame posunutia u jednotlivých priereзов.
6. Nakreslíme priebehy „ N “, „ σ “ a „ u “ po celej dĺžke prúta.

Príklad 2.1

Pre staticky určitý prút odstupňovaného prierezu určte priebehy normálových síl „ N “, normálových napätí „ σ “ a posunutí priereзов „ u “, ak je daná sila F_1 a F_2 , veľkosť prierezovej plochy A , rozmer b a modul pružnosti v ťahu E . Priebehy uvedených veličín znázornite graficky.

D: F_1, F_2, A, b, E

H: „ N “, „ σ “, „ u “

Určenie osových síl pre jednotlivé úseky odrezané myslenným rezom:

$$N(x_1) = F_1$$

$$N(x_2) = N(x_1) = F_1$$

$$N(x_3) = F_1 - F_2$$

Určenie normálových napätí pre jednotlivé úseky:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{2A}; \quad \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{3A}; \quad \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{3A}$$

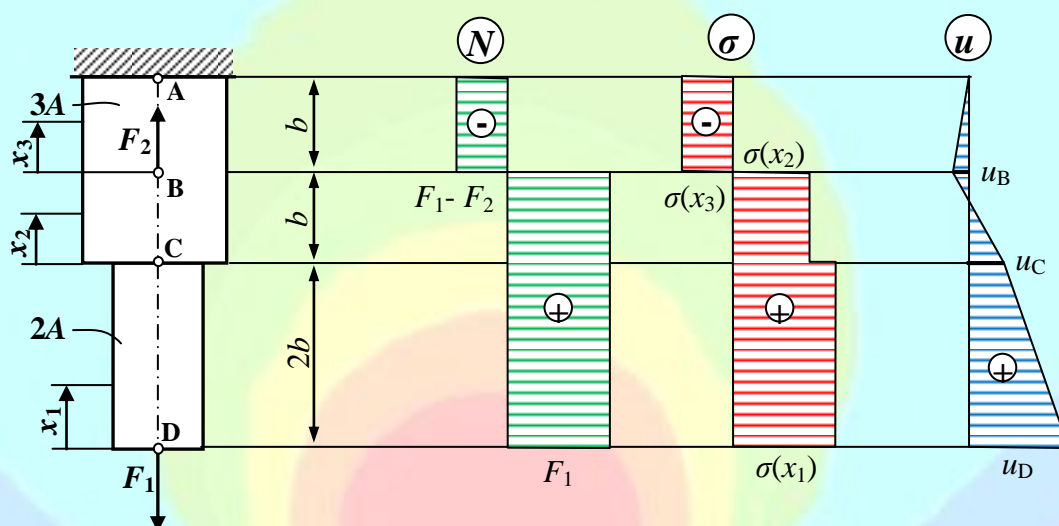
Určenie posunutia priereзов u , ktoré prechádzajú bodmi A, B, C, D. Začneme od votknutia:

$$u_A = 0$$

$$u_B = u_A + \Delta l_{AB} = u_A + \frac{N(x_3)b}{E \cdot 3A}$$

$$u_C = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N(x_2)b}{E \cdot 3A}$$

$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N(x_1) \cdot 2b}{E \cdot 2A}$$



Obr. 2.7

Vykreslíme priebehy, ktoré sú znázornené na obr. 2.7.

Príklad 2.2

Pre staticky určitý prút odstupňovaného prierezu určte priebehy normálových síl „ N^c “, normálových napätí „ σ^c “ a posunutí prierezov „ u^c “ a porovnajte posunutia v prípade, že prút je z ocele a hliníka, ak je daná sila F_1 a F_2 , veľkosť prierezovej plochy A , rozmery a , b , c a moduly pružnosti v ťahu E . Priebehy uvedených veličín znázorníte graficky.

D: $F_1=70\text{kN}$, $F_2=30\text{kN}$, $F_3=40\text{kN}$, $A_1=600\text{mm}^2$, $A_2=400\text{mm}^2$, $a=c=50\text{mm}$, $b=200\text{mm}$,

$E_{\text{ocel}}=2 \cdot 10^5\text{MPa}$, $E_{\text{Al}}=0,78 \cdot 10^5\text{MPa}$

H: „ N^c “, „ σ^c “, „ u^c “

Osové sily:

$$N(x_1) = -F_2 = -30\text{ kN}$$

$$N(x_2) = -F_2 + F_1 = -30\text{ kN} + 70\text{ kN} = +40\text{ kN}$$

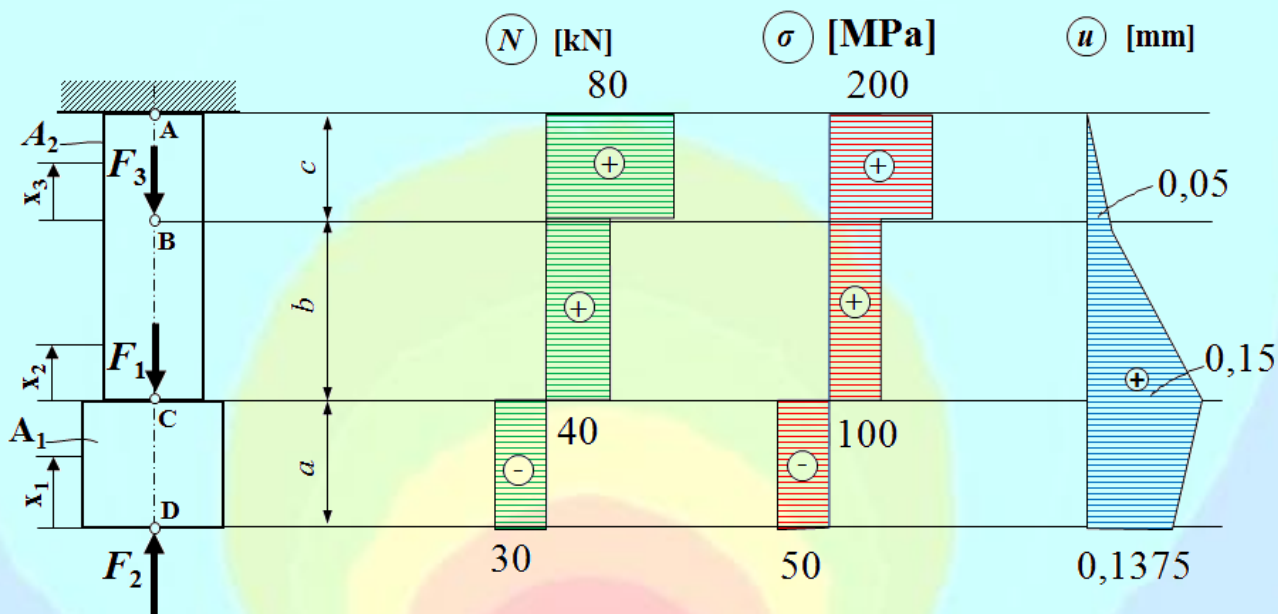
$$N(x_3) = -F_2 + F_1 + F_3 = -30\text{ kN} + 70\text{ kN} + 40\text{ kN} = +80\text{ kN}$$

Normálové napätie:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A_1} = -\frac{30 \cdot 10^3\text{ N}}{600\text{ mm}^2} = -50\text{ MPa}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A_2} = \frac{40 \cdot 10^3\text{ N}}{400\text{ mm}^2} = +100\text{ MPa}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A_2} = \frac{80 \cdot 10^3 \text{ N}}{400 \text{ mm}^2} = +200 \text{ MPa}$$



Obr. 2.8

Posunutie prierezoov pre prút z ocele:

$$u_A^{ocel} = 0$$

$$u_B^{ocel} = u_A + \Delta l_{AB} = u_A + \frac{N(x_3)c}{E_{ocel} \cdot A_2} = 0 + \frac{80 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}^2} = +0,05 \text{ mm}$$

$$u_C^{ocel} = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N(x_2)b}{E_{ocel} \cdot A_2} = 0,05 \text{ mm} + \frac{40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}^2} = 0,05 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm} = +0,15 \text{ mm}$$

$$u_D^{ocel} = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N(x_1)a}{E_{ocel} \cdot A_1} = 0,15 \text{ mm} - \frac{30 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 50 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 600 \text{ mm}^2} = 0,15 \text{ mm} - 0,0125 \text{ mm} = +0,1375 \text{ mm}$$

Posunutia prierezoov pre prút z hlinika:

Posunutia u možno pre hlinikový prút počítať rovnakým spôsobom ako pre materiál ocel. Avšak, ak už máme posunutia u pre oceľový prút vypočítané možno ich využiť a vypočítať:

$$\frac{E_{ocel}}{E_{Al}} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ MPa}}{0,78 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 2,564$$

Posunutia pre hlinikový prút budú 2,564-násobne väčšie ako pre oceľový prút:

$$u_A^{Al} = 0$$

$$u_B^{Al} = +0,05 \text{ mm} \cdot 2,564 = +0,128 \text{ mm}$$

$$u_C^{Al} = +0,15 \text{ mm} \cdot 2,564 = 0,385 \text{ mm}$$

$$u_D^{Al} = +0,1375 \text{ mm} \cdot 2,564 = 0,353 \text{ mm}$$

Vypočítané priebehy sú vykreslené obr. 2.8.



2.3 Riešenie staticky neurčitých úloh pri jednoduchom ťahu/tlaku

Úloha je staticky neurčitá, ak osovú silu nemožno určiť zo statických podmienok rovnováhy. Rovnice rovnováhy je potrebné doplniť deformačnými podmienkami podľa stupňa statickej neurčitosti úlohy.

Postup riešenia staticky neurčitých úloh pri jednoduchom ťahu/tlaku:

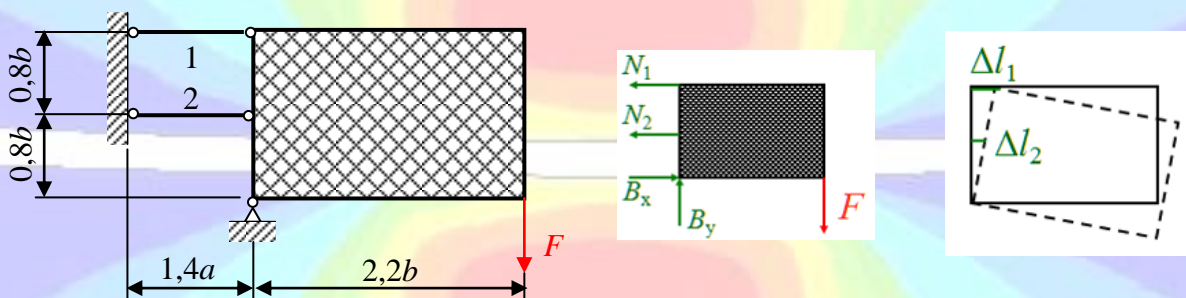
1. Úlohu staticky neurčitú nahradíme úlohou staticky určitou, a to tak, že prebytočnú väzbu odstránime a jej pôsobenie nahradíme pôsobením staticky neurčitých veličín (reakcií).
2. Podľa počtu staticky neurčitých veličín napíšeme príslušný počet deformačných podmienok (napr. celkové predĺženie prúta je nulové) a z nich vypočítame staticky neurčité veličiny.
3. V ďalšom postupujeme ako pri úlohách staticky určitých s tým, že vypočítané staticky neurčité reakcie považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie.

Príklad 2.3

Dokonale tuhá doska je uložená a zaťažená silou F podľa obr. 2.9. Určte napätie v prútoch 1 a 2, ak je daná veľkosť sily F a rozmery a a b a veľkosť prierezovej plochy A prútov.

D: F, A, a, b

H: σ_1, σ_2



Obr. 2.9

Aby sme určili normálové napätie v jednotlivých prútoch 1 a 2, potrebujeme vedieť veľkosť osových síl v týchto prútoch.

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá. Teleso v rovine má tri stupne voľnosti, pričom kĺb odoberá dva stupne voľnosti a prúty odoberajú po jednom stupni voľnosti. Úloha je jedenkrát staticky neurčitá. Dokážeme napísať tri statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 - N_2 + B_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad B_y - F = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad F \cdot 2.2b - N_2 \cdot 0.8b - N_1 \cdot 1.6b = 0$$

V uvedenej sústave troch rovníc sú neznáme reakcie (veličiny) štyri, a to B_x, B_y, N_1, N_2 . Preto doplníme uvedené rovnice o tzv. deformačnú podmienku pre takto uloženú a zaťaženú dokonale tuhú dosku (neuvažujeme deformáciu samotnej dosky). Deformačná podmienka je nasledujúca (podobnosť trojuholníkov):

$$\frac{\Delta l_2}{0.8b} = \frac{\Delta l_1}{1.6b}$$

Dosadením vzťahu (2.7) do deformačnej podmienky môžeme z nej vyjadriť osovú silu N_1 alebo N_2 , ktorú potom dosadíme do momentovej podmienky.

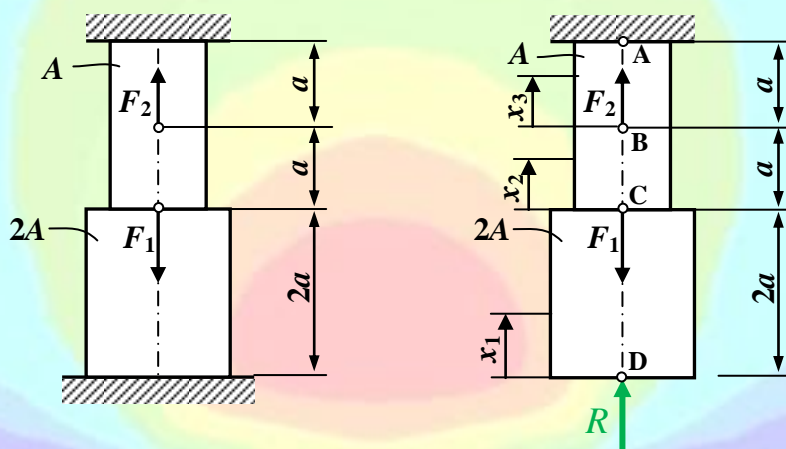
Po určení N_1 a N_2 je možné podľa vzťahu (2.3) vypočítať normálové napätie σ_1 a σ_2 v jednotlivých prútoch.

Príklad 2.4

Pre prút odstupňovaného prierezu na obr. 2.10, ktorý je votknutý na oboch koncoch, vykreslite priebehy osových síl „ N “, normálových napätí „ σ “ a posunutí prierezov „ u “, ak sú dané sily F_1 a F_2 , veľkosť prierezovej plochy A , rozmer a a modul pružnosti v ťahu E . Celý prút je z rovnakého materiálu.

D: F_1, F_2, A, a, E

H: „ N “, „ σ “, „ u “



Obr. 2.10

Úloha je jeden krát staticky neurčitá. Aby sme mohli určiť osovú silu $N(x_1)$, $N(x_2)$ a $N(x_3)$ musíme odstrániť jednu väzbu (votknutie) a nahradiť jej pôsobenie pôsobením staticky neurčitej veličiny, t.j. reakcie R , ako je znázornené na obr. 2.10. Orientácia R je predpokladaná.

Rovnice rovnováhy pre úseky x_1 až x_3 sú:

$$N(x_1) = -R$$

$$N(x_2) = -R + F_1$$

$$N(x_3) = -R + F_1 - F_2$$

Uvedené rovnice doplníme deformačnou podmienkou pre prút votknutý na oboch koncoch: celkové predĺženie prúta sa rovná nule:

$$\Delta l = 0$$

Pre prút na obr. 2.10 rozpíšeme deformačnú podmienku a dosadíme použitím vzťahu (2.7):

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = 0$$

$$\frac{N(x_3) \cdot a}{E \cdot A} + \frac{N(x_2) \cdot a}{E \cdot A} + \frac{N(x_1) \cdot 2a}{E \cdot 2A} = 0 \Rightarrow R$$

Po dosadení za osovú silu $N(x_1)$, $N(x_2)$ a $N(x_3)$ z rovníc rovnováhy pre úseky x_1 až x_3 vyjadríme z deformačnej podmienky reakciu R . Po určení reakcie R je už úloha staticky určitá, môžeme určiť veľkosť osových síl $N(x_1)$, $N(x_2)$ a $N(x_3)$ z rovníc rovnováhy pre úseky x_1 až x_3 .

Vypočítame normálové napätia pre úseky x_1 až x_3 :

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{2A}; \quad \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A}; \quad \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A}$$

Vypočítame posunutia priereзов u , ktoré prechádzajú bodmi A, B, C, D. Začneme od votknutia:

$$u_A = 0$$

$$u_B = u_A + \Delta l_{AB} = u_A + \frac{N(x_3) \cdot a}{E \cdot A}$$

$$u_C = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N(x_2) \cdot a}{E \cdot A}$$

$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N(x_1) \cdot 2a}{E \cdot 2A}$$

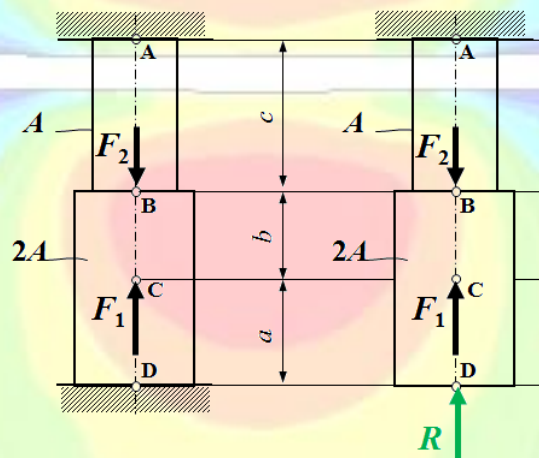
Po vypočítaní jednotlivých veličín na jednotlivých úsekoch možno vykresliť ich priebehy.

Príklad 2.5

Pre prút odstupňovaného prierezu na obr. 2.11, ktorý je votknutý na oboch koncoch, vykreslite priebehy osových síl „ N^c “, normálových napätí „ σ^c “ a posunutí priereзов „ u^c “, ak sú dané sily F_1 a F_2 , veľkosť prierezovej plochy A , rozmery a , b , c a modul pružnosti v ťahu E . Celý prút je z rovnakého materiálu.

D: $F_1=20\text{kN}$, $F_2=30\text{kN}$, $A=400\text{mm}^2$, $a=750\text{mm}$, $b=250\text{mm}$, $c=800\text{mm}$, $E=2 \cdot 10^5\text{MPa}$

H: „ N^c “, „ σ^c “, „ u^c “



Obr. 2.11

Osové sily:

$$N(x_1) = -R$$

$$N(x_2) = -R - F_1$$

$$N(x_3) = -R - F_1 + F_2$$

Deformačná podmienka:

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = 0$$

$$\frac{N(x_3)c}{E \cdot A} + \frac{N(x_2)b}{E \cdot 2A} + \frac{N(x_1)a}{E \cdot 2A} = 0$$

Rovnicu zjednodušíme a dosadíme za $N(x_1)$, $N(x_2)$ a $N(x_3)$ a dostávame:

$$2(-R - F_1 + F_2)c + (-R - F_1)b + (-R)a = 0$$

Po separácii premenných, vyjadríme R:

$$R = \frac{2F_2c - F_1(2c + b)}{2c + b + a} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm} - 20 \cdot 10^3 \text{ N}(2 \cdot 800 \text{ mm} + 250 \text{ mm})}{2 \cdot 800 \text{ mm} + 250 \text{ mm} + 750 \text{ mm}} = 4,2 \text{ kN}$$

Úloha sa stala staticky určitou a ďalšie riešenie je ako riešenie staticky určitej úlohy.

$$N(x_1) = -R = -4,2 \text{ kN}$$

$$N(x_2) = -R - F_1 = -4,2 \text{ kN} - 20 \text{ kN} = -24,2 \text{ kN}$$

$$N(x_3) = -R - F_1 + F_2 = -4,2 \text{ kN} - 20 \text{ kN} + 30 \text{ kN} = 5,8 \text{ kN}$$

Normálové napätie:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{2A} = -\frac{4,2 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 400 \text{ mm}^2} = -5,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{2A} = -\frac{24,2 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 400 \text{ mm}^2} = -30,25 \text{ MPa}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A} = \frac{5,8 \cdot 10^3 \text{ N}}{400 \text{ mm}^2} = +14,5 \text{ MPa}$$

Posunutie prierezov:

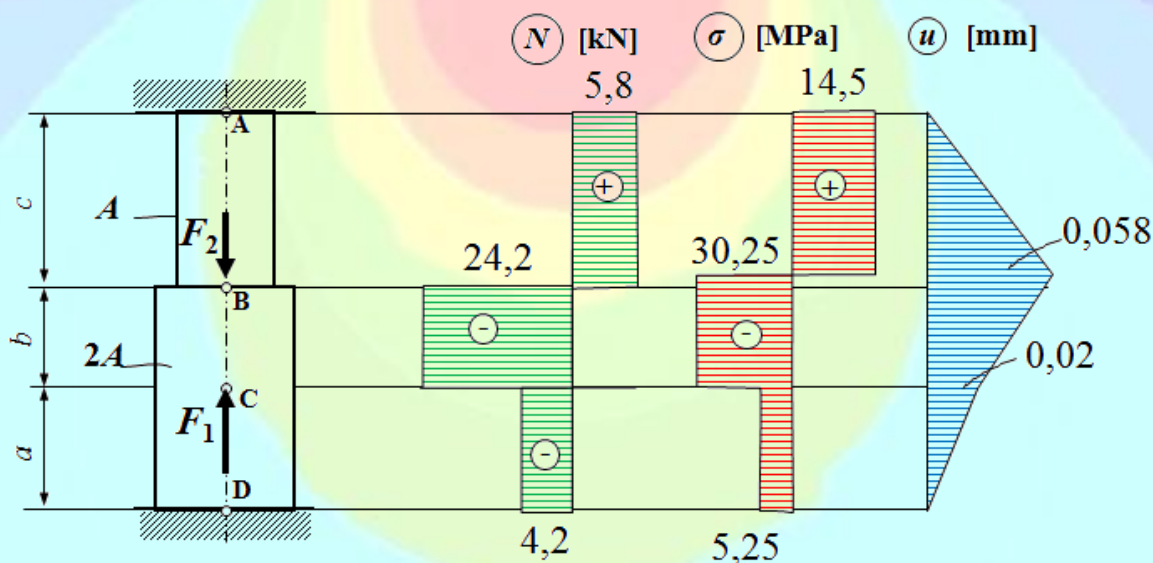
$$u_A = 0$$

$$u_B = u_A + \Delta l_{AB} = u_A + \frac{N(x_3)c}{E \cdot A} = 0 + \frac{5,8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 800 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 400 \text{ mm}^2} = +0,058 \text{ mm}$$

$$u_C = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N(x_2)b}{E \cdot 2A} = 0,058 \text{ mm} + \frac{(-24,2 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot 250 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 2 \cdot 400 \text{ mm}^2} = +0,02 \text{ mm}$$

$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N(x_1)a}{E \cdot 2A} = 0,02 \text{ mm} + \frac{(-4,2 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot 750 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 2 \cdot 400 \text{ mm}^2} \doteq 0$$

Priebehy hľadaných veličín je na obr. 2.12.



Obr. 2.12

Varianta príkladu:

1. Určte maximálne hodnoty síl F_1 a F_2 pre prút na obr. 2.12.

$$D: F_1=F, F_2=1,5F, A=400\text{mm}^2, a=750\text{mm}, b=250\text{mm}, c=800\text{mm}, E=2\cdot 10^5\text{MPa}, \\ \sigma_D=150\text{MPa}$$

$$H: F_{1\text{max}}, F_{2\text{max}}$$

Rovnakým postupom vyjadríme reakciu R , pričom uvažujeme podľa zadania príkladu $F_1=F, F_2=1,5F$:

$$R = \frac{c-b}{2c+b+a} F$$

Po dosadení hodnôt:

$$R = \frac{800\text{mm} - 250\text{mm}}{2\cdot 800\text{mm} + 250\text{mm} + 750\text{mm}} F = 0,212F$$

Potom osovú silu na jednotlivých úsekoch sú:

$$N(x_1) = -R = -0,212F$$

$$N(x_2) = -R - F = -1,212F$$

$$N(x_3) = -R - F + 1,5F = 0,288F$$

Veľkosť F navrhne podľa úseku s maximálnym normálovým napätím:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{2A} = -\frac{0,212F}{2\cdot 400\text{mm}^2} = -26,5\cdot 10^{-5}F$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{2A} = -\frac{24\cdot 2,10^3\text{N}}{2\cdot 400\text{mm}^2} = -151,5\cdot 10^{-5}F \Rightarrow \sigma_{\text{max}}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{A} = \frac{5,8\cdot 10^3\text{N}}{400\text{mm}^2} = +72\cdot 10^{-5}F$$

Z pevnostnej podmienky vyjadríme F :

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_D \\ |151,5\cdot 10^{-5}F| \leq \sigma_D$$

$$F \leq \frac{150\text{MPa}}{151,5\cdot 10^{-5}}$$

$$F \leq 99\text{kN}$$

Potom možno písať: $F_{1\text{max}}=99\text{kN}, F_{2\text{max}}=148,5\text{kN}$



2.4 Vplyv objemových síl

Ide o prípady, kedy uvažujeme tiaž zvislého prúta (obr. 2.13), alebo ak ide o prút rotujúci okolo zvislej osi, ktorá je kolmá na os prúta a potom je prút zaťažený aj odstredivými silami.

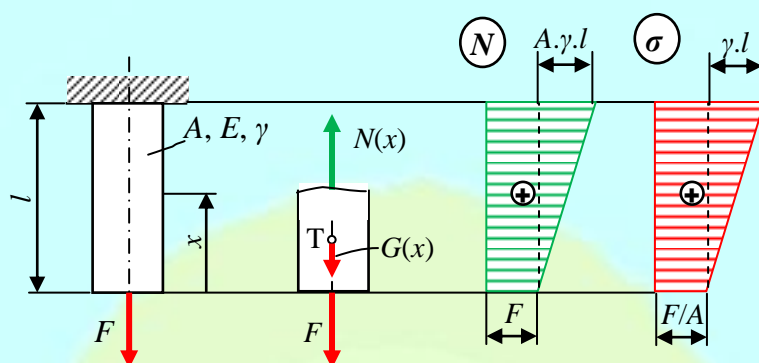
V oboch prípadoch osová sila N a normálové napätie σ sa menia pozdĺž osi prúta, ale v jednotlivých prierezoch sú rozložené rovnomerne.

Príklad 2.6

Pre prút na obr. 2.13 určte osovú silu N , normálové napätia σ a celkové predĺženie prútu Δl so zohľadnením vlastnej tiaže, ak je daná sila F , veľkosť prierezovej plochy A , dĺžka prútu l , modul pružnosti v ťahu E a merná tiaž γ .

$$D: F, A, l, E, \gamma$$

H: $N, \sigma, \Delta l$



Obr. 2.13

Pre osovú silu v prúte na obr. 2.13 platí:

$$\sum F_{ix} = 0; N(x) - F - G(x) = 0$$

Odtiaľ:

$$N(x) = F + G(x)$$

kde silu tiaže $G(x)$ vypočítame:

$$G(x) = V(x)\gamma = A(x).x.\gamma$$

kde $V(x)$ je objem prúta pre rez x , resp. $A(x)$ je veľkosť prierezovej plochy v mieste rezu x , a γ je merná tiaž [kNm^{-2}].

Osovú silu N vypočítame:

$$N(x) = F + G(x) \rightarrow N(x=0) = F + G(x=0) = F \\ \rightarrow N(x=l) = F + G(x=l) = F + A.l.\gamma$$

Normálové napätie σ vypočítame:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{F + G(x)}{A} \rightarrow \sigma(x=0) = \frac{F}{A} \\ \rightarrow \sigma(x=l) = \frac{F}{A} + \gamma.l$$

Celkové predĺženie prúta Δl vypočítame:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)}{E.A(x)} dx = \int_0^l \frac{F + G(x)}{E.A(x)} dx = \int_0^l \frac{F}{E.A(x)} dx + \int_0^l \frac{\gamma x}{E} dx = \left[\frac{F.x}{E.A} \right]_0^l + \left[\frac{\gamma.x^2}{2E} \right]_0^l = \frac{F.l}{E.A} + \frac{\gamma.l^2}{2E}$$



2.5 Vplyv zmeny teploty na deformáciu

Zmena teploty spôsobuje zmenu tvaru a rozmerov telesa. U staticky neurčitých konštrukcií vplyvom zmeny teploty vznikajú vnútorné sily, čo je spôsobené tým, že prebytočné väzby znemožňujú voľnú zmenu tvaru a rozmerov.

Ak je zmena teploty po celej dĺžke l prúta konštantná, potom celkové predĺženie prúta od zmeny teploty Δl_t určíme:

$$\Delta l_t = \alpha.\Delta t.l \tag{2.11}$$

kde Δt je zmena (prírastok) teploty a α je súčiniteľ teplotnej rozťažnosti [$^{\circ}\text{C}^{-1}$].

Pre oceľ $\alpha=1,2.10^{-5}^{\circ}\text{C}^{-1}$, pre hliník $\alpha=2,25.10^{-5}^{\circ}\text{C}^{-1}$

Príklad 2.7

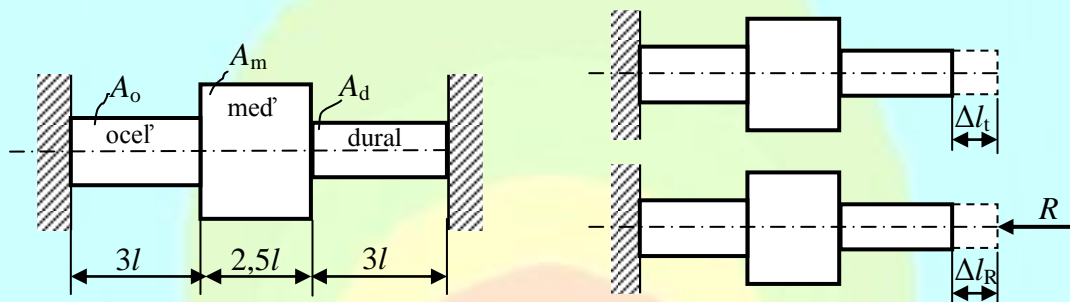
Pre prút z troch rôznych materiálov (ocel, meď a dural) zobrazený na obr. 2.14 určte osovú silu N pri zvýšení teploty o Δt , ak je daná veľkosť prierezovej plochy A , rozmer l , moduly pružnosti v ťahu E a súčinitele teplotnej rozťažnosti α pre jednotlivé materiály.

D: $\Delta t, l, A_o, A_m, A_d, E_o, E_m, E_d, \alpha_o, \alpha_m, \alpha_d$

H: N

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá. Staticky neurčitú veličinu (reakciu v jednom z votknutí) vypočítame z deformačnej podmienky, ktorá má tvar:

$$\Delta l = 0$$



Obr. 2.14

Ak by prút bol votknutý len na jednom konci, mohol by voľne dilatovať (rozpínať sa) vplyvom teploty o hodnotu Δl_t . Keďže je votknutie na oboch koncoch vzniknutá reakcia R akoby vrátila koniec prútu do pôvodnej polohy o Δl_R , čo je znázornené na obr. 2.14. Potom deformačná podmienka má tvar:

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_R = 0 \Rightarrow \Delta l_t = -\Delta l_R$$

Po úprave dostávame:

$$\Delta l_{to} + \Delta l_{tm} + \Delta l_{td} = -(\Delta l_{Ro} + \Delta l_{Rm} + \Delta l_{Rd})$$

$$\alpha_o \cdot \Delta t \cdot 3l + \alpha_m \cdot \Delta t \cdot 2,5l + \alpha_d \cdot \Delta t \cdot 3l = -\left(\frac{(-R) \cdot 3l}{E_o \cdot A_o} + \frac{(-R) \cdot 2,5l}{E_m \cdot A_m} + \frac{(-R) \cdot 3l}{E_d \cdot A_d} \right)$$

Odkiaľ:

$$R = \frac{\Delta t (3\alpha_o + 2,5\alpha_m + 3\alpha_d)}{\frac{3}{E_o \cdot A_o} + \frac{2,5}{E_m \cdot A_m} + \frac{3}{E_d \cdot A_d}}$$

Osová sila N je rovnako veľká po celej dĺžke prúta a je opačne orientovaná ako R .

$$N = -R$$

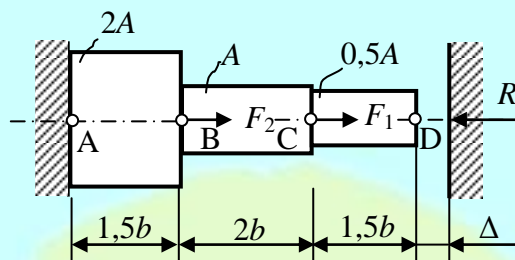
2.6 Vplyv výrobných nepresností po montáži

Ak súčiastka a/alebo celá konštrukcia sú uložené staticky neurčito, potom vplyvom nepresnosti výroby vznikne pri montáži v súčiastke a/alebo konštrukcii po montáži napätie, ktoré nie je spôsobené vonkajšími silami, ale výrobnou nepresnosťou Δ .

Príklad 2.8

Pri výrobe a/alebo montáži prúta na obr. 2.15 vznikla nepresnosť Δ . Určte veľkosť osových síl N , ak sú dané sily F_1 a F_2 , veľkosť prierezovej plochy A , rozmer b a modul pružnosti v ťahu E . Prút je z rovnakého materiálu.

D: $F_1, F_2, \Delta, E, A, b$
 H: N



Obr. 2.15

Následkom toho, že prút na obr. 2.15 bol vyrobený kratší o hodnotu Δ dochádza po montáži k vzniku napätí v prúte, ktorý sa predĺži, čo spôsobí vznik napätí v prúte vplyvom výrobných nepresností po montáži.

Úloha je jedenkrát staticky neurčitá. Staticky neurčitú veličinu (reakciu v jednom z voľknotí) vypočítame z deformačnej podmienky, ktorá má tvar:

$$\Delta l = \Delta$$

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \Delta$$

Pre osové sily N na jednotlivých úsekoch platí:

$$N(x_1) = -R$$

$$N(x_2) = -R + F_1$$

$$N(x_3) = -R + F_1 + F_2$$

Po dosadení do deformačnej podmienky dostávame:

$$R = 0,48F_1 + 0,13F_2 - \frac{\Delta \cdot E \cdot A}{5,75b}$$

Úloha sa stala staticky určitou. Môžeme určiť osové sily na jednotlivých úsekoch a následne určiť normálové napätia a posunutia prierezov.



2.7 Dimenzovanie, návrh veľkosti prierezovej plochy A

Veľkosť prierezovej plochy navrhujeme z pevnostnej podmienky:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D \quad (2.12)$$

kde σ_D je dovolené napätie materiálu. Pri dimenzovaní je potrebné určiť úsek prúta, kde vznikne maximálne normálové napätie σ_{\max} . Potom:

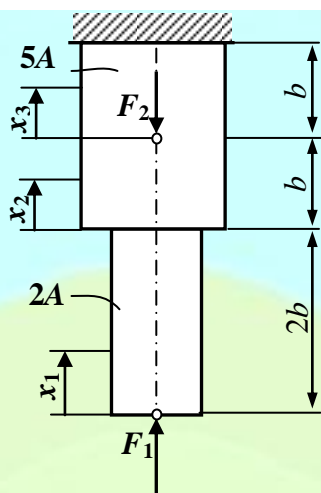
$$\frac{N}{A} \leq \sigma_D \Rightarrow A \geq \frac{N}{\sigma_D} \quad (2.13)$$

Príklad 2.9

Vypočítajte minimálnu veľkosť prierezovej plochy A pre staticky určitý odstupňovaný prút podľa obr. 2.16, ak sú dané sily F_1 a F_2 a veľkosť dovoleného napätia σ_D .

D: $F_1=50\text{kN}, F_2=130\text{kN}, \sigma_D=150\text{MPa}$

H: A_{\min}



Obr. 2.16

Pri dimenzovaní prúta je najdôležitejšie určiť, na ktorom úseku vzniká maximálne normálové napätie a dimenzovať podľa tohto úseku. Aby sme to mohli urobiť musíme prv poznať veľkosť osových síl:

$$N(x_1) = -F_1 = -50 \text{ kN}$$

$$N(x_2) = N(x_1) = -F_1 = -50 \text{ kN}$$

$$N(x_3) = -F_1 + F_2 = -50 \text{ kN} + 130 \text{ kN} = 80 \text{ kN}$$

Veľkosť normálových napätí na jednotlivých úsekoch:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{2A} = -\frac{50 \text{ kN}}{2A} = -\frac{25 \text{ kN}}{A} \Rightarrow \sigma_{\max}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{5A} = -\frac{50 \text{ kN}}{5A} = -\frac{10 \text{ kN}}{A}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{5A} = \frac{80 \text{ kN}}{5A} = \frac{16 \text{ kN}}{A}$$

Po úprave na spoločného menovateľa (A), porovnávame hodnoty čitateľov. Vyberáme najväčšiu hodnotu bez ohľadu na znamienko, lebo väčšina materiálov má rovnaké vlastnosti v ťahu aj v tlaku. Ak by bol prút z materiálu, u ktorého to tak nie je, potom by bolo je potrebné zohľadniť aj znamienko.

Z uvedeného vyplýva, že maximálne normálové napätie vzniká na úseku x_1 . Potom:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D$$

$$\left| \frac{N(x_1)}{2A} \right| \leq \sigma_D \Rightarrow A \geq \frac{N(x_1)}{2\sigma_D}$$

Po dosadení dostávame:

$$A \geq 250 \text{ mm}^2$$

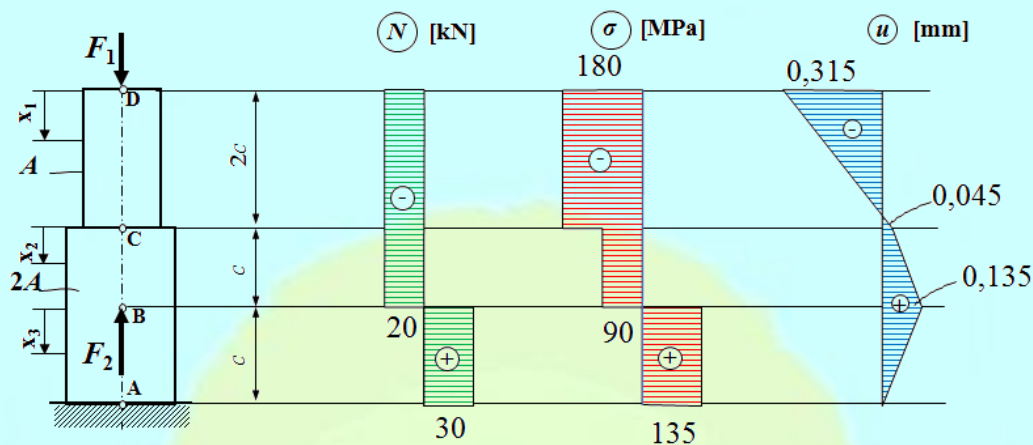
Uvedená veľkosť prierezovej plochy A je jej minimálna hodnota.

Príklad 2.10

Vypočítajte minimálnu veľkosť prierezovej plochy A pre staticky určitý odstupňovaný prút podľa obr. 2.17, ak sú dané sily F_1 a F_2 , modul pružnosti v ťahu E a veľkosť dovoleného napätia σ_D .

$$D: F_1=20 \text{ kN}, F_2=50 \text{ kN}, c=200 \text{ mm}, E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \sigma_D=180 \text{ MPa},$$

H: A_{\min} , N^c , σ^c , u^c



Obr. 2.17

Osové sily:

$$N(x_1) = -F_1 = -20 \text{ kN}$$

$$N(x_2) = N(x_1) = -F_1 = -20 \text{ kN}$$

$$N(x_3) = -F_1 + F_2 = -20 \text{ kN} + 50 \text{ kN} = +30 \text{ kN}$$

Úsek s maximálnym normálovým napätím σ_{\max} :

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A} = -\frac{20 \text{ kN}}{A} \Rightarrow \sigma_{\max}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{2A} = -\frac{20 \text{ kN}}{2A} = -\frac{10 \text{ kN}}{A}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{2A} = \frac{30 \text{ kN}}{2A} = \frac{15 \text{ kN}}{A}$$

Po dosadení do pevnostnej podmienky dostávame:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\leq \sigma_D \\ \left| \frac{N(x_1)}{A} \right| &\leq \sigma_D \Rightarrow A \geq \frac{N(x_1)}{\sigma_D} \\ A &\geq \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{180 \text{ MPa}} \\ A &\geq 111,1 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Veľkosť normálových napätí určíme s vypočítanou minimálnou plochou priečného prierezu:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A} = -\frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{111,1 \text{ mm}^2} = -180 \text{ MPa}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{2A} = -\frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 111,1 \text{ mm}^2} = -90 \text{ MPa}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{2A} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 111,1 \text{ mm}^2} = +135 \text{ MPa}$$

Posunutie prierezov vypočítame pre minimálnou plochou priečného prierezu:

$$u_A = 0$$

$$u_B = u_A + \Delta l_{AB} = u_A + \frac{N(x_3)c}{E \cdot 2A} = 0 + \frac{30 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 200 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 2 \cdot 1111,1 \text{ mm}^2} = +0,135 \text{ mm}$$

$$u_C = u_B + \Delta l_{BC} = u_B + \frac{N(x_2)c}{E \cdot 2A} = 0,135 \text{ mm} + \frac{(-20 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot 200 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 2 \cdot 1111,1 \text{ mm}^2} = 0,135 \text{ mm} - 0,09 \text{ mm} = +0,045 \text{ mm}$$

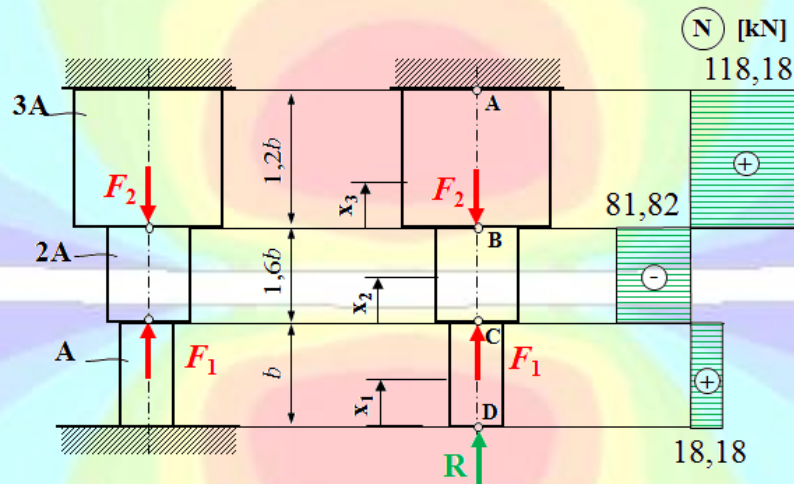
$$u_D = u_C + \Delta l_{CD} = u_C + \frac{N(x_1) \cdot 2c}{E \cdot A} = 0,45 \text{ mm} + \frac{(-20 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot 2 \cdot 200 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 1111,1 \text{ mm}^2} = 0,45 \text{ mm} - 0,36 \text{ mm} = -0,315 \text{ mm}$$

Príklad 2.11

Vypočítajte minimálnu veľkosť prierezovej plochy A pre staticky určitý odstupňovaný prút podľa obr. 2.18, ak sú dané sily F_1 a F_2 a veľkosť dovoleného napätia σ_D .

D: $F_1=100\text{kN}$, $F_2=200\text{kN}$, $\sigma_D=180\text{MPa}$,

H: A_{\min} , „N“



Obr. 2.18

Osové sily:

$$N(x_1) = -R$$

$$N(x_2) = -R - F_1$$

$$N(x_3) = -R - F_1 + F_2$$

Deformačná podmienka:

$$\Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = 0$$

$$\frac{N(x_3) \cdot 1,2b}{E \cdot 3A} + \frac{N(x_2) \cdot 1,6b}{E \cdot 2A} + \frac{N(x_1) \cdot b}{E \cdot A} = 0$$

Vyjadríme R :

$$R = \frac{2,4F_2 - 7,2F_1}{13,2} = \frac{2,4 \cdot 200 \text{ kN} - 7,2 \cdot 100 \text{ kN}}{13,2} = -18,18 \text{ kN}$$

Potom hodnoty osových síl:

$$N(x_1) = -R = -(-18,18 \text{ kN}) = +18,18 \text{ kN}$$

$$N(x_2) = -R - F_1 = -(-18,18 \text{ kN}) - 100 \text{ kN} = -81,82 \text{ kN}$$

$$N(x_3) = -R - F_1 + F_2 = -(-18,18 \text{ kN}) - 100 \text{ kN} + 200 \text{ kN} = 118,18 \text{ kN}$$

Určenie úseku s maximálnym normálovým napätím:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A} = \frac{18,18 \text{ kN}}{A}$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{2A} = -\frac{81,82 \text{ kN}}{2A} = -\frac{40,91 \text{ kN}}{A} \Rightarrow \sigma_{\max}$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{2A} = \frac{118,18 \text{ kN}}{3A} = \frac{39,39 \text{ kN}}{A}$$

Výpočet veľkosti prierezovej plochy A :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D$$

$$\sigma(x_2) \leq \sigma_D$$

$$\left| \frac{N(x_2)}{2A} \right| \leq \sigma_D \Rightarrow A \geq \frac{N(x_2)}{2\sigma_D}$$

$$A \geq \frac{81,82 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 180 \text{ MPa}}$$

$$A \geq 227,28 \text{ mm}^2$$

Minimálna veľkosť prierezovej plochy A je $227,28 \text{ mm}^2$.



2.8 Využitie energetických princípov na určenie deformácie

Vo všeobecnosti, mechanická práca závisí od sily, dráhy, po ktorej sa teleso premiestňuje a od uhlu, ktorú zvierajú sila a trajektória pohybu telesa. Pre teleso, ktoré sa premiestňuje po priamke pôsobením konštantnej sily F rovnobežnej s trajektóriou pohybu telesa možno mechanickú prácu vyjadriť:

$$W = F \cdot s \tag{2.14}$$

kde F je veľkosť pôsobiacej sily a s je dĺžka dráhy, ktorú teleso prešlo. Mechanickú prácu je schopné vykonávať teleso, ktoré má určitú mechanickú energiu, ktorá je jedna z mnohých druhov energií (elektrická, magnetická, tepelná, jadrová, chemická).

Mechanickú prácu konajú aj vonkajšie aj vnútorné sily v procese vzniku deformácie, pričom v pružne deformovanom telese vzniká mechanická energia.

Nech na votknutý prút s dĺžkou l pôsobí na konci osamelá ťahová vonkajšia sila F , ktorá ho deformuje a jej vplyvom vznikne konečné predĺženie prúta Δl . Zaťažujúca sila F je v rovnováhe s vnútorným pôsobením v telese a lineárne sa mení so zmenou polohy:

$$F(\Delta) = c \cdot \Delta, \tag{2.15}$$

kde c je konštanta lineárnej závislosti a Δ je deformácia (predĺženie) zodpovedajúce okamžitej hodnote F , čo platí pre celý interval okamžitých hodnôt $\Delta \in \langle 0; \Delta l \rangle$

Sila F narastá z hodnoty 0 (nedeformovaný tvar) na jej konečnú hodnotu $F_K = c \cdot \Delta l$, kde F_K je konečná hodnota sily F a Δl je konečná hodnota deformácie. Každá sila, ktorej pôsobisko sa posunie, vykoná prácu. Počas deformácie sila F koná prácu L_e na deformácii Δl :

$$L_e = \int_0^{\Delta l} F \cdot d\Delta l = \int_0^{\Delta l} c \cdot \Delta l \cdot d\Delta l = \frac{c \cdot \Delta l^2}{2} = \frac{1}{2} F_k \cdot \Delta l \quad (2.16)$$

kde L_e je práca vonkajších (externých) síl pri deformácii telesa (deformačná práca), čo zodpovedá ploche trojuholníka 2.14a.

Práca vonkajších síl vyvolá zodpovedajúcu prácu vnútorných (interných) síl L_i :

$$L_e = L_i \quad (2.17)$$

Vonkajšie sily teleso zdeformujú. Práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri pružnej deformácii telesa (napr. prútu) sa akumuluje v telese vo forme potenciálnej energie vnútorných síl U (2.18), ktorú tiež nazývame deformačná energia alebo potenciálna energia napätosti. Ak by sme teleso v deformovanom stave odľahčili, potenciálna energia akumulovaná vo vnútorných silách sa spotrebuje na vrátenie telesa do pôvodného stavu. Vnútorné sily pôsobia proti snahe vonkajších síl teleso deformovať. Ak prút odľahčíme, vnútorné sily budú klesať z konečnej hodnoty na nulovú.

Každé pružné deformované teleso má deformačnú energiu U . Pri platnosti Hookeovho zákona a zákona o zachovaní mechanickej energie pri dokonale pružnom telese platí číselná rovnosť:

$$L_e = U \quad (2.18)$$

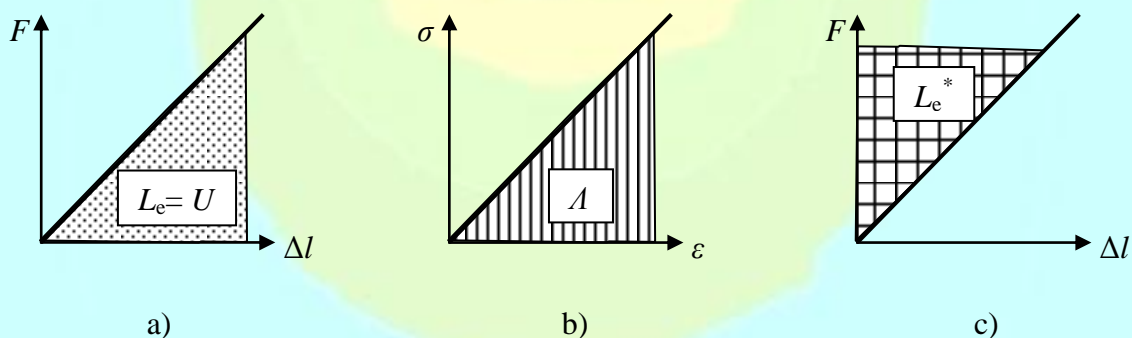
Disipácia mechanickej energie (napr. premena na tepelnú energiu) je vylúčená. Ide o idealizáciu, kedy teleso a sily, ktoré na neho pôsobia, resp. v ňom vznikajú, vytvárajú konzervatívny mechanický systém. Potom dokonale pružné teleso je dokonalým akumulátorom mechanickej energie.

Ak vyjadríme deformačnú energiu U pomocou vzťahu pre deformačnú prácu vonkajších síl (2.16) a z (2.7) vyjadríme osovú silu N a dosadíme za F ($F=N$), potom dostávame:

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \frac{E \cdot A}{l} \Delta l^2 = \frac{N^2 \cdot l}{2EA} \quad (2.19)$$

Vzťah (2.19) možno použiť len v prípade konštantnej osovej sily N a prierezovej plochy A na dĺžke l . V opačnom prípade deformačnú energiu U vypočítame:

$$U = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{N(x)^2}{E \cdot A(x)} dx \quad (2.20)$$



Obr. 2.19

Veľkosť deformačnej energie pripadajúcej na jednotku objemu vyjadruje merná deformačná energia (objemová hustota deformačnej energie):

$$A = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.21)$$

kde σ je normálové napätie a ε je pomerná deformácia a hodnota A zodpovedá ploche trojuholníka pod pracovným diagramom na obr. 2.17b.

Doplňková (komplementárna) práca vonkajších síl L_e^* je rovná:

$$L_e^* = \int_0^F dL_e^* = \int_0^F \Delta l dF = \int_0^F \frac{N \cdot l}{E \cdot A} dN = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A} \quad (2.22)$$

kde $dL_e^* = \Delta l dF$ predstavuje diferenciálnu zmenu doplnkovej práce vonkajších síl pri zmene sily dF .

Z obr. 2.19a a 2.19c vyplýva, že súčet L_e a L_e^* je:

$$L_e = L_e^* = F \cdot \Delta l \quad (2.23)$$

Potenciálnou energiou rozumieme schopnosť práce, ktorú by mohli vykonať vonkajšie a vnútorné sily pri prechode z deformovanej rovnovážnej polohy do počiatočnej nedeformovanej polohy, ktorú malo teleso pred zaťažením. Celková potenciálna energia sústavy Π je daná súčtom potenciálnej energie vnútorných síl U (deformačnej energie) a potenciálnej energie vonkajších síl U_e :

$$\Pi = U + U_e \quad (2.24)$$

Potenciálna energia vonkajších síl U_e je rovná práci vonkajších síl pri prechode z deformovaného stavu telesa do pôvodného nedeformovaného stavu. Nemá sa však na mysli postupné odoberanie zaťaženia, ale vonkajšie sily konajú prácu plnou hodnotou na deformácii. Je vždy záporná (vraciame sa späť do pôvodného stavu). Platí:

$$L_e = -\frac{1}{2} U_e \Rightarrow U_e = -2L_e \quad (2.25)$$

Potom, keďže platí (2.17) a (2.18) a (2.25) možno písať:

$$\Pi = U + U_e = L_e - 2L_e = -L_e = -L_1 \quad (2.26)$$

Vzťah (2.24) je východiskom pre odvodenie metódy konečných prvkov, ktorá je v súčasnosti najrozšírenejšou výpočtovou metódou v praxi.

2.8.1 Castiglianove vety

Použitie deformačnej energie pri výpočtoch v mechanike poddajných telies je spojené hlavne s využitím Castiglianových⁵ viet.

Je potrebné zdôrazniť, že práca sily sa rovná jednej polovici súčinu sily a deformácie (2.16) len vtedy, ak ide o deformačnú prácu, ktorú sila koná pri deformácii, ktorú sama vyvolá statickým účinkom (mení sa, rastie, z hodnoty nula na konečnú hodnotu). Ak sila koná prácu na deformácii, ktorá je vyvolaná inou príčinou (napr. inou silou, zmenou teploty a pod.)

5



Carlo Alberto Castigliano (1847-1884, Taliansko) Školu nedokončil pre finančné problémy. Stal sa učiteľom na priemyselných školách. Po nástupe na inžinierske štúdium na univerzite v Turíne urobil Castigliano za jeden rok skúšky trojročného štúdia. V svojej diplomovej práci formuloval svoju prvú Castiglianovu vetu. V ďalších prácach sa venoval druhej Castiglianovej vete a ich dokazovaním ich platnosti. Finančnú istotu mu poskytla až práca hlavného inžiniera na riaditeľstve železníc. Zomrel na bežné prechladenie s následným zápalom pľúc vo veku 37 rokov.

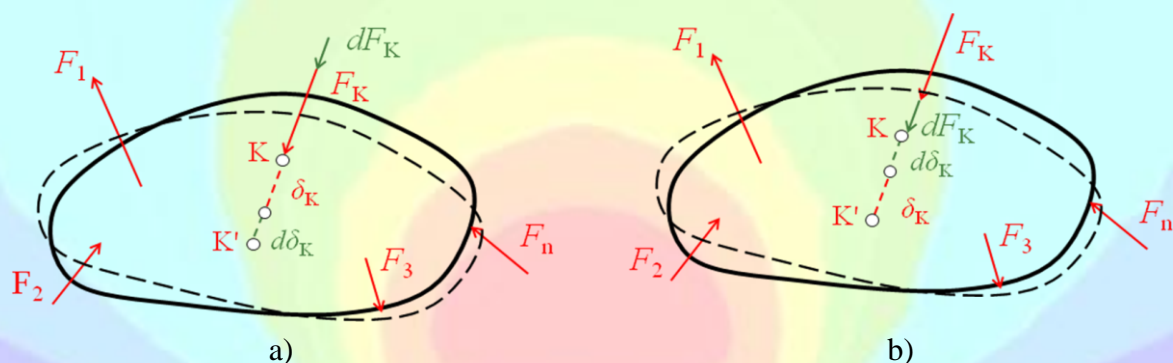
a sama sa pritom nemení, potom práca je rovná súčinu celému násobku sily a deformácie (2.14).

Pružné teleso je zaťažené vonkajšími silami $F_1, F_2, \dots, F_K, \dots, F_n$, pričom platí Hookeov zákon. V dôsledku vonkajšieho zaťaženia sa teleso deformuje a vonkajšie sily konajú prácu L_e , ktorá sa premení na deformačnú energiu U . Deformačná energia je funkciou vonkajších síl. Bod K sa posunie po deformácii o δ_K (obr. 2.20a). Nech F_K , jedna z vonkajších síl, sa zmení o diferenciálny prírastok dF_K , potom prírastok deformačnej energie dU je:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial F_K} dF_K \quad (2.27)$$

Celková deformačná energia bude:

$$U_1 = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial F_K} dF_K \quad (2.28)$$



Obr. 2.20

Zmeňme poradie zaťažovania. Najprv zaťažme teleso len elementárnou silou dF_K v bode K (obr. 2.20b). Táto sila posunie bod K o $d\delta_K$. Elementárna sila dF_K koná prácu, ktorá sa premení na deformačnú energiu dU :

$$dU = \frac{1}{2} dF_K d\delta_K \quad (2.29)$$

Potom zaťažme teleso aj ostatnými silami $F_1, F_2, \dots, F_K, \dots, F_n$, vplyvom ktorých sa bod K posunie o δ_K a elementárna sila dF_K , ktorá je počas tohto posunutia konštantná koná prácu $dF_K \cdot \delta_K$ (1/2 tu nie je, lebo elementárna sila dF_K sa pri zaťažovaní nemení a pri posunutí δ_K ostáva stála). Celková deformačná energia bude:

$$U_2 = \frac{1}{2} dF_K \cdot d\delta_K + U + dF_K \cdot \delta_K \quad (2.30)$$

Podľa zákona o zachovaní energie nemôže mať poradie zaťažovania vplyv na veľkosť vykonanej práce, t.j. na veľkosť deformačnej energie. Platí:

$$U_1 = U_2 \quad (2.31)$$

Potom:

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_K} dF_K = \frac{1}{2} dF_K \cdot d\delta_K + U + dF_K \cdot \delta_K \quad (2.32)$$

Pri zanedbaní nekonečne malých veličín druhého rádu ($\frac{1}{2} dF_K \cdot d\delta_K$) z rovnice (2.32) dostávame:

$$\delta_K = \frac{\partial U}{\partial F_K} \quad (2.33)$$

čo je matematicky vyjadrená prvá Castiglianova veta, ktorá slovne znie: Ak na lineárne pružné teleso (sústavu telies) pôsobí sústava vonkajších síl, potom posunutie δ_K pôsobiska vonkajšej sily F_K v jej smere a zmysle (po jej nositeľke) je rovné parciálnej derivácii celkovej deformačnej energie U podľa tejto sily.

Analogicky možno postupovať pri odvodení druhej Castiglianovej vety, kedy teleso je zaťažené momentmi $M_1, M_2, \dots, M_K, \dots, M_n$, potom dostávame:

$$\varphi_K = \frac{\partial U}{\partial M_K} \quad (2.34)$$

čo je druhá Castiglianova veta, ktorá znie: Ak na lineárne pružné teleso (sústavu telies) pôsobí sústava vonkajších momentov, potom pootočenie φ_K priamky spojenej s pôsobiskom silovej dvojice (momentu) M_K v rovine jeho pôsobenia je rovné parciálnej derivácii celkovej deformačnej energie U podľa tohto momentu.

2.8.2 Mohr-Maxwellova veta

Metóda využívajúca Mohr⁶ – Maxwellovu⁷ vetu sa nazýva aj metóda virtuálnych prác alebo metóda jednotkového zaťaženia.

Princíp virtuálnych prác bol formulovaný Lagrangeom⁸ a znie: Ak je teleso v rovnováhe, potom virtuálna práca vonkajších síl L_e sa rovná virtuálnej práci vnútorných síl L_i . (Virtuálne veličiny budú označované s pruhom nad veličinou.)

$$L_e = L_i \quad (2.35)$$

6



Christian Otto Mohr (1835-1918, Nemecko) bol nemecký stavebný inžinier, ktorý sa zapísal do histórie prácami o pevnosti hornín a prispel k rozvoju štruktúrálnej geológie. Mohr sa narodil ako syn statkára. Absolvoval polytechniku v Hannoveri. Ako 20-ročný začal pracovať na stavbe železníc, kde navrhoval niektoré mosty a oceľové konštrukcie. Počas týchto prác sa Mohr začínal zaujímať o teoretickú stránku pevnosti materiálov a v roku 1867 sa stal profesorom stuttgartskej polytechniky. Ako vyučujúci bol veľmi obľúbený medzi študentmi. Medzi najväčšie prínosy Mohra patril spôsob grafického vyjadrenia napätosti. Tento objav sa uskutočnil v roku 1882 a je známy pod označením Mohrova kružnica.

7



James Clerk Maxwell (1831 –1879, Británia-Škótsko) bol všestranný fyzik. Bol potomkom starého šľachtického rodu. Prvú vedeckú prácu publikoval v 14-tich rokoch. Ako 16-ročný začal študovať na univerzite v Edinburgu a po troch rokoch prestúpil na Cambridge. Ako 25-ročný bol ako profesor pozvaný na univerzitu v Aberdeene. Jeho najvýznamnejším objavom je všeobecný matematický popis elektromagnetického poľa dnes známy ako Maxwellove rovnice.

8

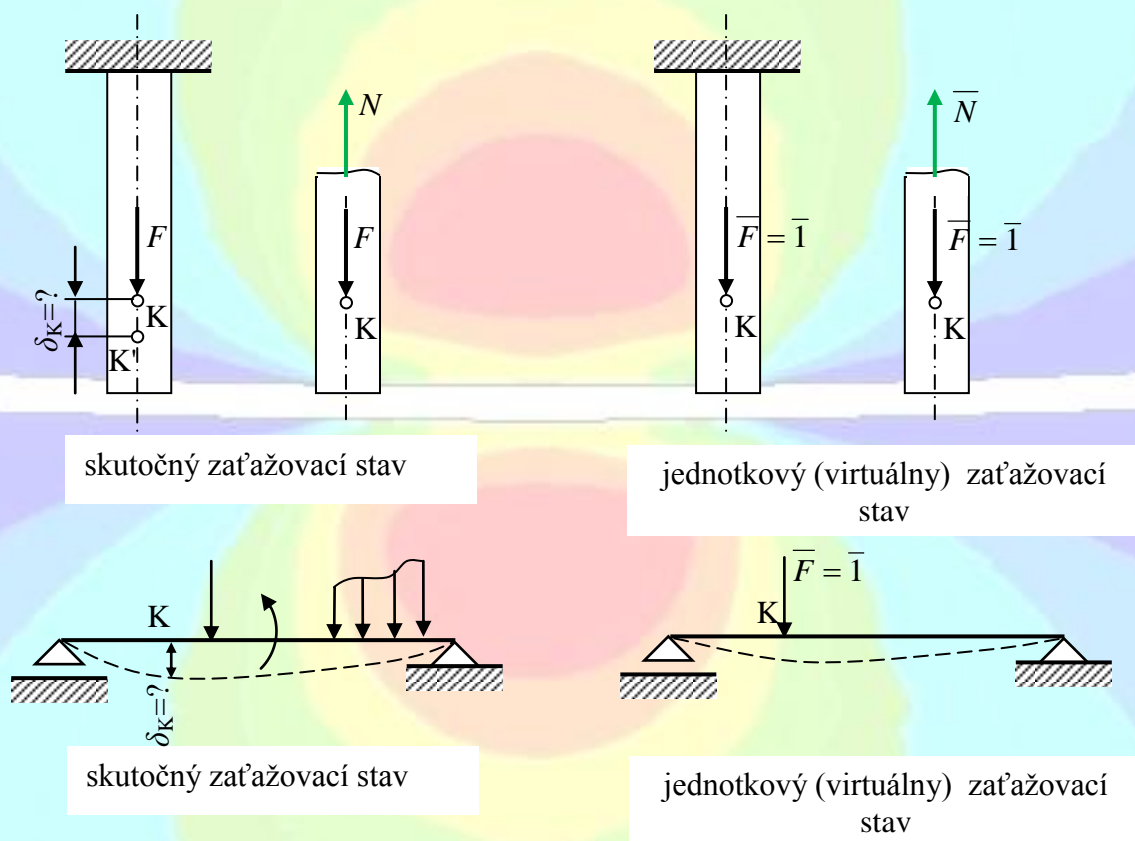


Joseph Louis Lagrange (1739, Taliansko -1813, Francúzsko) taliansko-francúzsky matematik a astronóm. Začal učiť matematiku ako 17-ročný na Kráľovskej delostreleckej škole. Napísal dielo Analytická mechanika. V roku 1771 uskutočnil ako prvý riešenie votknutého nosníka zaťaženého na voľnom konci osamelou silou pomocou integrácie presnej diferenciálnej rovnice. Založil turínsku Akadémiu vied, pôsobil na Akadémii vied v Berlíne na doporučenie L. Eulera. Bol členom Francúzskej a Berlínskej akadémie vied, členom Kráľovskej spoločnosti v Londýne a predseda Komisie pre vytvorenie metrickej sústavy mier a váh.

Virtuálna práca je práca skutočnej silovej veličiny (sily, momentu) na virtuálnom posunutí alebo naopak práca virtuálnej silovej veličiny na skutočnom posunutí. Virtuálne posunutie je ľubovoľné možné posunutie telesa pri rešpektovaní jeho väzieb. Virtuálne posunutie je nezávislé na vonkajšom zaťažení.

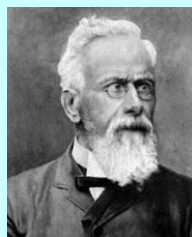
Z Bettiho⁹ princípu vzájomnosti prác vyplýva, že virtuálna práca síl skutočného zaťažovacieho stavu na posunutíach virtuálneho zaťažovacieho stavu toho istého telesa (sústavy) je rovná virtuálnej práci síl virtuálneho zaťažovacieho stavu na posunutíach skutočného zaťažovacieho stavu. Virtuálny stav je vztážený stav. Táto veta platí aj pre virtuálnu prácu vnútorných síl a platí ako pre staticky určité, tak aj pre staticky neurčité úlohy.

Pri výpočte deformácií na pružnej konštrukcii musíme uvažovať skutočný zaťažovací stav, ktorý je daný vonkajším zaťažením a vyvolá vznik vnútorných síl a vznik skutočných deformácií, ktoré chceme vypočítať. Okrem skutočného zaťažovacieho stavu je potrebné definovať aj virtuálny zaťažovací stav, ktorý nazývame aj jednotkový zaťažovací stav, keďže ho vyvolá buď jednotková sila $\bar{F} = \bar{1}$, alebo jednotkový moment $\bar{M} = \bar{1}$ (obr. 2.21).



Obr. 2.21

9



Enrico Betti (1823-1892, Taliansko) bol taliansky matematik. E. Betti študoval na univerzite v Pise. V roku 1857 sa stal profesorom a neskôr rektorom. Bol členom talianskeho parlamentu. Pod jeho vedením sa Scuola Normale Superiore v Pise stala popredným talianskym strediskom matematického výskumu a vzdelania. E. Betti sa zapísal do histórie hlavne svojim prínosom v algebre. Jeho prvá práca sa týkala rovníc a algebry. V roku 1863 prebýval v Pise B. Riemann. E. Betti bol Riemannom natoľko ovplyvnený, že napísal práce o teoretickej fyzike, o teórii potenciálu a o teórii pružnosti. E. Betti v práci *O priestoroch ľubovoľného počtu rozmerov* (1871) zavádza dnešné chápanie, označovanie a pomenovanie základných objektov n -rozmerného priestoru.

Vzhľadom na (2.35), virtuálna práca, ktorú vykoná jednotkové virtuálne zaťaženie $\bar{1}$ pri skutočnej deformácii δ_K (v mieste a smere jednotkového zaťaženia) od vonkajšieho zaťaženia je číselne rovná hľadanej deformácii od vonkajšieho zaťaženia:

$$\delta_K = \int_{(l)} \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{E \cdot J} dx + \int_{(l)} \frac{N_0 \cdot \bar{N}_1}{E \cdot A} dx + \int_{(l)} \frac{\kappa \cdot V_0 \cdot \bar{V}_1}{G \cdot A} dx \quad (2.36)$$

kde $\bar{M}_1, \bar{N}_1, \bar{V}_1$ (indexy 1) sú vnútorné silové veličiny od jednotkového zaťaženia $\bar{1}$, ktoré je umiestnené v mieste K hľadanej deformácie, M_0, N_0, V_0 (indexy 0) sú vnútorné silové veličiny od vonkajšieho zaťaženia, κ je Timošenkov koeficient, E, G sú materiálové konštanty a J, A sú prierezové charakteristiky. Výraz (2.36) označujeme ako Mohr-Maxwellova veta, ktorú možno aplikovať na všetky druhy namáhania. Aplikácia Mohr-Maxwellovej vety na ohyb bude prezentovaná v kapitole 7.1.3.



2.9 Výpočet posunutí styčníc prútových sústav využitím Castiglianovej vety

Aplikovať 1. Castiglianovu vetu (2.33) možno pri namáhaní jednoduchým ťahom/tlakom na výpočet posunutí styčníc prútových sústav. Posunutie (bodu K) vo vzťahu (2.33) bolo označené δ_K . V prípade, ak pôjde o výpočet horizontálneho posunutia styčníc prútovej sústavy bude jeho označenie u alebo v prípade vertikálneho posunutia v . Pri výpočtoch je potrebné si uvedomiť, že sila, podľa ktorej robíme parciálnu deriváciu musí byť sila, ktorá pôsobí v mieste a smere (v zmysle) hľadaného posunutia bodu.

Po dosadení vzťahu (2.20) do 1. Castiglianovej vety dostávame tzv. Mohrov integrál (modifikovanú Castiglianovu vetu):

$$\delta_K = \frac{\partial U}{\partial F_K} = \frac{\partial}{\partial F_K} \left(\frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{N(x)^2}{E \cdot A(x)} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{2N(x)}{E \cdot A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F_K} dx = \int_{(l)} \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F_K} dx \quad (2.37)$$

Celková deformačná energia pre prútovú sústavu s n prútmi je rovná súčtu deformačných energií jednotlivých prútov, potom:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} \quad (2.38)$$

Potom (2.37) má tvar:

$$\delta_K = \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial N_i}{\partial F_K} \frac{l_i}{E_i \cdot A_i} \quad (2.39)$$

kde l_i je dĺžka i -tého prúta, $E_i A_i$ je tuhosť i -tého prúta.

Tab. 2.2

Číslo prúta i	Osová sila N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial F_K}$	Dĺžka prúta l_i	$N_i \frac{\partial N_i}{\partial F_K} l_i$
1				
2				
i				
Σ				

Pre prútovú sústavu s prútmi z rovnakého materiálu a s konštantnou prierezovou plochou po celej dĺžke prúta l platí:

$$\delta_K = \frac{1}{E \cdot A} \sum_{i=1}^n N_i \frac{\partial N_i}{\partial F_K} l_i \quad (2.40)$$

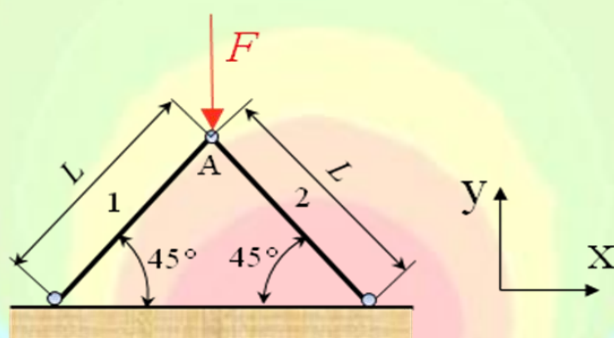
Pri výpočte posunutí styčníc prútových sústav je vhodné využívať tabelárny zápis (tab. 2.2) čiastkových výsledkov.

Príklad 2.12

Vypočítajte vertikálne posunutie styčníka A (obr. 2.22) a normálové napätia v prútoch 1 a 2. Oba prúty sú z rovnakého materiálu s rovnakou prierezovou plochou A .

D: F, L, E, A

H: v_A, σ_1, σ_2



Obr. 2.22

Osovú silu N_1 a N_2 určíme zo statických podmienok rovnováhy pre bod A, pričom ich predpokladáme ťahové:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -F - N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 45^\circ = 0$$

Odkiaľ dostávame:

$$N_1 = -\frac{F}{2 \sin 45^\circ} = -\frac{F}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} F = N_2$$

Zapíšeme do tabuľky:

Číslo prúta i	Osová sila N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial F}$	Dĺžka prúta L_i	$N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} l_i$
1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	L	$\frac{1}{2} FL$
2	$-\frac{\sqrt{2}}{2} F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	L	$\frac{1}{2} FL$
Σ				FL

Vertikálne posunutie bodu A je:

$$v_A = \frac{FL}{EA}$$

Normálové napätia v prútoch 1 a 2:

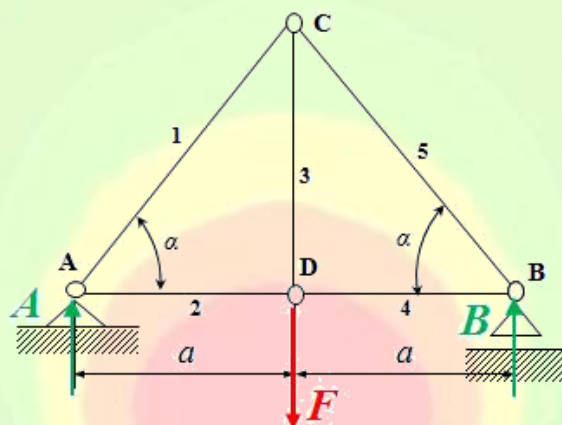
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{\sqrt{2}F}{2A} = \sigma_2$$

Príklad 2.13

Vypočítajte vertikálne posunutie styčníka D (obr. 2.23) a normálové napätia v jednotlivých prútoch. Všetky prúty sú z rovnakého materiálu s rovnakou prierezovou plochou A .

D: $F=20\text{kN}$, $a=1\text{m}$, $A=80\text{mm}^2$, $E=2\cdot 10^5\text{MPa}$, $\alpha=45^\circ$

H: $v_D, \sigma_1 - \sigma_5$



Obr. 2.23

Vypočítame reakcie A , B , osové sily $N_1 - N_5$ určíme zo statických podmienok rovnováhy pre jednotlivé styčníky, pričom ich predpokladáme ťahové. Vypočítame parciálne derivácie osových síl $N_1 - N_5$ podľa sily F , pretože práve táto sila pôsobí v mieste a smere hľadaného posunutia. Vypočítané údaje vložíme do tabuľky.

Číslo prúta i	Osová sila N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial F}$	Dĺžka prúta l_i	$N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} l_i$
1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$
2	$\frac{1}{2}F$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{4}Fa$
3	F	1	a	Fa
4	$\frac{1}{2}F$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{4}Fa$
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}Fa$
Σ				$Fa\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right)$

Vertikálne posunutie bodu D je:

$$v_D = \frac{Fa}{E.A} \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 80 \text{ mm}^2} \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) = 3,64 \text{ mm}$$

Normálové napätia v jednotlivých prútoch:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{\sqrt{2}F}{2A} = -\frac{\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 80 \text{ mm}^2} = -176,8 \text{ MPa} = \sigma_5$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{F}{2A} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 80 \text{ mm}^2} = +125 \text{ MPa} = \sigma_4$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{F}{A} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ N}}{80 \text{ mm}^2} = +250 \text{ MPa}$$



2.10 Výpočet posunutí styčnickov prútových sústav využitím Mohr-Maxwellovej vety

Ak aplikujeme všeobecný tvar Mohr-Maxwellovej vety (2.36) na výpočet posunutí styčnickov prútových sústav pre prútovú sústavu s n prútmí, pričom prúty sú z rovnakého materiálu E a s konštantnou prierezovou plochou A po celej dĺžke prúta l , potom Mohr-Maxwellova veta má tvar:

$$\delta_K = \frac{1}{E.A} \sum_{i=1}^n N_{0i} \cdot \bar{N}_{li} \cdot l_i \quad (2.41)$$

kde l_i je dĺžka i -tého prúta, N_{0i} je osová sila v i -tom prúte od vonkajšieho zaťaženia a \bar{N}_{li} je osová sila v i -tom prúte od jednotkovej sily, ktorá pôsobí v mieste (bod K) a smere hľadaného posunutia.

Index 0 majú hodnoty osových síl od vonkajšieho zaťaženia, index 1 majú hodnoty osových síl od jednotkového zaťaženia v bode K.

Pri výpočte posunutí styčnickov prútových sústav je vhodné využívať tabelárny zápis čiastkových výsledkov. Pre využitie Mohr-Maxwellovej vety je tabuľka 2.3.

Tab. 2.3

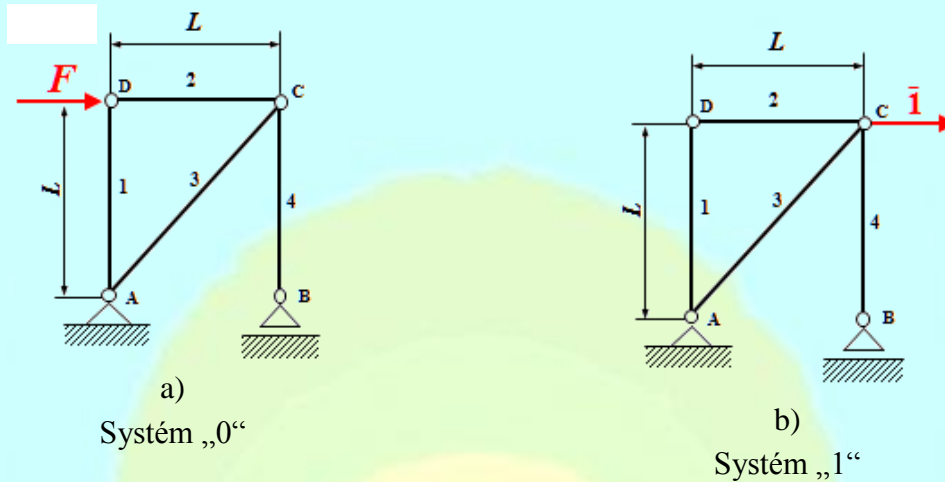
Číslo prúta i	Skutočná osová sila N_{0i}	Virtuálna osová sila \bar{N}_{li}	Dĺžka prúta l_i	$N_{0i} \cdot \bar{N}_{li} \cdot l_i$
1				
2				
i				
			Σ	

Príklad 2.14

Vypočítajte horizontálne posunutie styčníka C prútovej sústavy podľa obr. 2.24 a). Všetky prúty sú z rovnakého materiálu s rovnakou prierezovou plochou A .

D: F, L, E, A

H: u_C



Obr. 2.24

Aby sme mohli použiť vzťah (2.41) potrebujeme vypočítať osové sily v skutočnom zaťažovacom stave, v tzv. systéme „0“ a v jednotkovom (virtuálnom) zaťažovacom stave, v tzv. systéme „1“. V systéme „1“ pôsobí jednotková sila, ktorá je umiestnená do bodu C v horizontálnom smere, lebo v bode C chceme vypočítať horizontálne posunutie. Jej orientácia je predpokladaná.

Výpočet osových síl:

Styčnik D v systéme „0“:

$$\sum F_{i,x} = 0; F + N_{02} = 0$$

$$\sum F_{i,y} = 0; N_{01} = 0$$

$$N_{02} = -F$$

$$N_{01} = 0$$

Styčnik C v systéme „0“:

$$\sum F_{i,x} = 0; -N_{02} - N_{03} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{i,y} = 0; -N_{04} - N_{03} \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{03} = -\frac{N_{02}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}F$$

$$N_{04} = -N_{03} \sin 45^\circ = -F$$

Styčnik D v systéme „1“:

$$\bar{N}_{12} = 0$$

$$\bar{N}_{11} = 0$$

Styčnik C v systéme „1“:

$$-\bar{N}_{12} + \bar{1} - \bar{N}_{13} \cos 45^\circ = 0$$

$$-\bar{N}_{14} - \bar{N}_{13} \sin 45^\circ = 0$$

$$\bar{N}_{13} = \frac{\bar{1}}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\bar{N}_{14} = -\bar{N}_{13} \sin 45^\circ = -1$$

Tabelárny zápis:

Číslo prúta i	Skutočná osová sila N_{0i}	Virtuálna osová sila \bar{N}_{li}	Dĺžka prúta l_i	$N_{0i} \cdot \bar{N}_{li} \cdot l_i$
1	0	0	L	0
2	$-F$	0	L	0
3	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}L$	$2\sqrt{2}FL$
4	$-F$	-1	L	FL
				Σ $FL(2\sqrt{2}+1)$

Horizontálne posunutie bodu C je:

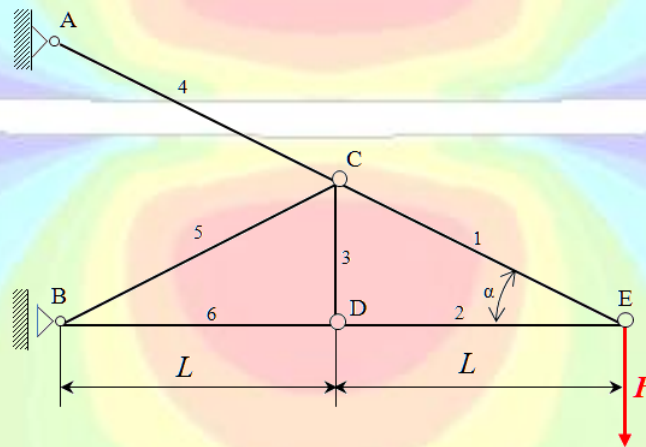
$$u_C = \frac{1}{E \cdot A} \sum_{i=1}^n N_{0i} \cdot \bar{N}_{li} \cdot L_i = \frac{FL(2\sqrt{2}+1)}{E \cdot A}$$

Príklad 2.15

Vypočítajte horizontálne a vertikálne posunutie styčníka E prútovej sústavy podľa obr. 2.25. Všetky prúty sú z ocele s kruhovým prierezom s priemerom d .

D: $F=2\text{kN}$, $L=1\text{m}$, $d=10\text{mm}$, $E=2 \cdot 10^5\text{MPa}$, $\alpha=30^\circ$

H: u_E , v_E



System „0“

Obr. 2.25

Určíme dĺžky jednotlivých prútov:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L_3}{L} \Rightarrow L_3 = L \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 0,577L$$

$$\sin \alpha = \frac{L_3}{L_1} \Rightarrow L_1 = \frac{L_3}{\sin 30^\circ} = 1,154L = L_4 = L_5$$

$$L_2 = L_6 = L$$

Výpočet osových síl v systéme „0“, t.j. od skutočného vonkajšieho zaťaženia:

Styčník E v systéme „0“:

$$\sum F_{i_x} = 0; \quad -N_{02} - N_{01} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{i_y} = 0; \quad -F + N_{01} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$N_{01} = \frac{F}{\sin 30^\circ} = 2F$$

$$N_{02} = -N_{01} \cdot \cos 30^\circ = -2F \cdot 0,866 = -1,732F$$

Styčnák D v systéme „0“:

$$\sum F_{i_x} = 0; \quad -N_{06} + N_{02} = 0$$

$$\sum F_{i_y} = 0; \quad N_{03} = 0$$

$$N_{06} = N_{02} = -1,7321F$$

Styčnák C v systéme „0“:

$$\sum F_{i_x} = 0; \quad -N_{05} \cdot \cos 30^\circ - N_{04} \cdot \cos 30^\circ + N_{01} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{i_y} = 0; \quad -N_{03} - N_{05} \cdot \sin 30^\circ - N_{01} \cdot \sin 30^\circ + N_{04} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

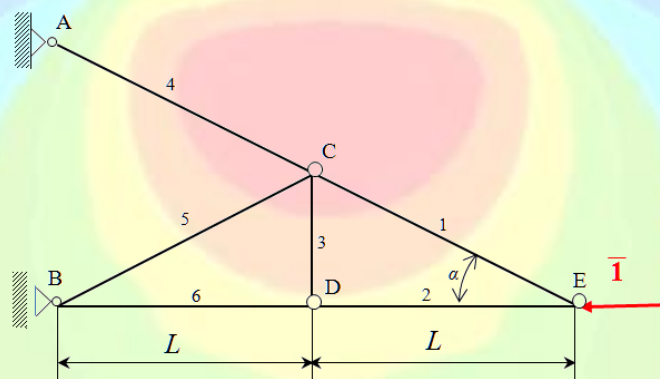
$$\text{z druhej rovnice: } -N_{05} - N_{01} + N_{04} = 0 \Rightarrow N_{05} = N_{04} - 2F$$

$$\text{z prvej rovnice: } -N_{05} - N_{04} + N_{01} = 0 \Rightarrow N_{04} = 2F$$

$$\text{Potom: } N_{05} = N_{04} - 2F = 2F - 2F = 0$$

- Výpočet horizontálneho posunutia styčníka E u_E :

Vytvoríme Systém „1“ u_E (obr. 2.26) pre výpočet horizontálneho posunutia styčníka E u_E . V jednotkovom systéme pôsobí len jednotkové zaťaženie, a to virtuálna jednotková sila v mieste a smere hľadaného posunutia.



Systém „1“ u_E

Obr. 2.26

Styčnák E v systéme „1“ u_E :

$$\sum F_{i_x} = 0; \quad -\bar{1} - \bar{N}_{12} - \bar{N}_{11} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{i_y} = 0; \quad \bar{N}_{11} \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$\bar{N}_{11} = 0$$

$$\bar{N}_{12} = -\bar{1}$$

Styčník D v systéme „1“_{uE}:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \bar{N}_{12} - \bar{N}_{16} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad \bar{N}_{13} = 0$$

$$\bar{N}_{12} = \bar{N}_{16} = -\bar{1}$$

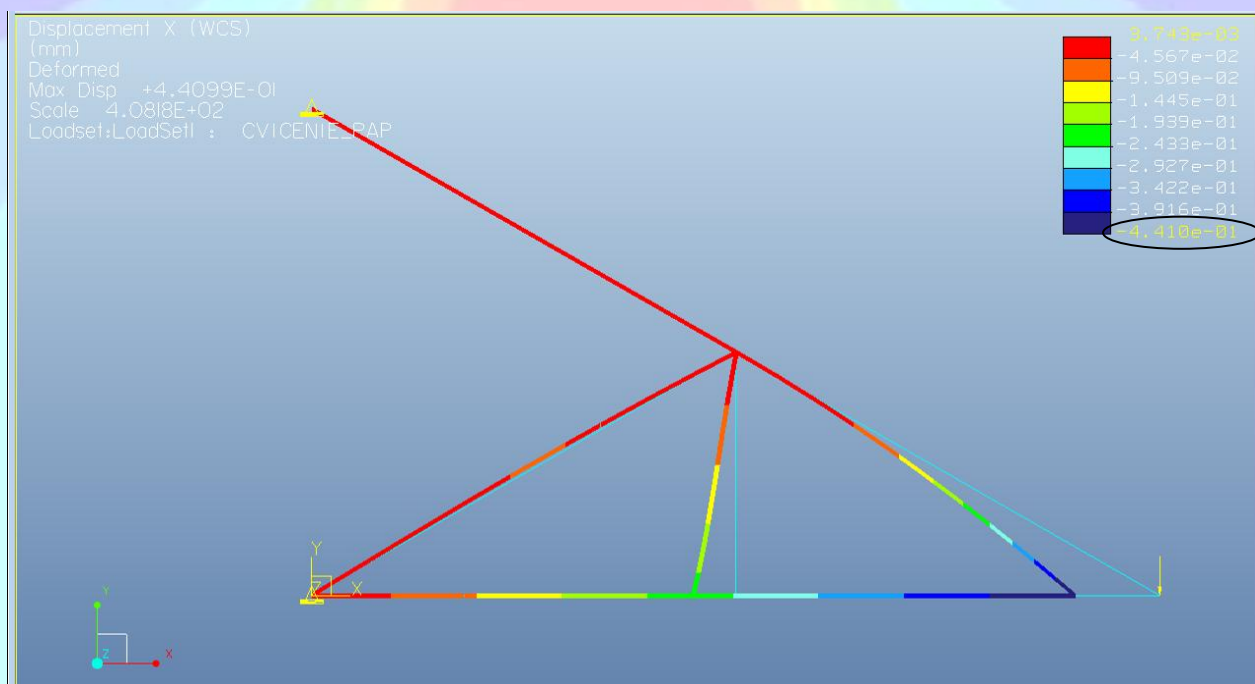
Tabuľka pre výpočet hľadaného posunutia:

Číslo prúta <i>i</i>	Skutočná osová sila N_{0i}	Virtuálna osová sila \bar{N}_{li}	Dĺžka prúta l_i	$N_{0i} \cdot \bar{N}_{li} \cdot l_i$
1	$2F$	0	$1,154L$	0
2	$-1,732F$	-1	L	$1,732FL$
3	0	0	$0,577L$	0
4	$2F$	0	$1,154L$	0
5	0	0	$1,154L$	0
6	$-1,732F$	-1	L	$1,732FL$
Σ				$3,464FL$

Horizontálne posunutie styčníka E:

$$u_E = \frac{3,464FL}{EA} = \frac{3,464 \cdot 2000 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 78,54 \text{ mm}^2} = 0,441 \text{ mm}$$

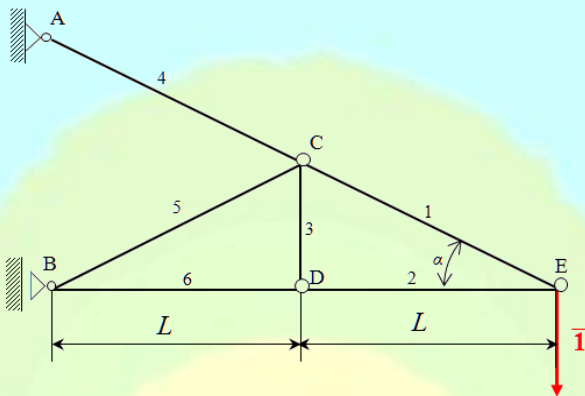
Tento analyticky vypočítaný výsledok možno porovnať s numericky vypočítaným výsledkom s využitím metódy konečných prvkov. Priebeh posunutí v horizontálnom smere je na obr. 2.27. Možno konštatovať, že výsledky sa zhodujú. Posunutie styčníka E na obr. 2.27 je so znamienkom mínus, lebo ide o posunutie v smere zápornej osi *x*.



Obr. 2.27

- Výpočet vertikálneho posunutia styčníka E v_E :

Vytvoríme Systém „1“ (obr. 2.28) pre výpočet vertikálneho posunutia styčníka E v_E . V jednotkovom systéme pôsobí len jednotkové zaťaženie, a to virtuálna jednotková sila v mieste a smere hľadaného posunutia.



Systém „1“ v_E
Obr. 2.28

Systém „0“ ostáva rovnaký aj pre výpočet vertikálneho posunutia styčníka E, mení sa systém „1“ a teda aj osovú silu od jednotkového zaťaženia, ktoré je potrebné vypočítať. Vypočítané údaje zapíšeme do tabuľky.

Tabuľka pre výpočet hľadaného posunutia:

Číslo prúta i	Skutočná osová sila N_{0i}	Virtuálna osová sila \bar{N}_{1i}	Dĺžka prúta l_i	$N_{0i} \cdot \bar{N}_{1i} \cdot l_i$
1	$2F$	2	$1,154L$	$4,616FL$
2	$-1,732F$	$-1,732$	L	$2,999FL$
3	0	0	$0,577L$	0
4	$2F$	2	$1,154L$	$4,616FL$
5	0	0	$1,154L$	0
6	$-1,732F$	$-1,732$	L	$2,999FL$
Σ				$15,23FL$

Vertikálne posunutie styčníka E:

$$v_E = \frac{15,23FL}{EA} = \frac{15,23 \cdot 2000 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 78,54 \text{ mm}^2} = 1,94 \text{ mm}$$

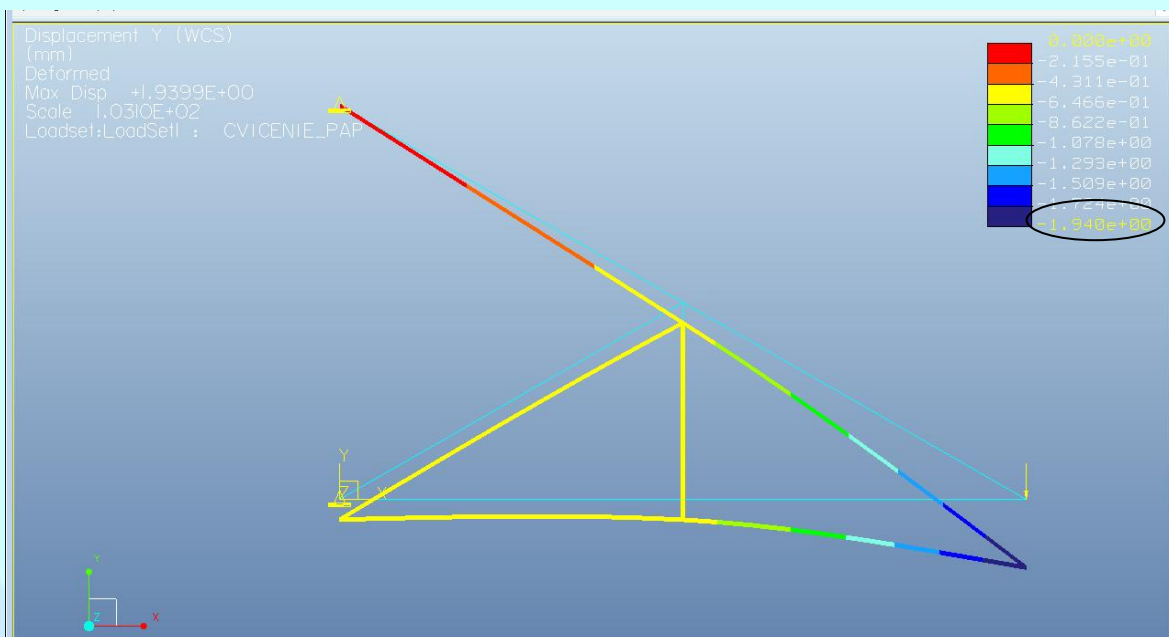
Opäť možno analyticky vypočítaný výsledok porovnať s numericky vypočítaným výsledkom s využitím metódy konečných prvkov. Priebeh posunutí vo vertikálnom smere je na obr. 2.29a. Možno konštatovať, že výsledky sa zhodujú. Posunutie styčníka E na obr. 2.29 je so znamienkom mínus, lebo ide o posunutie v smere zápornej osi y.

Na obr. 2.29b je priebeh výsledných posunutí, t.j. horizontálnych a zároveň vertikálnych.

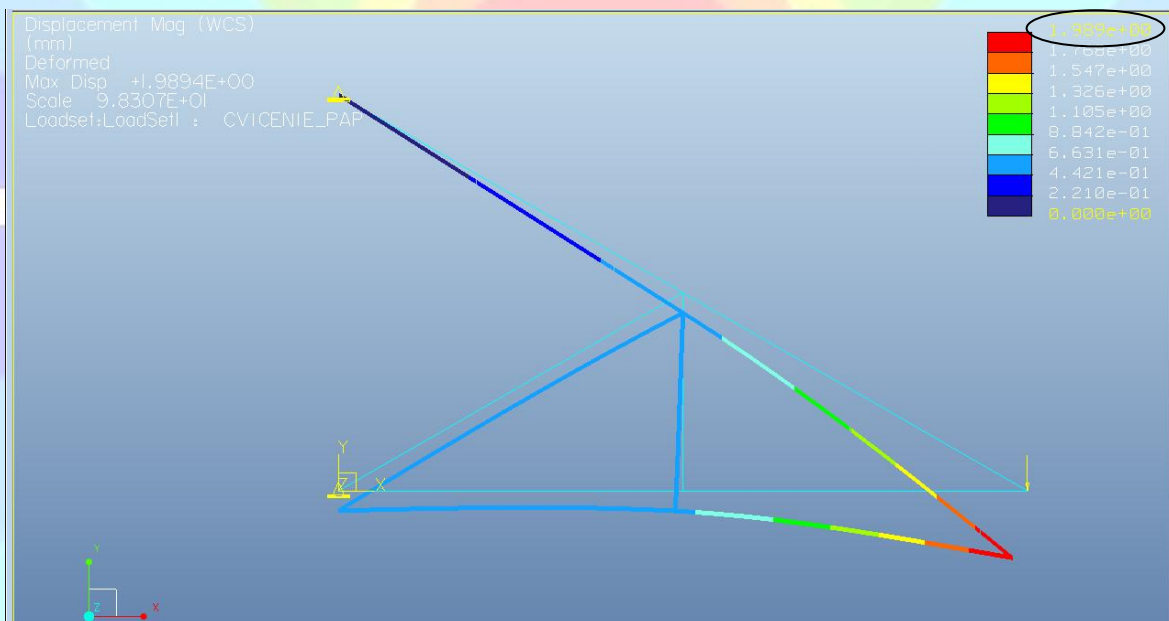
Výsledné posunutie:

$$\delta_E = \sqrt{u_E^2 + v_E^2} = \sqrt{(0,441 \text{ mm})^2 + (1,94 \text{ mm})^2} = 1,989 \text{ mm}$$

Opäť možno konštatovať, že výsledky sa zhodujú.



a)



b)

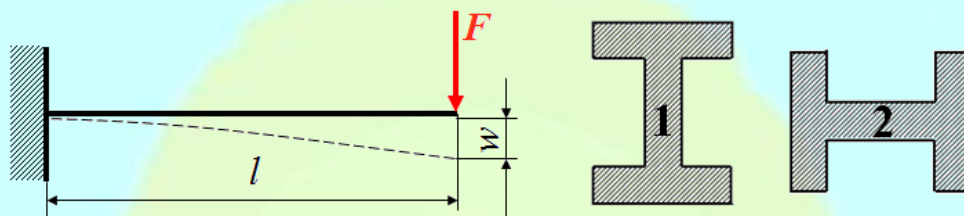
Obr. 2.29



3 PRIEREZOVÉ CHARAKTERISTIKY

Pevnosť a tuhosť konštrukčných prvkov závisí pri niektorých druhoch namáhania nielen od veľkosti prierezu A , ale aj od tvaru plochy priečneho prierezu a orientácii k rovine zaťaženia.

Príkladom môže byť votknutý nosník na konci zaťažený osamelou silou F . Napriek tomu, že plocha prierezu A je rovnaká v prípade 1 aj 2, priehyb rovnaký nie je ($w_1 < w_2$), čo je spôsobené prierezovou charakteristikou osový kvadratický moment J .



Obr. 3.1

Prierezové charakteristiky a príklady ich použitia (Tab. 3.1):

Tab. 3.1

Prierezové charakteristiky:	Použitie pre výpočet:
Prierezová plocha A	normálové napätie pri ťahu/tlaku
Statické momenty S	súradnice ťažiska šmykové napätie pri ohybe
Kvadratické momenty J :	
• osové kvadratické momenty J_y, J_z	priehyb normálové napätie pri ohybe
• polárne kvadratické momenty J_p ,	šmykové napätie pri krútení uhol skrútenia
Deviačný moment D ,	uhol odklonu hlavných centrálnych osí
Kvadratické polomery prierezu i ,	excentrický ťah/tlak
Moduly prierezu:	
• v ohybe W_o	normálové napätie pri ohybe
• v krute W_k	šmykové napätie pri krútení

Medzi často používané prierezy patria prierezy s jednoduchou prierezovou plochou v tvare kruhu, obdĺžnika (štvorca) alebo trojuholníka. Samozrejme sú používané aj zložené prierezy, napríklad prierezy U, I, T, L, medzikružie alebo iné. Zložená prierezová plocha (zložený prierez) je plocha zložená z jednoduchých geometrických plôch ako sú obdĺžnik, kruh alebo trojuholník.

Ak pre konštrukčný prvok je použitý polotovár s normalizovaným priečnym prierezom, prierezové charakteristiky nájdeme v Strojníckych tabuľkách.



3.1 Výpočet súradníc y_T a z_T ťažiska T zloženého prierezu

Súradnice ťažiska y_T a z_T zloženého prierezu s plochou A rozdeleného na konečný počet jednoduchých geometrických plôch A_i dostaneme:

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z'i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ti} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3.1)$$

$$z_T = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y'i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{Ti} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3.2)$$

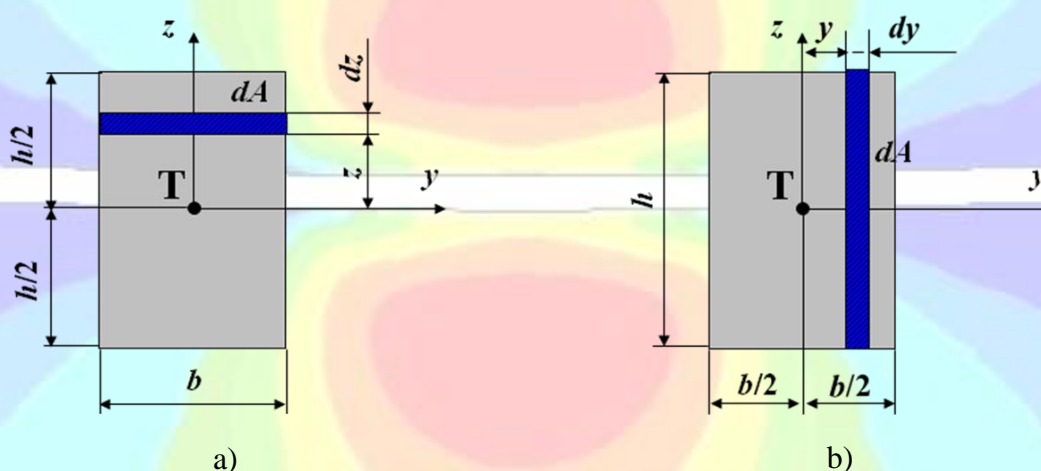
kde $S_{y'i}$ a $S_{z'i}$ sú statické momenty zloženej plochy k osiam y' , z' ; y_{Ti} a z_{Ti} sú súradnice ťažiska i -tej jednoduchkej geometrickej plochy vzhľadom k osiam y' , z' ; A_i je veľkosť plochy i -tej jednoduchkej geometrickej plochy a n je počet jednoduchých geometrických plôch. Súradnicový systém y' , z' je systém, vzhľadom na ktorý počítame polohu ťažiska.

Statické momenty môžu nadobúdať kladné, záporné aj nulové hodnoty.

Osi, ktoré prechádzajú ťažiskom, nazývame centrálné (ťažiskové) osi. Majú zvyčajne označenie y , z , ale aj y_T , z_T .



3.2 Určenie kvadratických momentov J_y , J_z pre obdĺžnikový prierez k centrálnym osiam



Obr. 3.2

Pre výpočet kvadratického momentu k centrálnnej osi y platí vzťah:

$$J_y = \int_{(A)} z^2 dA \quad (3.3)$$

Po dosadení $dA=b dz$ (obr. 3.2a) dostávame kvadratický moment pre obdĺžnikový prierez k centrálnnej osi y :

$$J_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 b dz = \left[b \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \frac{h^3}{24} - \left(-b \frac{h^3}{24} \right) = \frac{bh^3}{12} \quad (3.4)$$

Analogicky postupujeme pri určení kvadratického momentu pre obdĺžnikový prierez k centrálnnej osi z .

Pre výpočet kvadratického momentu k centrálnnej osi z platí vzťah:

$$J_z = \int_{(A)} y^2 dA \quad (3.5)$$

Potom (obr. 3.2b):

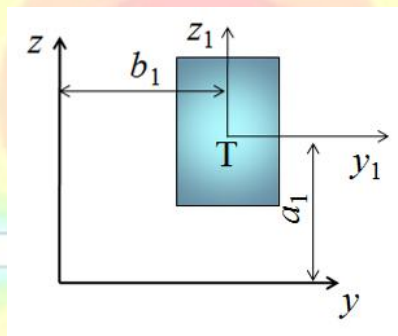
$$J_z = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 h dy = \left[h \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = h \frac{b^3}{24} - \left(h \frac{b^3}{24} \right) = \frac{hb^3}{12} \quad (3.6)$$



3.3 Určenie kvadratických momentov J_y , J_z k rovnobežným (posunutým) osiam, Steinerove vety

Ak chceme určiť kvadratický moment k inej ako centrálnej osi, ktorá je rovnobežná s centrálnou osou (obr. 3.3), musíme použiť Steinerovu vetu.

Steinerova veta znie: Kvadratický moment J_y , J_z prierezu k ľubovoľnej osi (na obr. 3.3 osi y , z) rovnobežnej s centrálnou osou (na obr. 3.3 y_1 , z_1) je rovný kvadratickému momentu prierezu k centrálnej osi J_{y_1} , J_{z_1} , ktorý je zväčšený o súčin kvadrátu kolmých vzdialeností týchto osí (na obr. 3.3 a_1 , b_1) a veľkosti plochy A . Analogicky znie Steinerova veta pre deviačný moment. Steinerove vety možno zapísať:



Obr. 3.3

$$J_y = \sum_{i=1}^n J_{y_i} + \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot A_i \quad (3.7)$$

$$J_z = \sum_{i=1}^n J_{z_i} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \cdot A_i \quad (3.8)$$

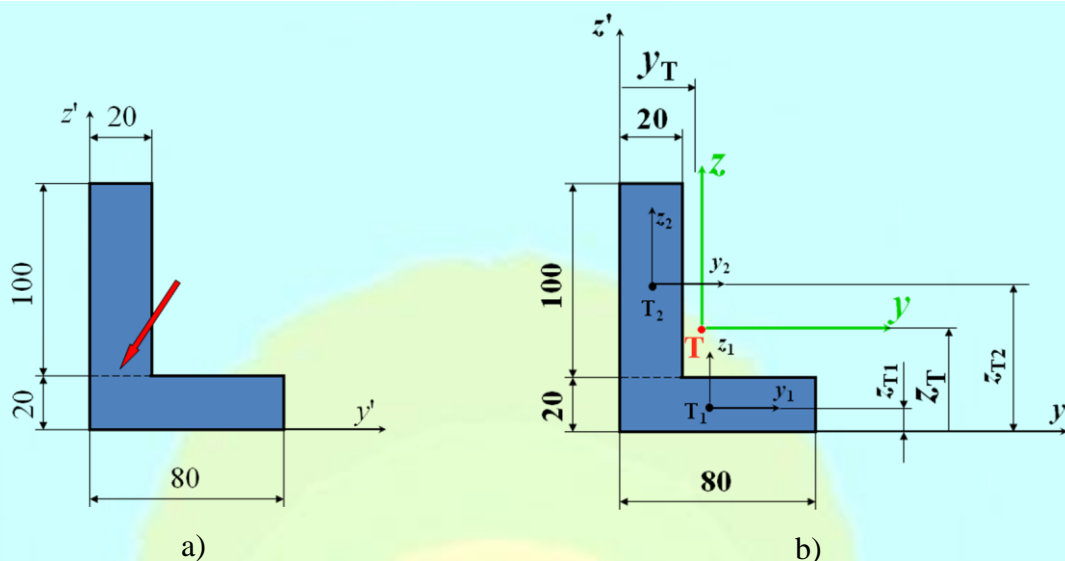
$$D_{yz} = \sum_{i=1}^n D_{y_i z_i} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \cdot A_i \quad (3.9)$$

Vo vzťahoch (3.7) – (3.9) J_{y_i} , J_{z_i} sú kvadratické momenty k centrálnym osiam y_i , z_i (osi y_i , z_i sú centrálné osi jednoduchých geometrických plôch), a_i , b_i sú kolmé vzdialenosti medzi centrálnymi osami y_i , z_i a centrálnymi osami y , z zloženej plochy a $D_{y_i z_i}$ je deviačný moment k centrálnym osiam y_i , z_i .



3.4 Postup riešenia prierezových charakteristík

1. Rozdelíme zložený prierez na jednoduché geometrické plochy (obdĺžnik, kruh, trojuholník), (obr. 3.4a).
2. Zvolíme pravouhlý súradnicový systém y' , z' (obr. 3.4a). Ak je možné využijeme vlastnosti symetrie.



Obr. 3.4

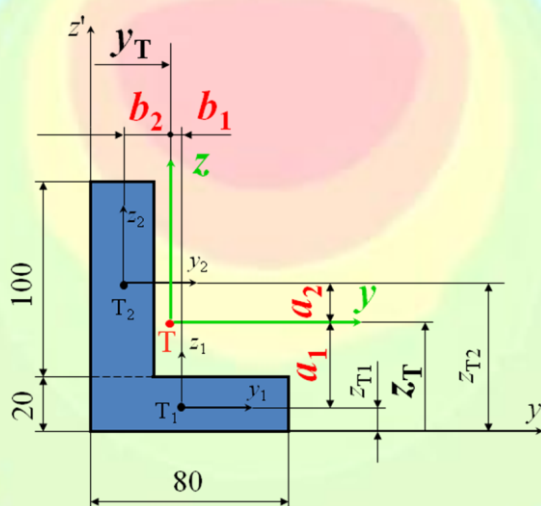
3. Vypočítame súradnice y_T a z_T ťažiska T zloženého prierezu vzhľadom na osi y' , z' (obr. 3.4b):

$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 80 \cdot 20 + 70 \cdot 20 \cdot 100}{80 \cdot 20 + 100 \cdot 20} = 43,33 \text{ mm}$$

$$y_T = \frac{y_{T1}A_1 + y_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 80 \cdot 20 + 10 \cdot 20 \cdot 100}{80 \cdot 20 + 100 \cdot 20} = 23,33 \text{ mm}$$

3. Ťažiskom vedieme novú pravouhlú súradnicovú sústavu y , z . Osi y , z sú centrálné (ťažiskové) osi (obr. 3.4b).

5. Určíme kvadratické momenty J_y , J_z (pomocou Steinerovej vety) a deviačný moment D_{yz} zloženého prierezu k ťažiskovým osiam y a z (obr. 3.5).



Obr. 3.5

Kolmé vzdialenosti a_1 , a_2 , b_1 , b_2 vypočítame (pozri obr. 3.5):

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 43,33 - 10 = 33,33 \text{ mm}$$

$$a_2 = z_{T2} - z_T = 70 - 43,33 = 26,67 \text{ mm}$$

$$b_1 = y_{T1} - y_T = 40 - 23,33 = 16,67 \text{ mm}$$

$$b_2 = y_T - y_{T2} = 23,33 - 10 = 13,33 \text{ mm}$$

Potom:

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y1} + a_1^2 A_1 + J_{y2} + a_2^2 A_2 = \\ &= \frac{80 \cdot 20^3}{12} + (-33,33)^2 \cdot 80 \cdot 20 + \frac{20 \cdot 100^3}{12} + 26,67^2 \cdot 20 \cdot 100 = \\ &= 4\,920\,000 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_z &= J_{z1} + b_1^2 A_1 + J_{z2} + b_2^2 A_2 = \\ &= \frac{20 \cdot 80^3}{12} + 16,67^2 \cdot 20 \cdot 80 + \frac{100 \cdot 20^3}{12} + (-13,33)^2 \cdot 20 \cdot 100 = \\ &= 1\,720\,000 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{yz} &= D_{y1z1} + a_1 b_1 A_1 + D_{y2z2} + a_2 b_2 A_2 = \\ &= 0 + 16,67 \cdot (-33,33) \cdot 80 \cdot 20 + 0 + (-13,33) \cdot 26,67 \cdot 20 \cdot 100 = \\ &= -177\,956 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Kvadratické momenty nadobúdajú nenulové a vždy kladné hodnoty. Deviačný moment môže nadobúdať kladné, záporné aj nulové hodnoty.

6. Určíme φ_H uhol odklonu hlavných centrálnych osí 1 a 2.

Hlavné centrálné osi sú osi, ku ktorým je deviačný moment rovný nule (hlavné osi) a zároveň také, ktoré prechádzajú ťažiskom. Majú označenie 1, 2.

Ak aspoň jedna z centrálnych (ťažiskových) osí je osou symetrie prierezu, deviačný moment k týmto osiam je nulový. Potom centrálné (ťažiskové) osi y, z sú zároveň aj hlavné centrálné osi 1, 2. Príklad je uvedený na obr. 3.6.

Deviačný moment k hlavným centrálnym osiam je rovný nule ($D_{12} = 0$).

Pre prierezy, ktoré nemajú ani jednu os symetrie pre výpočet uhla odklonu hlavných centrálnych osí použijeme vzťah:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_H = -\frac{2D_{yz}}{J_y - J_z} \quad (3.10)$$

Záporný uhol znamená, v prípade, ak $J_y > J_z$, odklon osi 1 od osi y je v smere hodinových ručičiek a pre $J_y < J_z$ odklon osi 2 od osi y je v smere hodinových ručičiek.

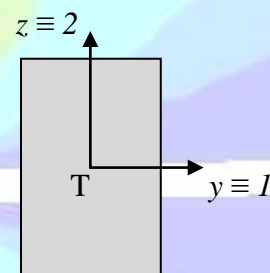
Pre riešený prierez L uhol φ_H vypočítame:

$$\operatorname{tg} 2\varphi_H = -\frac{2D_{yz}}{J_y - J_z} = -\frac{-2 \cdot 177\,956}{492 \cdot 10^4 - 172 \cdot 10^4} \Rightarrow \varphi_H = 3,17^\circ$$

Uhol φ_H je kladný a $J_y > J_z$, preto odkloníme os 1 od osi y proti smeru hodinových ručičiek (obr. 3.7a)

7. Určíme hlavné kvadratické momenty J_1, J_2 .

Hlavné kvadratické momenty J_1, J_2 sú extrémne hodnoty kvadratických momentov J_y, J_z .



Obr. 3.6

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + D_{yz}^2} \quad (3.11)$$

Platí:

$$J_1 > J_2$$

Pre riešený prierez L hlavné kvadratické momenty nadobúdajú hodnoty:

$$J_1 = 4\,929\,871 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = 1\,710\,129 \text{ mm}^4$$

Zároveň platí:

$$J_1 + J_2 = J_y + J_z \quad (3.12)$$

Pre riešený prierez L:

$$J_1 + J_2 = J_y + J_z = 664 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

8. Určíme kvadratické polomery prierezu i_1 , i_2 , ktoré sú hlavné polosi elipsy kvadratických momentov.

Kvadratické polomery prierezu určíme zo vzťahov:

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}}, \text{ m; mm} \quad (3.13)$$

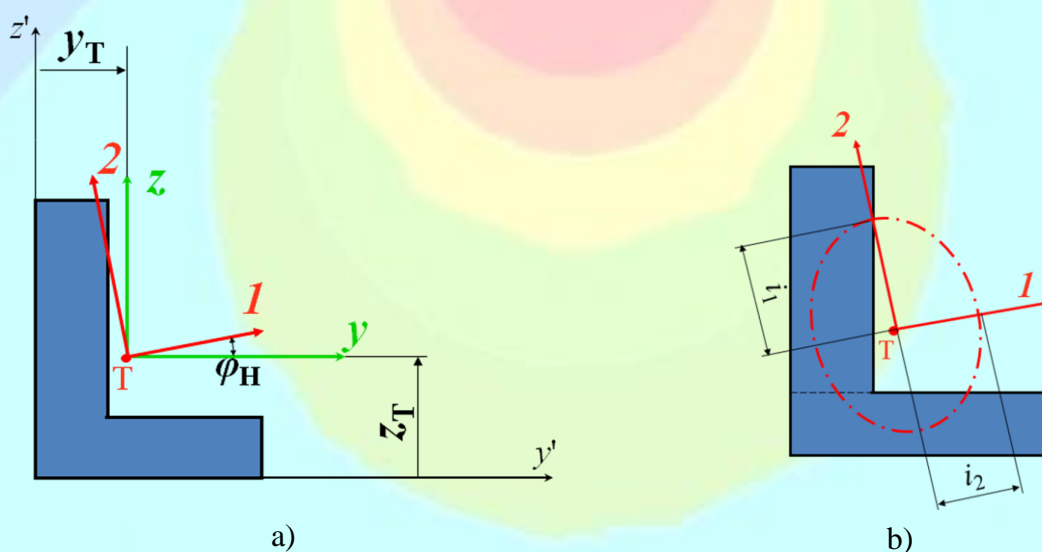
$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}}, \text{ m; mm} \quad (3.14)$$

Pre riešený prierez L:

$$i_1 = 37 \text{ mm}$$

$$i_2 = 22 \text{ mm}$$

Elipsa kvadratických momentov prierezu je elipsa, ktorej hlavné polosi i_1 a i_2 sú vynesené na osiach 2, 1 (obr. 3.7b). Túto elipsu možno použiť na určenie kvadratických momentov prierezu k ľubovoľnej centrálnej osi grafickou konštrukciou.



Obr. 3.7



3.5 Odvodenie polárneho kvadratického momentu J_P kruhového prierezu

Pre výpočet polárneho kvadratického momentu J_P platí vzťah:

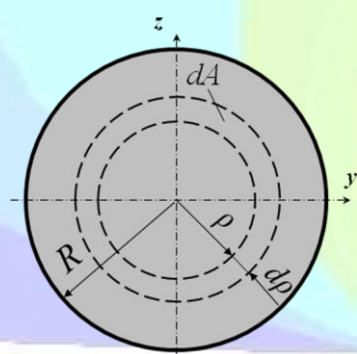
$$J_P = \int_{(A)} \rho^2 dA \quad (3.15)$$

Po dosadení $dA=2\pi\rho \cdot d\rho$ (pozri obr. 3.8) dostávame:

$$J_P = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} \quad (3.16)$$

Ak vyjadríme polárny kvadratický moment ako funkciu priemeru d , pričom polomer $R=d/2$, potom:

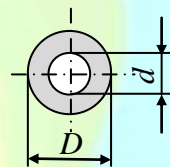
$$J_P = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.17)$$



Obr. 3.8

Pre medzikruhový prierez:

$$J_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (3.18)$$



Medzi polárnym kvadratickým momentom J_P a osovými kvadratickými momentmi J_y a J_z platí:

$$J_P = J_y + J_z \quad (3.19)$$

Pričom pre kruhový prierez platí $J_y = J_z$, potom:

$$J_y = J_z = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (3.20)$$

Polárny kvadratický moment prierezu nadobúda nenulové a vždy kladné hodnoty.

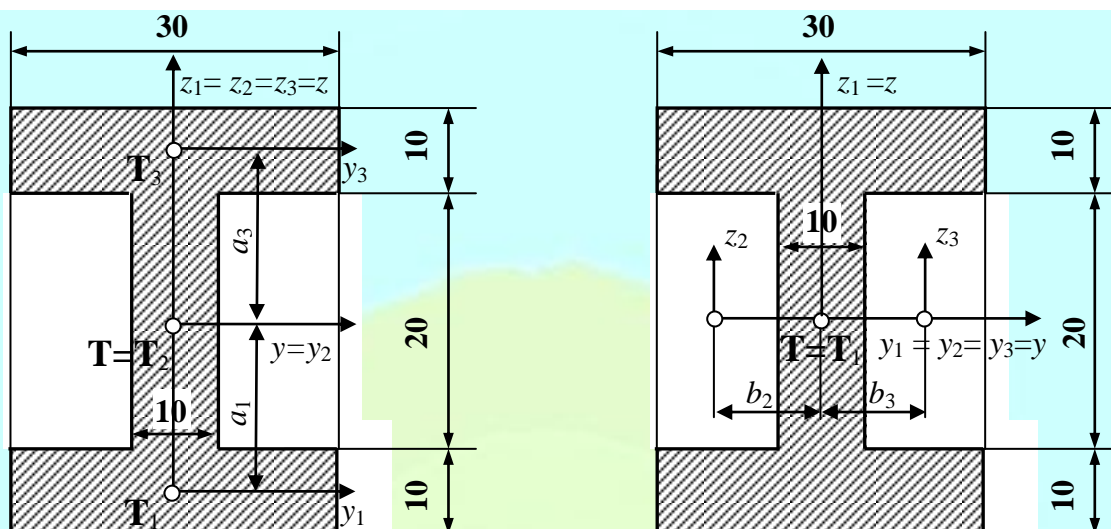
Príklad 3.1

Vypočítajte prierezové charakteristiky pre prierez symetrické I podľa obr. 3.9. Hodnoty sú v milimetroch.

H: J_y, J_z

Polohu ťažiska nie je potrebné počítat', pretože prierez je symetrický podľa dvoch osí. Ťažiskom zloženého prierezu symetrické I vediem pravouhlý súradnicový systém, t.j. centrálnu osi y, z . Uvedenú zloženú plochu možno rozdeliť na:

- tri obdĺžniky (30x10mm + 10x20mm + 30x10mm) alebo
- tri obdĺžniky (30x40mm - 10x20mm - 10x20mm).



Obr.3.9

- výpočet a):

Kvadratický moment J_y vypočítame podľa Steinerovej vety (3.7), $a_1 = a_3 = 15\text{ mm}$; $a_2 = 0$; $J_{y1} = J_{y3}$:

$$J_y = J_{y2} + 2 \cdot (J_{y1} + a_1^2 \cdot A_1) = \frac{10 \cdot 20^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{30 \cdot 10^3}{12} + 15^2 \cdot 30 \cdot 10 \right) = 146\,666,67\text{ mm}^4$$

Na výpočet kvadratického momentu J_z nepotrebujeme Steinerovu vetu, pretože osi z_1, z_2, z_3 a z sú totožné, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $J_{z1} = J_{z3}$:

$$J_z = 2J_{z1} + J_{z2} = 2 \cdot \frac{10 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 46\,666,67\text{ mm}^4$$

- výpočet b):

Na výpočet kvadratického momentu J_y nepotrebujeme Steinerovu vetu, pretože osi y_1, y_2, y_3 a y sú totožné, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $J_{y2} = J_{y3}$:

$$J_y = J_{y1} - 2J_{y2} = \frac{30 \cdot 40^3}{12} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 146\,666,67\text{ mm}^4$$

Kvadratický moment J_z vypočítame podľa Steinerovej vety (3.8), $b_2 = b_3 = 10\text{ mm}$; $b_1 = 0$;

$$J_{z2} = J_{z3}:$$

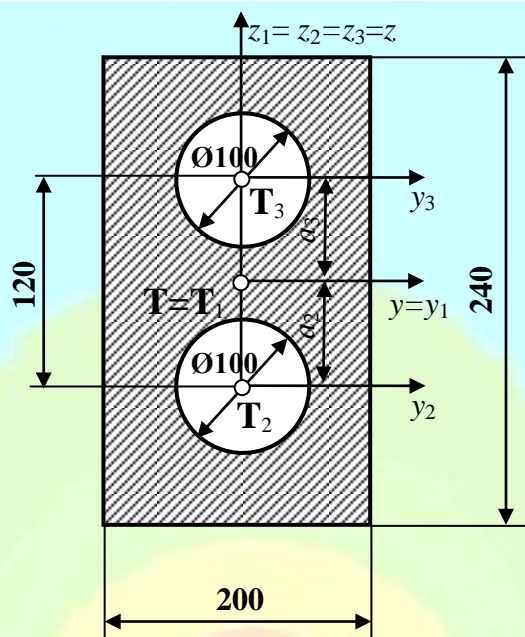
$$J_z = J_{z1} - 2 \cdot (J_{z2} + b_2^2 \cdot A_2) = \frac{40 \cdot 30^3}{12} - 2 \cdot \left(\frac{20 \cdot 10^3}{12} + 10^2 \cdot 20 \cdot 10 \right) = 46\,666,67\text{ mm}^4$$

Príklad 3.2

Vypočítajte prierezové charakteristiky pre prierez podľa obr. 3.10. Hodnoty sú v milimetroch.

H: J_y, J_z





Obr. 3.10

Polohu ťažiska nie je potrebné počítať, pretože prierez je symetrický podľa dvoch osí. Ťažiskom zloženého prierezu vediem pravouhlý súradnicový systém, t.j. centrálnu osi y, z . Uvedenú zloženú plochu možno rozdeliť na jeden obdĺžnik (200×240) a dva kruhy ($\varnothing 100$). Kvadratický moment J_y podľa (3.7), $a_2 = a_3 = 60 \text{ mm}$; $a_1 = 0$; $J_{y_2} = J_{y_3}$:

$$J_y = J_{y_1} - 2(J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2) = \frac{200 \cdot 240^3}{12} - 2 \left(\frac{\pi \cdot 100^4}{64} + 60^2 \cdot \frac{\pi \cdot 100^2}{4} \right) = 164,03 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Kvadratický moment J_z , $b_1 = b_2 = b_3 = 0$; $J_{z_2} = J_{z_3}$:

$$J_z = J_{z_1} - 2J_{z_2} = \frac{240 \cdot 200^3}{12} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 100^4}{64} = 150,18 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Príklad 3.3

Vypočítajte prierezové charakteristiky pre prierez I podľa obr. 3.11. Hodnoty sú v milimetroch.

H: $z_T, J_y, J_z, D_{yz}, \varphi_H, J_1, J_2, i_1, i_2$

Vypočítame súradnicu z_T ťažiska T zloženého prierezu I vzhľadom na osi y' . Súradnicu y_T nie je potrebné počítať, lebo os z' je zvolená na osi symetrie prierezu, teda $y_T = 0$.

$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2 + z_{T3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 50 \cdot 10 + 70 \cdot 10 \cdot 120 + 135 \cdot 90 \cdot 10}{50 \cdot 10 + 10 \cdot 120 + 90 \cdot 10} = 80 \text{ mm}$$

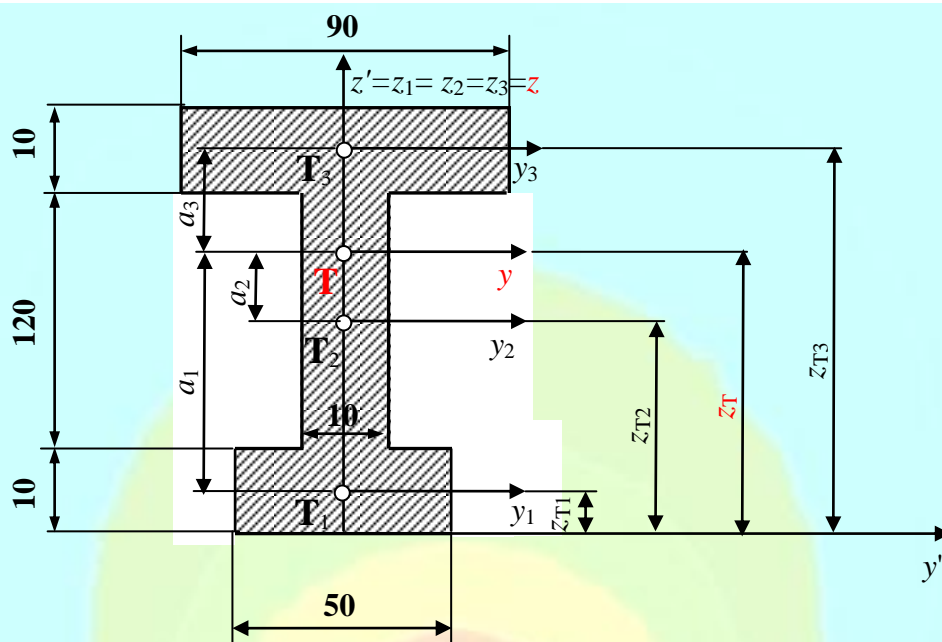
Súradnice ťažiska T zloženého prierezu sú: $[0; 80 \text{ mm}]$.

Aby sme mohli vypočítať kvadratický moment k centrálnu osi y musíme použiť Steinerovu vetu a určiť kolmé vzdialenosti medzi rovnobežnými centálnymi osami y a y_1 , y a y_2 a y a y_3 :

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 80 - 5 = 75 \text{ mm}$$

$$a_2 = z_T - z_{T2} = 80 - 70 = 10 \text{ mm}$$

$$a_3 = z_{T3} - z_T = 135 - 80 = 55 \text{ mm}$$



Obr. 3.11

Potom podľa (3.7):

$$J_y = \sum_{i=1}^3 J_{y_i} + \sum_{i=1}^3 a_i^2 \cdot A_i = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + a_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= \frac{50 \cdot 10^3}{12} + 75^2 \cdot 50 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 120^3}{12} + 10^2 \cdot 10 \cdot 120 + \frac{90 \cdot 10^3}{12} + 55^2 \cdot 90 \cdot 10 = 7\,106\,667 \text{ mm}^4$$

Kvadratický moment J_z ; $b_1 = b_2 = b_3 = 0$:

$$J_z = \sum_{i=1}^3 J_{z_i} = J_{z_1} + J_{z_2} + J_{z_3} = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + \frac{120 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 90^3}{12} = 721\,667 \text{ mm}^4$$

Devičný moment $D_{yz} = 0$, lebo je prierez symetrický aspoň podľa jednej osi. Potom centrálné osi y, z sú zároveň aj hlavnými centrálnymi osami 1 a 2 a kvadratické momenty J_y, J_z sú zároveň aj hlavné kvadratické momenty:

$$J_1 > J_2 \rightarrow J_1 = J_y$$

$$J_y > J_z \rightarrow J_2 = J_z$$

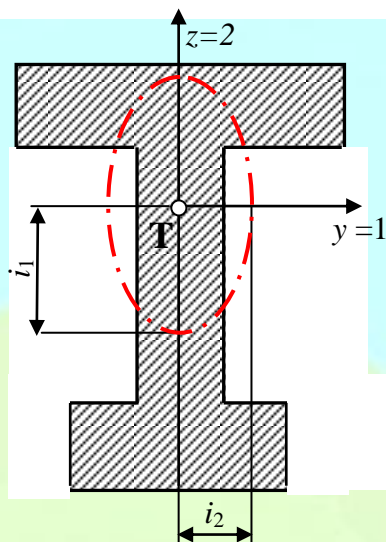
Z uvedeného vyplýva, že $y \equiv 1$ a $z \equiv 2$. Uhol φ_H nie je potrebné počítať: $\varphi_H = 0$

Kvadratické polomery prierezu možno vypočítať podľa (3.13) a (3.14):

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{7\,106\,667 \text{ mm}^4}{2600 \text{ mm}^2}} = 52,28 \text{ mm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{721\,667 \text{ mm}^4}{2600 \text{ mm}^2}} = 16,67 \text{ mm}$$

Možno vykresliť elipsu kvadratických momentov, ktorej hlavné polosí i_1 a i_2 sú vynesené na osiach 2, 1 (obr. 3.12).

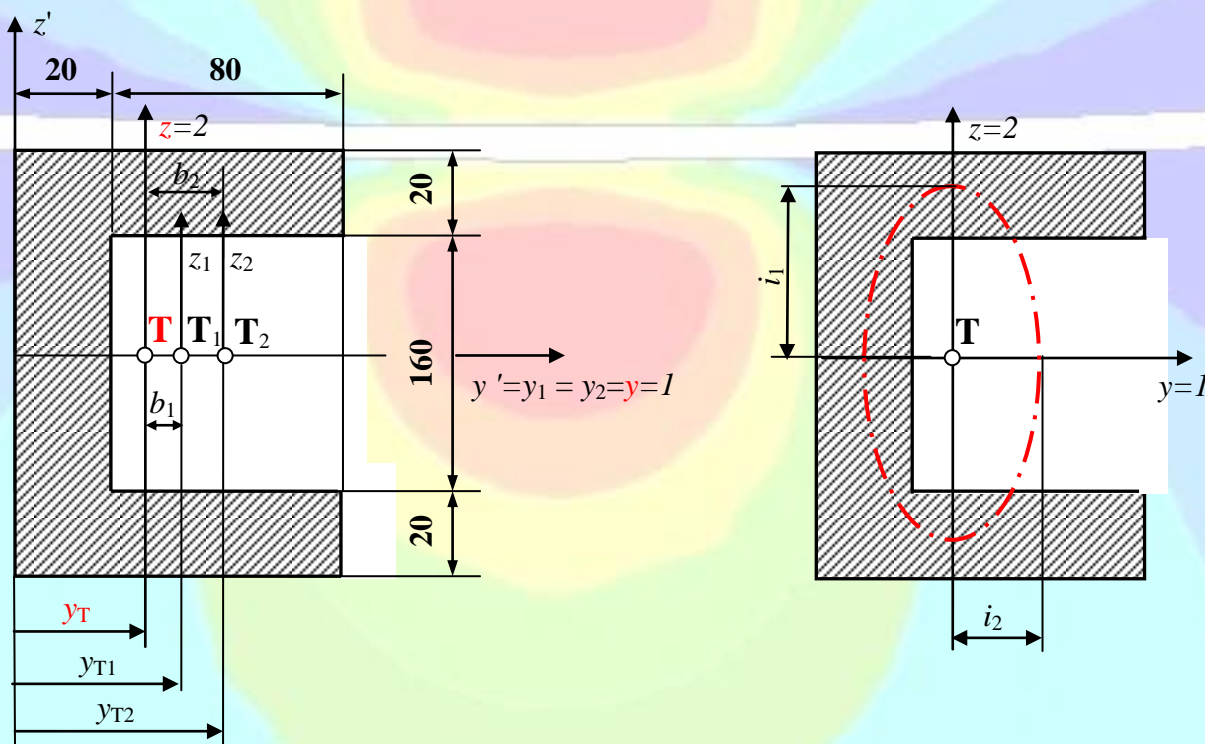


Obr.3.12

Príklad 3.4

Vypočítajte prierezové charakteristiky pre prierez U podľa obr. 3.13. Hodnoty sú v milimetroch.

H: $z_T, J_y, J_z, D_{yz}, \varphi_H, J_1, J_2, i_1, i_2$



Obr. 3.13

Prierez U možno rozdeliť na obdĺžniky niekoľkými spôsobmi. Výpočet urobíme s výhodou rozdelením na obdĺžnik 100x200mm a odčítaním obdĺžnika 80x160mm.

Vypočítame súradnicu y_T ťažiska T zloženého prierezu vzhľadom na osi z' . Súradnicu z_T nie je potrebné počítať lebo os y' je zvolená na osi symetrie prierezu, teda $z_T=0$.

$$y_T = \frac{y_{T1}A_1 - y_{T2}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot 200 - 60 \cdot 80 \cdot 160}{100 \cdot 200 - 80 \cdot 160} = 32,22 \text{ mm}$$

Súradnice ťažiska T zloženého prierezu sú: [32,22mm;0].

Kvadratický moment J_y ; $a_1 = a_2 = 0$:

$$J_y = J_{y1} - J_{y2} = \frac{100 \cdot 200^3}{12} - \frac{80 \cdot 160^3}{12} = 3\,936 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Aby sme mohli vypočítať kvadraticky moment k centrálnej osi z musíme použiť Steinerovu vetu a určiť kolmé vzdialenosti medzi rovnobežnými centrálnymi osami z a z_1 , z a z_2 :

$$b_1 = y_{T1} - y_T = 50 - 32,22 = 17,78 \text{ mm}$$

$$b_2 = y_{T2} - y_T = 60 - 32,22 = 27,78 \text{ mm}$$

Potom podľa (3.8):

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{i=1}^2 J_{zi} + \sum_{i=1}^2 b_i^2 \cdot A_i = J_{z1} + b_1^2 \cdot A_1 - J_{z2} + b_2^2 \cdot A_2 = \\ &= \frac{200 \cdot 100^3}{12} + 17,78^2 \cdot 200 \cdot 100 - \frac{160 \cdot 80^3}{12} + 27,78^2 \cdot 160 \cdot 80 = 628,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Devičný moment $D_{yz} = 0$, lebo je prierez symetrický aspoň podľa jednej osi. Potom centrálny osi y , z sú zároveň aj hlavnými centrálnymi osami 1 a 2 a kvadratické momenty J_y , J_z sú zároveň aj hlavné kvadratické momenty:

$$J_1 > J_2 \rightarrow J_1 = J_y$$

$$J_y > J_z \rightarrow J_2 = J_z$$

Z uvedeného vyplýva, že $y \equiv 1$ a $z \equiv 2$. Uhol φ_H nie je potrebné počítať: $\varphi_H = 0$

Kvadratické polomery prierezu možno vypočítať podľa (3.13) a (3.14):

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{A}} = \sqrt{\frac{3936 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{7200 \text{ mm}^2}} = 73,9 \text{ mm}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{A}} = \sqrt{\frac{628,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{7200 \text{ mm}^2}} = 29,5 \text{ mm}$$

Možno vykresliť elipsu kvadratických momentov, ktorej hlavné polosy i_1 a i_2 sú vynesené na osiach 2, 1 (obr. 3.13).

Príklad 3.5

Vypočítajte prierezové charakteristiky pre prierez T podľa obr. 3.13. Hodnoty sú v milimetroch.

H: z_T , J_y , J_z

Vypočítame polohu ťažiska zloženého prierezu T. Súradnicu y_T nie je potrebné počítať, lebo os z' je zvolená na osi symetrie prierezu, teda $y_T = 0$.

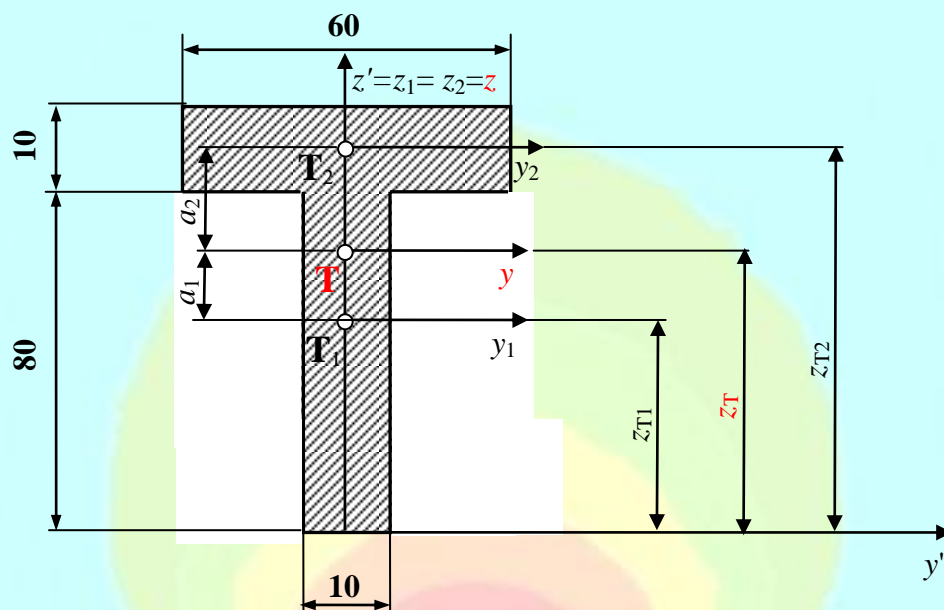
$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{40 \cdot 10 \cdot 80 + 85 \cdot 60 \cdot 10}{10 \cdot 80 + 60 \cdot 10} = 59,3 \text{ mm}$$

Súradnice ťažiska T zloženého prierezu sú: [59,3mm;0].

Kolmé vzdialenosti medzi centrálnymi osami:

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 59,3 - 40 = 19,3 \text{ mm}$$

$$a_2 = z_{T2} - z_T = 85 - 59,3 = 25,7 \text{ mm}$$



Obr. 3.14

Kvadratický moment k centrálnej osi y :

$$J_y = \sum_{i=1}^2 J_{y_i} + \sum_{i=1}^2 a_i^2 \cdot A_i = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= \frac{10 \cdot 80^3}{12} + 19,3^2 \cdot 10 \cdot 80 + \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 25,7^2 \cdot 60 \cdot 10 = 1\,125\,953 \text{ mm}^4$$

Kvadratický moment k centrálnej osi z :

$$J_z = \sum_{i=1}^2 J_{z_i} = J_{z_1} + J_{z_2} = \frac{80 \cdot 10^3}{12} + \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 186\,667 \text{ mm}^4$$

4 JEDNODUCHÉ KRÚTENIE

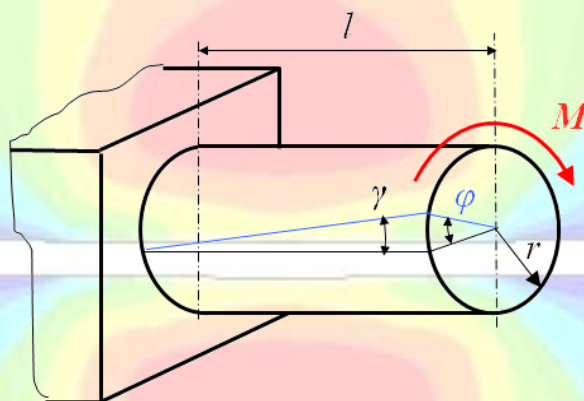
Pri jednoduchom krútení má tvar prierezu vplyv na priebeh šmykového napätia v priereze. Preto pri výpočte je potrebné rozlišovať, či teleso namáhané jednoduchým krútením má kruhový, resp. medzikruhový prierez, alebo či ide o iný - nekruhový prierez. Spôsob výpočtu je v oboch prípadoch odlišný. Dôvodom je to, že pri nekruhových prierezoch predpoklad o zachovaní rovinnosti priečného prierezu nie je splnený, pretože u nekruhových prierezoch dochádza k ich deplancii. Vzťahy, ktoré platia pre jednoduché krútenie hriadeľov kruhového a medzikruhového prierezu, neplatia pre nekruhové prierezy.

4.1 Krútenie hriadeľov kruhového a medzikruhového prierezu

Vnútna silová veličina, ktorá vzniká pri jednoduchom krútení je krútiaci moment T [Nm]. Teleso kruhového (medzikruhového) prierezu namáhané krútením nazývame hriadeľ.

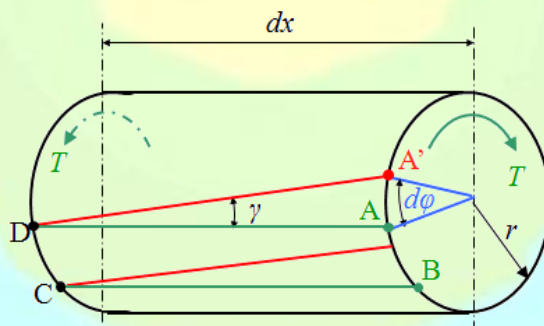
Na znamienku krútiaceho momentu T nezáleží (na rozdiel od jednoduchého ťahu/tlaku, kedy podľa orientácie osovej sily N rozlišujeme ťah, resp. tlak), pretože teleso z izotropného materiálu sa správa rovnako pre obidve orientácie krútiaceho momentu T .

Na obr. 4.1 je zobrazený votknutý hriadeľ na voľnom konci zaťažený krútiacim momentom M , ktorý spôsobuje deformáciu, a to uhol skrútenia φ , čo je pootočenie prierezu okolo osi hriadeľa a skos γ .



Obr. 4.1

Pri odvodení vzťahov pre výpočet napätia a deformácie pri krútení budeme vychádzať z nasledovných predpokladov, ktoré sú potvrdené aj experimentmi. Predpoklady sú: os hriadeľa zostáva aj po zaťažení priama; priečne prierezy zostávajú rovinné a kruhové; vzdialenosti medzi priečnymi prierezmi sa nemenia.



Obr. 4.2

Vyberme z hriadeľa na obr. 4.1 element dx zobrazený na obr. 4.2. Povrchová priamka AD sa deformuje (pootočí) o uhol γ na A'D, pričom v priečnom priereze po deformácii vznikol uhol $d\varphi$. Pre uhly γ a $d\varphi$ platí:

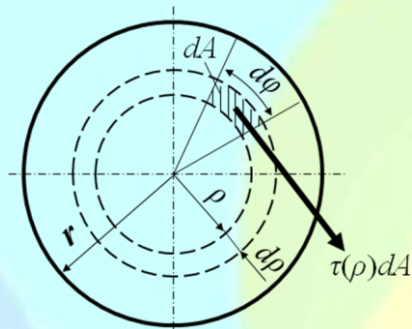
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AA'}{dx}; \quad \operatorname{tg} d\varphi = \frac{AA'}{r} \quad (4.1)$$

Po zohľadnení, že tangens malých uhlov zodpovedá približne uhlu a porovnaní AA' zo vzťahov (4.1) dostávame:

$$AA' = \gamma dx = r d\varphi \Rightarrow \gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r \vartheta \quad (4.2)$$

kde ϑ je pomerný uhol skrútenia [$\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$].

Za účelom vyšetrenia vzťahu medzi šmykovým napätím τ a krútiacim momentom T budeme skúmať situáciu v pričnom priereze (obr. 4.3).



Obr. 4.3

Krútiaci moment T v priereze je výsledným účinkom šmykových napätí, ktoré pôsobia v priereze, platí:

$$T = \int_{(A)} \tau(\rho) dA \cdot \rho \quad (4.3)$$

kde ρ je vzdialenosť vlákna prierezu od osi hriadeľa.

Po dosadení (4.2) do Hookeovho zákona pre čistý šmyk dostávame pre šmykové napätie v krajných vláknach prierezu:

$$\tau = \gamma \cdot G = r \cdot \vartheta \cdot G \quad (4.4)$$

kde G je modul pružnosti v šmyku [Pa; MPa].

Pre vlákna vo vzdialenosti ρ od osi hriadeľa šmykové napätie vypočítame:

$$\tau(\rho) = \rho \cdot \vartheta \cdot G \quad (4.5)$$

Po dosadení (4.5) do (4.3) dostávame:

$$T = \int_{(A)} \rho^2 \cdot \vartheta \cdot G dA = \vartheta \cdot G \int_{(A)} \rho^2 dA = \vartheta \cdot G \cdot J_p \quad (4.6)$$

kde J_p je polárny kvadratický moment prierezu [m^4 ; mm^4]. (Pozri (3.15)).

Z čoho vyplýva:

$$\vartheta = \frac{T}{G \cdot J_p} \quad (4.7)$$

kde súčin $G \cdot J_p$ je tuhosť v krútení (torzná tuhosť).

Po dosadení (4.7) do (4.5) dostávame:

$$\tau(\rho) = \rho \frac{T}{J_p}, \quad \text{Pa; MPa} \quad (4.8)$$

čo je vzťah pre výpočet šmykového napätia vo vláknach vo vzdialenosti ρ .

Maximálne šmykové napätie τ_{\max} vzniká v krajných vláknach prierezu. Práve toto napätie je potrebné vypočítať z hľadiska kontroly, resp. dimenzovania, hriadeľov.

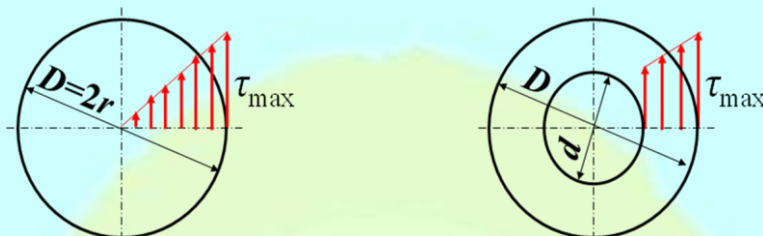
$$\tau_{\max} = \tau \left(\rho_{\max} = r = \frac{D}{2} \right) = \frac{T}{J_p} r = \frac{T}{W_K} \quad (4.9)$$

kde

$$W_K = \frac{J_P}{r}, \text{ m}^3; \text{ mm}^3 \quad (4.10)$$

čo je modul prierezu v krútení.



Obr. 4.4 znázorňuje priebehy šmykového napätia v kruhovom a medzikruhovom priereze pri jednoduchom krútení.



Obr. 4.4

V tabuľke 4.1 je prehľad základných vzťahov prierezových charakteristík pre kruhový a medzikruhový prierez.

Tab. 4.1

	J_P	W_K
	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$

Pre vyjadrenie deformácie φ , čo je uhol skrútenia (pootočenia), budeme vychádzať zo vzťahov (4.2) a (4.7), z ktorých vyplýva:

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx} = \vartheta \Rightarrow d\varphi = \frac{T}{G \cdot J_P} dx \quad (4.11)$$

Po integrácii:

$$\varphi = \int_{(l)} \frac{T}{G \cdot J_P} dx, \text{ rad} \quad (4.12)$$

V prípadoch, ak $\frac{T}{G \cdot J_P} = \text{konšt.}$, potom uhol skrútenia počítame podľa:

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_P} \quad (4.13)$$

kde l je dĺžka hriadeľa, resp. dĺžka úseku.



4.2 Postup pri výpočte staticky určitých konštrukcií namáhaných jednoduchým krútením

Pri staticky určitých úlohách pri jednoduchom krútení zachováваме nasledujúci postup:

1. Podľa počtu nespojitosti prierezu a zaťaženia hriadeľa si zvolíme príslušný počet myšlených rezov.
2. Do myšlených rezov vložíme výslednice vnútorných síl, t.j. krútiace momenty $T(x_i)$ v kladnom smere podľa znamienkovej dohody.

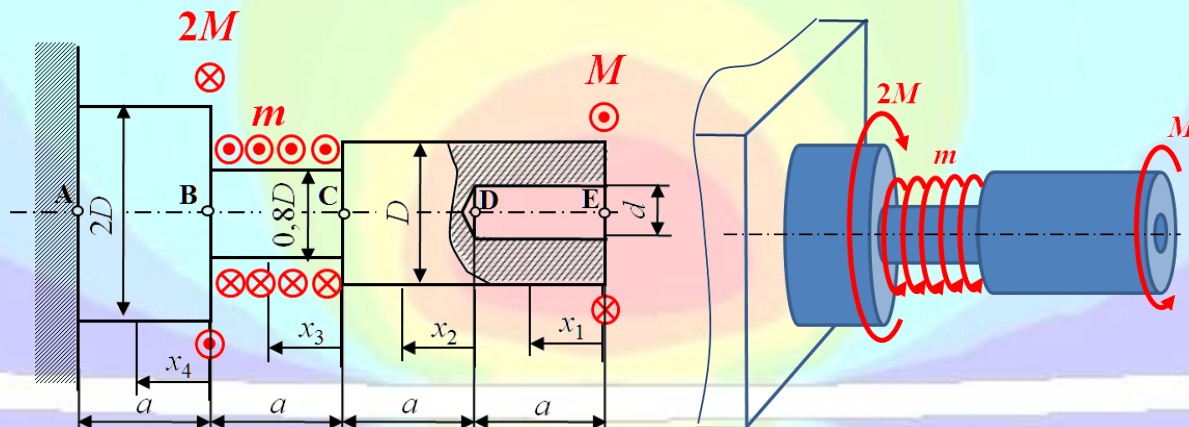
3. Zo statických podmienok rovnováhy odrezanej časti hriadeľa určíme krútiace momenty $T(x_i)$ v jednotlivých myšlených rezoch.
4. Vypočítame šmykové napätia $\tau(x_i)$ v príslušných rezoch.
5. Vypočítame uhly skrútenia $\varphi(x_i)$ jednotlivých priereзов.
6. Vykreslíme priebehy „ T “, „ τ “ a „ φ “ po celej dĺžke hriadeľa.

Príklad 4.1

Pre staticky určitý hriadeľ kruhového a medzikruhového prierezu s danými priermi D, d zaťažený krútiacim momentom M , spojitým krútiacim momentom m podľa obr. 4.5 určte priebeh krútiacich momentov „ T “, šmykových napätí v krajných vláknoch priereзов „ τ “ a uhol pootočenia jednotlivých priereзов „ φ “. Daný je dĺžkový rozmer a a modul pružnosti v šmyku G .

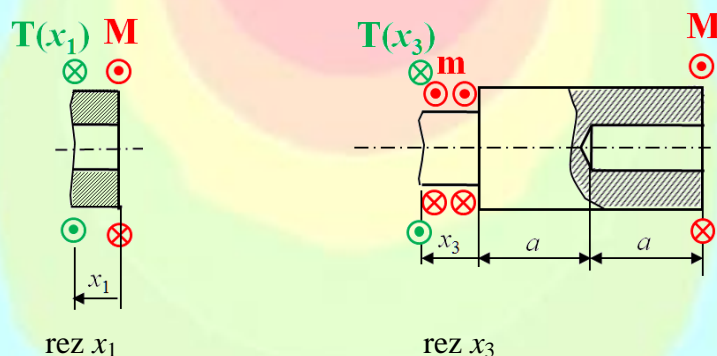
$$D: M=2\text{kNm}, m=600\text{Nm}\cdot\text{m}^{-1}, a=800\text{mm}, D=70\text{mm}, d=30\text{mm}, G=8\cdot 10^4\text{MPa}$$

$$H: \text{„}T\text{“}, \text{„}\tau\text{“}, \text{„}\varphi\text{“}$$



Obr. 4.5

Metódou myšleného rezu určíme vnútorné krútiace momenty na jednotlivých úsekoch. Obr. 4.6 znázorňuje rez x_1 a x_3 .



Obr. 4.6

Podmienky rovnováhy pre krútiace momenty T v myšlených rezoch oddelených častiach hriadeľa:

$$T(x_1) = M = 2\text{kNm}$$

$$T(x_1) = T(x_2) = M = 2\text{kNm}$$

$$T(x_3) = M + m\cdot a$$

$$T(x_3 = 0) = M = 2 \text{ kNm}$$

$$T(x_3 = a) = M + m \cdot a = 2 \text{ kNm} + 0,6 \text{ kNm} \cdot 0,8 \text{ m} = 2,48 \text{ kNm}$$

$$T(x_4) = M + m \cdot a - 2M = -M + m \cdot a = -2 \text{ kNm} + 0,6 \text{ kNm} \cdot 0,8 \text{ m} = -1,52 \text{ kNm}$$

Výpočet polárnych kvadratických momentov:

$$J_{p1} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi \cdot (0,07^4 - 0,03^4) \text{ m}^4}{32} = 22,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_{p2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,07^4 \text{ m}^4}{32} = 23,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_{p3} = \frac{\pi \cdot (0,8D)^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0,8 \cdot 0,07)^4 \text{ m}^4}{32} = 9,65 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_{p4} = \frac{\pi \cdot (2D)^4}{32} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot 0,07)^4 \text{ m}^4}{32} = 377,14 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

Výpočet šmykových napätí v krajných vláknach:

$$\tau(x_1) = \frac{T(x_1)}{J_{p1}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{22,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,07 \text{ m}}{2} = 30\,742\,205 \text{ Pa} = +30,7 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_2) = \frac{T(x_2)}{J_{p2}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{23,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,07 \text{ m}}{2} = +29,7 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_3 = 0) = \frac{T(x_3 = 0)}{J_{p3}} \cdot \frac{0,8D}{2} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{9,65 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,8 \cdot 0,07 \text{ m}}{2} = +58 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_3 = a) = \frac{T(x_3 = a)}{J_{p3}} \cdot \frac{0,8D}{2} = \frac{2,48 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{9,65 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,8 \cdot 0,07 \text{ m}}{2} = +72 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_4) = \frac{T(x_4)}{J_{p4}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{-1,52 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{377,14 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} \cdot \frac{0,07 \text{ m}}{2} = -2,8 \text{ MPa}$$

Výpočet uhlov pootočenía:

$$\varphi_A = 0$$

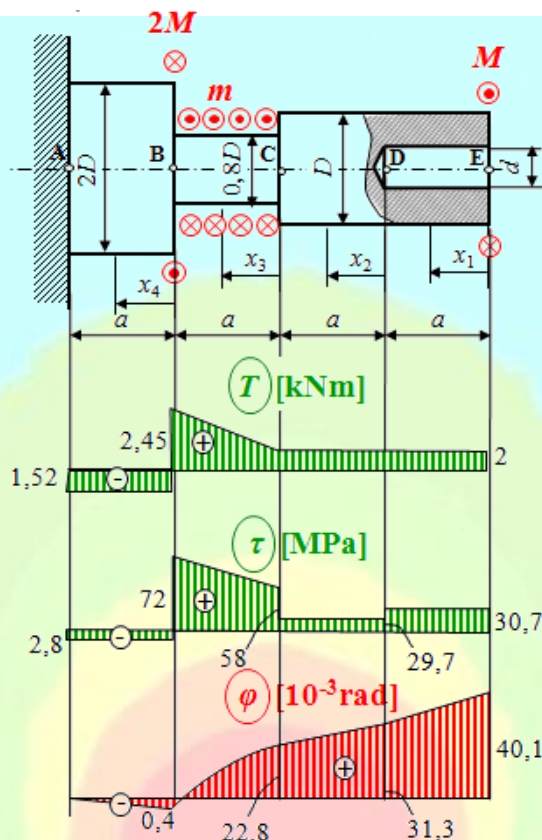
$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = \varphi_A + \frac{T(x_4) \cdot a}{G \cdot J_{p4}} = 0 - \frac{1,52 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,8 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 377,14 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = -0,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0,023^\circ$$

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_B + \varphi_{BC} = \varphi_B + \int_0^a \frac{T(x_3)}{G \cdot J_{p3}} dx_3 = \varphi_B + \frac{1}{G \cdot J_{p3}} \int_0^a (M + m \cdot x_3) dx_3 = \varphi_B + \frac{M \cdot a}{G \cdot J_{p3}} + \frac{m \cdot x_3^2}{2 \cdot G \cdot J_{p3}} = \\ &= -0,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad} + \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,8 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 9,65 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} + \frac{600 \text{ Nm} \cdot (0,8 \text{ m})^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 9,65 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = +22,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = +1,302^\circ \end{aligned}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{T(x_2) \cdot a}{G \cdot J_{p2}} = 22,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad} + \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,8 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 23,57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 31,28 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = +1,792^\circ$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = \varphi_D + \frac{T(x_1) \cdot a}{G \cdot J_{p1}} = 31,28 \cdot 10^{-3} \text{ rad} + \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,8 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 22,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 40,06 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = +2,295^\circ$$

Vypočítané výsledky sú graficky zobrazené na obr. 4.7.



Obr. 4.7

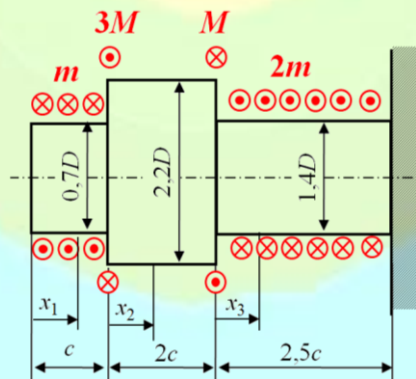
Ak porovnáme šmykové napätia $\tau(x_1)$ a $\tau(x_2)$, teda úsek s dierou a bez diery, potom možno povedať, že pomer plochy A_d s priemerom d a plochy A_D s priemerom D je $A_d/A_D = 0,184$, pomer $d/D = 0,429$, ale pomer napätí $\tau(x_1)/\tau(x_2) = 0,967$. Úsek x_1 a x_2 majú rovnakú dĺžku, teda hmotnosť úseku x_1 je až o 18,4% menšia, pričom šmykové napätie $\tau(x_1)$ je len o 3,3% menšie ako $\tau(x_2)$.

Príklad 4.2

Pre staticky určitý hriadeľ kruhového prierezu s daným priemerom D , dĺžkovým rozmerom c , zaťažený krútiacimi momentmi M a spojitými krútiacimi momentmi m podľa obr. 4.8 určte priebeh krútiacich momentov „ T “ a vypočítajte šmykové napätie v krajnom vlákne vo votknutí.

D: $M = 2 \text{ kNm}$, $m = 1 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 1 \text{ m}$, $D = 90 \text{ mm}$

H: „ T “, $\tau_{\max}^{\text{votknutie}}$



Obr. 4.8

Výpočet krútiacich momentov:

$$T(x_1) = m \cdot x_1$$

$$T(x_1 = 0) = 0$$

$$T(x_1 = c) = m \cdot c = 1 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ kNm}$$

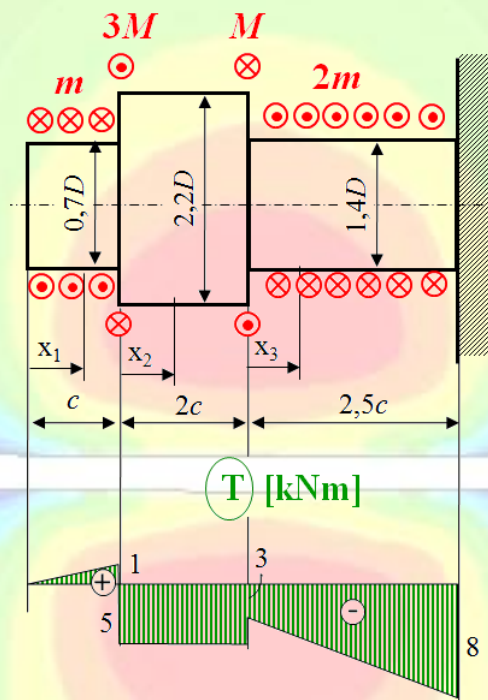
$$T(x_2) = m \cdot c - 3 \cdot M = 1 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} - 3 \cdot 2 \text{ kNm} = -5 \text{ kNm}$$

$$T(x_3) = m \cdot c - 3 \cdot M + M - 2 \cdot m \cdot x_3 = m \cdot c - 2 \cdot M - 2 \cdot m \cdot x_3$$

$$T(x_3 = 0) = m \cdot c - 2 \cdot M = 1 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} - 2 \cdot 2 \text{ kNm} = -3 \text{ kNm}$$

$$T(x_3 = 2,5c) = m \cdot c - 2 \cdot M - 2 \cdot m \cdot 2,5c = m \cdot c - 2 \cdot M - 5 \cdot m \cdot c = -4 \cdot m \cdot c - 2 \cdot M = \\ = -4 \cdot 1 \text{ kNm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1 \text{ m} - 2 \cdot 2 \text{ kNm} = -8 \text{ kNm}$$

Priebeh krútiacich momentov T je vykreslený na obr. 4.9.



Obr. 4.9

Modul prierezu v krútení:

$$W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot (1,4D)^3}{16} = \frac{\pi \cdot (1,4 \cdot 90 \text{ mm})^3}{16} = 392\,773 \text{ mm}^3$$

Šmykové napätie v krajnom vlákne vo votknutí:

$$\tau_{\text{max}}^{\text{votknutie}} = \frac{T^{\text{votknutie}}}{W_K} = \frac{T(x_3 = 2,5c)}{W_K} = \frac{8 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{392\,773 \text{ mm}^3} = -20,4 \text{ MPa}$$



4.3 Postup pri výpočte staticky neurčitých konštrukcií namáhaných jednoduchým krútením

Ak krútiaci moment T nemožno určiť zo statických podmienok rovnováhy, potom je úloha staticky neurčitá a rovnice rovnováhy musíme doplniť deformačnými podmienkami, ktorých je toľko, koľkokrát je úloha staticky neurčitá.

Postup riešenia staticky neurčitých úloh pri jednoduchom krútení:

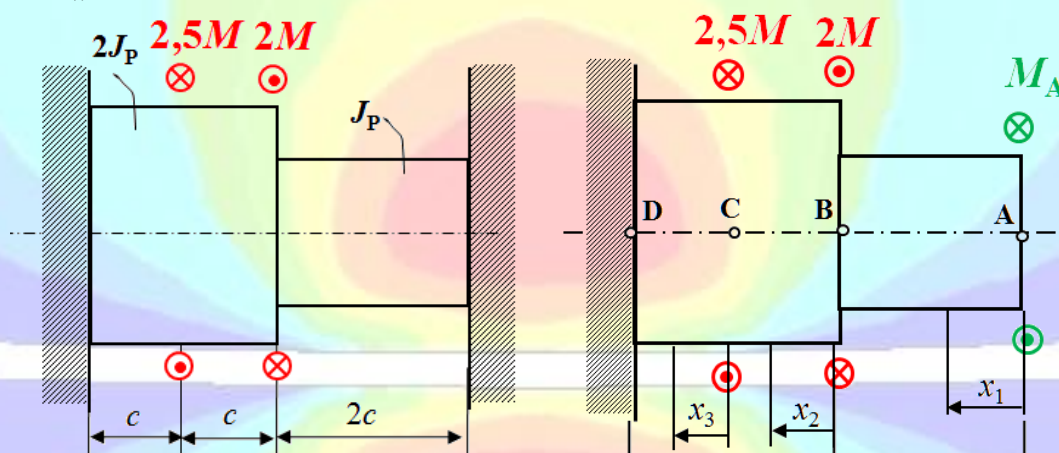
1. Úlohu staticky neurčitú nahradíme úlohou staticky určitou, a to tak, že prebytočnú väzbu odstránime a nahradíme ju staticky neurčitými veličinami (reakciami).
2. Podľa počtu staticky neurčitých veličín napíšeme príslušný počet deformačných podmienok (napr. výsledný uhol skrútenia je rovný 0) a z nich vypočítame staticky neurčité veličiny.
3. V ďalšom postupujeme ako pri úlohách staticky určitých s tým, že vypočítané staticky neurčité reakcie považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie.

Príklad 4.3

Pre staticky neurčitý hriadeľ kruhového prierezu s danými polárnymi kvadratickými momentmi J_p , ktorý je zaťažovaný krútiacimi momentmi M podľa obr. 4.10 určte priebeh krútiacich momentov „ T “.

D: $M=400\text{Nm}$

H: „ T “



Obr.4.10

Rovnice pre krútiace momenty:

$$T(x_1) = -M_A$$

$$T(x_2) = -TM_A + 2M$$

$$T(x_3) = -M_A + 2M - 2,5M = -M_A - 0,5M$$

Deformačná podmienka:

$$\varphi = 0$$

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0$$

$$\frac{T(x_1) \cdot 2c}{G \cdot J_p} + \frac{T(x_2) \cdot c}{G \cdot 2J_p} + \frac{T(x_3) \cdot c}{G \cdot 2J_p} = 0$$

Z deformačnej podmienky vyjadríme M_A :

$$M_A = 0,25M = 0,25 \cdot 400 \text{ Nm} = 100 \text{ Nm}$$

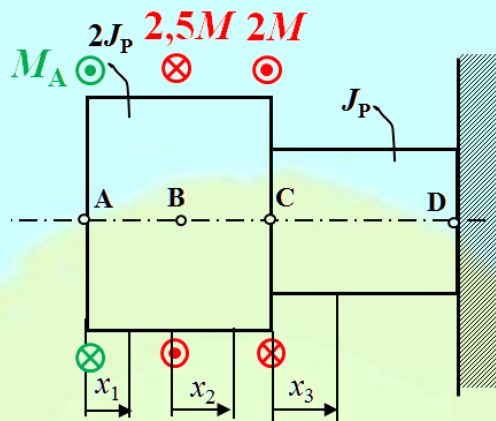
Potom:

$$T(x_1) = -M_A = -100 \text{ Nm}$$

$$T(x_2) = -M_A + 2M = -100 \text{ Nm} + 2 \cdot 400 \text{ Nm} = +700 \text{ Nm}$$

$$T(x_3) = -M_A + 2M - 2,5M = -M_A - 0,5M = -100 \text{ Nm} - 0,5 \cdot 400 \text{ Nm} = -300 \text{ Nm}$$

Ak by sme odstránili prebytočnú väzbu na ľavej strane, potom by výpočet vyzeral nasledovne:



Obr. 4.11

Rovnice pre krútiace momenty:

$$T(x_1) = -M_A$$

$$T(x_2) = -M_A + 2,5M$$

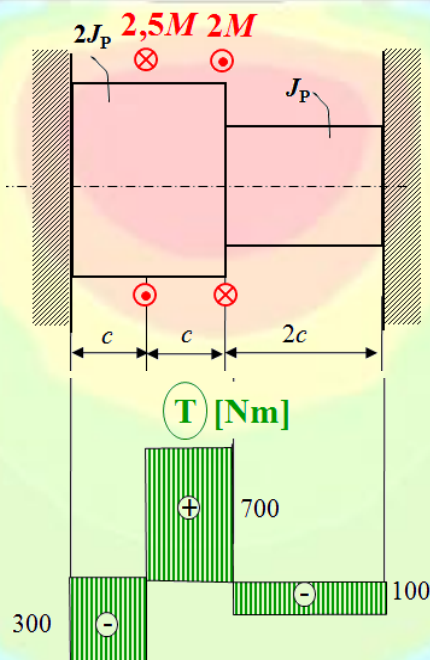
$$T(x_3) = -M_A + 2,5M - 2M = -M_A + 0,5M$$

Deformačná podmienka:

$$\varphi = 0$$

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0$$

$$\frac{T(x_1) \cdot c}{G \cdot 2J_p} + \frac{T(x_2) \cdot c}{G \cdot 2J_p} + \frac{T(x_3) \cdot 2c}{G \cdot J_p} = 0$$



Obr. 4.12

Z deformačnej podmienky vyjadríme M_A :

$$M_A = 0,75M = 0,75 \cdot 400 \text{ Nm} = 300 \text{ Nm}$$

Potom:

$$T(x_1) = -M_A = -300 \text{ Nm}$$

$$T(x_2) = -M_A + 2,5M = -300 \text{ Nm} + 2,5 \cdot 400 \text{ Nm} = +700 \text{ Nm}$$

$$T(x_3) = -M_A + 2,5M - 2M = -M_A + 0,5M = -300 \text{ Nm} + 0,5 \cdot 400 \text{ Nm} = -100 \text{ Nm}$$

Priebeh krútiacich momentov je na obr. 4.12.



4.4 Dimenzovanie pri krútení, návrh priemeru hriadeľa d

Východiskom je pevnostná podmienka:

$$\tau_{\max} \leq \tau_D \quad (4.14)$$

kde τ_D je dovolené šmykové napätie materiálu.

Potom pre kruhový prierez priemer d vyjadríme:

$$\frac{T}{W_K} \leq \tau_D$$

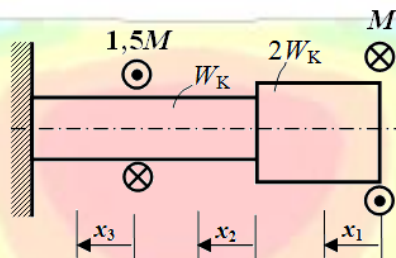
$$\frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq \tau_D \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi \tau_D}} \quad (4.15)$$

Príklad 4.4

Navrhnite priemer hriadeľa na obr. 4.13, ak je daný krútiaci moment $M=2\text{kNm}$ a dovolené šmykové napätie $\tau_D=40\text{MPa}$.

D: $M=2\text{kNm}$, $\tau_D=40\text{MPa}$

H: d



Obr. 4.13

Úloha je staticky určitá. Budeme vychádzať z pevnostnej podmienky:

$$\tau_{\max} \leq \tau_D$$

Aby sme mohli dosadiť do pevnostnej podmienky musíme zistiť, na ktorom úseku vzniká maximálne šmykové napätie. Určíme prv veľkosť krútiacich momentov:

$$T(x_1) = -M = -2 \text{ kNm}$$

$$T(x_2) = T(x_1) = -M = -2 \text{ kNm}$$

$$T(x_3) = -M + 1,5M = 0,5M = 1 \text{ kNm}$$

Veľkosť šmykových napätí na jednotlivých úsekoch:

$$\tau(x_1) = \frac{T(x_1)}{2W_K} = -\frac{1 \text{ kNm}}{W_K}$$

$$\tau(x_2) = \frac{T(x_2)}{W_K} = -\frac{2 \text{ kNm}}{W_K} \Rightarrow \tau_{\max} = \tau(x_2)$$

$$\tau(x_3) = \frac{T(x_3)}{W_K} = \frac{1 \text{ kNm}}{W_K}$$

Po úprave na spoločného menovateľa vyberáme najväčšiu hodnotu bez ohľadu na znamienko. Maximálne šmykové napätie je na úseku x_2 .

$$\tau_{\max} \leq \tau_D$$

$$\left| \frac{T(x_2)}{W_K} \right| \leq \tau_D \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16T(x_2)}{\pi\tau_D}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$$

$$d \geq 0,063 \text{ m}$$

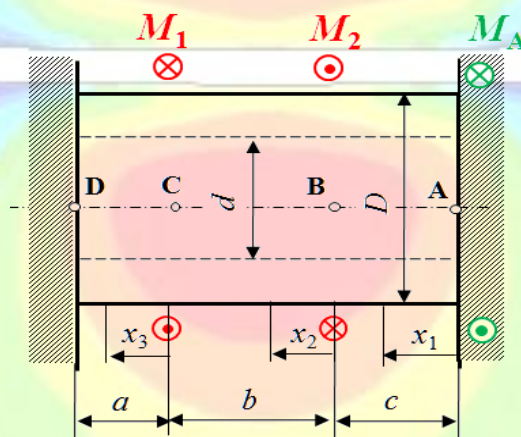
Minimálny priemer hriadeľa na obr. 4.13 je 63mm.

Príklad 4.5

Navrhnete priemer hriadeľa na obr. 4.14, ak sú dané krútiace momenty M_1 a M_2 , dĺžkové rozmery a , b , c , pomer medzi priemerom diery a priemerom hriadeľa d/D a dovolené šmykové napätie τ_D .

D: $M_1=1,5 \text{ kNm}$, $M_2=2,3 \text{ kNm}$, $d/D=0,5$, $a=0,4 \text{ m}$, $b=0,6 \text{ m}$, $c=0,5 \text{ m}$, $\tau_D=40 \text{ MPa}$

H: d , D , „ T “, „ τ “, „ φ “



Obr. 4.14

Rovnice pre krútiace momenty:

$$T(x_1) = -M_A$$

$$T(x_2) = -M_A + M_2$$

$$T(x_3) = -M_A + M_2 - M_1$$

Deformačná podmienka:

$$\frac{T(x_1)c}{G \cdot J_p} + \frac{T(x_2)b}{G \cdot J_p} + \frac{T(x_3)a}{G \cdot J_p} = 0$$

Z deformačnej podmienky vyjadríme M_A :

$$M_A = \frac{M_2(a+b) - M_1 \cdot a}{a+b+c} = \frac{2,3 \text{ kNm} \cdot (0,4 \text{ m} + 0,6 \text{ m}) - 1,5 \text{ kNm} \cdot 0,4 \text{ m}}{0,4 \text{ m} + 0,6 \text{ m} + 0,5 \text{ m}} = 1,13 \text{ kNm}$$

Potom:

$$T(x_1) = -M_A = -1,13 \text{ kNm}$$

$$T(x_2) = -M_A + M_2 = -1,13 \text{ kNm} + 2,3 \text{ kNm} = +1,17 \text{ kNm}$$

$$T(x_3) = -M_A + M_2 - M_1 = -1,13 \text{ kNm} + 2,3 \text{ kNm} - 1,5 \text{ kNm} = -0,33 \text{ kNm}$$

Keďže prierez je rovnaký po celej dĺžke hriadeľa, potom možno úsek s maximálnym šmykovým napätím určiť podľa maximálneho krútiaceho momentu. V tomto bude maximálne šmykové napätie pripadať vznikajú na druhom úseku.

Modul prierezu v krútení pri uvažovaní $d/D=0,5$:

$$W_K = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = 0,184D^3$$

Z pevnostnej podmienky navrhne D :

$$\tau_{\max} \leq \tau_D$$

$$\frac{T(x_2)}{W_K} \leq \tau_D$$

$$\frac{T(x_2)}{0,184D^3} \leq \tau_D \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{T(x_2)}{0,184 \cdot \tau_D}}$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{1,17 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{0,184 \cdot 40 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$$

$$D \geq 0,054 \text{ m}$$

Potom:

$$d = 0,5D = 0,027 \text{ m}$$

$$W_K = 0,184D^3 = 0,184 \cdot (0,054 \text{ m})^3 = 28,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Šmykové napätia:

$$\tau(x_1) = \frac{T(x_1)}{W_K} = -\frac{1,13 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{28,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = -39 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_2) = \frac{T(x_2)}{W_K} = \frac{1,17 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{28,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = +40 \text{ MPa}$$

$$\tau(x_3) = \frac{T(x_3)}{W_K} = -\frac{0,33 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{28,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = -11,4 \text{ MPa}$$

Aby sme vypočítali uhly pootočenia, potrebujeme poznať polárny kvadratický moment:

$$W_K = \frac{J_p}{r} \Rightarrow J_p = r \cdot W_K = \frac{D}{2} \cdot W_K = \frac{0,054 \text{ m}}{2} \cdot 28,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 7,82 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

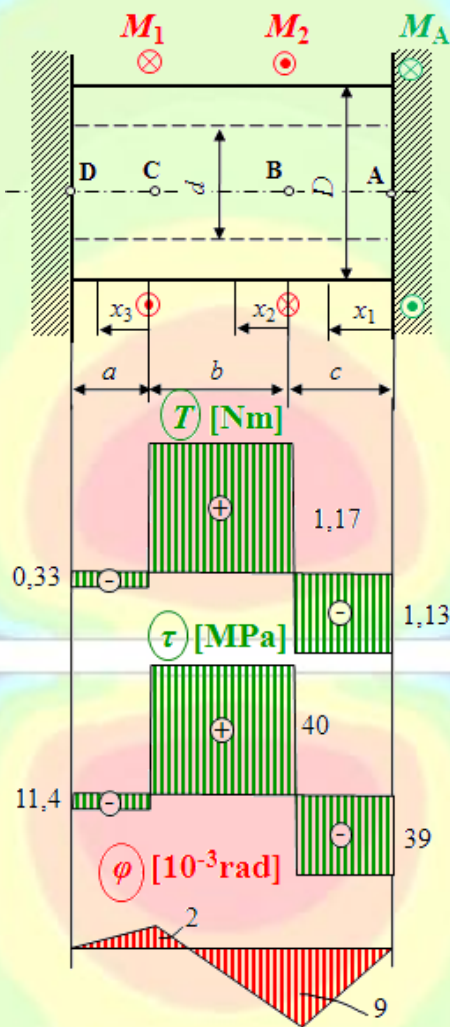
Potom:

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = \varphi_A + \frac{T(x_1)c}{G \cdot J_p} = 0 - \frac{1,13 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,5 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 7,82 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = -0,009 \text{ rad} = -0,52^\circ$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = \varphi_B + \frac{T(x_2)b}{G.J_p} = -0,009\text{rad} + \frac{1,17 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,6 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 7,82 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = -0,009\text{rad} + 0,01 \text{ rad} = +0,002\text{rad} = +0,13^\circ$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{T(x_3)a}{G.J_p} = 0,002\text{rad} - \frac{0,33 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot 0,4 \text{ m}}{8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 7,82 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 0,002\text{rad} - 0,002\text{rad} = 0$$



Obr. 4.15

Priebehy hľadaných veličín je na obr. 4.15.



5 IZOTROPNÝ, ANIZOTROPNÝ, ORTOTROPNÝ A PRIEČNE IZOTROPNÝ MATERIÁL, MATERIÁLOVÉ KONŠTANTY

5.1 Izotropný materiál

Izotropný materiál je materiál, ktorého mechanicko-fyzikálne vlastnosti sú v rovnaké každom smere.

Mechanicko-fyzikálne vlastnosti kvalitatívne opisujú a kvantitatívne hodnotia správanie materiálu pri definovanom mechanickom namáhaní. Napríklad pevnosť materiálu vyjadrujú medza pevnosti, medza pružnosti, medza klzu, medza úmernosti; správanie materiálu vplyvom ťahového zaťaženia vyjadruje modul pružnosti v ťahu pod.

Jednoduchý ťah pri izotropnom materiáli vyvolá predĺženie v smere zaťaženia a priečne zúženie v kolmých smeroch (obr. 5.1a). Jednoduchý šmyk pri izotropnom materiáli vyvolá zmenu uhlu (skos v rovine xy γ_{xy}), pravouhlý element sa zmení na kosoštvorec s nezmenenými dĺžkami strán (obr. 5.1b).



Obr. 5.1

Mechanicko-fyzikálne vlastnosti izotropného materiálu vyjadrujú jeho materiálové konštanty:

- modul pružnosti v ťahu E ,
- Poissonovo číslo μ ,
- modul pružnosti v šmyku G .

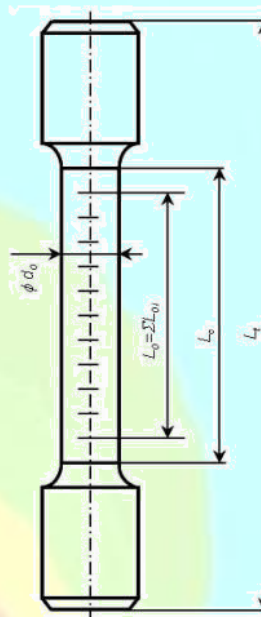
Pre definovanie materiálových vlastností izotropného materiálu postačuje poznať dve z uvedených konštant. Tretiu konštantu si vieme vypočítať zo vzťahu (5.1), ktorý platí medzi materiálovými konštantami. Preto považujeme dve materiálové konštanty za nezávislé a musia sa určiť experimentálnymi mechanickými skúškami.

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (5.1)$$

Mechanickými skúškami vyvolávame v materiáloch napätie, ktoré zvyšujeme až do porušenia skúšobného telesa. Modul pružnosti v ťahu určujeme ťahovou skúškou pomocou trhacieho stroja (obr. 5.2), resp. skúškou ohybom. Modul pružnosti v šmyku G určujeme skúškou krutom.

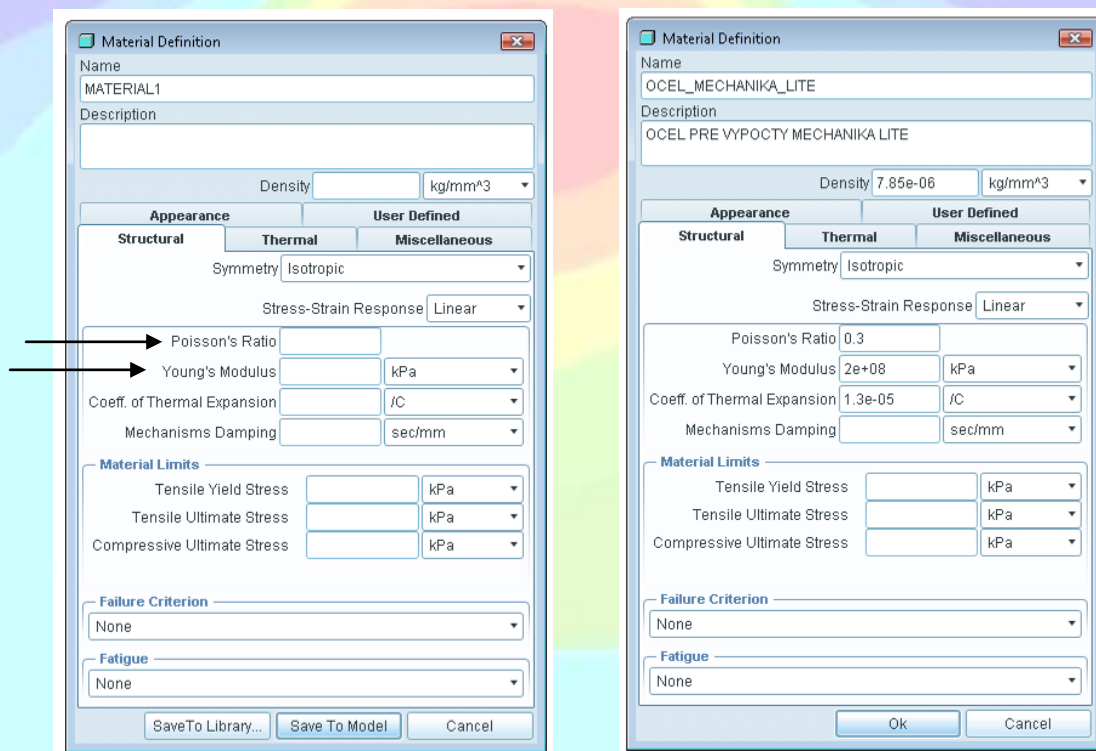
Skúšobné teleso pre statickú skúšku ťahom zobrazuje obr. 5.2, kde je zobrazená skúšobná tyč (skúšobná vzorka) a jej tvar a rozmery. Skúšobná tyč je upnutá do čelustí trhacieho (skúšobného) stroja a zaťažená jednoduchým ťahom. Princíp spočíva v jednoosovom statickom zaťažovaní skúšobnej tyče postupne vzrastajúcou silou až do porušenia (roztrhnutia) tyče. Skúška je statická, teda zaťažujúca sila vzrastá pomalou rýchlosťou.

Skúška sa vykonáva podľa normy STN EN 10002-1. Okrem modulu pružnosti v ťahu sa touto skúškou stanoví aj medza klzu, medza pevnosti, ťažnosť a zúženie.



Obr. 5.2

Na obr. 5.3 vľavo je dialógové okno pre definovanie materiálových vlastností izotropného materiálu v programe Pro/Engineer WF5 Mechanical. Na obr. 5.3 vpravo je definovaný materiál *ocel'*. Možno vidieť, že pre štrukturálnu analýzu izotropného materiálu postačuje Poissonovo číslo μ , modul pružnosti v ťahu E . Koeficient teplotnej rozťažnosti, ktorý je zadaný je pre prípad, ak by sme pri výpočte chceli zohľadniť aj teplotu.



Obr. 5.3

Pre izotropný materiál platí:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E_3 = E \\ G_{23} &= G_{13} = G_{12} = G \\ \mu_{21} &= \mu_{31} = \mu_{32} = \mu \end{aligned} \quad (5.2)$$

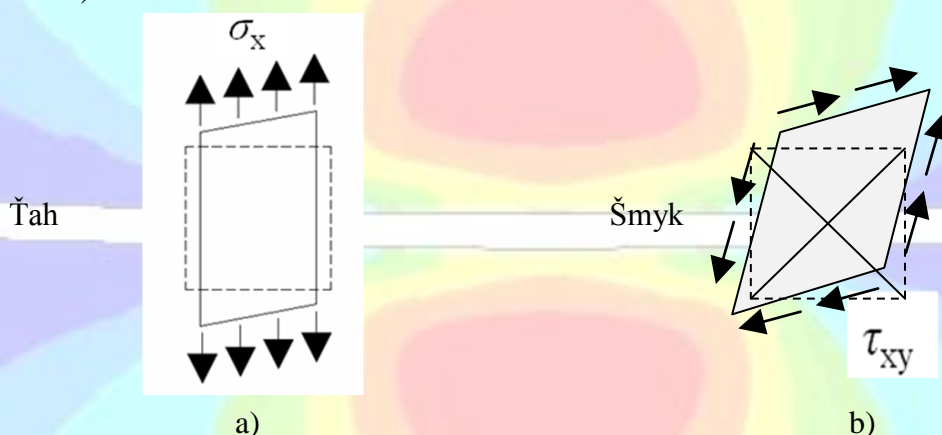
kde E_1, E_2, E_3 sú moduly pružnosti v ťahu v smere osí materiálu 1, 2, 3, G_{12}, G_{13}, G_{23} sú moduly pružnosti v šmyku a $\mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}$ sú Poissonove čísla. E_1 je modul pružnosti v smere osi materiálu 1, G_{12} je modul pružnosti v šmyku v smere 2, pričom normála k smeru 2 je smer 1 a μ_{21} je Poissonovo číslo pri priečnom zúžení v smere 1 a predĺžení v smere 2 (pozri obr. 5.5).



5.2 Anizotropný materiál

Anizotropný materiál je materiál, ktorého mechanicko-fyzikálne vlastnosti sú v každom smere rôzne. Ide o opak izotropie, neexistuje žiadna rovina materiálovej symetrie.

Jednoduchý ťah vyvolá deformáciu v smere osí x, y, z , ale aj zmeny uhlu elementu (obr. 5.4a). Jednoduchý šmyk vyvolá zmenu uhlu (skos v rovine xy), ale aj deformácie v smere osí x, y, z . Pravouhlý element sa zmení na kosoštvorec so zmenenými dĺžkami strán (obr. 5.4b).



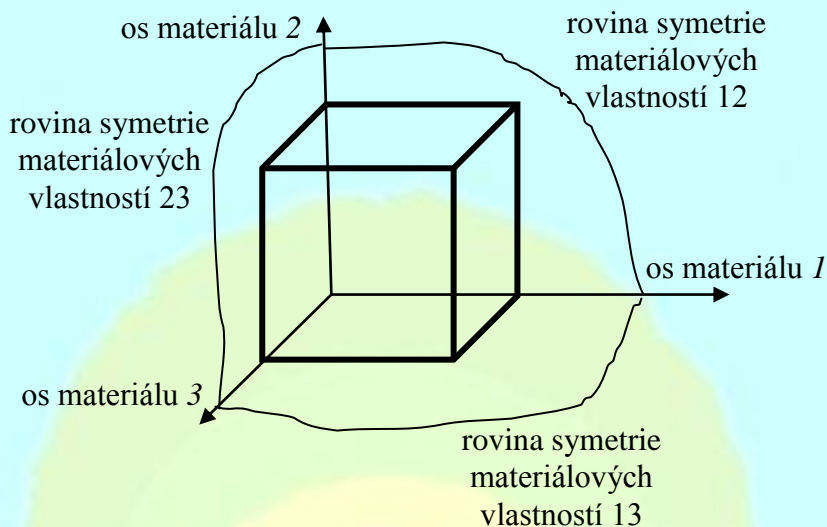
Obr. 5.4

Aby sme definovali materiálové vlastnosti anizotropného materiálu potrebujeme poznať 21 nezávislých materiálových konštánt. Zovšeobecnený Hookeov zákon má tvar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & sym. & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

kde S_{ij} sú prvky inverznej matice materiálových konštánt.

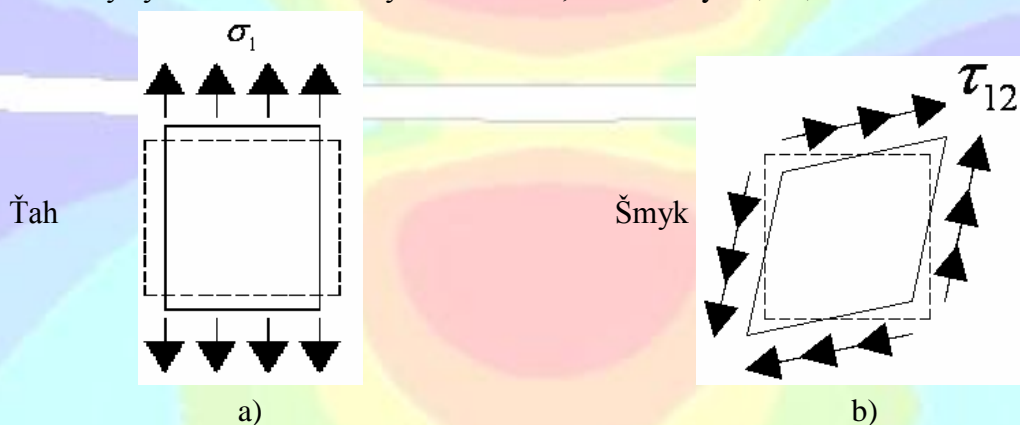
Na obr. 5.5 sú zobrazené osi materiálu 1, 2, 3 a roviny symetrie materiálových vlastností 12, 13, 23.



Obr. 5.5

5.3 Ortotropný materiál

Ortotropný materiál je materiál, ktorého mechanicko-fyzikálne vlastnosti sú jedinečné a nezávislé len v troch na seba kolmých smeroch (1, 2, 3 – osi materiálu). Ortotropný materiál má tri roviny symetrie materiálových vlastností, a to roviny 12, 13, 23.

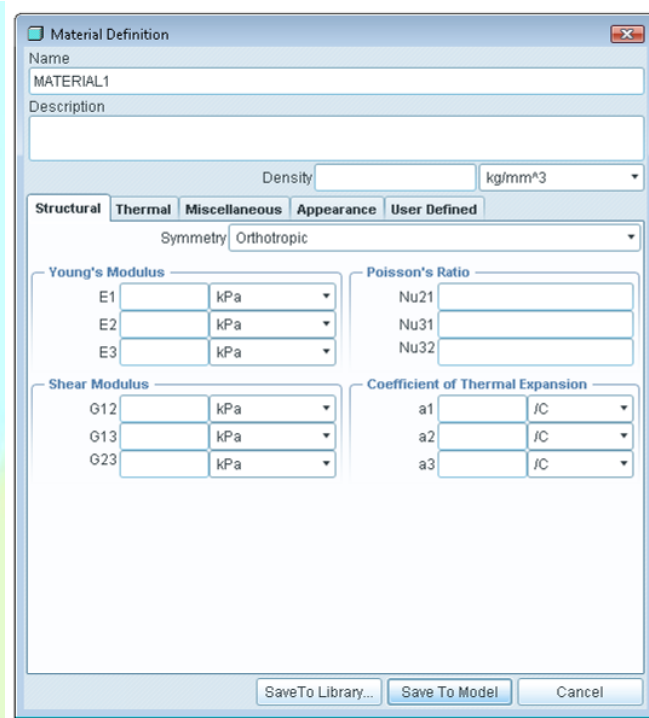


Obr. 5.6

Jednoduchý ťah vyvolá deformáciu v smere osí 1, 2, 3 (obr. 5.6a). Jednoduchý šmyk vyvolá zmenu uhlu (skos v rovine 12 γ_{12}), pravouhlý element sa zmení na kosoštvorec s nezmenenými dĺžkami strán (obr. 5.6b).

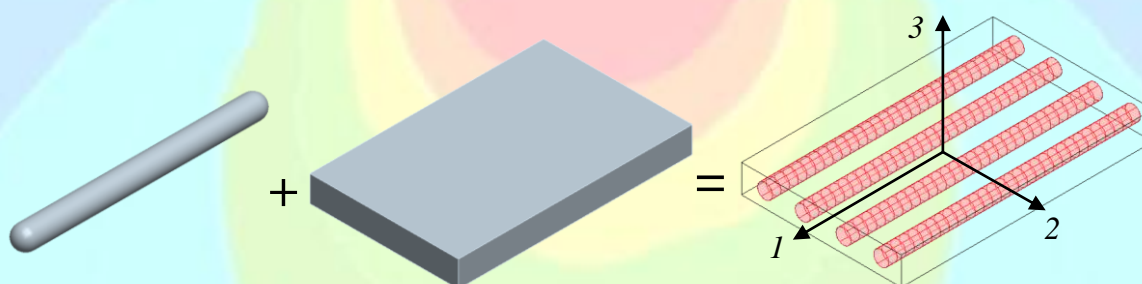
Ortotropný materiál je definovaný pomocou 9 nezávislých materiálových konštánt E_1 , E_2 , E_3 , G_{12} , G_{13} , G_{23} , μ_{21} , μ_{31} , μ_{32} . Ukážka definovania ortotropného (orthotropic) materiálu v Pro/Engineer WF5 Mechanica je na obr. 5.7.

Zovšeobecnený Hookeov zákon pre ortotropný materiál je uvedený vo vzťahu (14.16).



Obr. 5.7

Príkladom ortotropného materiálu je jedna vrstva (lamina) kompozitného materiálu (obr. 5.8), ktorá sa skladá z matrice a z dlhých vlákien umiestnených rovnobežne a jednosmerne, pričom materiálové vlastnosti vlákna aj matrice sú odlišné. Ich spojením vzniká kompozitný materiál s novými materiálovými vlastnosťami. Materiál je z mikroskopického hľadiska nehomogénny. Túto nehomogenitu zohľadňujeme v prípade, ak skúmame správanie kompozitu v objeme, ktorý je porovnateľný s rozmermi vlákien. Ak skúmame správanie kompozitu v celom objeme laminy, potom laminu považujeme za homogénne ortotropné teleso. V prípade viacvrstvových laminátov je nevyhnutné poznať vlastnosti jednotlivých lamín a ich vzájomnú orientáciu.



Obr. 5.8

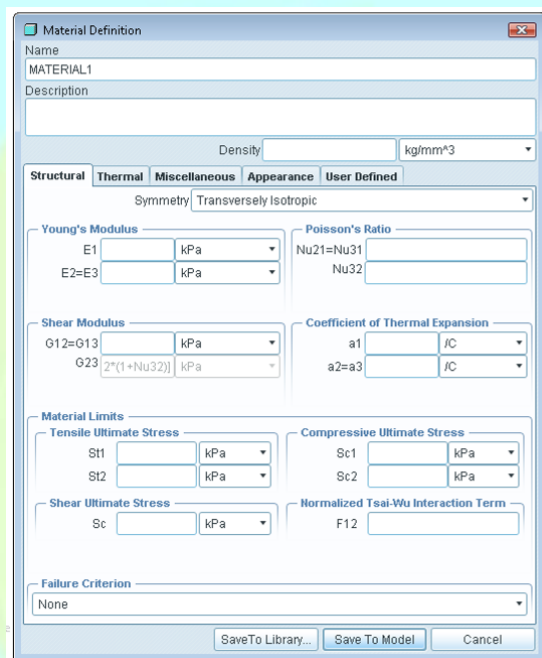
5.4 Prične izotropný materiál

Prične izotropný materiál je materiál, ktorého mechanicko-fyzikálne vlastnosti sú rovnaké v dvoch na seba kolmých smeroch (2, 3) v treťom smere (1) sú odlišné. Prične izotropný materiál má 3 roviny symetrie materiálových vlastností 12, 13, 23, pričom v jednej rovine (23) sú vlastnosti izotropné.



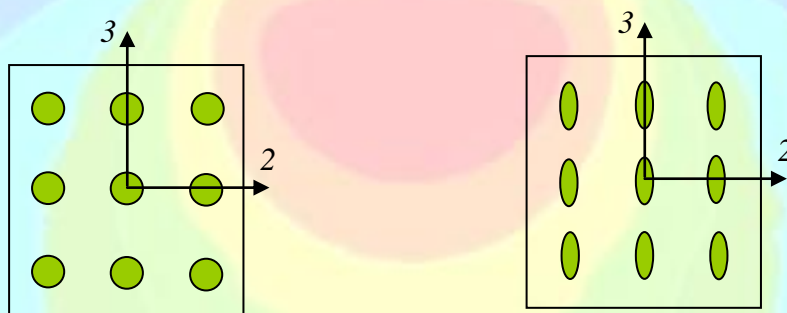
Priečne izotropný materiál je plne definovaný pomocou 5 nezávislých materiálových konštánt, ktorými sú E_1 , $E_2=E_3$, $G_{12}=G_{13}$, $\mu_{21}=\mu_{31}$, μ_{32} . G_{23} nie je nezávislá konštanta, lebo ju možno vypočítať podľa vzťahu $G_{23}=E_2/2(1+\mu_{23})=E_3/2(1+\mu_{32})$.

Definovanie priečne izotropného (transversely isotropic) materiálu v Pro/Engineer Mechanical WF5 je na obr. 5.9.



Obr. 5.9

Zovšeobecnený Hookeov zákon pre priečne izotropný materiál je uvedený vo vzťahu (14.17).



Obr. 5.10

Na obr. 5.10 (vľavo) je príklad priečne izotropného materiálu. Ide o jednosmerne orientovaný vláknový kompozit s vláknami kruhového prierezu. V prípade, že vlákna majú eliptický prierez (vpravo), potom tento materiál považujeme za ortotropný, pretože vlastnosti v smere 2 a 3 sú rôzne.



5.5 Materiálové vlastnosti kompozitných materiálov

Kompozitné materiály sú materiály pozostávajúce z dvoch a viacerých zložiek s rozdielnymi vlastnosťami, ktoré spolu vytvárajú výsledný materiál s novými vlastnosťami.

V súčasnosti sa používa mnoho nových materiálov so špecifickými vlastnosťami. Podstatnú časť nových materiálov tvoria kompozitné materiály, ktoré nemajú izotropné vlastnosti. Preto pri navrhovaní komponentov z kompozitných materiálov je potrebné určiť ich materiálové vlastnosti experimentálne, numericky a analyticky.

5.5.1 Využitie materiálov, experimentálne dáta versus výpočtové metódy

Kompozitné materiály, alebo skrátene kompozity, nie sú novým materiálom v dejinách ľudstva. Prvými kompozitnými materiálmi boli napríklad nepálené tehly, kde jednotlivými zložkami boli ílovitá hlina (matrica) a slama (náhodne orientované vlákna). Predchodcovia súčasných kompozitov vznikali bez využitia výpočtových metód, ale na základe skúseností počas dlhších časových období.

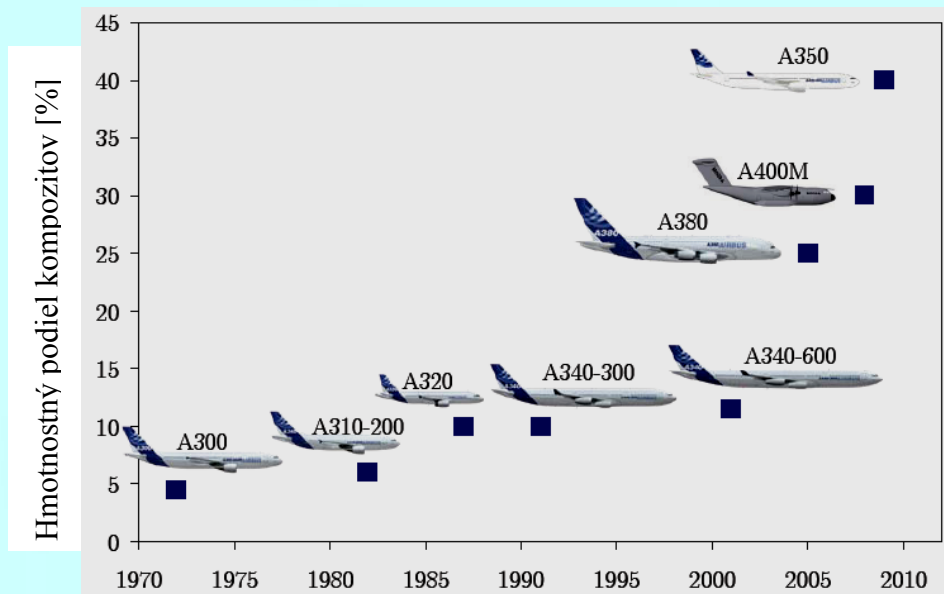
Analógiu s kompozitnými materiálmi možno urobiť pre oceľ, ktorá tiež nebola novým materiálom v polovici 19. storočia. Oceľ sa stala v 19. storočí „znovuobjaveným“ materiálom kvôli novým technológiám výroby ocele, čo umožnilo jej široké priemyselné využitie, ako aj jej vtedajšia nízka cena. S možnosťou použitia ocele ako inžinierskeho materiálu sa museli rozvinúť zároveň aj metódy výpočtu konštrukcií. K rozvoju mechaniky a jej výpočtových metód v nadväznosti na ich aplikácie a technológiu výroby v 19. storočí prispeli L. Navier teóriou ohybu nosníkov a výpočtom visutých mostov, G. Moseley prvou teóriou výpočtov ocelových mostov, L. Schwedler metódou výpočtu priestorového kupolovitého zastrešenia, S. Poisson, B. Saint Venant, G. Lamé, B. Clapeyron, D. Maxwell, L. Cremon, K. Coulman a ďalší, ktorí sa zaoberali grafickými a graficko-analytickými metódami výpočtu konštrukcií.

Aplikácia materiálu na konkrétne použitie vyžaduje okrem inžinierskych skúseností pri konštruovaní aj konkrétny výpočet, t.j. dimenzovanie, resp. kontrolu navrhnutých častí. To, ako nová výpočtová metóda a nový materiál dokáže ovplyvniť konštrukciu ako celok, dokumentujú napríklad mosty stavané v New Yorku na prelome 19. a 20. storočia. Pokiaľ prvý postavený most spájajúci jednotlivé časti New Yorku - Brooklynský most mal robustnú konštrukciu (kamenné mostové veže), napriek tomu, že využíval už novopoužívaný materiál v podobe oceľových lán (prvý visutý most na oceľových lanách) a bol stavaný 13 rokov (otvorenie 1883), až nové výpočtové metódy (Moisseiffova teória vychýlenia - deflection theory) aplikované na materiál - oceľ použité pri výstavbe ďalších mostov v New Yorku dokázali urobiť mosty ľahšie, celooceľové, dlhšie, ktoré sa dali oveľa rýchlejšie postaviť.

Moisseiffova teória vychýlenia bola použitá na Manhattanský most s oceľovými pylónmi. Moisseiff sa stal popredným inžinierom visutých mostov v USA v 20-tych a 30-tych rokoch 20. storočia. Pri návrhu Tacomského mosta (tretí najdlhší visutý most na svete v tom čase) vykonal také úsporné opatrenia na základe svojej teórie, že viedli k zrúteniu mosta v roku 1940, čím sa potvrdila jej nedostatočnosť.

Samozrejme využitie ocele úplne zmenilo výzbroj vtedajších armád. V roku 1900 už boli prakticky všetky vojnové lode z ocele, ako aj pušky a delá. Mnohé nové zbrane, ako napr. guľomety alebo ponorky, tanky (prvý 1915) sa nedali vyrobiť inak ako z ocele.

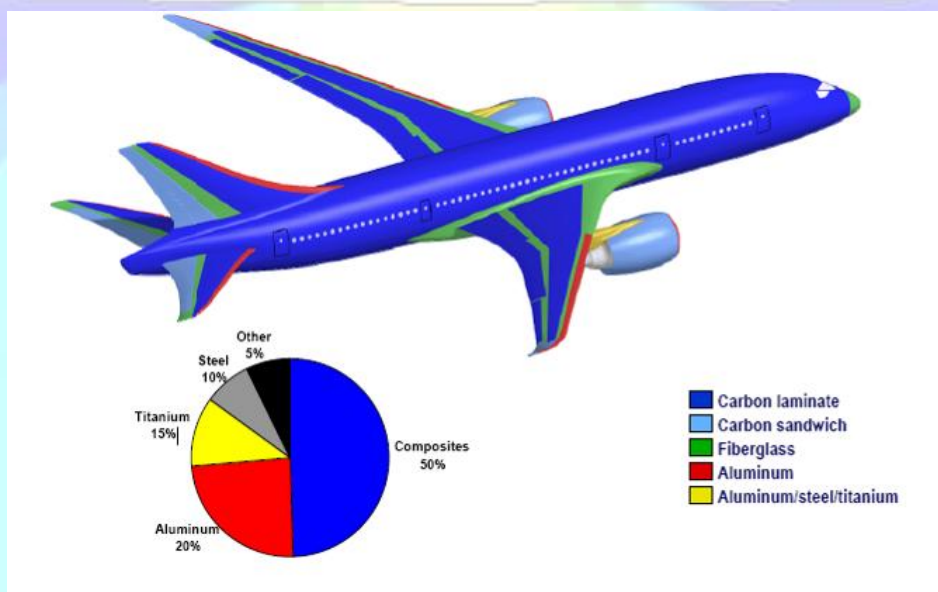
Podobne aj v súčasnosti letecký a zbrojársky priemysel ako prvý začal s využitím kompozitných materiálov, ktoré dnes nachádzajú uplatnenie vo všetkých priemyselných odvetviach, ale naďalej letecký a zbrojársky priemysel posúva možnosti ich využitia. Aj v tejto oblasti možno nájsť ešte jednu udalosť zlyhania inžinierskej činnosti (okrem Tacomského mosta), a to výbuch raketoplánu Challenger v roku 1986, kedy konštruktéri sa viac priklonili k nameraným dátam pri návrhu skolabovanej súčiastky bez konkrétnej teórie [4]. Uvedené dve zlyhania inžinierskej činnosti (Tacomský most a Challenger) 20. storočia slúžia ako príklad dvoch protipólov: teória (výpočtová metóda) versus experimentálne dáta. Je potrebné si uvedomiť, že sú to dve strany tej istej mince.



Obr. 5.11 [1]

Zatiaľ čo v sedemdesiatych rokoch bol hmotnostný podiel kompozitov z uhlíkových vlákien použitých v lietadle Airbus iba 5%, na začiatku deväťdesiatych rokov dosiahol hodnotu 10% a na prelome tisícročia 15%. V Airbuse 380 bol v roku 2005 tento podiel 22% a v Boeingu 787 (prvý let december 2009) je 60%. Prírastok je zreteľný na obr. 5.11.

Dôkazom narastajúceho podielu využitia kompozitných materiálov je Boeing 787, ktorého prvý let sa uskutočnil v decembri 2009 (obr. 5.12). Podiel kompozitných materiálov je až 50%.



Obr. 5.12 [22]

V súčasnosti sa kompozitné materiály využívajú v športe, príklady sú uvedené v tab. 5.1, v leteckom a automobilovom priemysle (skelety áut, spojery, karoséria, komponenty motora a pod.), kozmonautike, lodnom priemysle, v stavebníctve, v zdravotníctve (protézy a umelé kĺby), v textilnom priemysle a ďalšie rôzne priemyselné aplikácie, napr. tlakové

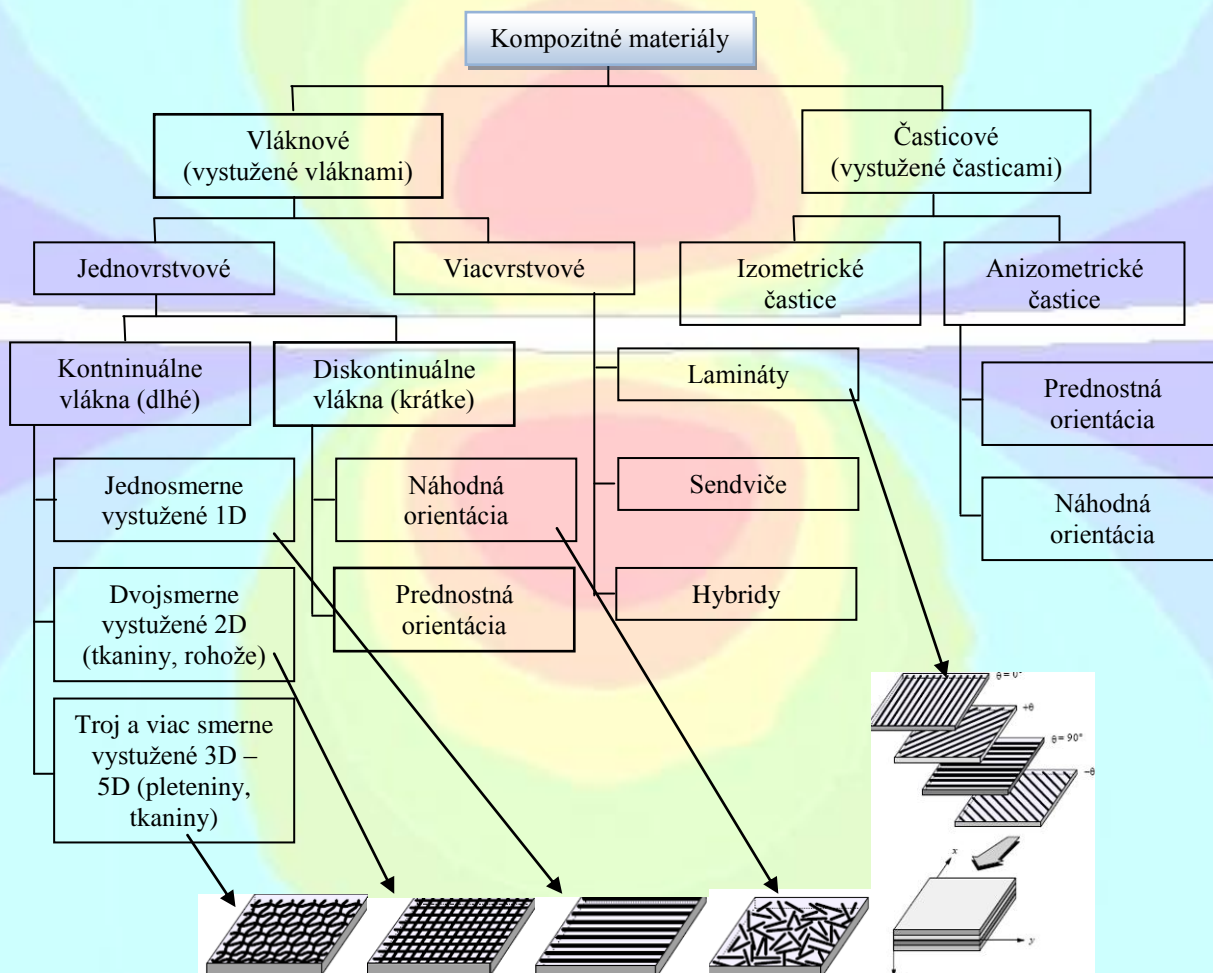
nádoby, elektronika, lekárske vybavenie a nástroje, náhrada komponentov strojov, ramien robotov, manipulátorov a pod.

Tab. 5.1

 udice	 golfové palice	 hokejky
 tenisové rakety	 bejzbalové pálky	 bicykle

5.5.2 Rozdelenie kompozitných materiálov

Pomenovanie kompozitný materiál zahŕňa v sebe veľmi široký záber materiálov, pretože definícia kompozitného materiálu to dovoľuje.

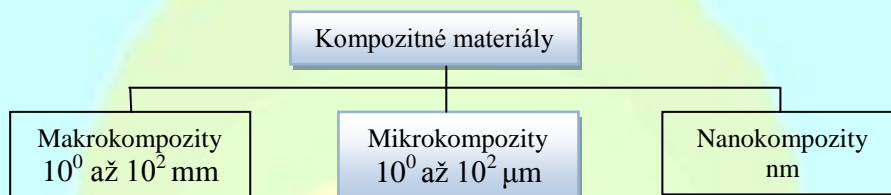


Obr. 5.13

Kompozitné materiály sú materiály zložené z dvoch alebo viacerých chemicky a fyzikálne odlišných zložiek (fáz), ktoré vznikli zmiešaním zložiek. Pevnejšia, nespojitá, zložka kompozitu sa nazýva výstuž, poddajnejšia, spojitá zložka sa nazýva matrica a má funkciu spojiva výstuže. Aby sme materiál zaradili medzi kompozity musí byť splnené

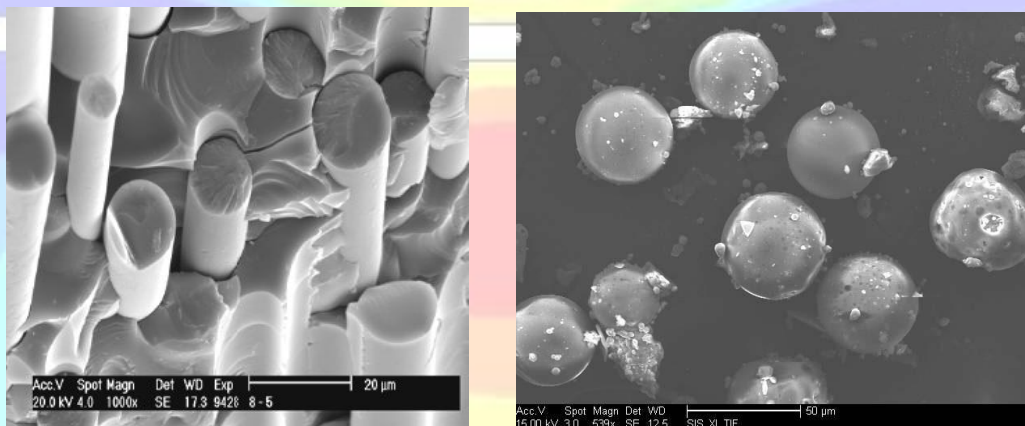
nasledovné: Podiel výstuže väčší ako 5%; mechanické, fyzikálne a chemické vlastnosti výstuže a matrice sa odlišujú, výstuž má podstatne vyššiu pevnosť. Kompozitné materiály sa zvyčajne delia podľa tvaru výstuže ako uvádza obr. 5.13.

Zároveň obr. 5.14 zobrazuje rozdelenie kompozitných materiálov podľa rozmeru výstuže. Výstuž makrokompozitov má rozmer priečného prierezu 10^0 až 10^2 mm. Za makrokompozity možno považovať železobetón, polymerbetón obsahujúci kameň a živicu, taktiež chodníky a vozovky, keďže ide o viacvrstvé materiály. Rozmery (dĺžka alebo priemer) vystužujúcich častíc nanokompozitov sú v nanometroch. Podobne je to u mikrokompozitov, ktorých rozmery výstuže (vlákien alebo častíc) sú v rozsahu 10^0 až 10^2 μm .



Obr. 5.14

Za kompozit nemožno považovať plast, ktorý obsahuje malé množstvo farbiva, napr. čierny alebo biely pigment, časti elastomérov, ktoré síce zvyšujú húževnatosť, ale znižujú modul pružnosti materiálu. Zároveň ani zliatiny kovov, u ktorých došlo počas ochladzovania alebo pri tepelnom spracovaní k vylúčeniu tuhej fázy nemožno považovať za kompozity. Podobne za pravé kompozity nemožno považovať eutektické zliatiny kovov, u ktorých počas tuhnutia taveniny došlo k usmernenému vylúčeniu tvrdších tuhých fáz v podobe tyčínok alebo lamiel, lebo nevznikli zmiešaným jednotlivých fáz.



Obr. 5.15

Na obr. 5.15 vidieť mikroskopické snímky vláknového kompozitu (vľavo) a časticového kompozitu.

5.5.3 Vlastnosti kompozitných materiálov

Súčasnú využitie materiálov podporuje aj vznik ďalších nových výpočtových metód a naopak nové výpočtové metódy podporujú vznik nových kompozitných progresívnych materiálov a umožňujú širšie a efektívne použitie kompozitných materiálov.

Návrh konštrukcie a návrhom materiálu komponentu konštrukcie sú dve vzájomne sa ovplyvňujúce oblasti. Klasický prístup, kedy sú pri návrhu konštrukcie vlastnosti materiálov charakterizované ako homogénne a izotropné možno zmeniť. V súčasnosti prebiehajúci široký rozvoj kompozitných materiálov poskytuje možnosť využitia netradičných anizotropných

vlastností materiálov. U krátko-vláknových kompozitov je možné podľa orientácie vlákien meniť ich mechanické (tepelné a iné) vlastnosti v rôznych smeroch. Navyše, dosiahnutie vyššej koncentrácie vlákien vo viac namáhaných miestach umožňuje efektívne využitie materiálu. Zvýšenie efektívnosti možno dosiahnuť orientáciou vlákien v smere hlavných napätí.

Možno takto predísť klasickému dimenzovaniu homogénnych materiálov, kedy celý komponent (konštrukcia) sa dimenzuje podľa najviac namáhaného miesta. V nebezpečnej časti je splnená podmienka pevnosti, ale v ostatnej časti ide o predimenzovanie, keďže sú v nej menšie napätia. Uvažujúc orientovanú vnútornú štruktúru materiálu, možno vhodným umiestnením vlákien posilniť najviac namáhané oblasti a presunúť ich do iných častí konštrukcie. Samozrejme tento prístup súvisí aj s vyrobiteľnosťou takýchto komponentov, čo ostáva úlohou pre materiálových technológov.

Uvedený konštrukčno-materiálový prístup spočíva v prepojení navrhovania komponentov na vnútornú štruktúru materiálu. Tento prístup sa nezaobíde bez vhodnej výpočtovej metódy, ktorá dokáže vierohodne simulovať štruktúru krátko-vláknového kompozitu, čo je jednou z úloh vývoja v oblasti výpočtových metód.

Najrozšírenejšia a najdostupnejšia výpočtová metóda – metóda konečných prvkov (MKP) – a komerčné softvéry s implementovanou MKP sú určené pre čo najširší okruh štandardných problémov. Pre špecifické problémy, ktorým simulácia odozvy konštrukcie vzhľadom na jej vnútornú materiálovú štruktúru rozhodne je, MKP nevyhovuje.

Kompozitné materiály sú typické zložitou stanovenia ich mechanických charakteristík (materiálových parametrov). Kompozit považujeme za heterogénnu štruktúru vytvorenú kombináciou dvoch alebo viacerých materiálov, čím vznikne materiál tretí so zdokonalenými vlastnosťami, akými sú vysoká pevnosť, tuhosť, únavová životnosť, odolnosť voči opotrebeniu, nízka hmotnosť a pod.

Kvôli týmto vylepšeným vlastnostiam sa im prikladá možnosť rozsiahleho využitia. Za účelom skúmania možností kompozitov boli vyvinuté viac-hladinové a multifyzikálne metódy. Výpočtové modely simulujúce mechanické vlastnosti zahŕňajú viac hladín modelovania, a to počnúc nano-hladinou (molekulárna dynamika), ktorá skúma atómovú interakciu nano-výstuh vo veľmi tuhom vystužujúcom materiáli a jeho interakciu s atómami matrice, končiac kompozitmi v rozsiahlych konštrukciách s rozmermi niekoľkých metrov.

Techniky modelovania štruktúry materiálov sú rôzne, a to:

- výpočtová chémia (diskrétna molekulárna štruktúra), 10^{-10} - 10^{-8} m:
 - kvantová mechanika – metóda Ab initio,
 - nanomechanika,
 - metóda Monte Carlo,
 - molekulárna mechanika,
 - molekulárna dynamika,
- výpočtová mechanika (kontinuálny model), 10^{-6} – 10^0 m:
 - mikromechanika,
 - analytická mikromechanika (Eshelby, Halphin-Tsai, Rule-of-Mixtures),
 - výpočtová mikromechanika (MKP, MHP, bezsieťové metódy a pod.)
 - štruktúrna mechanika (MKP, MHP a pod.)

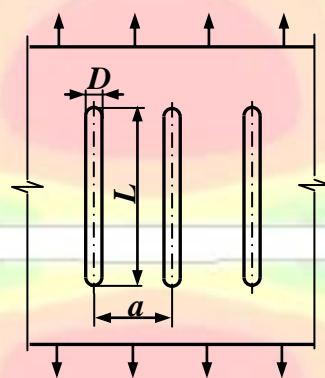
Pri makromechanickom prístupe možno kompozitný materiál považovať za homogénny. Jednosmerne orientovaný vlákňový kompozit je charakterizovaný piatimi hodnotami pevnosti: pozdĺžna pevnosť v ťahu, pozdĺžna pevnosť v tlaku, priečna pevnosť v ťahu, priečna pevnosť v tlaku, pevnosť v šmyku, pričom kompozit je považovaný za anizotropný materiál.

Pri mikromechanickom prístupe považujeme kompozitný materiál za nehomogénny. Modul pružnosti alebo tuhosť kompozitného materiálu sa určuje z modulov pružnosti jednotlivých zložiek materiálu, t.j. vlákna a matrice. Dôležitou vlastnosťou pri určovaní mechanických vlastností kompozitného materiálu je pomer objemu, resp. hmotnosti, vlákien ku celkovému objemu, resp. hmotnosti, kompozitného materiálu, ako aj tvar vlákien a pod.

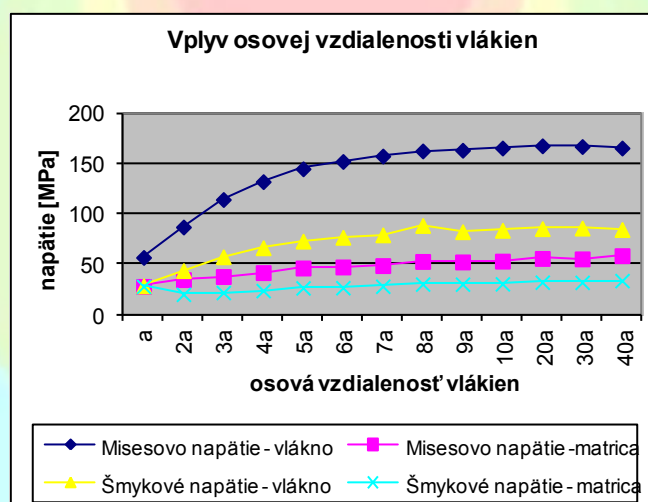
Na obr. 5.16 sú znázornené základné parametre krátko-vlákňového kompozitu, a to:

- osová vzdialenosť vlákien (označenie: a),
- priemer vlákien (označenie: D),
- dĺžka vlákien (označenie: L),
- pomer modulov pružnosti vlákna a matrice: E_f/E_m .

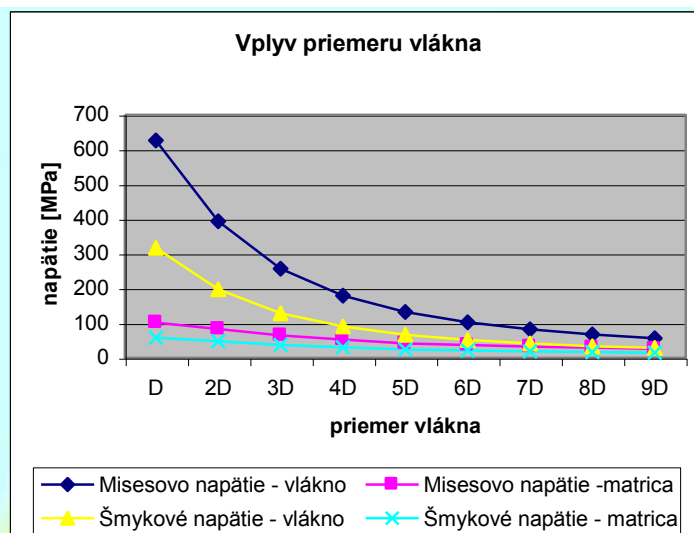
Uvedené parametre ovplyvňujú veľkosť Misesovho a šmykového napätia. Ich vzájomné vzťahy pri meniacich sa parametroch boli stanovené citlivosťou štúdiou v programe Pro/Engineer Mechanical. Výsledky citlivostných štúdií sú zhrnuté v grafoch na obr. 5.17 až 5.20.



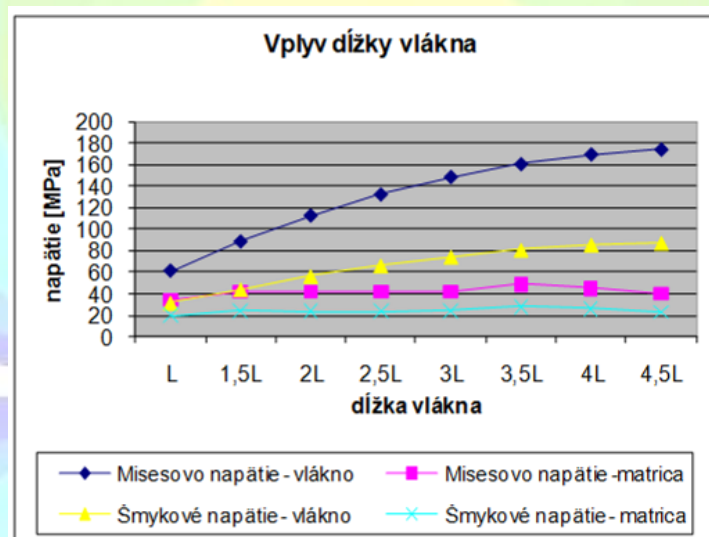
Obr. 5.16



Obr. 5.17



Obr. 5.18



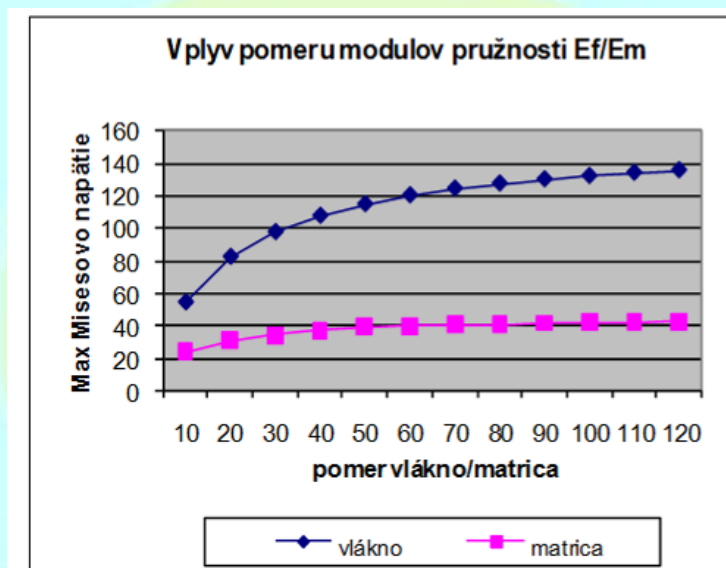
Obr. 5.19

Z výsledkov citlivostných štúdií je zjavné, že vlákno je hlavný prvok, ktorý prenáša zaťaženie. Vlákno reaguje najcitlivejšie na zmeny všetkých štyroch parametrov, a to:

1. Pri posúdení vplyvu parametra a možno pozorovať, že vplyv osovej vzdialenosti jednotlivých vlákien je zreteľný po hodnotu $7a$ (t.j. 7-násobok priemeru vlákna), a to hlavne u vlákna. V intervale $a - 7a$ vzrastie Misesovo napätie vo vlákne 2,8-krát, potom od $7a$ po $40a$ už Misesovo napätie vzrastie len 0,15-krát.
2. Pri hodnotení vplyvu parametra D vidieť, že jeho vplyv je významný pri zmeňujúcom sa priemere.
3. Pri posúdení vplyvu parametra L možno konštatovať, že čím dlhšie vlákno, tým väčšie Misesovo napätie, ale opäť, len po určitú hodnotu, a to $4L$. V intervale $L - 4L$ vzrastie Misesovo napätie vo vlákne približne 3-násobne. Pri ďalšom zväčšovaní dĺžky už nie nárast výrazný.
4. Pri posúdení vplyvu parametra E_f / E_m možno konštatovať, že modul pružnosti síce vzrástol 12-násobne, ale maximálne Misesovo napätie vo vlákne sa zvýšilo len 2,5-násobne.

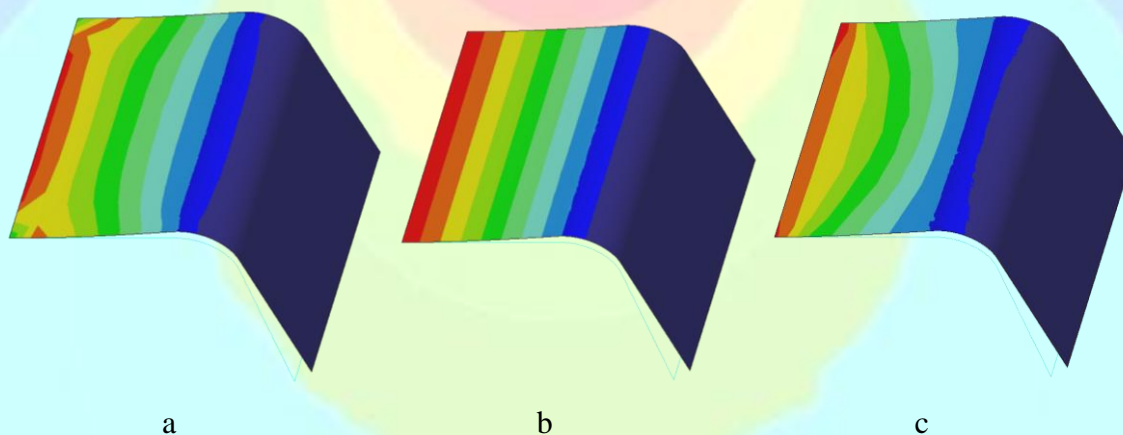
Ďalej možno zhrnúť, že:

- čím je menší priemer vlákna a väčšia osová vzdialenosť, tým v ňom vzniká väčšie napätie,
- čím väčšia osová vzdialenosť, tým väčšie napätie, ale len po určitú hodnotu, kedy už nárast napätia vzhľadom na osovú vzdialenosť je minimálny,
- čím je menší priemer a dlhšie vlákno, tým je väčšie napätie vo vlákne aj v zakončení v matrici, pričom citlivosť matrice na šmykové napätie so zväčšujúcou sa dĺžkou je minimálna.



Obr. 5.20

Prezentovať odlišnosť v mechanickom správaní izotropného a ortotropného materiálu možno na príklade laminátu – vrstveného kompozitu. Obr. 5.21 zobrazuje tri rôzne priebehy Misesovho napätia na rovnakom modeli. Rôznorodosť v priebehu napätí nie je spôsobená okrajovými podmienkami (tie sú rovnaké), ale odlišnosťou materiálových vlastností. V časti a) obrázku 5.21 je model z izotropného materiálu. V časti b) je 5-vrstvový laminát s orientáciou lamín 0° a v časti c) je ten istý laminát s inou orientáciou lamín. Každá samostatná lamina má jednosmerne orientované vlákna (obr. 5.8).



Obr. 5.21

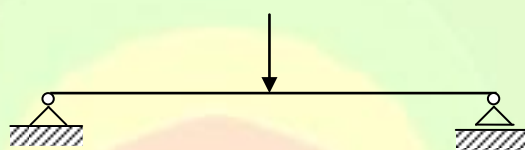
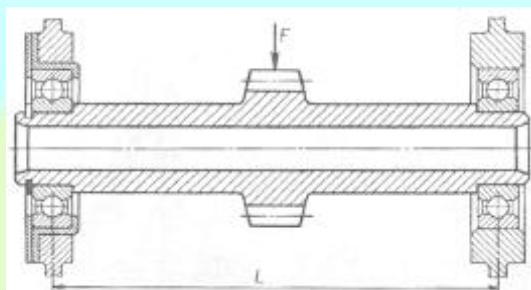
Počítačová simulácia správania kompozitov je rozsiahla problematika, práve v súvislosti s problematikou určenia materiálových konštánt.



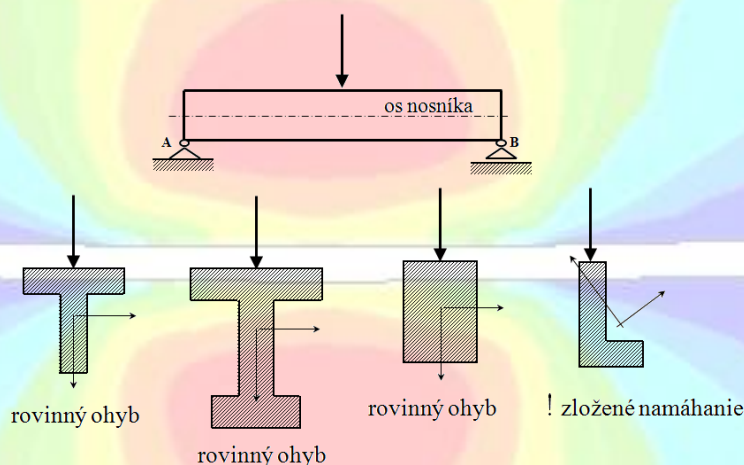
6 ROVINNÝ OHYB

Teleso namáhané ohybom nazývame nosník. Príklad reálneho systému a vytvoreného matematicko-fyzikálneho modelu pre výpočet napríklad priehybu je na obr. 6.1¹⁰.

Vnútorne sily vznikajúce pri rovinnom ohybe priamych a lomených nosníkov sú osová (normálová) sila N , posúvajúca (pričná) sila V a ohybový moment M .

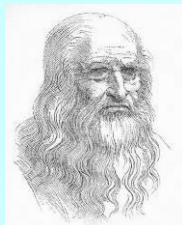


Obr. 6.1

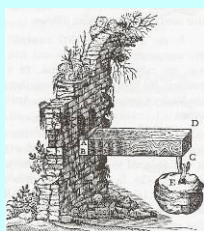


Obr. 6.2

10



Leonardo da Vinci (1452, Taliansko - 1519, Francúzsko) je uznaný ako univerzálny génius. Pôsobil v oblasti vedy, architektúry, maliarskeho a sochárskeho umenia, hudby, anatómie, astronómie a stavebníctva, konštrukcie strojov. Je vynálezcom rôznych strojov a zariadení, ktoré predbiehali jeho dobu. Bol ľavák a svoje poznámky písal zrkadlovým písmom, aby písacie brko mohol ťahať, tak ako to robia praváci. L. da Vinci veril, že Slnko a Mesiak krúžia okolo Zeme, a že Mesiak odráža slnečné svetlo, pretože je pokrytý vodou. Zistil vplyv Mesiaca na príliv a odliv. Podieľal sa na pitvách a vytvoril množstvo veľmi podrobných anatomických kresieb. Je vynálezcom rôznych lietajúcich a bojových strojov, ponorky, mechanickej kalkulačky, auta na pružinový mechanizmus, priemyselného využitia slnečnej energie na ohrev vody a pod. Mnohé vynálezy neboli za jeho života vyrobené, ale sú technicky uskutočniteľné.



Galileova štika votknutého nosníka na konci zaťaženého osamelou silou. G. Galilei spolu s L. da Vincim.

Ohyb priamych nosníkov považujeme za rovinný, ak:

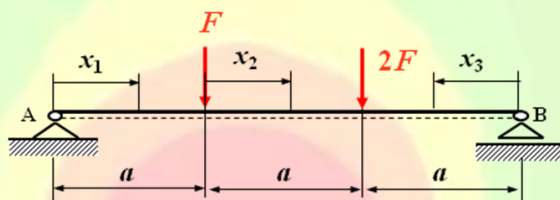
1. vonkajšie zaťaženie pôsobí v rovine, v ktorej leží aj os symetrie priečného prierezu (resp. vonkajšie zaťaženie je v rovine hlavných centrálnych osí kvadratických momentov),
2. os deformovaného (ohýbaného) nosníka leží v tej istej rovine.



6.1 Vnútorne sily

Postup pri určení vnútorných síl pri ohybe:

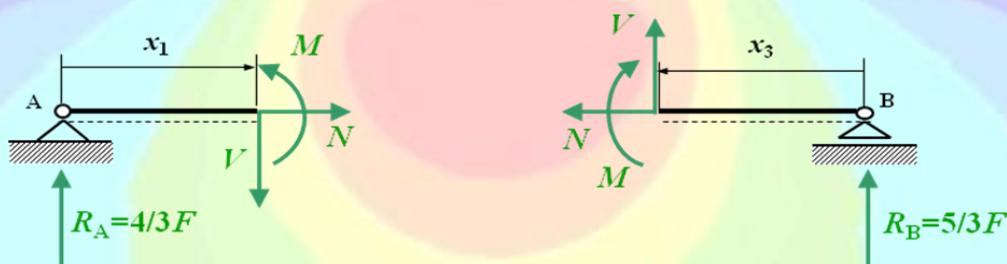
1. Ak je nosník staticky určitý (obr. 6.3), vypočítame reakcie, ktoré považujeme za vonkajšie sily. V prípade, že nosník je votknutý, s výhodou zvolíme smer rezu od voľného konca, potom výpočet reakcií nie je potrebný.
2. Postupne uvoľňujeme odrezané časti nosníka, zakreslíme vonkajšie sily a do miesta rezu zakreslíme kladnú orientáciu vnútorných síl podľa znamienkovej dohody (obr. 6.4).



Obr. 6.3

Znamienková dohoda:

- Osová sila N je kladná, ak pôsobí von z roviny rezu.
- Posúvajúca sila V je kladná, ak má snahu pootočiť odrezanú časť nosníka v smere hodinových ručičiek.
- Ohybový moment M je kladný, ak spôsobuje v spodných vláknoch nosníka ťah.



Obr. 6.4

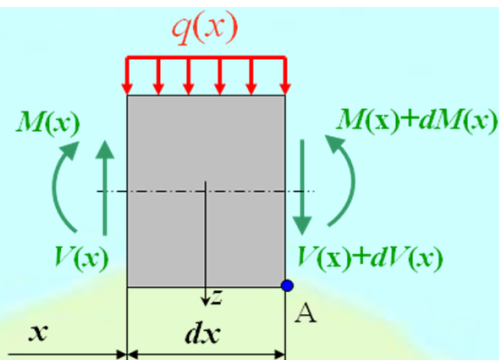
3. Napíšeme statické podmienky rovnováhy pre jednotlivé rezy a určíme veľkosť vnútorných síl.
4. Vykreslíme priebehy.

6.1.1. Vzťahy medzi vnútornými silami

Pre diferenciálny element na obr. 6.5 napíšeme podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{iz} = 0; \quad -V(x) + V(x) + dV(x) + q(x)dx = 0 \quad (6.1)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -V(x)dx - M(x) + q(x)dx \frac{dx}{2} + M(x) + dM(x) = 0 \quad (6.2)$$



Obr. 6.5

Po úprave z (6.1) a (6.2) dostávame:

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \qquad (6.3)$$

$$q(x) = -\frac{d^2M(x)}{dx^2} \qquad (6.4)$$

kde $q(x)$ je vonkajšie zaťaženie. Vzťahy (6.3) a (6.4) nazývame Schwedler¹¹-Žuravského¹² vzťahy.

6.1.2 Zákonitosti priebehov vnútorných síl pri ohybe

Nasledujúce zákonitosti vyplývajú zo Schwedler-Žuravského vzťahov.

1. Na úsekoch, kde je $q(x)=0$, $V(x)$ = konšt. a $M(x)$ má lineárny priebeh.
2. V miestach, kde $V(x)=0$ má $M(x)$ lokálny extrém.
3. Na úsekoch, kde je $q(x)=\text{konšt.}$, $V(x)$ má lineárny priebeh a $M(x)$ má kvadratický priebeh.
4. Na úsekoch, kde $V(x) > 0$, $M(x)$ rastie.
5. Na úsekoch, kde $V(x) < 0$, $M(x)$ klesá.
6. V miestach pôsobenia osamelých vonkajších síl má priebeh $V(x)$ nespojitý skok (veľkosť skoku sa rovná hodnote vonkajšej sily, ktorá v mieste pôsobí) a $M(x)$ má zalomenie.

11



Johann Wilhelm Schwedler (1823-1892, Nemecko) Navrhol budovu hlavnej železničnej vo Frankfurte nad Mohanom ako architekt spolu s Hermanom Eggertom. Stanica bola otvorená v roku 1888. Je jedným z hlavných železničných uzlov Nemecka a denne cez ňu prechádza približne 350 000 ľudí. Je to tiež koncová stanica liniek frankfurtského metra.

12



Dmitrij Ivanovič Žuravskij (1821 – 1891, Rusko) Pochádzal zo zámožnej rodiny, ktorá mu umožnila kvalitné vzdelanie. Venoval sa stavbe železníc a mostov a ich navrhovaniu. V roku 1869 navštívil USA, aby sa zoznámil s výstavbou železníc v USA. Najznámejším Žuravského projektom je oceľový most cez rieku Ververa na trati Moskva-Petrohrad.

7. V miestach pôsobenia osamelých momentov má priebeh $M(x)$ nespojitý skok (veľkosť skoku sa rovná hodnote vonkajšieho momentu, ktorý v mieste pôsobí).

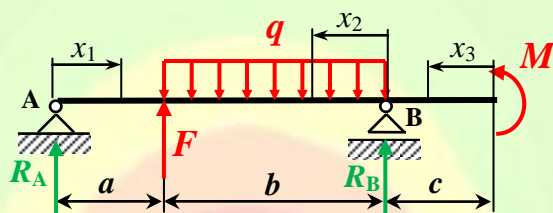
Každý uvedený bod možno nájsť v príklade 6.1 na obr. 6.7, ale aj v ďalších príkladoch. Skúste to.

Príklad 6.1

Na obr. 6.6 je zobrazený staticky určitý nosník zaťažený silou F , rovnomerným spojitém zaťažením q a ohybovým momentom M . Vykreslite priebehy priečných síl „ V “ a ohybových momentov „ M “, ak sú dané rozmery a , b , c a veľkosť vonkajšieho zaťaženia nosníka.

D: $F = 2 \text{ kN}$, $q = 6 \text{ kNm}^{-1}$, $M = 3 \text{ kNm}$, $a = 0,6 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 0,5 \text{ m}$

H: „ V “, „ M “



Obr. 6.6

Výpočet reakcií:

$$R_A + R_B + F - q \cdot b = 0$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad R_A(a+b) + F \cdot b - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} - M = 0$$

$$R_A = \frac{-F \cdot b + q \cdot \frac{b^2}{2} + M}{a+b} = \frac{-2 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + 6 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(1 \text{ m})^2}{2} + 3 \text{ kNm}}{0,6 \text{ m} + 1 \text{ m}} = 2,5 \text{ kN}$$

$$R_B = -R_A - F + q \cdot b = -2,5 \text{ kN} - 2 \text{ kN} + 6 \text{ kNm}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 1,5 \text{ kN}$$

Vnútorne sily v reze x_1 :

$$V(x_1) = R_A = 2,5 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1$$

$$M(x_1 = 0) = 0$$

$$M(x_1 = a) = R_A \cdot a = 2,5 \text{ kN} \cdot 0,6 \text{ m} = 1,5 \text{ kNm}$$

Vnútorne sily v reze x_2 :

$$V(x_2) = -R_B + q \cdot x_2$$

$$V(x_2 = 0) = -R_B = -1,5 \text{ kN}$$

$$V(x_2 = b) = -R_B + q \cdot b = -1,5 \text{ kN} + 6 \text{ kNm}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 4,5 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = M + R_B \cdot x_2 - q \cdot \frac{x_2^2}{2}$$

$$M(x_2 = 0) = M = 3 \text{ kNm}$$

$$M(x_2 = b) = M + R_B \cdot b - q \cdot \frac{b^2}{2} = 3 \text{ kNm} + 1,5 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 6 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(1 \text{ m})^2}{2} = 1,5 \text{ kNm}$$

Vnútorne sily v reze x_3 :

$$V(x_3) = 0$$

$$M(x_3) = M = 3 \text{ kNm}$$

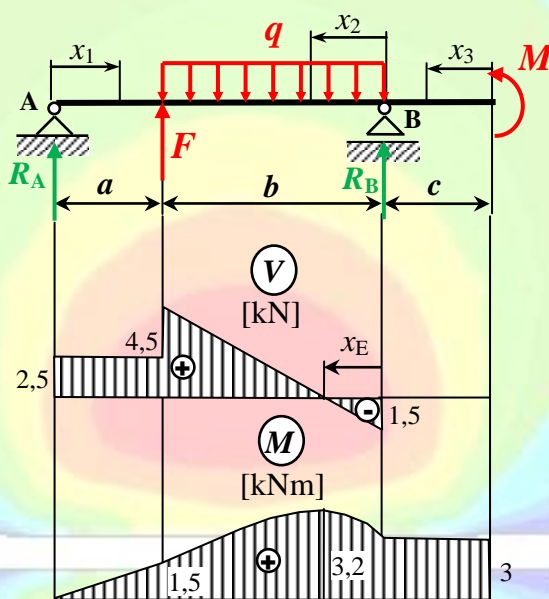
Výpočet polohy extrémumu ohybového momentu x_E :

$$0 = -R_B + q \cdot x_E \Rightarrow x_E = \frac{R_B}{q} = \frac{1,5 \text{ kN}}{6 \text{ kNm}^{-1}} = 0,25 \text{ m}$$

Výpočet hodnoty extrémumu ohybového momentu $M(x_E)$:

$$M(x_E) = M + R_B \cdot x_E - q \cdot \frac{x_E^2}{2} = 3 \text{ kNm} + 1,5 \text{ kN} \cdot 0,25 \text{ m} - 6 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(0,25 \text{ m})^2}{2} = 3,2 \text{ kNm}$$

Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.7.



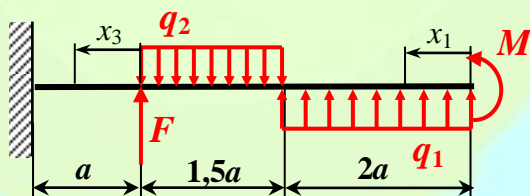
Obr. 6.7

Príklad 6.2

Na obr. 6.8 je zobrazený staticky určitý nosník zaťažený silou F , rovnomernými spojitými zaťažieniami q_1 a q_2 a ohybovým momentom M . Vykreslite priebehy priečných síl „ V “ a ohybových momentov „ M “, ak je daný rozmer a a veľkosť vonkajšieho zaťaženia nosníka.

D: $F = 3 \text{ kN}$, $q_1 = 1 \text{ kNm}^{-1}$, $q_2 = 2 \text{ kNm}^{-1}$, $M = 1 \text{ kNm}$, $a = 1 \text{ m}$

H: „ V “, „ M “



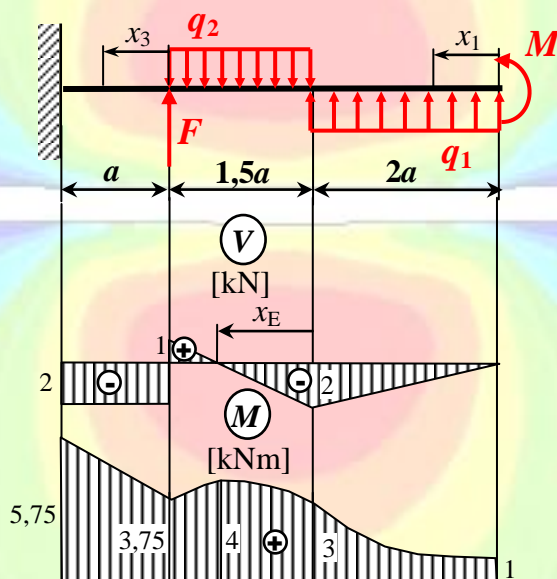
Obr. 6.8

Vnútorné sily v reze x_1 :

$$\begin{aligned}
 V(x_1) &= -q_1 \cdot x_1 & V(x_1 = 0) &= 0 \\
 & & V(x_1 = 2a) &= -q_1 \cdot 2a = -1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2.1 \text{ m} = -2 \text{ kN} \\
 M(x_1) &= M + q_1 \cdot \frac{x_1^2}{2} & M(x_1 = 0) &= M = 1 \text{ kNm} \\
 & & M(x_1 = 2a) &= M + q_1 \cdot \frac{(2a)^2}{2} = 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(2.1 \text{ m})^2}{2} = 3 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Vnútrotné sily v reze x_2 :

$$\begin{aligned}
 V(x_2) &= -q_1 \cdot 2a + q_2 \cdot x_2 \\
 V(x_2 = 0) &= -q_1 \cdot 2a = -1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2.1 \text{ m} = -2 \text{ kN} \\
 V(x_1 = 1,5a) &= -q_1 \cdot 2a + q_2 \cdot 1,5a = -1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2.1 \text{ m} + 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot 1,5 \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ kN} \\
 M(x_2) &= M + q_1 \cdot 2a(a + x_2) - q_2 \cdot \frac{x_2^2}{2} \\
 M(x_2 = 0) &= M + q_1 \cdot 2a^2 = 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \cdot (1 \text{ m})^2 = 3 \text{ kNm} \\
 M(x_2 = 1,5a) &= M + q_1 \cdot 5a^2 - q_2 \cdot \frac{(1,5a)^2}{2} = \\
 &= 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 5 \cdot (1 \text{ m})^2 - 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(1,5 \cdot 1 \text{ m})^2}{2} = 3,75 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$



Obr. 6.9

Vnútrotné sily v reze x_3 :

$$\begin{aligned}
 V(x_3) &= -q_1 \cdot 2a + q_2 \cdot 1,5a - F = -1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2.1 \text{ m} + 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot 1,5 \cdot 1 \text{ m} - 3 \text{ kN} = -2 \text{ kN} \\
 M(x_3) &= M + q_1 \cdot 2a(2,5a + x_3) - q_2 \cdot 1,5a(0,75a + x_3) + F \cdot x_3 \\
 M(x_3 = 0) &= M + q_1 \cdot 5a^2 - q_2 \cdot 1,125a^2 = \\
 &= 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 5 \cdot (1 \text{ m})^2 - 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot 1,125 \cdot (1 \text{ m})^2 = 3,75 \text{ kNm} \\
 M(x_2 = a) &= M + q_1 \cdot 7a^2 - q_2 \cdot 2,625a^2 + F \cdot a = \\
 &= 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 7 \cdot (1 \text{ m})^2 - 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2,625 \cdot (1 \text{ m})^2 + 3 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = 5,75 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

Výpočet polohy extrémumu ohybového momentu x_E :

$$0 = -q_1 \cdot 2a + q_2 \cdot x_E \Rightarrow x_E = \frac{q_1 \cdot 2a}{q_2} = \frac{1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m}}{2 \text{ kNm}^{-1}} = 1 \text{ m}$$

Výpočet hodnoty extrémumu ohybového momentu $M(x_E)$:

$$M(x_E) = M + q_1 \cdot 2a(a + x_E) - q_2 \cdot \frac{x_E^2}{2} = 1 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \cdot 1 \text{ m} \cdot (1 \text{ m} + 1 \text{ m}) - 2 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(1 \text{ m})^2}{2} = 4 \text{ kNm}$$

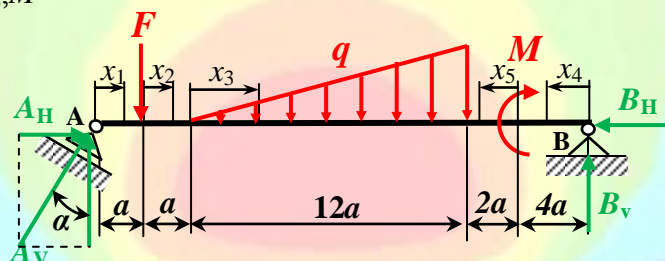
Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.9.

Príklad 6.3

Na obr. 6.10 je zobrazený staticky určitý nosník zaťažený silou F , trojuholníkovým spojitým zaťažením q a ohybovým momentom M . Vykreslite priebehy osových síl „ N “, priečných síl „ V “ a ohybových momentov „ M “, ak je daný rozmer a a veľkosť vonkajšieho zaťaženia nosníka.

D: $F = 20 \text{ kN}$, $q = 15 \text{ kNm}^{-1}$, $M = 15 \text{ kNm}$, $a = 0,5 \text{ m}$

H: „ N “, „ V “, „ M “



Obr. 6.10

Výpočet reakcií:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad A_H - B_H = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad A_V + B_V - F - q \cdot 6a = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -B_V \cdot 20a + F \cdot a + q \cdot 6a \cdot 10a + M = 0$$

$$B_V = \frac{F \cdot a + q \cdot 60a^2 + M}{20a} = \frac{20 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} + 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 60 \cdot (0,5 \text{ m})^2 + 15 \text{ kNm}}{20 \cdot 0,5 \text{ m}} = 25 \text{ kN}$$

$$A_V = F + q \cdot 6a - B_V = 20 \text{ kN} + 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 6 \cdot 0,5 \text{ m} - 25 \text{ kN} = 40 \text{ kN}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{A_H}{A_V} \Rightarrow A_H = A_V \cdot \text{tg } \alpha = 40 \text{ kN} \cdot \text{tg } 30^\circ = 23,1 \text{ kN} = B_H$$

Vnútorné sily v reze x_1 :

$$N(x_1) = -A_H = -23,1 \text{ kN}$$

$$V(x_1) = A_V = 40 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = A_V \cdot x_1 \quad M(x_1 = 0) = 0$$

$$M(x_1 = 0) = A_V \cdot a = 40 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 20 \text{ kNm}$$

Vnútorné sily v reze x_2 :

$$N(x_2) = -A_H = -23,1 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = A_V - F = 40 \text{ kN} - 20 \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = A_v(a + x_2) - F \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = A_v \cdot a = 40 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 20 \text{ kNm}$$

$$M(x_2 = a) = A_v \cdot 2a = F \cdot a = 40 \text{ kN} \cdot 2 \cdot 0,5 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 30 \text{ kNm}$$

Vnútrotné sily v reze x_3 :

$$N(x_3) = -A_H = -23,1 \text{ kN}$$

$$V(x_3) = A_v - F - \frac{q \cdot x_3^2}{24a}$$

$$V(x_3 = 0) = A_v - F = 40 \text{ kN} - 20 \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

$$V(x_3 = 12a) = A_v - F - q \cdot 6a = 40 \text{ kN} - 20 \text{ kN} - 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 6 \cdot 0,5 \text{ m} = -25 \text{ kN}$$

$$M(x_3) = A_v(2a + x_3) - F(a + x_3) - \frac{q \cdot x_3^3}{72a}$$

$$M(x_3 = 0) = A_v \cdot 2a - F \cdot a = 40 \text{ kN} \cdot 2 \cdot 0,5 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 30 \text{ kNm}$$

$$M(x_3 = 12a) = A_v \cdot 14a - F \cdot 13a - q \cdot 24a^2 =$$

$$= 40 \text{ kN} \cdot 14 \cdot 0,5 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 13 \cdot 0,5 \text{ m} - 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 24 \cdot (0,5 \text{ m})^2 = 60 \text{ kNm}$$

Vnútrotné sily v reze x_4 :

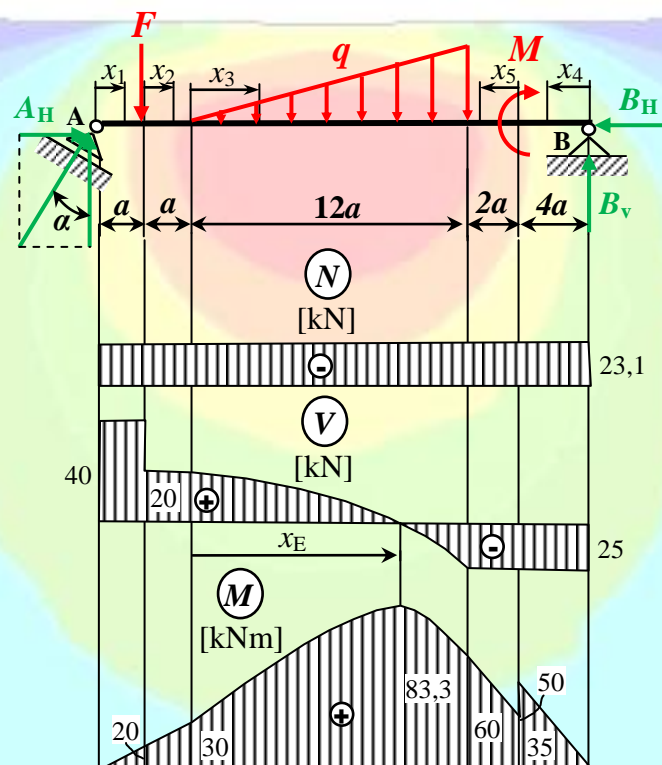
$$N(x_4) = -B_H = -23,1 \text{ kN}$$

$$V(x_4) = -B_v = -25 \text{ kN}$$

$$M(x_4) = B_v \cdot x_4$$

$$M(x_4 = 0) = 0$$

$$M(x_4 = 4a) = B_v \cdot 4a = 25 \text{ kN} \cdot 4 \cdot 0,5 \text{ m} = 50 \text{ kNm}$$



Obr. 6.11

Vnútrotné sily v reze x_5 :

$$N(x_5) = -B_H = -23,1 \text{ kN}$$

$$V(x_5) = -B_V = -25 \text{ kN}$$

$$M(x_5) = B_V(4a + x_5) - M$$

$$M(x_5 = 0) = B_V \cdot 4a - M = 25 \text{ kN} \cdot 4,0,5 \text{ m} - 15 \text{ kNm} = 35 \text{ kNm}$$

$$M(x_5 = 2a) = B_V \cdot 6a - M = 25 \text{ kN} \cdot 6,0,5 \text{ m} - 15 \text{ kNm} = 60 \text{ kNm}$$

Extrém ohybového momentu:

$$0 = A_V - F - \frac{q \cdot x_E^2}{24a} \Rightarrow x_E = \sqrt{\frac{24a(A_V - F)}{q}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 0,5 \text{ m} (40 \text{ kN} - 20 \text{ kN})}{15 \text{ kNm}^{-1}}} = 4 \text{ m}$$

$$M(x_E) = A_V(2a + x_E) - F(a + x_E) - \frac{q \cdot x_E^3}{72a} = 40 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 20 \text{ kN} \cdot 4,5 \text{ m} - \frac{15 \text{ kNm}^{-1} \cdot (4 \text{ m})^3}{72 \cdot 0,5 \text{ m}} = 83,3 \text{ kNm}$$

Priebehy vnútrotných síl sú znázornené na obr. 6.11.



6.2 Rovinné lomené nosníky

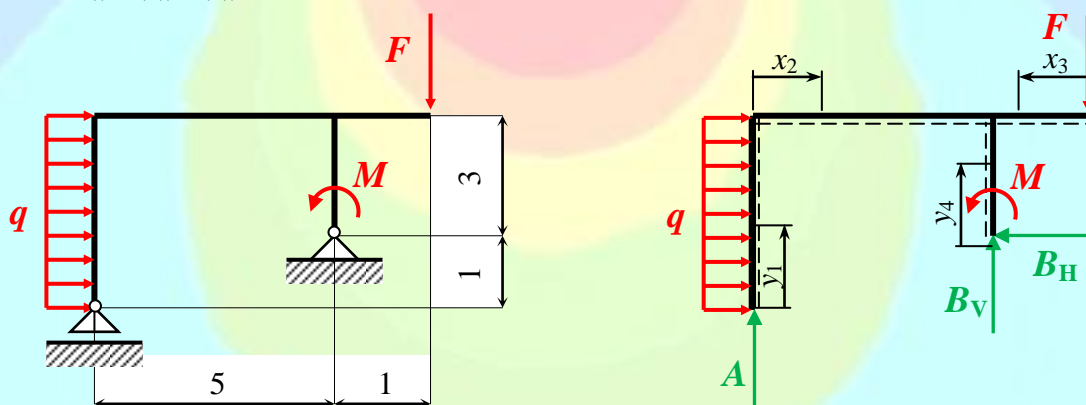
Okrem priamych nosníkov sa v mnohých prípadoch vyskytujú aj lomené nosníky, u ktorých spojnice ťažísk priečných prierezov tvoria rovinné lomené úsečky. Ak sú tieto lomené nosníky zaťažené v rovine nosníka, potom ide o rovinný ohyb. Na určenie vnútrotných síl použijeme metódu mysleného rezu. Znamienková dohoda je rovnaká ako pre priame nosníky, rovnako ako postup výpočtu uvedený v kapitole 6.1.

Príklad 6.4

Lomený nosník je zaťažený silou F , ohybovým momentom M a rovnomerným spojitým zaťažením q a má rozmery v metroch podľa obr. 6.12. Zostrojte priebehy normálovej sily „ N^c “, posúvajúcej sily „ V^c “ a ohybového momentu „ M^c “.

D: $F = 40 \text{ kN}$, $M = 40 \text{ kNm}$, $q = 20 \text{ kNm}^{-1}$

H: „ N^c “, „ V^c “, „ M^c “



Obr. 6.12

Určenie reakcií:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad q \cdot 4 - B_H = 0 & \Rightarrow B_H = 4q = 4 \text{ m} \cdot 20 \text{ kNm}^{-1} = 80 \text{ kN} \\ \sum F_{iy} = 0; \quad A + B_V - F = 0 & \Rightarrow B_V = F - A = 40 \text{ kN} + 16 \text{ kN} = 56 \text{ kN} \\ \sum M_{iB} = 0; \quad F \cdot 1 \text{ m} - M + A \cdot 5 \text{ m} + q \cdot 4 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 0 & \Rightarrow A = \frac{1}{5 \text{ m}} (-F + M - 4 \text{ m}^2 q) = -16 \text{ kN} \end{aligned}$$

Určenie vnútorných síl v reze y_1 :

$$\begin{aligned} N(y_1) = -A & \quad N(y_1) = 16 \text{ kN} \\ V(y_1) = -q \cdot y_1 & \quad V(y_1 = 0) = 0 \\ & \quad V(y_1 = 4 \text{ m}) = -80 \text{ kN} \\ M(y_1) = -\frac{q \cdot y_1^2}{2} & \quad M(y_1 = 0) = 0 \\ & \quad M(y_1 = 4 \text{ m}) = -\frac{20 \text{ kNm}^{-1} \cdot (4 \text{ m})^2}{2} = -160 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Určenie vnútorných síl v reze x_2 :

$$\begin{aligned} N(x_2) = -q \cdot 4 & \quad N(x_2) = -80 \text{ kN} \\ V(x_2) = A & \quad V(x_2) = -16 \text{ kN} \\ M(x_2) = A \cdot x_2 - q \cdot 4 \cdot 2 & \quad M(x_2 = 0) = -8q = -160 \text{ kNm} \\ & \quad M(x_2 = 5 \text{ m}) = -16 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 20 \text{ kNm}^{-1} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = -240 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Určenie vnútorných síl v reze x_3 :

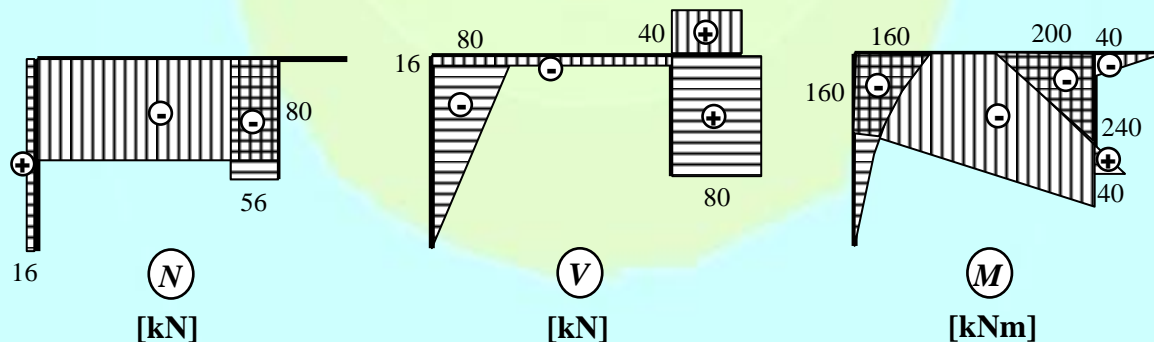
$$\begin{aligned} N(x_3) = 0 & \\ V(x_3) = F & \quad V(x_3) = 40 \text{ kN} \\ M(x_3) = -F \cdot x_3 & \quad M(x_3 = 0) = 0 \\ & \quad M(x_3 = 1 \text{ m}) = -40 \cdot 1 \text{ m} = -40 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Určenie vnútorných síl v reze y_4 :

$$\begin{aligned} N(y_4) = -B_V & \quad N(y_4) = -56 \text{ kN} \\ V(y_4) = B_H & \quad V(y_4) = 80 \text{ kN} \\ M(y_4) = -B_H \cdot y_4 + M & \quad M(y_4 = 0) = M = 40 \text{ kNm} \\ & \quad M(y_4 = 3 \text{ m}) = -80 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 40 \text{ kNm} = -200 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Určenie extrémneho ohybového momentu $M(x_E)$ pre tento nosník, nie je potrebné vykonať, lebo na žiadnom úseku nie je priečna sila $V=0$.

Graficky znázorníme priebehy vnútorných síl (obr. 6.13).



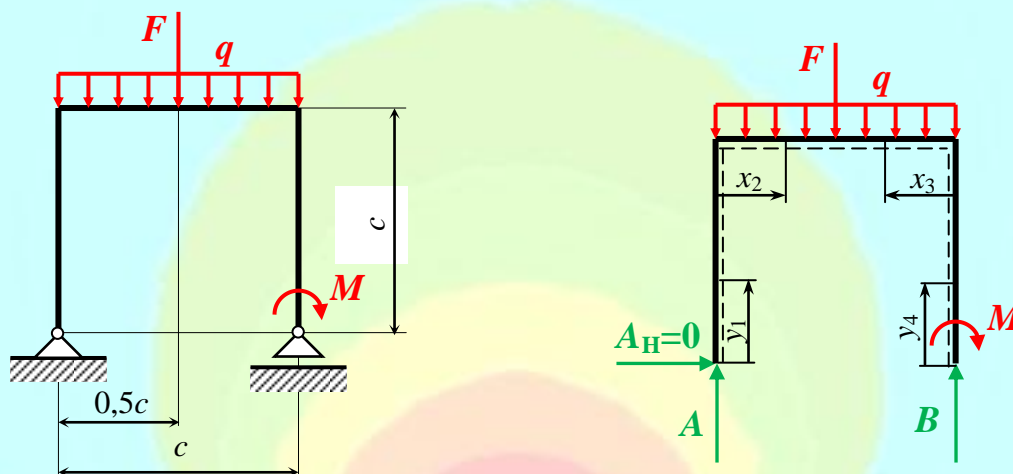
Obr. 6.13

Príklad 6.5

Lomený nosník je zaťažený silou F , ohybovým momentom M a rovnomerným spojitým zaťažením q a má rozmer c podľa obr.6.14. Zostrojte priebehy normálovej sily „ N^c “, posúvajúcej sily „ V^c “ a ohybového momentu „ M^c “.

D: $F = 10 \text{ kN}$, $M = 15 \text{ kNm}$, $q = 15 \text{ kNm}^{-1}$, $c = 2 \text{ m}$

H: „ N^c “, „ V^c “, „ M^c “



Obr. 6.14

Výpočet reakcií:

$$\sum F_{ix} = 0; A_H = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; A + B - F - q \cdot c = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0; -B \cdot c + F \cdot 0,5c + q \cdot c \cdot 0,5c + M = 0$$

$$B = \frac{F \cdot 0,5c + q \cdot 0,5c^2 + M}{c} = \frac{10 \text{ kN} \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ m} + 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 0,5 \cdot (2 \text{ m})^2 + 15 \text{ kNm}}{2 \text{ m}} = 27,5 \text{ kN}$$

$$A = F + q \cdot c - B = 10 \text{ kN} + 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \text{ m} - 27,5 \text{ kN} = 12,5 \text{ kN}$$

Osovú silu v jednotlivých rezoč:

$$N(y_1) = -A = -12,5 \text{ kN}$$

$$N(x_2) = 0$$

$$N(x_3) = 0$$

$$N(y_4) = -B = -27,5 \text{ kN}$$

Priečne sily v jednotlivých rezoč:

$$V(y_1) = 0$$

$$V(x_2) = -q \cdot x_2 + A \quad V(x_2 = 0) = A = 12,5 \text{ kN}$$

$$V(x_2 = 0,5c) = -q \cdot 0,5c + A = -15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ m} + 12,5 \text{ kN} = -2,5 \text{ kN}$$

$$V(x_3) = q \cdot x_3 - B \quad V(x_3 = 0) = -B = -27,5 \text{ kN}$$

$$V(x_3 = 0,5c) = q \cdot 0,5c - B = 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ m} - 27,5 \text{ kN} = -12,5 \text{ kN}$$

$$V(y_4) = 0$$

Ohybové momenty v jednotlivých rezoch:

$$M(y_1) = 0$$

$$M(x_2) = -q \cdot \frac{x_2^2}{2} + A \cdot x_2$$

$$M(x_2 = 0) = 0$$

$$M(x_2 = 0,5c) = -q \cdot \frac{(0,5c)^2}{2} + A \cdot 0,5c = -15 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(0,5 \cdot 2 \text{ m})^2}{2} + 12,5 \text{ kN} \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ m} = 5 \text{ kNm}$$

$$M(x_3) = -q \cdot \frac{x_3^2}{2} + B \cdot x_3 - M$$

$$M(x_3 = 0) = -M = -15 \text{ kNm}$$

$$M(x_3 = 0,5c) = -q \cdot \frac{(0,5c)^2}{2} + B \cdot 0,5c - M =$$

$$= -15 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(0,5 \cdot 2 \text{ m})^2}{2} + 27,5 \text{ kN} \cdot 0,5 \cdot 2 \text{ m} - 15 \text{ kNm} = 5 \text{ kNm}$$

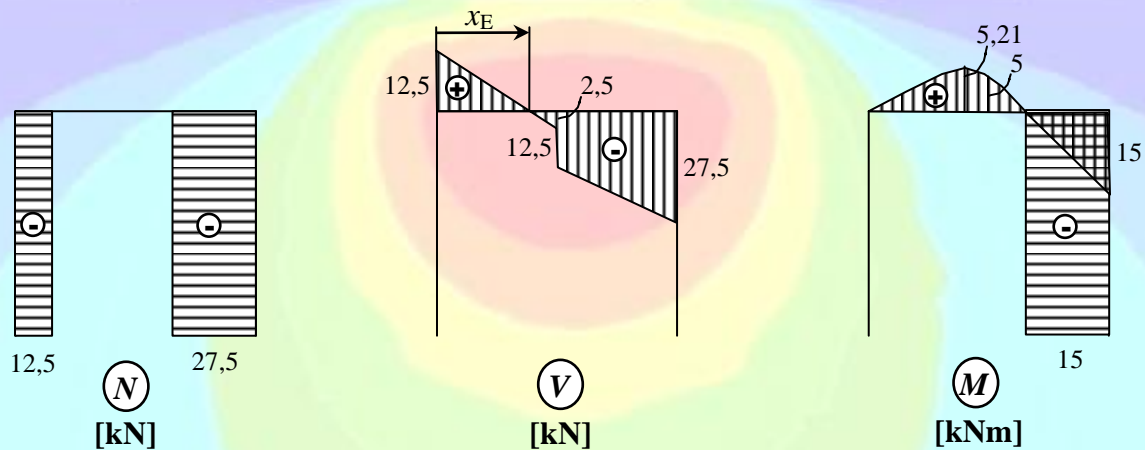
$$M(x_4) = -M = -15 \text{ kNm}$$

Extrém ohybového momentu:

$$0 = -q \cdot x_E + A \Rightarrow x_E = \frac{A}{q} = \frac{12,5 \text{ kN}}{15 \text{ kNm}^{-1}} = 0,83 \text{ m}$$

$$M(x_E) = -q \cdot \frac{x_E^2}{2} + A \cdot x_E = -15 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(0,83 \text{ m})^2}{2} + 12,5 \text{ kN} \cdot 0,83 \text{ m} = 5,21 \text{ kNm}$$

Priebehy vnútorných síl sú znázornené na obr. 6.15.



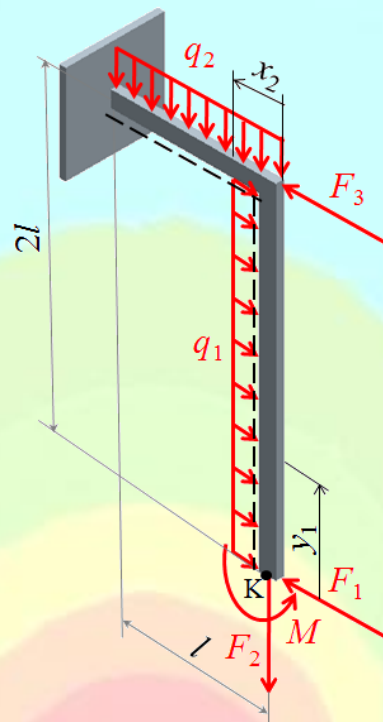
Obr. 6.15

Príklad 6.6

Lomený nosník je zaťažený silami F_1 , F_2 , F_3 , ohybovým momentom M a rovnomernými spojitými zaťažienami q_1 , q_2 a má rozmer l podľa obr.6.16. Zostrojte priebehy normálovej sily „ N “, posúvajúcej sily „ V “ a ohybového momentu „ M “.

D: $F_1 = 1 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $F_3 = 3 \text{ kN}$, $q_1 = q_2 = 3 \text{ kNm}^{-1}$, $M = 2 \text{ kNm}$, $l = 1 \text{ m}$

H: „ N “, „ V “, „ M “



Obr. 6.16

Vnútorne sily v reze \$y_1\$:

$$N(y_1) = F_2 = 2 \text{ kN}$$

$$V(y_1) = F_1 - q_1 \cdot y_1$$

$$M(y_1) = M - F_1 \cdot y_1 + q_1 \cdot \frac{y_1^2}{2}$$

$$M(y_1 = 0) = M = 2 \text{ kNm}$$

$$M(y_1 = 2l) = M - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot \frac{(2l)^2}{2} = 2 \text{ kNm} - 1 \text{ kN} \cdot 2.1 \text{ m} + 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(2.1 \text{ m})^2}{2} = 6 \text{ kNm}$$

Vnútorne sily v reze \$x_2\$:

$$N(x_2) = -F_3 - F_1 + q_1 \cdot 2l = -3 \text{ kN} - 1 \text{ kN} + 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2.1 \text{ m} = 2 \text{ kN}$$

$$V(x_2) = F_2 + q_2 \cdot x_2$$

$$M(x_2) = M - F_2 \cdot x_2 - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot 2l^2 - q_2 \cdot \frac{x_2^2}{2}$$

$$M(x_2 = 0) = M - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot 2l^2 = 2 \text{ kNm} - 1 \text{ kN} \cdot 2.1 \text{ m} + 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \cdot (1 \text{ m})^2 = 6 \text{ kNm}$$

$$M(x_2 = l) = M - F_2 \cdot l - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot 2l^2 - q_2 \cdot \frac{l^2}{2} =$$

$$= 2 \text{ kNm} - 2 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 2.1 \text{ m} + 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2 \cdot (1 \text{ m})^2 - 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(1 \text{ m})^2}{2} = 2.5 \text{ kNm}$$

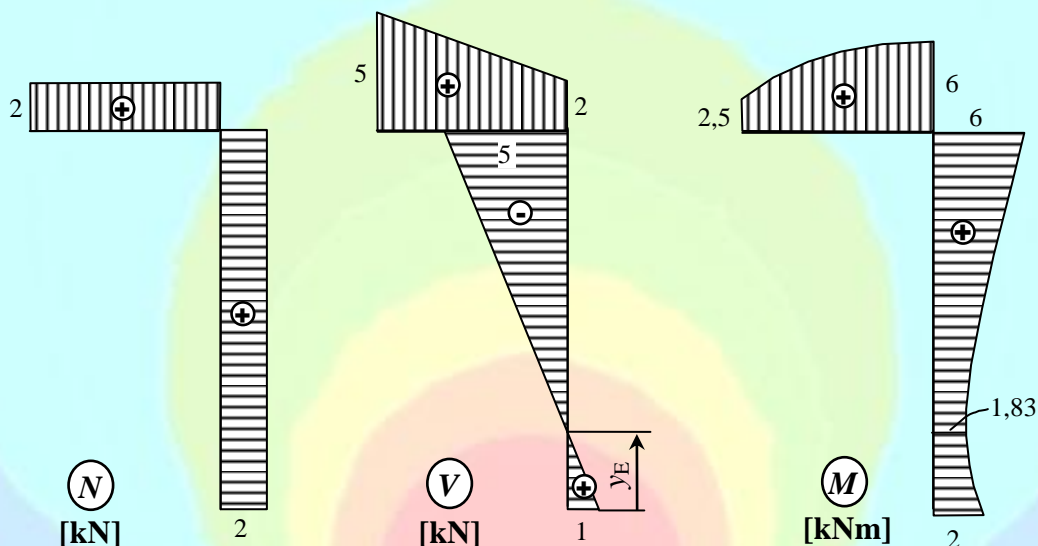
Výpočet polohy extrémneho ohybového momentu \$y_E\$:

$$0 = F_1 - q_1 \cdot y_E \Rightarrow y_E = \frac{F_1}{q_1} = \frac{1 \text{ kN}}{3 \text{ kNm}^{-1}} = 0,33 \text{ m}$$

Výpočet hodnoty extrému ohybového momentu $M(y_E)$:

$$M(y_E) = M - F_1 \cdot y_E + q_1 \cdot \frac{y_E^2}{2} = 2 \text{ kNm} - 1 \text{ kN} \cdot 0,33 \text{ m} + 3 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(0,33 \text{ m})^2}{2} = 1,83 \text{ kNm}$$

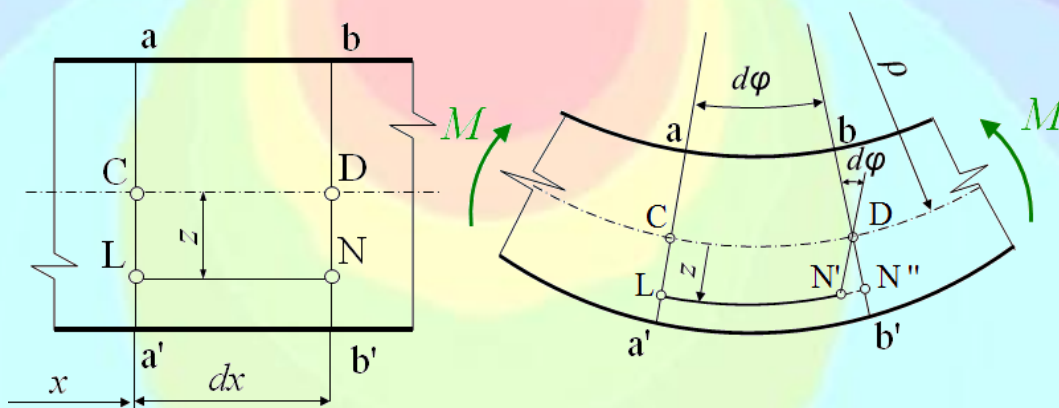
Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.17.



Obr. 6.17

6.3 Normálové napätie pri rovinnom ohybe

Vyberme element dx z nosníka v mieste x (obr. 6.18). Na vybraný element pôsobí jediná nenulová vnútorná sila, a to ohybový moment: $M \neq 0$, $V = N = 0$. Ide o čistý ohyb.



Obr. 6.18

Pri odvodení normálového napätia pri ohybe budú platiť nasledujúce predpoklady:

- ohyb je rovinný,
- prierezy $a - a'$, $b - b'$ (obr. 6.18) ostávajú po deformácii rovinné (Navier-Bernoulliho¹³ hypotéza),

- vlákna na seba netlačia, spodné vlákna pri deformácii sa predlžujú, horné sa skracujú,
- os nosníka a pozdĺžne vlákna sa zakrivujú,

Ak pred deformáciou mali časti vlákna označené CD (neutrálna os) a LN rovnakú dĺžku, po zaťažení nosníka predĺženie Δl vlákna zodpovedá vzdialenosti $\overline{N'N''}$. Potom pomerné predĺženie ε vlákna LN podľa obr. 6.18 je nasledujúce:

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\overline{N'N''}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{LN''} - \overline{CD}}{\overline{CD}} \quad (6.5)$$

Podľa obr. 6.18 vyjadríme $\overline{LN''}$ a \overline{CD} :

$$\varphi \cong \operatorname{tg} d\varphi = \frac{\overline{LN''}}{\rho + z} \Rightarrow \overline{LN''} = (\rho + z)d\varphi \quad (6.6)$$

$$\varphi \cong \operatorname{tg} d\varphi = \frac{\overline{CD}}{\rho} \Rightarrow \overline{CD} = \rho d\varphi$$

Vzťahy (6.6) dosadíme do (6.5):

$$\varepsilon(x) = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho} \quad (6.7)$$

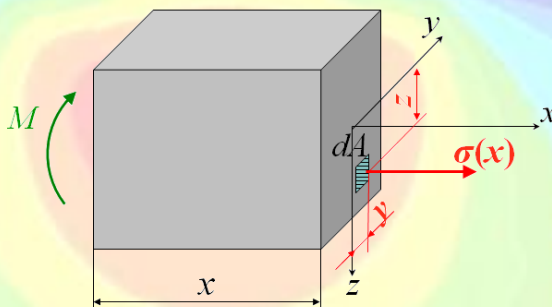
kde ρ je polomer krivosti neutrálnej osi a z je súradnica po výške prierezu.

Dosadením do Hookeovho zákona pre jednoosovú napätosť dostávame:

$$\sigma(x) = \varepsilon(x)E = \frac{z}{\rho} E \quad (6.8)$$

kde E je Youngov modul pružnosti.

Potrebujeme vyjadriť napätie ako funkciu ohybového momentu, preto napíšeme momentovú podmienku rovnováhy k osi y podľa obr. 6.19, kde je zobrazená myslenným rezom oddelená časť nosníka.



Obr. 6.19

$$\sum (M_i)_y = 0; \quad -M(x) + \int_{(A)} \sigma(x) dA \cdot z = 0 \quad (6.9)$$

Po dosadení vzťahu (6.8) do (6.9) dostávame:



Jakob Bernoulli (1654-1706, Bazilej, Švajčiarsko) Matematiku musel vyštudovať tajne proti praniu svojho otca, ktorý chcel, aby sa stal kňazom. Vyštudoval teológiu, prednášal v Bazileji. Zaujímal sa hlavne o matematiku, fyziku a astronómiu. Ako prvý z rozsiahlej vedeckej rodiny cestoval po svete a stretával sa s vedcami z iných krajín, s ktorými spolupracoval na objavoch. V pružnosti a pevnosti dokázal priamu úmeru medzi krivosťou priehybovej čiary a zaťažujúcim momentom, ktorú neskôr rozpracoval Euler, a dnes je známa ako Bernoulliho diferenciálna rovnica priehybovej čiary. Zomrel na tuberkulózu vo veku 52 rokov (priemerná dĺžka života Bernoulliovcov bola viac ako 70 rokov).

$$M(x) = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} z^2 dA = \frac{E}{\rho} J_y \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{E \cdot J_y} \quad (6.10)$$

kde J_y je kvadratický moment k hlavnej centrálnej osi y . Súčin $E \cdot J_y$ nazývame tuhosťou v ohybe.

Z (6.8) vyplýva:

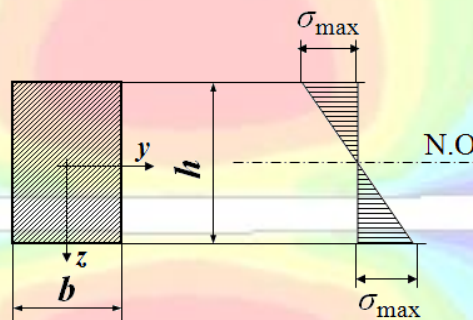
$$\sigma(x) = \frac{z}{\rho} E \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma(x)}{E \cdot z} \quad (6.11)$$

Po dosadení (6.11) do (6.10) dostávame tzv. Navierovu rovnicu, t.j. vzťah pre normálové napätie σ pri ohybe v priereze definovanom súradnicou x po výške (z) prierezu:

$$\frac{\sigma(x)}{E \cdot z} = \frac{M(x)}{E \cdot J_y} \Rightarrow \sigma(x) = \frac{M(x)}{J_y} z \quad (6.12)$$

Maximálne normálové napätie pri ohybe je vo vláknach, ktoré sú najvzdialenejšie od neutrálnej osi, (obr. 6.20, $z_{\max} = h/2$). Neutrálna os je priamka obsahujúca body prierezu, v ktorých je $\sigma = 0$. Maximálne normálové napätie v mieste definovanom súradnicou x je nasledovné:

$$\sigma(x)_{\max} = \frac{M(x)}{J_y} z_{\max} = \frac{M(x)}{W_{Oy}} \quad (6.13)$$



Obr. 6.20

kde

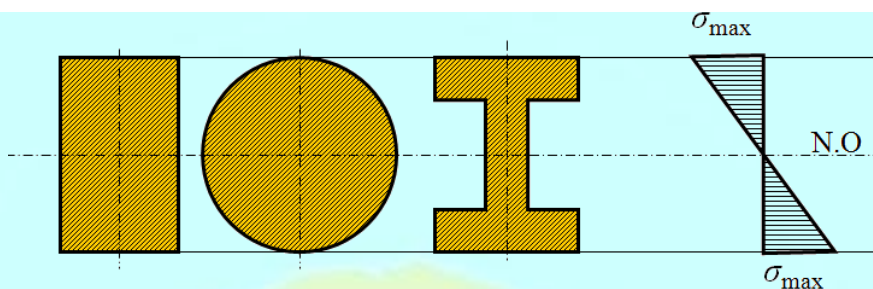
$$\frac{J_y}{z_{\max}} = W_{Oy}, \quad \text{m}^3; \text{mm}^3 \quad (6.14)$$

Pomer vo vzťahu (6.14) nazývame modul prierezu (prierezový modul) v ohybe W_O . Index y znamená, že ide o ohyb okolo hlavnej centrálnej osi y .

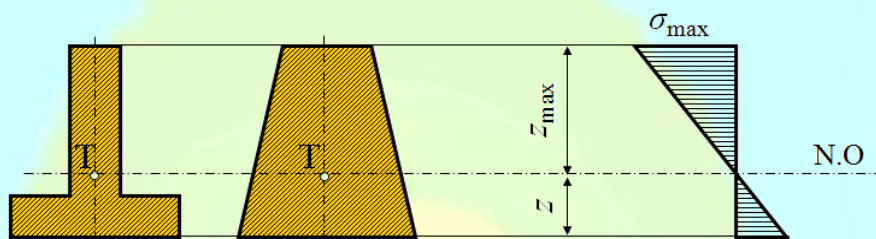
Modul prierezu W_{Oy} pre obdĺžnikový prierez podľa obr. 6.20:

$$W_{Oy} = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \quad (6.15)$$

Na obr. 6.21 a 6.22 možno porovnať priebehy normálového napätia pri ohybe pre prierezy, ktoré sú symetrické k neutrálnej osi (obr. 6.21) a nesymetrické k neutrálnej osi (obr. 6.22).



Obr. 6.21



Obr. 6.22



6.4 Šmykové napätie pri rovinnom ohybe

Ak v priečnom priereze pôsobí okrem ohybového momentu M aj priečna sila V (priečny ohyb), potom okrem normálového napätia σ pôsobí v priereze aj šmykové napätie τ . Priečna sila V je výslednicou šmykových napätí v priereze. Pre šmykové napätie platí Žuravského vzťah:

$$\tau(x) = \frac{V(x) \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} \quad (6.16)$$

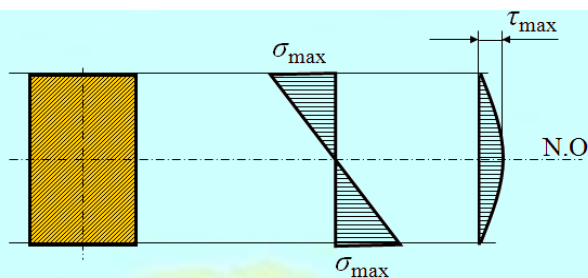
kde $V(x)$ je priečna sila v mieste rezu definovanom súradnicou x , b je šírka vyšetřovaného prierezu v mieste rezu, J_y je osový kvadratický moment k neutrálnej osi, S_y^* je statický moment časti plochy prierezu nad bodom, v ktorom napätie vyšetřujeme vzhľadom k neutrálnej osi.

Bernoulliho hypotéza rovinnosti prierezu a lineárne rozloženie normálových napätí platí presne len pre čistý ohyb (v priečnom reze pôsobí len ohybový moment, $M=\text{konšt}$, $V=0$). Šmykové napätia spôsobujú deplanáciu (bortenie) prierezu, čo je v rozpore s Bernoulliho hypotézou.

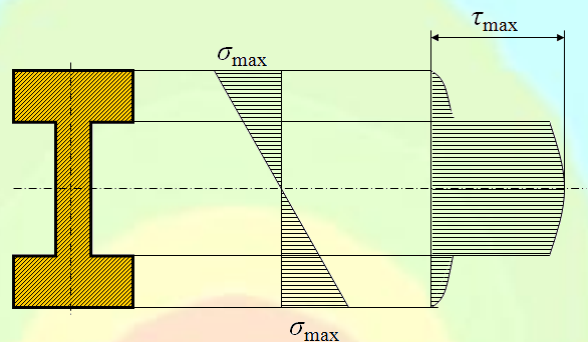
Vplyv šmykových napätí je zanedbateľný pre dlhé nosníky, kde je dominantný vplyv ohybových momentov. Ak je účinok priečnej sily porovnateľný s účinkom ohybového momentu, resp. ho prevyšuje, vplyv šmykového napätia nemožno zanedbať. Platí to pre krátke nosníky a vysoké profily.

Účinok priečnej sily možno prezentovať na jej podiele na celkovom priehybe pre priamy nosník na dvoch podperách, ktorý je zaťažovaný osamelou silou v polovici rozpätia. Pokiaľ takýto nosník má prierez I300 a dĺžku 500mm (krátky nosník), podiel priečnej sily V na celkovom priehybe je 84,56%. V prípade, že prierez je I80 a dĺžka 15 000 mm (dlhý nosník), potom tento podiel je len 0,04%. [19]

Obr. 6.23 zobrazuje priebeh normálového a šmykového napätia pre obdĺžnikový prierez, obr. 6.24 priebehy σ a τ pre symetrický I prierez. Je zrejmé, že maximálne šmykové napätie je v bodoch neutrálnej osi.

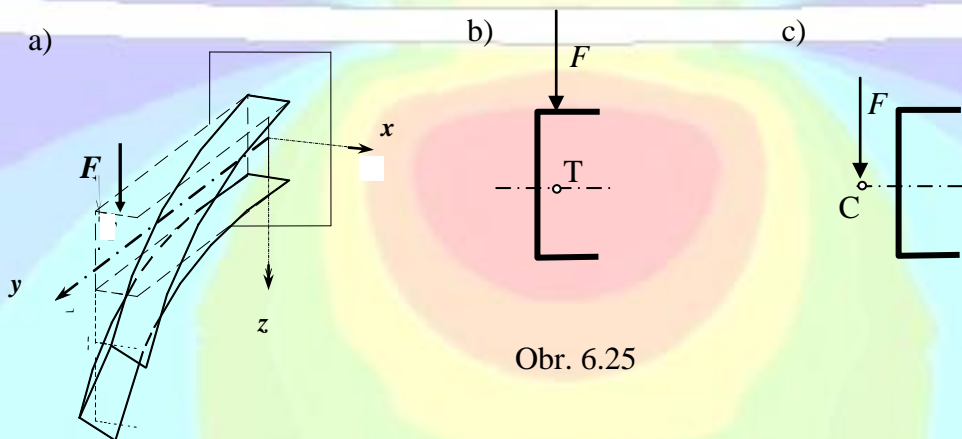


Obr. 6.23



Obr. 6.24

Pre profil U (a podobné profily), ak vonkajšia sila F neleží v tzv. strede šmyku, ale v ťažisku, potom dochádza aj ku skrúčovaniu profilu (obr. 6.25 a, b), pribúda namáhanie na krut. Ak pre profil U chceme predísť skrúteniu profilu, je potrebné ho zaťažiť v bode C (obr. 6.25 c, čo je stred šmyku). Podrobnejšie popis tejto problematiky môžete nájsť v [3, 17, 23].



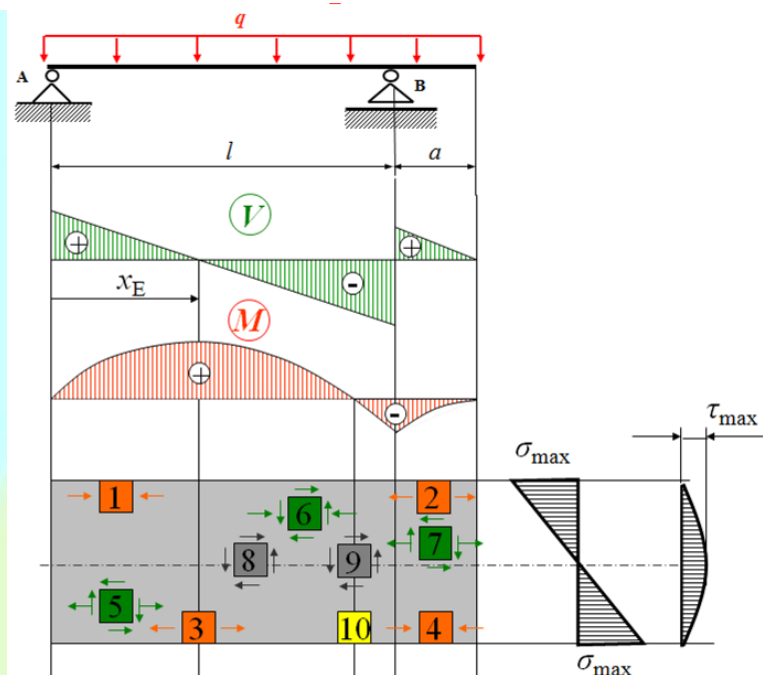
Obr. 6.25

Problém skrúčovania profilu nevzniká u profilov, kde vonkajšia sila pôsobí v osi symetrie priečneho prierezu.

6.5 Napätosť v nosníku

Napätosť v rôznych bodoch nosníka môže byť rôzna. Napätosť v bodoch 1, 2, 3, 4 na obr. 6.26 je priamková (ide o krajné vlákna), napätosť v bodoch 5, 6, 7 je rovinná. V bodoch 8, 9 je čistý šmyk a v bode 10 je napätosť nulová.





Obr. 6.26

Príklad 6.7

Pre priamy nosník na obr. 6.8 vykreslite priebehy normálového a šmykového napätia vo votknutí, ak je daný obdĺžnikový prierez 50x80mm.

H: „ σ “, „ τ “

Ohybový moment vo votknutí pre nosník na obr. 6.8 je $M = 5,75\text{kNm}$ a priečna sila vo votknutí je $V = -2\text{kN}$.

Kvadratický moment k centrálnej osi y pre obdĺžnikový prierez:

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{50 \cdot 80^3}{12} \text{ mm}^4 = 2\,133\,333 \text{ mm}^4$$

Normálové napätie vo votknutí v horných vláknoch:

$$|\sigma_A| = \frac{M}{J_y} \cdot z_A = \frac{5,75 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{2\,133\,333 \text{ mm}^4} \cdot 40 \text{ mm} = 107,8 \text{ MPa}$$

Keďže $z_A = z_B = 40 \text{ mm}$, potom normálové napätie vo votknutí v spodných vláknoch:

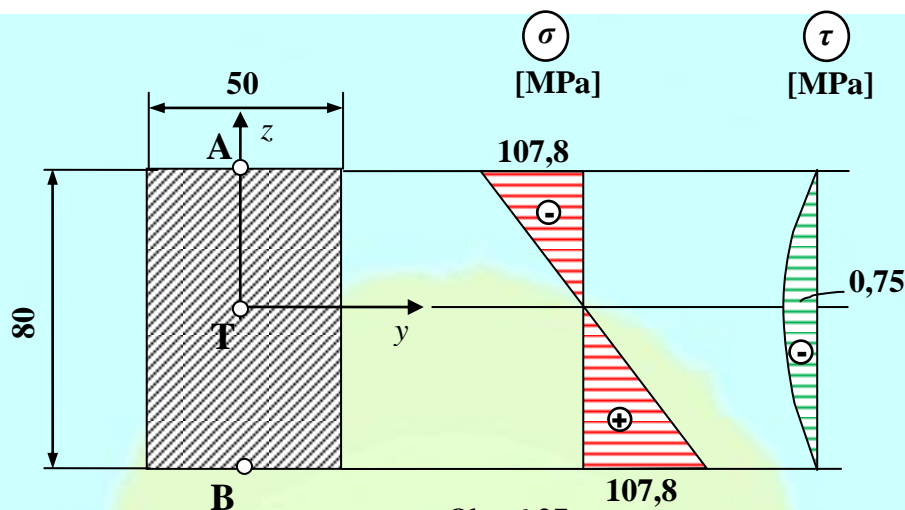
$$|\sigma_A| = |\sigma_B|$$

Šmykové napätie vo votknutí v horných a spodných vláknoch:

$$\tau_A = \tau_B = 0$$

Šmykové napätie vo votknutí v ťažisku:

$$\tau_T = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{V \cdot (z_T^* \cdot A^*)}{b \cdot J_y} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (25 \cdot 50 \cdot 40) \text{ mm}^3}{50 \text{ mm} \cdot 2\,133\,333 \text{ mm}^4} = 0,75 \text{ MPa}$$

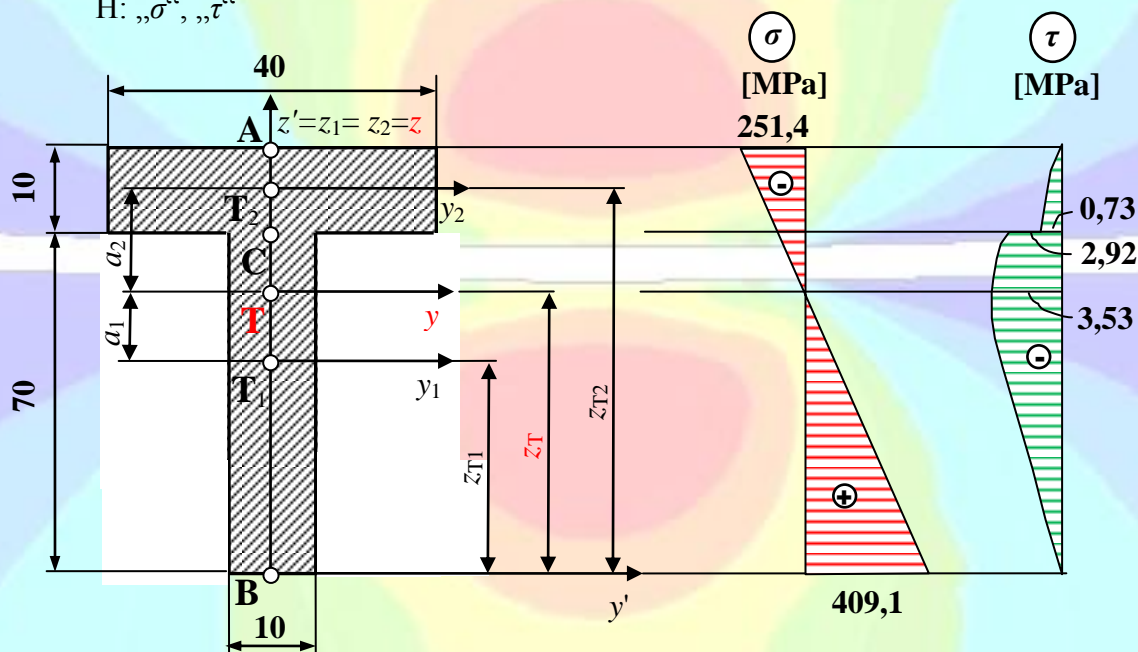


Obr. 6.27

Príklad 6.8

Pre priamy nosník na obr. 6.8 vykreslite priebehy normálového a šmykového napätia vo votknutí, ak je daný prierez T na obr. 6.28. Rozmery sú v milimetroch.

H: „ σ “, „ τ “



Obr. 6.28

Ohybový moment vo votknutí pre nosník na obr. 6.8 je $M=5,75\text{kNm}$ a priečna sila vo votknutí je $V=2\text{kN}$.

Poloha ťažiska prierezu T podľa obr. 6.28:

$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{35 \cdot 10 \cdot 70 + 75 \cdot 40 \cdot 10}{10 \cdot 70 + 40 \cdot 10} = 49,55 \text{ mm}$$

Kolmé vzdialenosti medzi centrálnymi osami:

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 49,55 - 35 = 14,55 \text{ mm}$$

$$a_2 = z_{T2} - z_T = 75 - 49,55 = 25,45 \text{ mm}$$

Kvadratický moment k centrálnej osi y:

$$J_y = \sum_{i=1}^2 J_{y_i} + \sum_{i=1}^2 a_i^2 \cdot A_i = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= \frac{10 \cdot 70^3}{12} + 14,55^2 \cdot 10 \cdot 70 + \frac{40 \cdot 10^3}{12} + 25,45^2 \cdot 40 \cdot 10 = 696\,439,4 \text{ mm}^4$$

Normálové napätie vo votknutí v horných vláknach:

$$|\sigma_A| = \frac{M}{J_y} \cdot z_A = \frac{5,75 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{696\,439,4 \text{ mm}^4} \cdot 30,45 \text{ mm} = 251,4 \text{ MPa}$$

Normálové napätie vo votknutí v spodných vláknach:

$$|\sigma_B| = \frac{M}{J_y} \cdot z_B = \frac{5,75 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{696\,439,4 \text{ mm}^4} \cdot 49,55 \text{ mm} = 409,1 \text{ MPa}$$

Šmykové napätie vo votknutí v horných a spodných vláknach:

$$\tau_A = \tau_B = 0$$

Šmykové napätie vo votknutí v ťažisku:

$$\tau_T = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{-2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (24,775 \cdot 10 \cdot 49,55) \text{ mm}^3}{10 \text{ mm} \cdot 696\,439,4 \text{ mm}^4} = -3,53 \text{ MPa}$$

Šmykové napätie vo votknutí v bode C (prechod stojina-pásnica):

$$\tau_C = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{-2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (25,45 \cdot 40 \cdot 10) \text{ mm}^3}{40 \text{ mm} \cdot 696\,439,4 \text{ mm}^4} = -0,73 \text{ MPa}$$

$$\tau_C' = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{-2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (25,45 \cdot 40 \cdot 10) \text{ mm}^3}{10 \text{ mm} \cdot 696\,439,4 \text{ mm}^4} = -2,92 \text{ MPa}$$

Priebehy napätí sú zobrazené na obr. 6.28.

Príklad 6.9

Posúďte, či daný prierez nesymetrické I na obr. 6.28 vyhovuje pre lomený nosník na obr. 6.16, ak je dané dovolené napätie σ_{DOV} (označenie len pre tento príklad) a vykreslite priebehy normálového a šmykového napätia. Rozmery sú v milimetroch.

$$D: \sigma_{DOV} = 180 \text{ MPa}$$

$$H: \text{„}\sigma\text{“}, \text{„}\tau\text{“}$$

Ohybový moment v najviac namáhanom mieste pre nosník na obr. 6.16 je $M = 6 \text{ kNm}$ a priečna sila $V = 5 \text{ kN}$.

Vypočet súradnice z_T ťažiska T zloženého prierezu I:

$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2 + z_{T3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 30 \cdot 10 + 50 \cdot 10 \cdot 80 + 95 \cdot 50 \cdot 10}{30 \cdot 10 + 10 \cdot 80 + 50 \cdot 10} = 55,63 \text{ mm}$$

Kolmé vzdialenosti medzi rovnobežnými centálnymi osami y a y_1 , y a y_2 a y a y_3 :

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 55,63 - 5 = 50,63 \text{ mm}$$

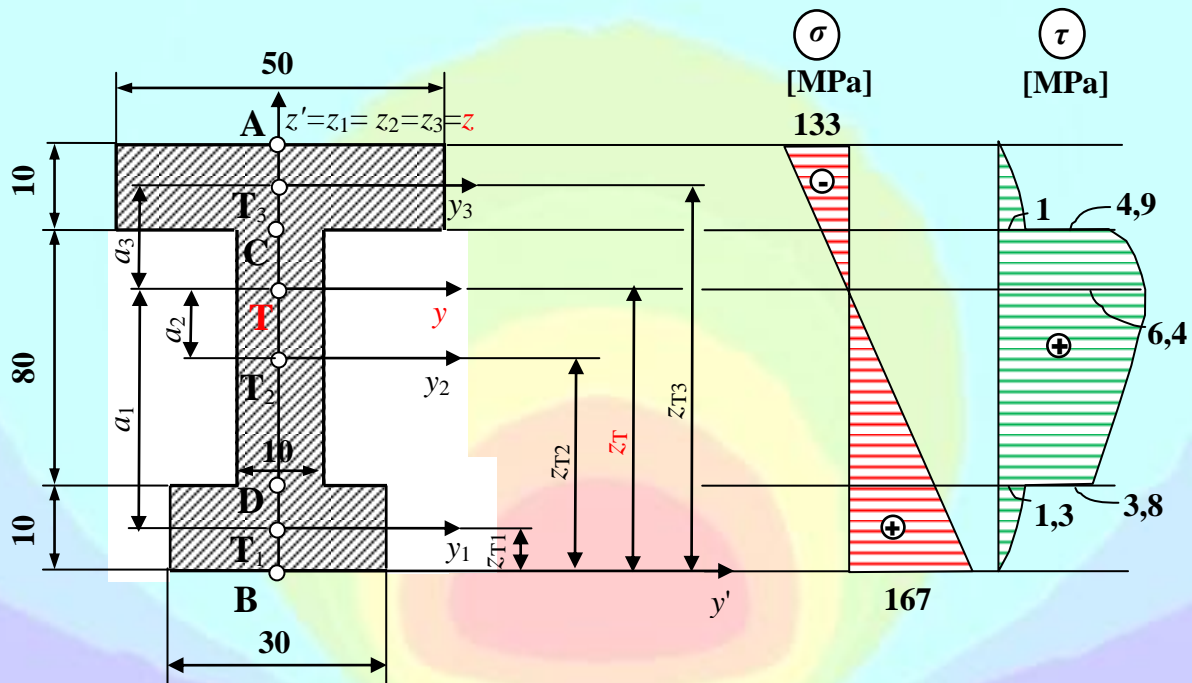
$$a_2 = z_T - z_{T2} = 55,63 - 50 = 5,63 \text{ mm}$$

$$a_3 = z_{T3} - z_T = 95 - 55,63 = 39,37 \text{ mm}$$

Kvadratický moment k centrálnej osi y:

$$J_y = \sum_{i=1}^3 J_{y_i} + \sum_{i=1}^3 a_i^2 \cdot A_i = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + a_3^2 \cdot A_3 =$$

$$= \frac{30 \cdot 10^3}{12} + 50,63^2 \cdot 30 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 80^3}{12} + 5,63^2 \cdot 10 \cdot 80 + \frac{50 \cdot 10^3}{12} + 39,37^2 \cdot 50 \cdot 10 = 2\,002\,708,4 \text{ mm}^4$$



Obr.6.29

Normálové napätie v horných vláknach:

$$|\sigma_A| = \frac{M}{J_y} \cdot z_A = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2\,002\,708,4 \text{ mm}^4} \cdot 44,37 \text{ mm} = 133 \text{ MPa}$$

Normálové napätie v spodných vláknach:

$$|\sigma_B| = \frac{M}{J_y} \cdot z_B = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2\,002\,708,4 \text{ mm}^4} \cdot 55,63 \text{ mm} = 167 \text{ MPa}$$

Normálové napätie v bode C:

$$|\sigma_C| = \frac{M}{J_y} \cdot z_C = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2\,002\,708,4 \text{ mm}^4} \cdot 34,37 \text{ mm} = 103 \text{ MPa}$$

Normálové napätie v bode D:

$$|\sigma_D| = \frac{M}{J_y} \cdot z_D = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2\,002\,708,4 \text{ mm}^4} \cdot 45,63 \text{ mm} = 136,7 \text{ MPa}$$

Šmykové napätie v horných a spodných vláknach:

$$\tau_A = \tau_B = 0$$

Šmykové napätie v ťažisku:

$$\tau_T = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (39,37,50,10 + 17,185,10,34,37) \text{ mm}^3}{10 \text{ mm} \cdot 2 \, 002 \, 708,4 \text{ mm}^4} = 6,4 \text{ MPa}$$

Šmykové napätie v bode C (prechod stojina-pásnica):

$$\tau_C = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (39,37,50,10) \text{ mm}^3}{50 \text{ mm} \cdot 2 \, 002 \, 708,4 \text{ mm}^4} = 1 \text{ MPa}$$

$$\tau_C' = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (39,37,50,10) \text{ mm}^3}{10 \text{ mm} \cdot 2 \, 002 \, 708,4 \text{ mm}^4} = 4,9 \text{ MPa}$$

Šmykové napätie v bode D (prechod stojina-pásnica):

$$\tau_D = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (50,63,30,10) \text{ mm}^3}{30 \text{ mm} \cdot 2 \, 002 \, 708,4 \text{ mm}^4} = 1,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_D' = \frac{V \cdot S_y^*}{b \cdot J_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (50,63,30,10) \text{ mm}^3}{10 \text{ mm} \cdot 2 \, 002 \, 708,4 \text{ mm}^4} = 3,8 \text{ MPa}$$

Priebehy napätí sú zobrazené na obr. 6.29.

Z pevnostnej podmienky pre krajné vlákna možno posúdiť, že daný prierez vyhovuje, lebo je splnené:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{DOV}}$$

$$167 \text{ MPa} < 180 \text{ MPa}$$

Avšak v bodoch C a D pôsobia okrem normálových napätí aj šmykové napätia, preto urobíme kontrolu aj v týchto bodoch, pričom použijeme HMH hypotézu pevnosti (pozri kapitolu 9.1.1). Kontrola v bode C:

$$\sigma_{\text{red C}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_C^2 + 3\tau_C^2} \leq \sigma_{\text{DOV}}$$

$$\sqrt{(103 \text{ MPa})^2 + 3 \cdot (4,9 \text{ MPa})^2} \leq \sigma_{\text{DOV}}$$

$$103,3 \text{ MPa} < 180 \text{ MPa}$$

Kontrola v bode D:

$$\sigma_{\text{red D}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_D^2 + 3\tau_D^2} \leq \sigma_{\text{DOV}}$$

$$\sqrt{(136,7 \text{ MPa})^2 + 3 \cdot (3,8 \text{ MPa})^2} \leq \sigma_{\text{DOV}}$$

$$136,9 \text{ MPa} < 180 \text{ MPa}$$

Daný prierez vyhovuje.

6.6 Dimenzovanie nosníka

Keďže maximálne normálové napätie je v krajných vláknoch, pevnostná podmienka pri dimenzovaní na ohyb pre krajné vlákna je:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_y} z_{\max} \leq \sigma_D \quad (6.16)$$

kde σ_D je dovolené napätie.

Vo všeobecnosti však môžu na element pôsobiť ako normálové, tak aj šmykové napätia. Potom na základe hlavných normálových napätí alebo normálových a šmykových



napätí je potrebné určiť redukované napätie σ_{red} podľa vhodnej hypotézy pevnosti (pozri [3, 6, 23]). Potom pevnostná podmienka má tvar:

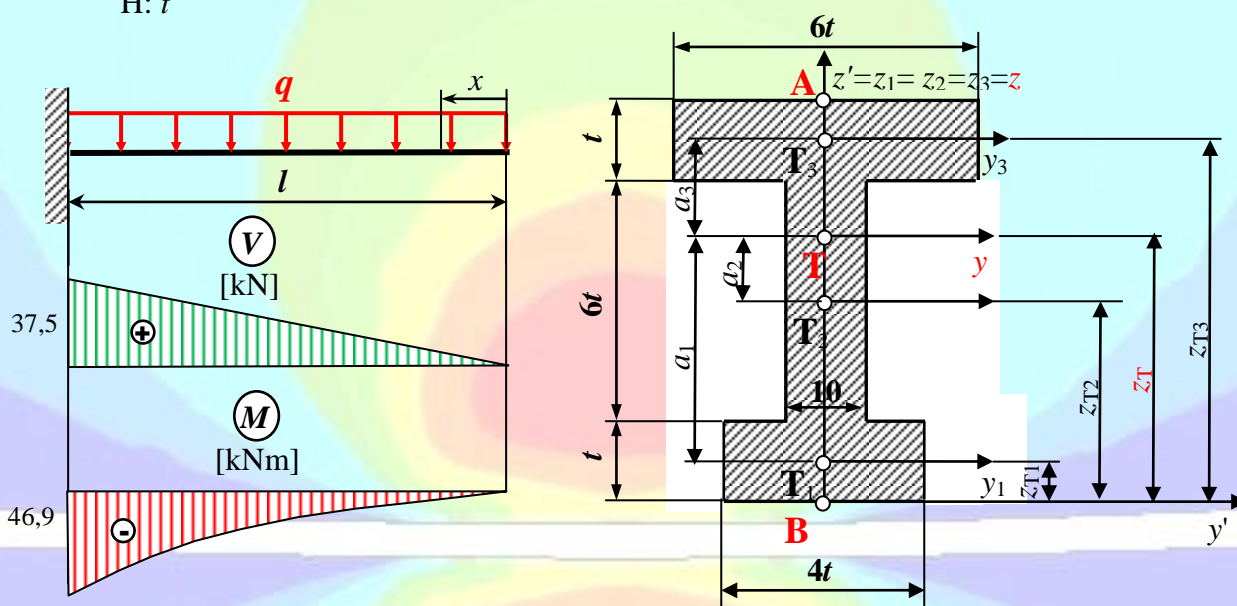
$$\sigma_{red} \leq \sigma_D \quad (6.17)$$

Príklad 6.10

Navrhnete rozmery priečneho prierezu podľa obr. 6.30 z pevnostnej podmienky pre krajné vlákna, ak je dané dovolené napätie ocele σ_D . Uloženie, tvar, zaťaženie a rozmery nosníka sú zrejmé z obr. 6.30. Pre navrhnutý prierez vypočítajte hodnoty normálového napätia v krajných vláknoch.

D: $q = 15 \text{ kNm}^{-1}$, $l = 2,5 \text{ m}$, $\sigma_D = 180 \text{ MPa}$

H: t



Obr.6.30

Nosník budeme dimenzovať podľa najviac namáhaného miesta, ktoré je potrebné určiť tým, že zistíme hodnoty vnútorných síl a vykreslíme priebehy:

$$V(x) = q \cdot x$$

$$V(x=0) = 0$$

$$V(x=l) = q \cdot l = 15 \text{ kNm}^{-1} \cdot 2,5 \text{ m} = 37,5 \text{ kN}$$

$$M(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M(x=0) = 0$$

$$M(x=l) = -q \cdot \frac{l^2}{2} = -15 \text{ kNm}^{-1} \cdot \frac{(2,5 \text{ m})^2}{2} = -46,9 \text{ kNm}$$

Priebehy vnútorných síl sú na obr. 6.30. Najviac namáhaný prierez je vo votknutí, kde $M_{max} = 46,9 \text{ kNm}$.

Vypočet súradnice z_T ťažiska T zloženého prierezu I:

$$z_T = \frac{z_{T1}A_1 + z_{T2}A_2 + z_{T3}A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0,5t \cdot 4t \cdot t + 4t \cdot t \cdot 6t + 7,5t \cdot 6t \cdot t}{4t \cdot t + t \cdot 6t + 6t \cdot t} = 4,44t$$

Kolmé vzdialenosti medzi rovnobežnými centálnymi osami y a y_1 , y a y_2 a y a y_3 :

$$a_1 = z_T - z_{T1} = 4,44t - 0,5t = 3,94t$$

$$a_2 = z_T - z_{T2} = 4,44t - 4t = 0,44t$$

$$a_3 = z_{T3} - z_T = 7,5t - 4,44t = 3,06t$$

Kvadratický moment k centrálnej osi y:

$$\begin{aligned} J_y &= \sum_{i=1}^3 J_{y_i} + \sum_{i=1}^3 a_i^2 \cdot A_i = J_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1 + J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 + J_{y_3} + a_3^2 \cdot A_3 = \\ &= \frac{4t \cdot t^3}{12} + (3,94t)^2 \cdot 4t \cdot t + \frac{t \cdot (6t)^3}{12} + (0,44t)^2 \cdot t \cdot 6t + \frac{6t \cdot t^3}{12} + (3,06t)^2 \cdot 6t \cdot t = 138,27t^4 \end{aligned}$$

Z pevnostnej podmienky pre krajné vlákna vyplýva:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D$$

$$\frac{M_{\max}}{J_y} \cdot z_{\max} \leq \sigma_D$$

$$\frac{M_{\max}}{138,27t^4} \cdot 4,44t \leq \sigma_D \Rightarrow t \geq \sqrt[3]{\frac{4,44M_{\max}}{138,27 \cdot \sigma_D}}$$

$$t \geq \sqrt[3]{\frac{4,44 \cdot 46,9 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{138,27 \cdot 180 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$$

$$t \geq 0,02 \text{ m} \quad \Rightarrow t_{\text{návrh}} = 0,025 \text{ m}$$

Normálové napätie v horných vláknoch (ťah), $z_A = 3,56t$:

$$|\sigma_A| = \frac{M_{\max}}{J_y} \cdot z_A = \frac{46,9 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{138,27 \cdot (0,025 \text{ m})^4} \cdot 3,56 \cdot 0,025 \text{ m} = 77,3 \text{ MPa}$$

Normálové napätie v spodných vláknoch (tlak), $z_B = 4,44t$:

$$|\sigma_B| = \frac{M_{\max}}{J_y} \cdot z_B = \frac{46,9 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{138,27 \cdot (0,025 \text{ m})^4} \cdot 4,44 \cdot 0,025 \text{ m} = 96,4 \text{ MPa}$$

Príklad 6.11

Navrhnete rozmery priečneho prierezu podľa obr. 6.30 z pevnostnej podmienky pre krajné vlákna, ak nosník je liatinový a je dané dovolené napätie v ťahu σ_{Dt} a dovolené napätie v tlaku σ_{Dd} . Uloženie, tvar, zaťaženie a rozmery nosníka sú zrejmé z obr. 6.30.

$$D: q = 15 \text{ kNm}^{-1}, l = 2,5 \text{ m}, \sigma_{Dt} = 15 \text{ MPa}, \sigma_{Dd} = 100 \text{ MPa}$$

$$H: t$$

Keďže liatina má rôzne materiálové vlastnosti v ťahu a v tlaku, musíme zistiť podľa ktorého dovoleného napätia budeme dimenzovať. Maximálny ohybový moment je vo votknutí (obr. 6.30). Hodnoty normálového napätia sa menia po výške prierezu. Maximálna hodnota normálového napätia vo votknutí bude v spodných vláknoch ($z_B = z_{\max}$). V spodných vláknoch je tlak, pretože ohybový moment je s mínusom: $M(x=l) = -46,9 \text{ kNm}$. Dimenzovať budeme podľa dovoleného napätia v tlaku σ_{Dd} :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{Dd}$$

$$\frac{M_{\max}}{J_y} \cdot z_{\max} \leq \sigma_{Dd}$$

$$\frac{M_{\max}}{138,27t^4} \cdot 4,44t \leq \sigma_{Dd} \Rightarrow t \geq \sqrt[3]{\frac{4,44M_{\max}}{138,27 \cdot \sigma_{Dd}}}$$

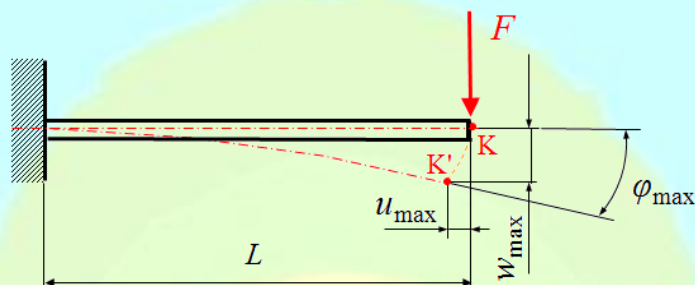
$$t \geq \sqrt[3]{\frac{4,44 \cdot 46,9 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{138,27 \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$$

$$t \geq 0,025 \text{ m} \quad \Rightarrow t_{\text{návrh}} = 0,03 \text{ m}$$



7 VÝPOČET DEFORMÁCIE PRI OHYBE

Odozvou konštrukcie (konštrukčných prvkov) na vonkajšie zaťaženie je vznik deformácie. Pod výpočtom deformácie pri ohybe rozumieme určenie veľkosti priehybu w (označenie w je pre priehyb - posunutie v smere osi z ; označenie u je pre priehyb - posunutie v smere osi y) a uhla sklonu priehybovej čiary (pootočenia) φ (obr. 7.1). Priehyb w a uhol sklonu priehybovej čiary φ nazývame deformačné veličiny.



Obr. 7.1

Horizontálne posunutie u (obr. 7.1) možno zanedbať, lebo v porovnaní s w je o rád menšie.

Nosníky, ktoré pevnostne vyhovujú môžu byť z dôvodu nedostatočnej tuhosti nevyhovujúce. Aby sme určili tuhosť konštrukcie, resp. aby sme vykonali kontrolu tuhosti, musíme vedieť veľkosť priehybu nosníka, za účelom určenia súčiniteľa m .

$$m = \frac{l}{w} \quad (7.1)$$

kde l je dĺžka nosníka.

Dovolená hodnota m je pre väčšinu inžinierskych aplikácií 240, čo zodpovedá pre nosník dlhý 240mm, veľkosť priehybu 1mm. Súčiniteľ m je určovaný podľa noriem a je v rozpätí 200÷1000. Je potrebné, aby bola splnená podmienka:

$$w_{\max} \leq \frac{l}{m} \quad (7.2)$$

kde w_{\max} je maximálna hodnota priehybu.

Most Golden Gate Bridge (1933) (obr. 7.2) v San Franciscu bol navrhovaný, aby pri plnej prevádzke jeho maximálny priehyb bol 3 metre (10 stôp). Vzďialenosť medzi dvoma vežami je 1280 metrov (4200 stôp), čiže súčiniteľ $m=420$.



Obr. 7.2

Rovnica krivosti ρ neutrálnej osi nosníka je vyjadrená vzťahom (11.10). Výraz pre krivosť ρ z matematickej analýzy je:

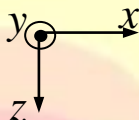
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2w(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.3)$$

Keďže $\frac{dw(x)}{dx} \ll 1$, možno zanedbať, dostávame približnú Bernoulliho diferenciálnu rovnicu prihybovej čiary:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{E.J_y} \quad (7.4)$$

Znamienko diferenciálnej rovnice závisí od voľby súradnicovej sústavy. Ak os z smeruje dole znamienko je mínus. Potom:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E.J_y} \quad (7.5)$$



7.1 Metódy výpočtu deformácie nosníkov

1. Využitie Castiglianových viet
2. Využitie Mohr-Maxwellovej vety
3. Metóda integrovania diferenciálnej rovnice prihybovej čiary
4. Mohrova metóda

Metódy 1 a 2 využívajú energetické princípy. Metódy 3 a 4 využívajú diferenciálnu rovnicu prihybovej čiary (7.5).

7.1.1 Deformačná energia pri ohybe

Deformačnú energiu ohýbaného nosníka U vypočítame:

$$U = U_M + U_V \quad (7.6)$$

kde U_M je deformačná energia od ohybových momentov a U_V je deformačná energia od posúvajúcich síl, ktoré vypočítame:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{(l)} \frac{M(x)^2}{E.J_y} dx \quad (7.7)$$

$$U_V = \frac{1}{2} \kappa \int_{(l)} \frac{V(x)^2}{G.A} dx \quad (7.8)$$

kde E , G , $M(x)$, $V(x)$, J_y , A sú materiálové, silové a prierezové charakteristiky a κ je Timošenkov¹⁴ koeficient. Jeho veľkosť závisí od rozmerov priečneho prierezu. U_V možno pri riešení zanedbať, potom:

$$U = U_M \quad (7.9)$$

7.1.2 Využitie Castiglianových viet

Na výpočet priehybu w využijeme 1. Castiglianovu vetu (7.33) a na výpočet uhlu sklonu priehybovej čiary φ využijeme 2. Castiglianovu vetu (7.34).

Kedže poznáme deformačnú energiu ohýbaného nosníka (7.7), potom dosadením do prvej a druhej Castiglianovej vety dostávame modifikované Castiglianove vety (tzv. Mohrove integrály):

$$w_K = \frac{\partial U}{\partial F_K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial F_K} \frac{1}{2} \int_{(l_i)} \frac{M(x_i)^2}{E \cdot J_y} dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \frac{M(x_i)}{E \cdot J_y} \frac{\partial M(x_i)}{\partial F_K} dx_i \quad (7.10)$$

$$\varphi_K = \frac{\partial U}{\partial M_K} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial M_K} \frac{1}{2} \int_{(l_i)} \frac{M(x_i)^2}{E \cdot J_y} dx_i = \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} \frac{M(x_i)}{E \cdot J_y} \frac{\partial M(x_i)}{\partial M_K} dx_i \quad (7.11)$$

kde w_K , φ_K sú deformačné veličiny v mieste K, F_K je sila pôsobiaca v mieste K, M_K je ohybový moment pôsobiaci v mieste K a n je počet úsekov (rezov). Miesto K je miesto, v ktorom určujeme deformačné veličiny.

Castiglianove vety môžeme použiť aj pre určenie deformácie v bodoch telesa, kde nepôsobí žiadna sila, resp. moment, ak v danom mieste zavedieme doplnkovú silu F_D , resp. doplnkový moment M_D .

Podľa doplnkovej sily F_D , resp. doplnkového momentu M_D , robíme len parciálnu deriváciu, ďalej vo výpočte ich položíme rovné nule: $F_D = 0$, $M_D = 0$.

7.1.3 Využitie Mohr-Maxwellovej vety

Princíp, z ktorého vychádza použitie Mohr-Maxwellovej vety, je popísaný v kapitole 2.7.2. Vo vzťahu (2.36) možno pre ohyb zanedbať vplyv normálových a posúvajúcich síl, pretože vplyv ohybových momentov je podstatne väčší. Potom vzťah pre výpočet deformačných veličín pri ohybe má tvar:

$$\delta_K = \int_{(l)} \frac{M_0 \cdot \bar{M}_1}{E \cdot J} dx \quad (7.12)$$

Pre výpočet nosníkov, ktoré sú z jedného materiálu a priečného profilu po celej ich dĺžke potom možno písať:

$$\delta_K = \frac{1}{E \cdot J_y} \sum_{i=1}^n \int_{(l_i)} M_0(x_i) \bar{M}_1(x_i) dx_i \quad (7.13)$$

kde δ_K je deformačná veličina (priehyb w alebo uhol sklonu priehybovej čiary φ) v mieste K, n je počet úsekov, l_i je dĺžka i -tého úseku, $M_0(x_i)$ je ohybový moment na i -tom úseku od vonkajšieho zaťaženia a $\bar{M}_1(x_i)$ je ohybový moment na i -tom úseku od jednotkového



Stepan Prokofievich Timošenko (1878, Ukrajina - 1972, Nemecko) Jeden z najvýznamnejších vedcov 20. storočia v odbore mechaniky kontinua. V roku 1920 emigroval do USA, kde pracoval vo firme Westinghouse a na univerzite v Michigane. Od roku 1936 pracoval a prednášal na Stanfordskej univerzite. V roku 1954 prestal úplne učiť a venoval sa písaniu nových kníh o mechanike a pružnosti a pevnosti, ktoré boli preložené do mnohých jazykov a patria dodnes k vyhľadávaným publikáciám. Od roku 1964 žil v Nemecku. Dodnes sú po ňom pomenované laboratória v Stanfordskej univerzite a najvyššie ocenenie Americkej spoločnosti inžinierov – mechanikov (ASME).

zaťaženia, ktoré pôsobí v mieste (K) a smere hľadanej deformácie (w, φ). Vzťah (7.13) označujeme ako Mohr-Maxwellova veta pre ohyb.

Pod jednotkovým zaťažením rozumieme:

- zaťaženie nosníka jednotkovou silou ($\bar{F} = \bar{1}$) v mieste K v smere hľadanej deformácie, ak hľadáme priehyb w ,
- zaťaženie jednotkovým momentom ($\bar{M} = \bar{1}$) v mieste K v smere hľadanej deformácie, ak hľadáme uhol sklonu prihybovej čiary φ .

Ak nezanedbáme vplyv priečnej sily V a osovej sily N , potom Mohr-Maxwellova veta pre určenie deformácie pri ohybe má tvar (2.36).

7.1.4 Metóda integrovania diferenciálnej rovnice prihybovej čiary

Na získanie analytického vyjadrenia prihybov a uhlov pootočení je potrebné nájsť riešenie diferenciálnej rovnice (7.5). Uskutočnime dvojnásobnú integráciu vzťahu (7.5):

$$\left. \begin{aligned} w'(x) = \varphi(x) &= -\int_0^x \frac{M(x)}{E.J_y} dx + C \\ w(x) &= -\int_0^x \left(\int_0^x \frac{M(x)}{E.J_y} dx \right) dx + C.x + D \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{dvojnásobná} \\ \text{integrácia} \end{array} \quad (7.14)$$

kde C, D sú integračné konštanty, ktoré určíme z okrajových podmienok pre konkrétny nosník. Okrajové podmienky závisia od uloženia nosníka.

7.1.5 Mohrova metóda

V literatúre je Mohrova metóda tiež nazývaná metóda momentovej plochy alebo metóda statickej analógie. Táto metóda vychádza z analógie medzi Schwedler-Žuravského vzťahmi (6.4) a približnou diferenciálnou rovnicou prihybovej čiary (7.4).



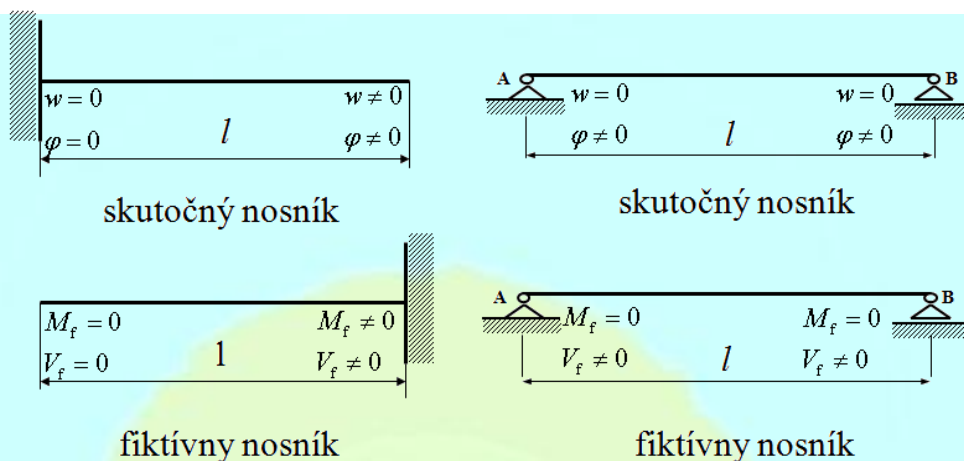
$$\left. \begin{aligned} q(x) &= -\frac{d^2M(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2w(x)}{dx^2} &= \frac{M(x)}{EJ_y} \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Výpočet deformačných veličín možno pretransformovať na výpočet fiktívnych momentov M_f a fiktívnych priečných síl V_f na fiktívnom nosníku, pričom pre fiktívne zaťaženie platí:

$$q_f = \frac{M(x)}{E.J_y} \Rightarrow \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -q_f = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \quad (7.16)$$

Hodnota prihybu w zodpovedá hodnote fiktívneho ohybového momentu M_f ($w_K = M_{fK}$) a hodnota uhlu sklonu prihybovej čiary φ zodpovedá hodnote fiktívnej priečnej sily V_f ($\varphi_K = V_{fK}$), keď zaťažíme fiktívny nosník fiktívnym zaťažením q_f .

Fiktívne zaťaženie q_f je priebeh ohybových momentov na pôvodnom nosníku od skutočného zaťaženia. Fiktívny nosník je nosník, ktorý vytvoríme z pôvodného nosníka. Dĺžky jednotlivých úsekov sú zhodné, pričom jeho uloženie musí spĺňať okrajové podmienky (obr. 7.3).



Obr. 7.3

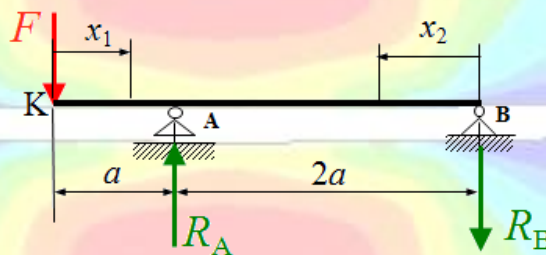
7.2 Riešené príklady s použitím uvedených metód

Príklad 7.1

Pre nosník na obr. 7.4 určte priehyb w_K v bode K pomocou 1. Castiglianovej vety.

D: F, a, E, J_y

H: w_K



Obr. 7.4

Reakcie:

$$R_A = \frac{3}{2}F; \quad R_B = \frac{F}{2}$$

Ohybové momenty:

$$M(x_1) = -Fx_1$$

$$M(x_2) = -R_B \cdot x_2 = -\frac{F}{2}x_2$$

Parciálne derivácie:

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial F} = -x_1$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial F} = -\frac{x_2}{2}$$

Potom:

$$\begin{aligned} w_K &= \frac{1}{EJ_y} \left(\int_0^a M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial F} dx_1 + \int_0^{2a} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial F} dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{EJ_y} \left(\int_0^a -Fx_1 \cdot (-x_1) dx_1 + \int_0^{2a} -\frac{F}{2}x_2 \left(-\frac{x_2}{2} \right) dx_2 \right) = \dots = \frac{F \cdot a^3}{EJ_y} \end{aligned}$$

Príklad 7.2

Pre nosník na obr. 7.5 určte uhol sklonu prihybovej čiary φ_A v bode A pomocou 2. Castiglianovej vety.

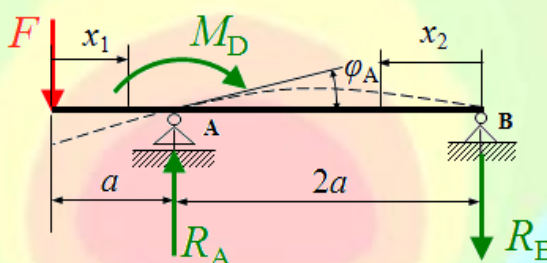
D: $F, a, E.J_y$

H: φ_A

V bode A nepôsobí ohybový moment M ako vonkajšie zaťaženie, podľa ktorého by sme robili parciálnu deriváciu, keďže chceme využiť vzťah (7.11). V takomto prípade zavádzame doplnkový moment M_D ako je to zobrazené na obr. 7.5. Jeho orientácia je v smere hľadanej deformácie, resp. predpokladaná.

Reakcia R_B :

$$R_B = \frac{F}{2} - \frac{M_D}{2a}$$



Obr. 7.5

Ohybové momenty:

$$M(x_1) = -F \cdot x_1$$

$$M(x_2) = -R_B \cdot x_2 = -\frac{F}{2} x_2 + \frac{M_D}{2a} x_2$$

Parciálne derivácie:

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} = 0$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} = \frac{x_2}{2a}$$

Potom:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{E.J_y} \left[\int_0^a M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} dx_1 + \int_0^{2a} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} dx_2 \right] = \\ &= \frac{1}{E.J_y} \int_0^{2a} \left(-\frac{F}{2} x_2 + \frac{M_D}{2a} x_2 \right) \left(\frac{x_2}{2a} \right) dx_2 = \dots = -\frac{2F \cdot a^2}{3E.J_y} \end{aligned}$$

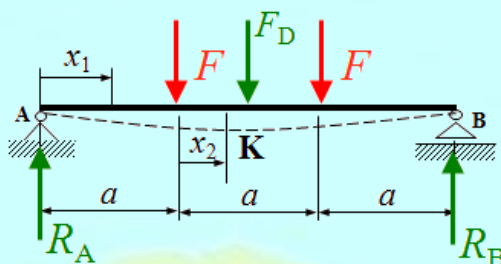
M_D bolo použité pre parciálnu deriváciu. V ďalšom výpočte φ_A sme položili M_D rovné nule: $M_D = 0$. Ak je výsledný uhol záporný, potom predpokladaná orientácia doplnkového momentu je opačná, ako je to v tomto prípade.

Príklad 7.3

Pre nosník na obr. 7.6 určte prihyb w_K v bode K pomocou 1. Castiglianovej vety.

D: $F, a, E.J_y$

H: w_K



Obr. 7.6

V bode K nepôsobí vonkajšia sila, podľa ktorej by sme robili parciálnu deriváciu, keďže chceme využiť vzťah (7.10). V takomto prípade zavádzame doplnkovú silu F_D v mieste K ako je to zobrazené na obr. 7.6. Jej orientácia je predpokladaná, resp. v smere hľadanej deformácie.

Reakcie:

$$R_A = R_B = F + \frac{F_D}{2}$$

Ohybové momenty:

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = \left(F + \frac{F_D}{2} \right) x_1$$

$$M(x_2) = R_A(a + x_2) - F \cdot x_2 = F \cdot a + \frac{F_D}{2}(a + x_2)$$

Parciálne derivácie:

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial F_D} = \frac{x_1}{2}$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial F_D} = \frac{1}{2}(a + x_2)$$

Potom:

$$w_K = \frac{2}{E \cdot J_y} \left[\int_0^a M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial F_D} dx_1 + \int_0^{a/2} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial F_D} dx_2 \right] =$$

$$= \frac{2}{E \cdot J_y} \left[\int_0^a F \cdot x_1 \frac{x_1}{2} dx_1 + \int_0^{a/2} F \cdot a \frac{(a + x_2)}{2} dx_2 \right] = \dots = \frac{23}{24} \frac{F \cdot a^3}{E \cdot J_y}$$

Pretože ide o symetrický nosník, stačí, ak horná hranica druhého integrálu bude $a/2$, nie a . Čiže pri symetrickom nosníku stačí riešiť polovicu nosníka a výraz násobiť dvomi.

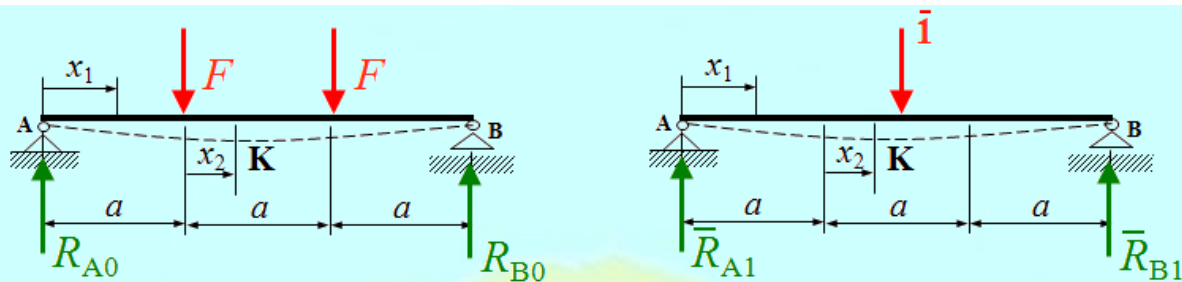
Príklad 7.4

Pre nosník na obr. 7.7 určte priehyb w_K v bode K pomocou Mohr-Maxwellovej vety.

D: $F, a, E \cdot J_y$

H: w_K

Vytvoríme systém „0“ a systém „1“. V systéme „0“ pôsobí len vonkajšie zaťaženie. V systéme „1“ pôsobí len virtuálna jednotková sila $\bar{F} = \bar{1}$ v mieste a smere hľadaného priehybu. V každom systéme je potrebné vypočítať reakcie zvlášť!



Obr. 7.7

Reakcie:

$$R_{A0} = R_{B0} = F \qquad \bar{R}_{A1} = \bar{R}_{B1} = \frac{1}{2}$$

Ohybové momenty v systéme „0“:

$$M_0(x_1) = R_{A0} \cdot x_1 = F \cdot x_1$$

$$M_0(x_2) = R_{A0}(a + x_2) - F \cdot x_2 = F \cdot a$$

Ohybové momenty v systéme „1“:

$$\bar{M}_1(x_1) = \bar{R}_{A1} x_1 = \frac{x_1}{2}$$

$$\bar{M}_1(x_2) = \bar{R}_{A1}(a + x_2) = \frac{1}{2}(a + x_2)$$

Potom:

$$w_K = \frac{2}{E \cdot J_y} \left[\int_0^a M_0(x_1) \cdot \bar{M}_1(x_1) dx_1 + \int_0^{a/2} M_0(x_2) \cdot \bar{M}_1(x_2) dx_2 \right] =$$

$$= \frac{2}{E \cdot J_y} \left[\int_0^a F \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} dx_1 + \int_0^{a/2} F \cdot a \cdot \frac{(a + x_2)}{2} dx_2 \right] = \dots = \frac{23}{24} \frac{F \cdot a^3}{E \cdot J_y}$$

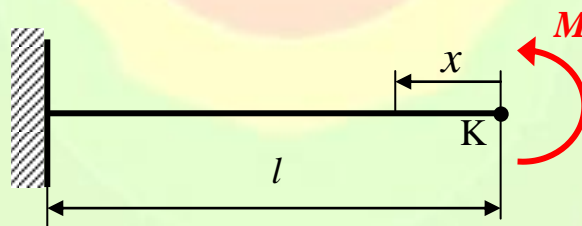
Opäť bola s výhodou využitá symetria nosníka. Integrály pre výpočet priehybu w_K sú identické s príkladom 7.3.

Príklad 7.5

Pre nosník na obr. 7.8 určte deformačné veličiny v bode K metódou integrovania diferenciálnej rovnice priehybovej čiary.

D: M, l

H: w_K, φ_K



Obr. 7.8

Ohybový moment v mieste x je $M(x) = M$, potom:

$$w''(x) = -\frac{M}{E \cdot J_y}$$

Vykonáme dvojnásobnú integráciu:

$$w'(x) = \varphi(x) = -\int_0^x \frac{M}{E \cdot J_y} dx = \frac{M \cdot x}{E \cdot J_y} + C$$

$$w(x) = \int_0^x \left(-\frac{M \cdot x}{E \cdot J_y} + C \right) dx = -\frac{M \cdot x^2}{2E \cdot J_y} + C \cdot x + D$$

Okrajové podmienky pre výpočet integračných konštánt C a D :

$$w(x=l) = 0$$

$$\varphi(x=l) = 0$$

Priehyb a uhol pootočenia vo votknutí sú rovné nule. Dosadíme do vzťahov získaných dvojnásobnou integráciou a riešime ako sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi C a D :

$$-\frac{M \cdot l^2}{2E \cdot J_y} + C \cdot l + D = 0 \quad \Rightarrow D = -\frac{M \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$

$$-\frac{M \cdot l}{E \cdot J_y} + C = 0 \quad \Rightarrow C = \frac{M \cdot l}{E \cdot J_y}$$

Potom rovnica pre výpočet uhlov sklonu priehybovej čiary je:

$$\varphi(x) = -\frac{M \cdot x}{E \cdot J_y} + \frac{M \cdot l}{E \cdot J_y}$$

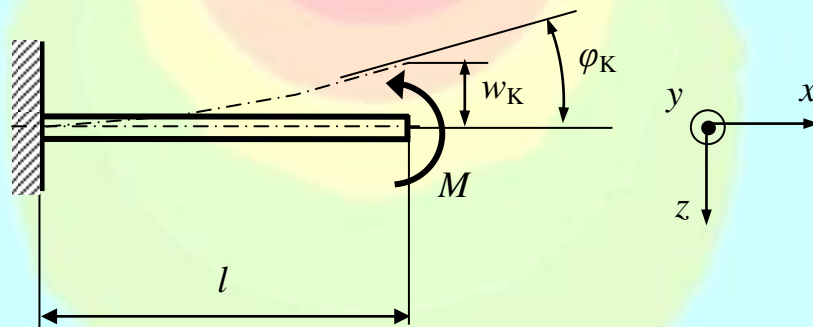
Rovnica priehybovej čiary je:

$$w(x) = -\frac{M \cdot x^2}{2E \cdot J_y} + \frac{M \cdot l}{E \cdot J_y} x - \frac{M \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$

Pre výpočet φ_K a w_K dosadíme za x nulu, keďže bod K je v mieste $x=0$. Potom φ_K a w_K vypočítame:

$$\varphi_K = \varphi(x=0) = \frac{M \cdot l}{E \cdot J_y}$$

$$w_K = w(x=0) = -\frac{M \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$



Obr. 7.9

Priehyb w_K má preto zápornú hodnotu, lebo nastáva v smere zápornej osi z ako zobrazuje obr. 7.9. Kladný smer φ je proti smeru hodinových ručičiek a kladný smer w je v smerom nadol.

Výhodou tejto metódy je, že po získaní rovnice pre uhol sklonu priehybovej čiary a rovnice pre priehybovú čiaru možno určiť w a φ v ľubovoľnom bode nosníka.

Príklad 7.6

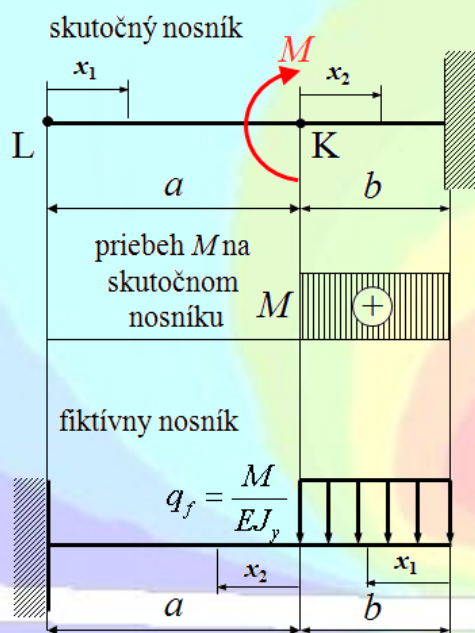
Pre nosník na obr. 7.10 určte deformačné veličiny v bode K a L Mohrovou metódou.

D: M, a, b

H: w_L, φ_K

Keďže chceme vypočítať priehyb v bode L, potrebujeme vypočítať veľkosť fiktívneho momentu M_{fL} v bode L a pre uhol sklonu priehybovej čiary v bode K veľkosť fiktívnej prierečnej sily V_{fK} , pretože platí:

$$w_L = M_{fL}; \quad \varphi_K = V_{fK}$$



V_f a M_f na fiktívnom nosníku:

$$V_f(x_1) = q_f \cdot x_1 \quad V_f(x_2) = q_f \cdot b$$

$$M_f(x_1) = -q_f \frac{x_1^2}{2} \quad M_f(x_2) = -q_f \cdot b \left(\frac{b}{2} + x_2 \right)$$

Uhol sklonu priehybovej čiary v bode K:

$$V_{fK} = V_f(x_1 = b) = q_f \cdot b = \frac{M}{E \cdot J_y} = \varphi_K$$

Priehyb v bode L:

$$M_{fL} = M_f(x_2 = a) = -q_f \cdot b \left(\frac{b}{2} + a \right) =$$

$$= -\frac{M}{E \cdot J_y} \cdot b \left(\frac{b}{2} + a \right) = w_K$$

Obr. 7.10

Postup:

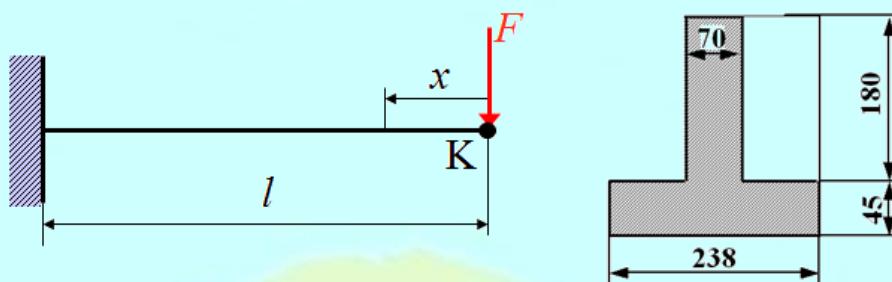
1. Zostrojíme priebeh ohybových momentov M pre skutočný nosník (obr. 7.10).
2. Zostrojíme fiktívny nosník. V tomto prípade skutočnému voľnému koncu zodpovedá fiktívne votknutie, skutočnému votknutiu zodpovedá fiktívny voľný koniec (obr. 7.10). Rozmery nosníka sú rovnaké.
3. Fiktívny nosník zaťažíme fiktívnym zaťažením, ktoré zodpovedá priebehu skutočných ohybových momentov z bodu 1 (obr. 7.10).
4. Určíme V_{fK} a M_{fL} na fiktívnom nosníku. Tieto veličiny zodpovedajú skutočným φ_K a w_L .

Príklad 7.7

Pre nosník na obr. 7.11 určte deformačné veličiny v bode K využitím Castiglianových viet, Mohr-Maxwellovej vety, metódy integrácie diferenciálnej rovnice priehybovej čiary a Mohrovou metódou.

D: $F = 40\text{kN}, l = 3,4\text{m}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, J_y = 11 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

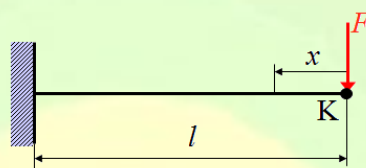
H: w_K, φ_K



Obr. 7.11

• **Využitie Castiglianových viet**

Určenie w_K



Obr. 7.12

Ohybový moment a parciálna derivácia:

$$M(x) = -F \cdot x$$

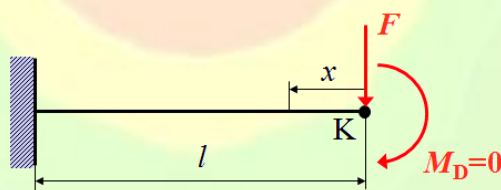
$$\frac{\partial M(x)}{\partial F} = -x$$

Uvedené dosadíme do vzťahu (7.10) a riešime:

$$\begin{aligned} w_K &= \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^l (-F \cdot x)(-x) dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[F \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{F l^3}{3 E \cdot J_y} = \\ &= \frac{40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (3400 \text{ mm})^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 11 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} = 23,82 \text{ mm} \end{aligned}$$

Priehyb nosníka v bode K je 23,82mm.

Určenie φ_K



Obr. 7.13

Ohybový moment a parciálna derivácia:

$$M(x) = -F \cdot x - M_D$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_D} = -1$$

Uvedené dosadíme do vzťahu (7.10) a riešime:

$$\varphi_K = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial M_D} dx = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l (-F \cdot x)(-1) dx = \frac{1}{E.J_y} \left[F \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{F.l^2}{2E.J_y} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (3400 \text{ mm})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 11 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} = 0,0105 \text{ rad} = 0,6^\circ$$

Uhol sklonu prihybovej čiary nosníka v bode K je $0,6^\circ$.

• **Využitie Mohr-Maxwellovej vety**

Určenie w_K



Obr. 7.14

Ohybové momenty v systéme „0“ a „1“:

$$M_0(x) = -F \cdot x$$

$$M_1(x) = -\bar{I} x$$

Využitím vzťahu (7.16) dostávame:

$$w_K = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l M_0(x) \bar{M}_1(x) dx = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l (-F \cdot x)(-\bar{I} x) dx = \frac{F.l^3}{3E.J_y}$$

Určenie φ_K



Obr. 7.15

Ohybové momenty v systéme „0“ a „1“:

$$M_0(x) = -F \cdot x$$

$$M_1(x) = -\bar{I}$$

Využitím vzťahu (7.13) dostávame:

$$\varphi_K = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l M_0(x) \bar{M}_1(x) dx = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l (-F \cdot x)(-\bar{I}) dx = \frac{F.l^2}{2E.J_y}$$

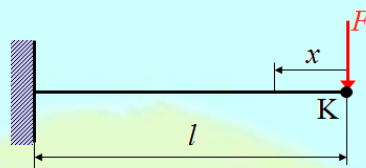
• **Metóda integrovania diferenciálnej rovnice prihybovej čiary**

Určenie w_K, φ_K

Využijeme približnú diferenciálnu rovnicu prihybovej čiary (7.5). Určíme ohybový moment riešeného nosníka a dosadíme do (7.5):

$$M(x) = -F \cdot x$$

$$w''(x) = \frac{F \cdot x}{E \cdot J_y}$$



Obr. 7.16

Vykonáme dvojnásobnú integráciu:

$$w'(x) = \varphi(x) = \int_0^x \frac{F \cdot x}{E \cdot J_y} dx = \frac{F \cdot x^2}{2E \cdot J_y} + C$$

$$w(x) = \int_0^x \left(\frac{F \cdot x^2}{2E \cdot J_y} + C \right) dx = \frac{F \cdot x^3}{6E \cdot J_y} + Cx + D$$

Pre výpočet integračných konštánt C a D využijeme okrajové podmienky:

$$w(x=l) = 0$$

$$\varphi(x=l) = 0$$

$$\frac{F \cdot l^3}{6E \cdot J_y} + C \cdot l + D = 0 \quad \Rightarrow D = -\frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y}$$

$$\frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y} + C = 0 \quad \Rightarrow C = -\frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$

Dosadíme:

$$\varphi(x) = \frac{F \cdot x^2}{2E \cdot J_y} - \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y} \quad \Rightarrow \varphi_K = \varphi(x=0) = -\frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$

$$w(x) = \frac{F \cdot x^3}{6E \cdot J_y} - \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y} x + \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y} \quad \Rightarrow w_K = w(x=0) = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y}$$

$\varphi(x)$ je rovnica sklonu priehybovej čiary a $w(x)$ je rovnica priehybovej čiary a možno ich použiť pre výpočet φ a w v ktoromkoľvek mieste nosníka, ktorý je určený súradnicou x .

- **Mohrova metóda**

Určenie w_K , φ_K

Platí: $w_K = M_{fK}$ $\varphi_K = V_{fK}$

Využijeme postup uvedený v príklade 7.6.

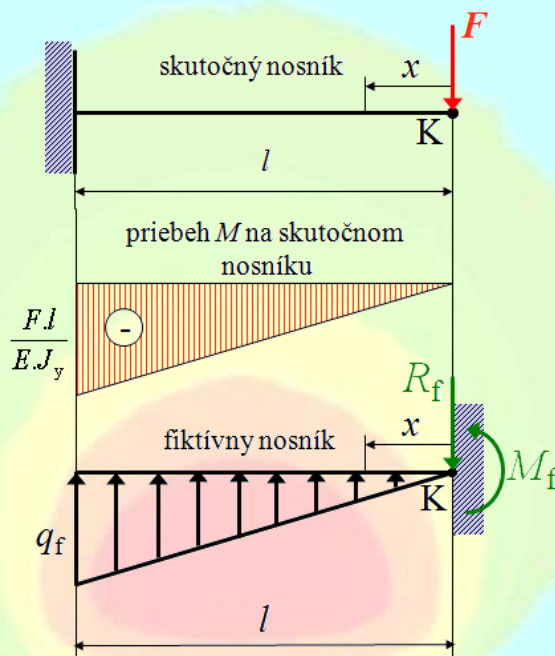
Keďže priebeh ohybových momentov na skutočnom nosníku je trojuholníkový, pričom $M_{\max} = F \cdot l$, potom fiktívnym zaťažením bude trojuholníkové spojité zaťaženie s veľkosťou:

$$q_f = \frac{F \cdot l}{E \cdot J_y}$$

Aby sme vypočítali w_K , φ_K , určíme reakcie M_f a R_f vo votknutí fiktívneho nosníka.
 Určenie reakcií:

$$-R_f + \frac{1}{2}q_f \cdot l = 0 \quad \Rightarrow R_f = \frac{1}{2}q_f \cdot l$$

$$M_f - \frac{1}{2}q_f \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = 0 \quad \Rightarrow M_f = \frac{1}{3}q_f \cdot l^2$$



Obr. 7.17

Potom:

$$\varphi_K = V_{fK} = R_f = \frac{1}{2}q_f \cdot l = \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_y}$$

$$w_K = M_{fK} = M_f = \frac{1}{3}q_f \cdot l^2 = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y}$$

Z príkladu riešeného podľa štyroch uvedených metód možno vidieť, že všetkými metódami bol získaný rovnaký výsledok, odlišnosť bola v spôsobe získania tohto výsledku.

Príklad 7.8

Pre oceľový lomený nosník podľa príkladu 6.6 na obr. 6.16 určte priehyb w_K (posunutie v horizontálnom smere) v bode K využitím Mohr-Maxwellovej vety, ak priečny prierez je obdĺžnikový 50x100mm.

H: w_K

Kvadratický moment k centrálnej osi y:

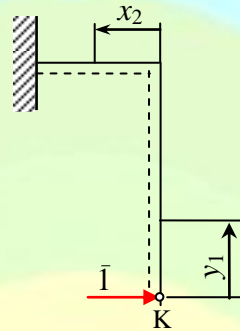
$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{50 \cdot 100^3}{12} \text{ mm}^3 = 4\,166\,666,7 \text{ mm}^3$$

Ohybové momenty M_0 :

$$M_0(y_1) = M - F_1 \cdot y_1 + q_1 \cdot \frac{y_1^2}{2}$$

$$M_0(x_2) = M - F_2 \cdot x_2 - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot 2l^2 - q_2 \cdot \frac{x_2^2}{2}$$

Vytvoríme systém „1“ pre výpočet priehybu w_K na obr. 7.18.



Obr. 7.18

Ohybové momenty M_1 :

$$\bar{M}_1(y_1) = \bar{I} \cdot y_1$$

$$\bar{M}_1(x_2) = \bar{I} \cdot 2l$$

Mohr-Maxwellova veta pre výpočet priehybu w_K :

$$\begin{aligned} w_K &= \frac{1}{E \cdot J_y} \left(\int_0^{2l} M_0(y_1) \cdot \bar{M}_1(y_1) dy_1 + \int_0^l M_0(x_2) \cdot \bar{M}_1(x_2) dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot J_y} \left(\int_0^{2l} \left(M - F_1 \cdot y_1 + q_1 \cdot \frac{y_1^2}{2} \right) \cdot \bar{I} \cdot y_1 dy_1 + \int_0^l \left(M - F_2 \cdot x_2 - F_1 \cdot 2l + q_1 \cdot 2l^2 - q_2 \cdot \frac{x_2^2}{2} \right) \cdot \bar{I} \cdot 2l dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot J_y} \left(\int_0^{2l} \left(M \cdot y_1 - F_1 \cdot y_1^2 + q_1 \cdot \frac{y_1^3}{2} \right) dy_1 + \int_0^l \left(M \cdot 2l - F_2 \cdot x_2 \cdot 2l - F_1 \cdot 4l^2 + q_1 \cdot 4l^3 - q_2 \cdot l \cdot x_2^2 \right) dx_2 \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot J_y} \left(\left[M \cdot \frac{y_1^2}{2} - F_1 \cdot \frac{y_1^3}{3} + q_1 \cdot \frac{y_1^4}{8} \right]_0^{2l} + \left[M \cdot 2l \cdot x_2 - F_2 \cdot x_2^2 \cdot l - F_1 \cdot 4l^2 \cdot x_2 + q_1 \cdot 4l^3 \cdot x_2 - q_2 \cdot l \cdot \frac{x_2^3}{3} \right]_0^l \right) = \\ &= \frac{l^2}{3E \cdot J_y} (12M - 20F_1 \cdot l + 18q_1 \cdot l^2 - 3F_2 \cdot l - q_2 \cdot l^2) \end{aligned}$$

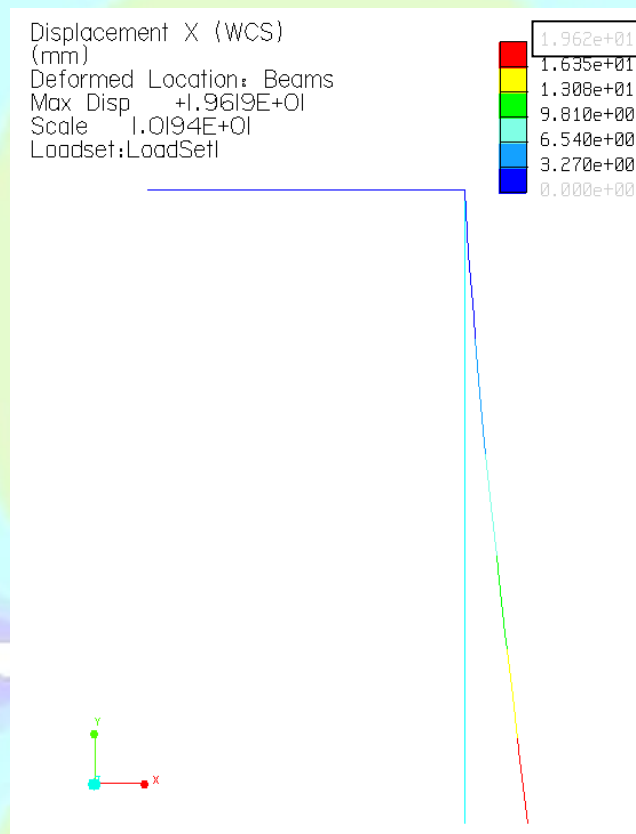
$q_1 = q_2$, potom:

$$w_K = \frac{l^2}{3E \cdot J_y} (12M - 20F_1 \cdot l + 17q_1 \cdot l^2 - 3F_2 \cdot l)$$

Po dosadení:

$$w_k = \frac{(1000\text{mm})^2}{3.2 \cdot 10^5 \text{MPa} \cdot 4\,166\,666,7 \text{mm}^4} \cdot (12.2 \cdot 10^6 \text{Nmm} - 20 \cdot 10^3 \text{N} \cdot 1000 \text{mm} + 17.3 \text{Nmm} \cdot \text{mm}^{-1} \cdot (1000 \text{mm})^2 - 3.2 \cdot 10^3 \text{N} \cdot 1000 \text{mm}) = 19,6 \text{mm}$$

Výsledok získaný uvedeným analytickým výpočtom možno porovnať s výsledkom numerického výpočtu pomocou metódy konečných prvkov na obr. 7.19.



Obr. 7.19



7.3 Využitie komerčného softvéru pre určenie vnútorných síl a deformačných veličín

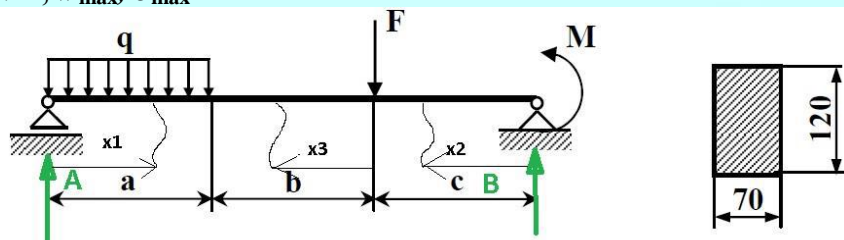
Na simuláciu mechanického správania sa konštrukcií možno použiť softvér určený pre takéto výpočty. Jednou z možností je softvér PTC Creo Simulate využívajúci na výpočet metódu konečných prvkov (MKP) [pozri 18], ktorá je numerickou metódou. Existujú rôzne komerčné výpočtové softvéry s rôznym rozsahom funkcií využívajúce klasickú MKP, resp. metódu hraničných prvkov alebo iné výpočtové metódy.

Prakticky všetky súčasné programy pre riešenie konkrétnych problémov technickej praxe, ako aj vedecko-výskumných problémov, v širokom rozsahu aplikácií, využívajú vo svojej výpočtovej časti MKP, z anglického Finite Element Method (FEM). Medzi komerčné výpočtové komerčné softvéry patria PTC Creo Simulate (predtým Pro/Mechanica), ANSYS, ADINA, COSMOS/M, MSC/NASTRAN, SAP IV, NONSAP a iné.

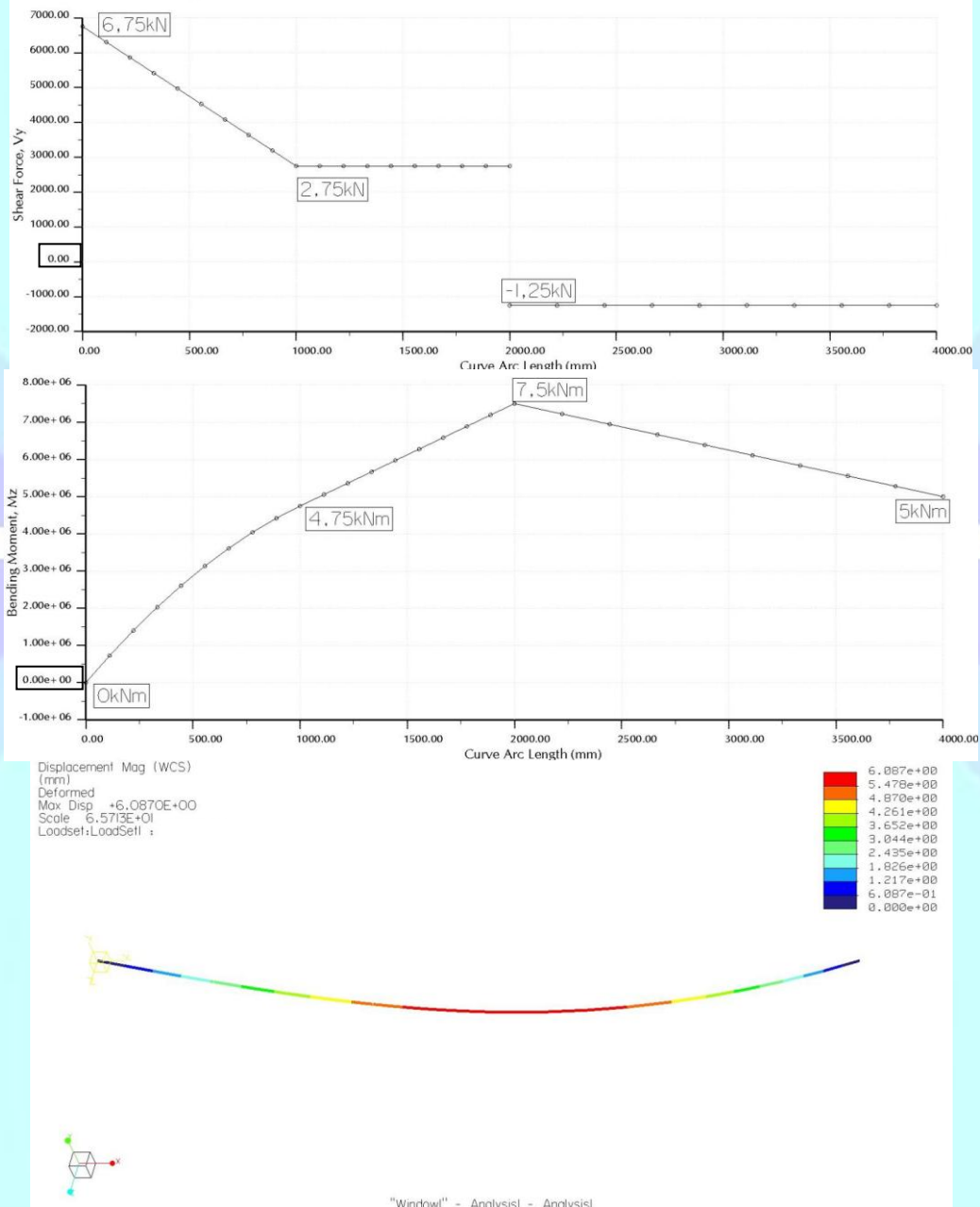
Zadanie príkladu:

D: $F=4\text{kN}$, $q=4\text{kNm}^{-1}$, $M=5\text{kNm}$, $a=b=1\text{m}$, $c=2\text{m}$, $E=2\cdot 10^5\text{MPa}$

H: „ V “, „ M “, w_{\max} , $\sigma_{\max}^{\text{HMH}}$



Výsledky numerického riešenia



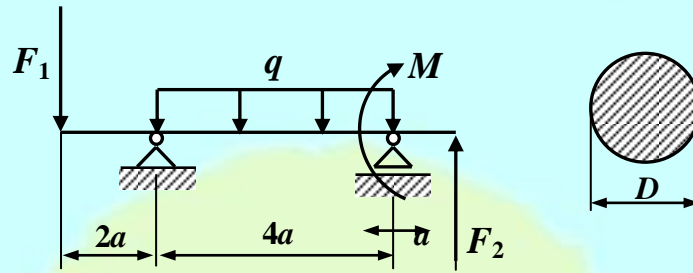
Maximálny priehyb: $w_{\max}=6,09\text{mm}$

Maximálne redukované napätie podľa HMH hypotézy pevnosti: $\sigma_{\text{red}}^{\max}=44,64\text{MPa}$

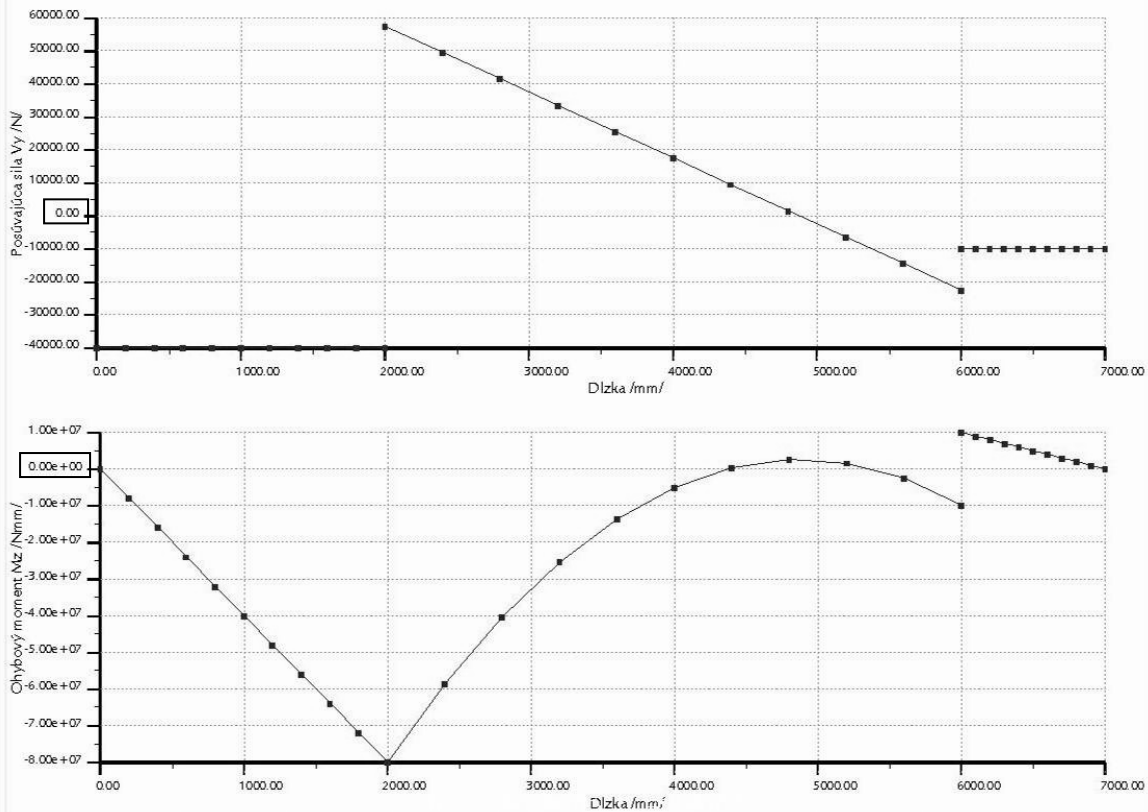
Obr. 7.20

Zadanie príkladu:

D: $M=20\text{kNm}$, $F_1=40\text{kN}$, $F_2=10\text{kN}$, $q=20\text{kN/m}$, $a=1\text{m}$, $D=300\text{mm}$, $E=2\cdot 10^5\text{MPa}$
 H: „ V “, „ M “, w_{\max} , $\sigma_{\max}^{\text{HMH}}$



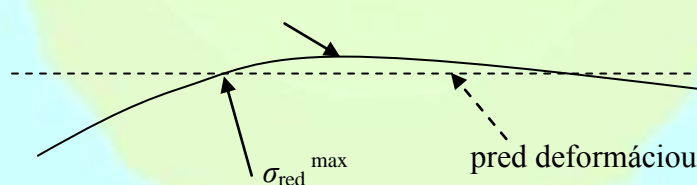
Výsledky numerického riešenia



Maximálny priehyb: $w_{\max}=2,87\text{mm}$

Maximálne redukované napätie podľa HMH hypotézy pevnosti: $\sigma_{\text{red}}^{\max}=30,18\text{MPa}$

priehybová krivka: w_{\max}

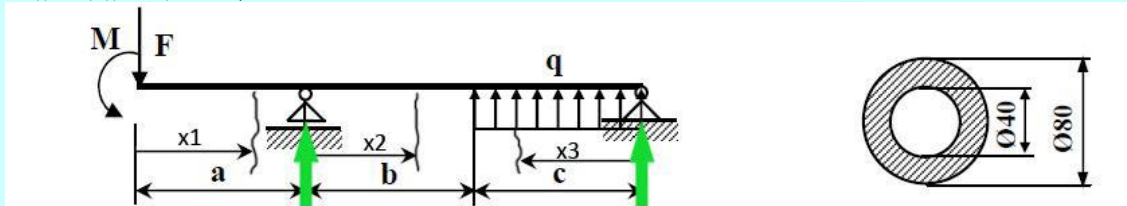


Obr. 7.21

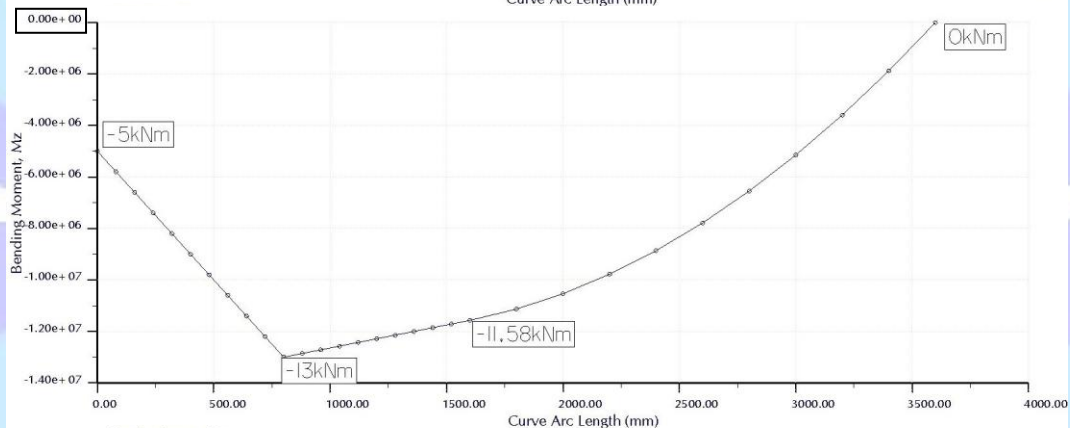
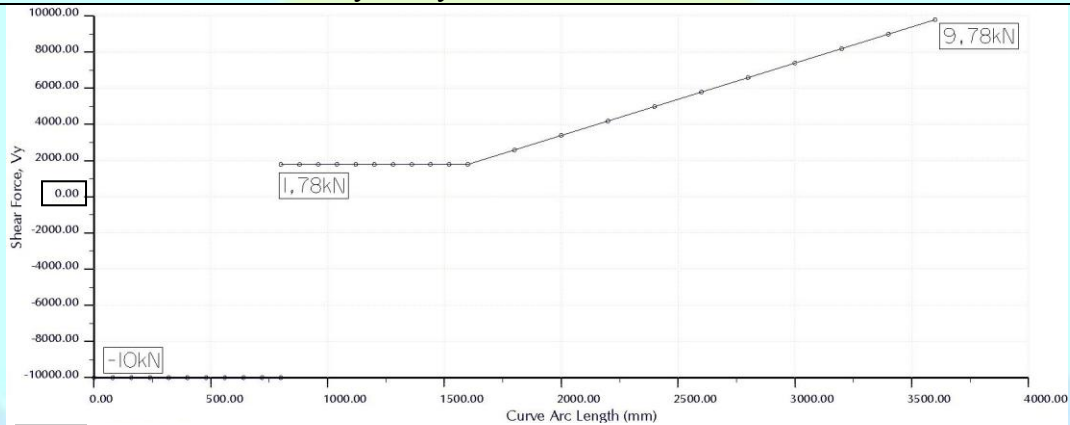
Zadanie príkladu:

D: $F=10\text{kN}$, $q=4\text{kN/m}$, $M=5\text{kNm}$, $a=b=0,8\text{m}$, $c=2\text{m}$, $E=2\cdot 10^5\text{MPa}$

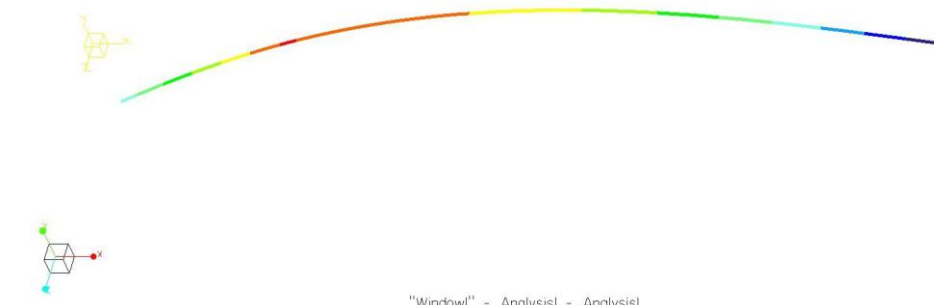
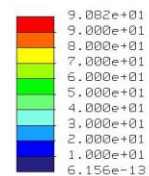
H: „ V “, „ M “, „ w_{\max} “, „ $\sigma_{\max}^{\text{HMH}}$ “



Výsledky numerického riešenia



Stress von Mises (WCS)
 Maximum of beam
 (MPa)
 Deformed
 Scale 5.0320E+01
 Loadset+LoadSet1 :



"Window1" - Analysis1 - Analysis1

Maximálny priehyb: $w_{\max}=7,15\text{mm}$

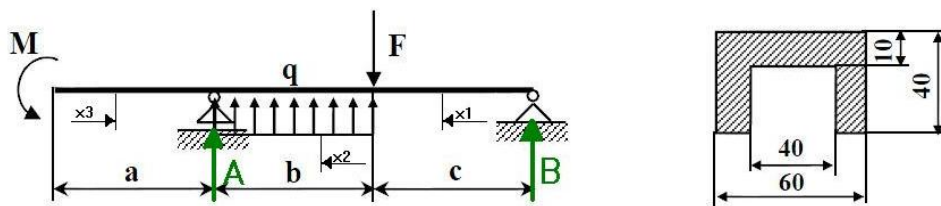
Maximálne redukované napätie podľa HMH hypotézy pevnosti: $\sigma_{\text{red}}^{\max}=90,82\text{MPa}$

Obr. 7.22

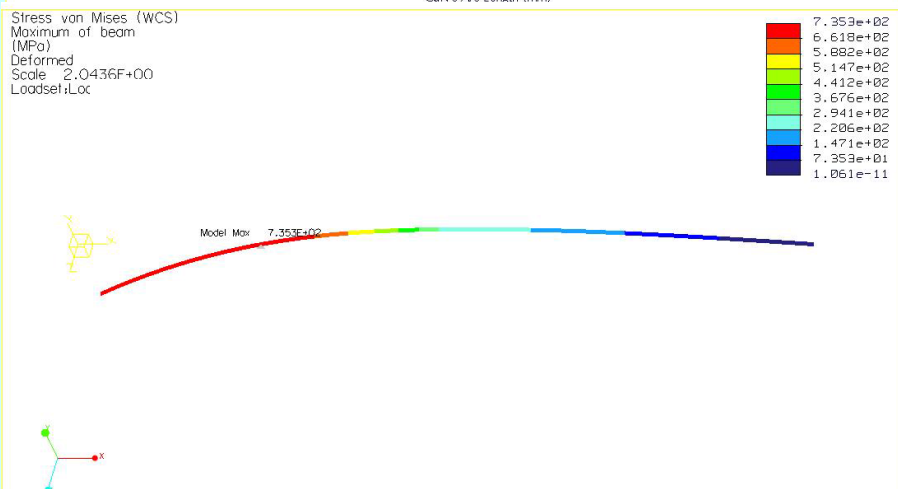
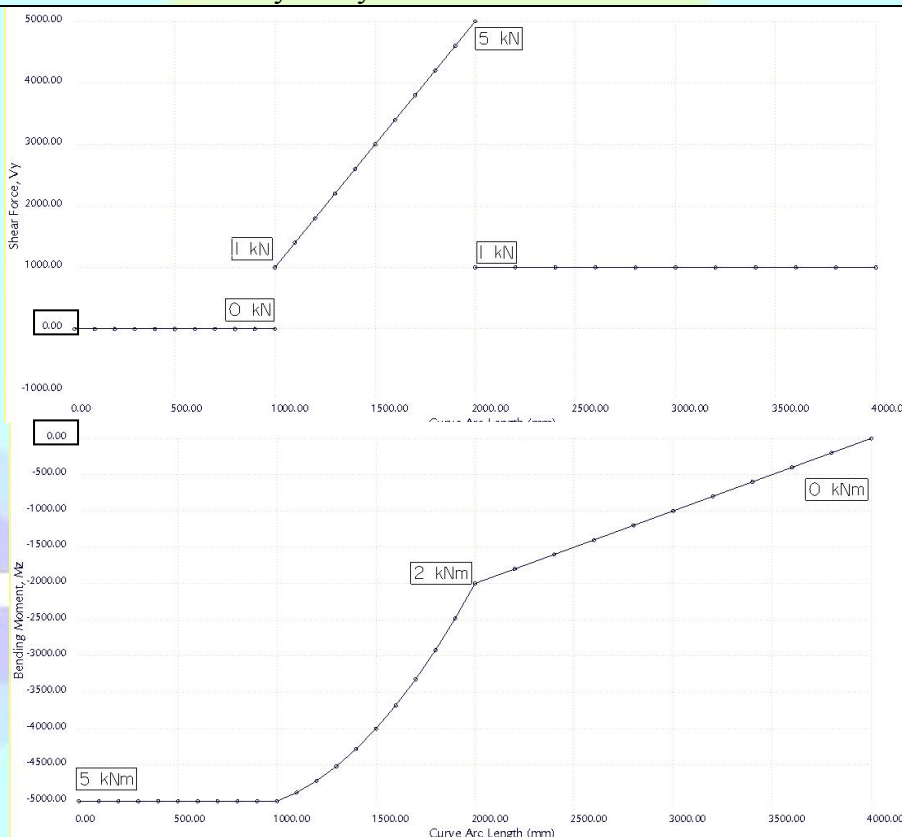
Zadanie príkladu:

D: $F=10\text{kN}$, $q=4\text{kN/m}$, $M=5\text{kNm}$, $a=b=0,8\text{m}$, $c=2\text{m}$, $E=2\cdot 10^5\text{MPa}$

H: „ V “, „ M “, „ w_{\max} “, „ σ_{\max} “^{HMH}



Výsledky numerického riešenia

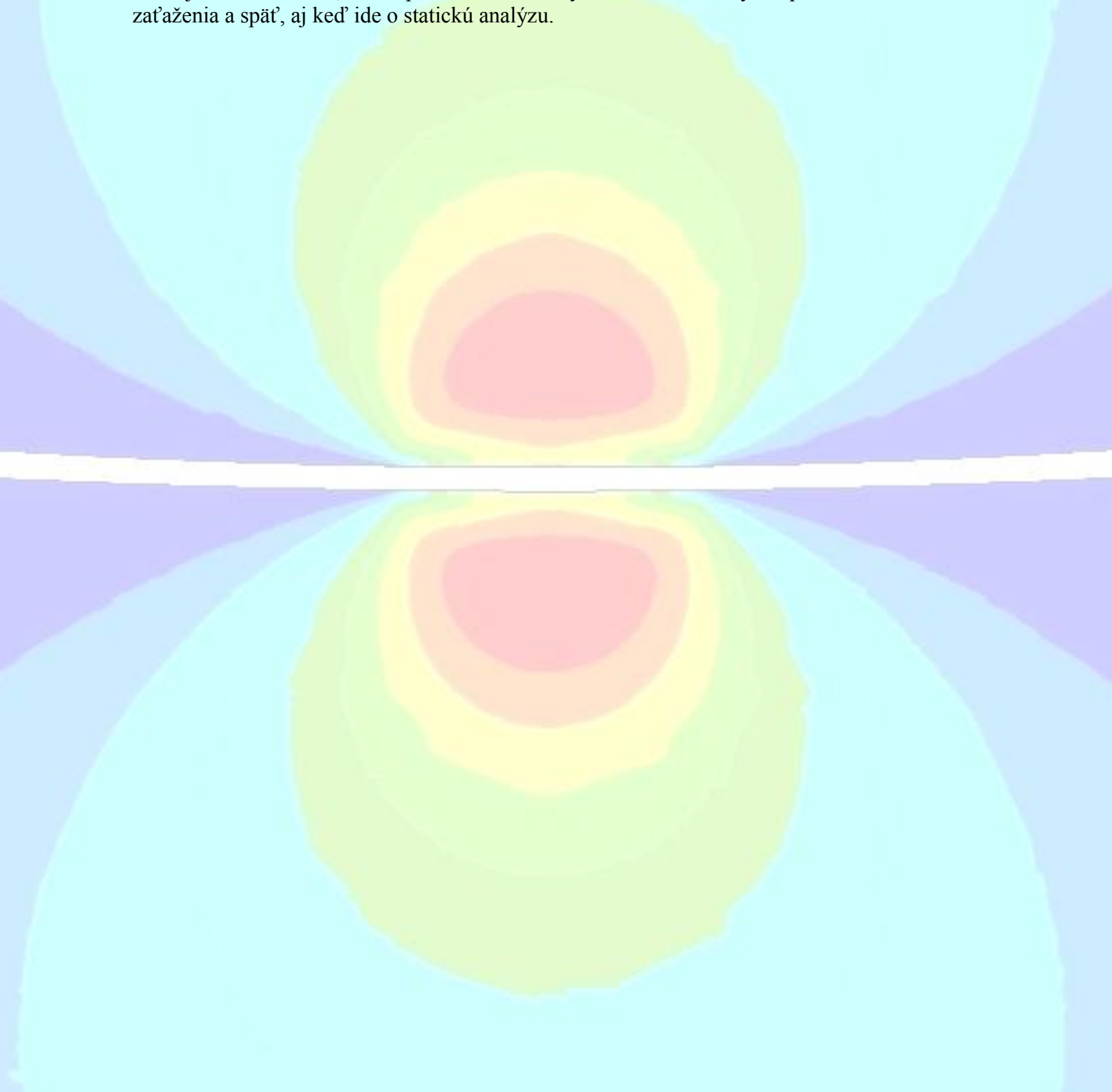


Maximálny priehyb: $w_{\max}=196,2\text{mm}$

Maximálne redukované napätie podľa HMMH hypotézy pevnosti: $\sigma_{\text{red}}^{\max}=735,3\text{MPa}$

Obr. 7.23

Obr. 7.20 – 7.23 znázorňujú graficky výsledky numerického riešenia príkladov podľa zadania. Nula na zvislej osi je označená obdĺžnikom. Možno porovnať výsledky získané analyticky a numericky, teda dvoma odlišnými spôsobmi. Výsledné hodnoty sú zhodné, odlišnosť je v metóde výpočtu, t.j. v spôsobe dosiahnutia týchto výsledkov. Numerické riešenie pomocou softvéru Pro/Engineer Wildfire Mechanics navyše obsahuje vizualizáciu priehybovej krivky (dole). Pri využití funkcie animácie môžeme sledovať ako sa deformuje nosník vplyvom vonkajšieho zaťaženia, ktoré pri animácii akoby narastalo od nuly až po konečnú hodnotu zaťaženia a späť, aj keď ide o statickú analýzu.

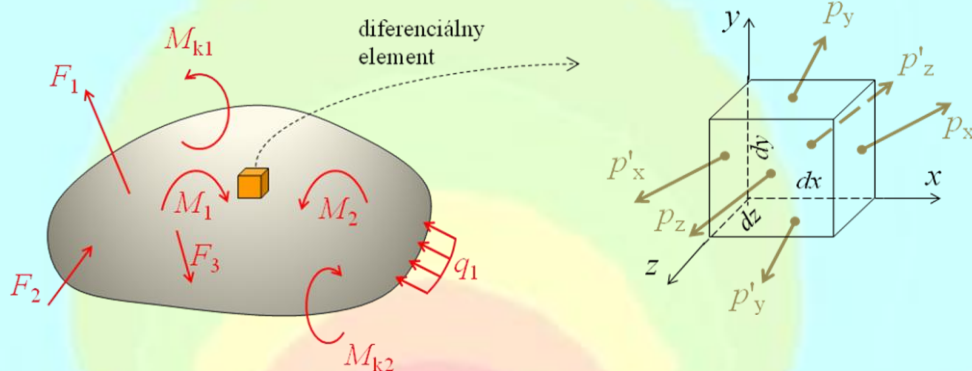




8 TEÓRIA PRUŽNOSTI

8.1 Napätosť v bode telesa

Napätosť je stav telesa, ktorý vzniká v dôsledku pôsobenia vonkajších síl na teleso. Napätia sú výsledkom vzájomného pôsobenia častíc telesa. Napätie a deformácia sa menia v telese z bodu do bodu vplyvom vonkajších síl. Bod telesa možno znázorniť ako diferenciálny element, t.j. kocku, s nekonečne malými rozmermi dx , dy , dz (obr. 8.1). Na jednotlivých plochách diferenciálneho elementu pôsobia úplné (všeobecné, výsledné) napätia $p_x, p_y, p_z, p'_x, p'_y, p'_z$.



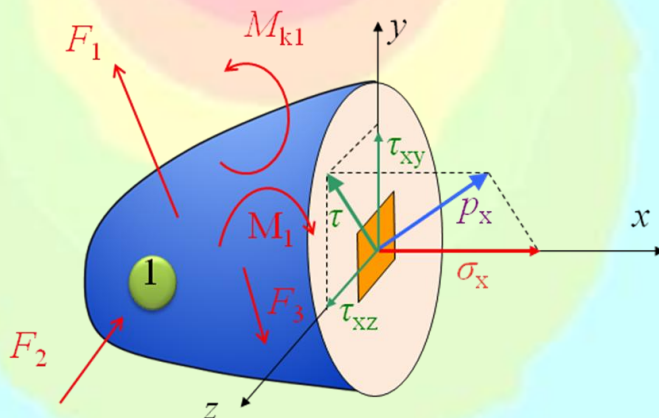
Obr. 8.1

Pre úplné napätia platí:

$$\begin{aligned} p_x &= p'_x \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= p'_z \end{aligned} \quad (8.1)$$

Každým bodom telesa možno preložiť nekonečný počet rovín. Napätosť v bode telesa je jednoznačne určená napätiami pôsobiacimi na tri navzájom kolmé roviny preložené týmto bodom.

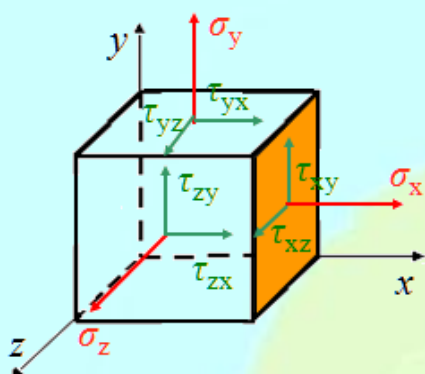
Ak vedieme telesom na obr. 8.1 rezovú rovinu tak, aby jedna plocha diferenciálneho elementu z obr. 8.1 ležala v rovine rezu, potom možno rozložiť úplné napätie p_x na normálovú σ a šmykovú τ (tangenciálnu) zložku (obr. 8.2).



Obr. 8.2

Na diferenciálnom elemente z obr. 8.1 možno urobiť rozklad úplných napätí na všetkých rovinách diferenciálneho elementu, čo je znázornené na obr. 8.3, kde je rozklad

zobrazený len na viditeľných rovinách diferenciálneho elementu a všetky zobrazené napätia sú kladné.



Obr. 8.3

Napätosť v bode telesa možno symbolicky zapísať tenzorom napätia:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (8.2)$$

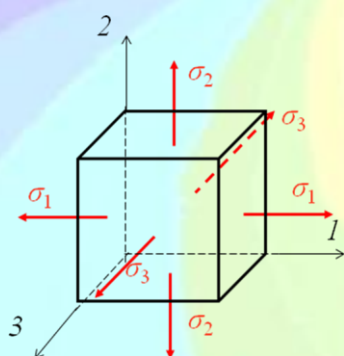
Tenzor napätia obsahuje deväť zložiek napätí, a to tri normálové napätia: σ_x , σ_y , σ_z a šesť šmykových napätí: τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{yx} , τ_{zy} , τ_{xz} . Šmyková zložka napätia má dva indexy. Prvý index určuje smer normály k ploche, na ktorej toto napätie pôsobí a druhý index určuje smer pôsobenia tohto napätia.

Pre normálové zložky napätia sa označenie s dvomi indexmi nepoužíva (nie σ_{xx} , ale σ_x).

V navzájom kolmých rovinách pôsobia rovnako veľké šmykové napätia, ktoré sú orientované od alebo ku spoločnej priesečnici (hrane) týchto rovín. Táto skutočnosť je označená ako zákon združenosti šmykových napätí. Platí:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Pootočením diferenciálneho elementu z obr. 8.3 možno nájsť takú jeho polohu, kedy v navzájom kolmých rovinách nepôsobia šmykové napätia, len normálové napätia. Tieto normálové napätia sú nazývané hlavné normálové napätia a označujeme ich σ_1 , σ_2 , σ_3 . Ide o extrémne hodnoty normálového napätia (obr. 8.4).



Obr. 8.4

Napätosť v bode telesa zobrazenú na obr. 8.4 zapíšeme tenzorom napätia:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (8.4)$$

Hlavné normálové napätia sú indexované:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (8.5)$$

Roviny, v ktorých pôsobia hlavné normálové napätia sa nazývajú hlavné roviny a normály hlavných rovín nazývame hlavné osi napätosti.

Tenzor napätia možno rozložiť na dva tenzory, a to guľový (objemový) tenzor \mathbf{K}_σ a deviátor napätia \mathbf{D}_σ :

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{D}_\sigma \quad (8.6)$$

alebo

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix} \quad (8.7)$$

kde σ_s je tzv. stredné napätie:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (8.8)$$

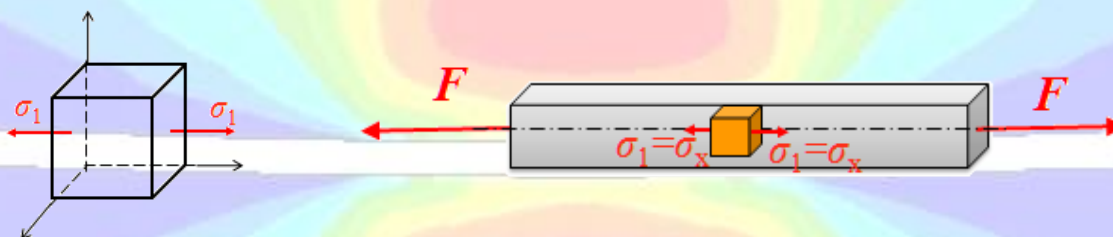
Guľový tenzor spôsobuje len zmenu objemu diferenciálneho elementu, bez toho, aby došlo k zmene tvaru (menia sa len rozmery bez zmeny tvaru) a deviátor napätia spôsobuje len zmenu tvaru, bez toho, aby došlo k zmene objemu.

Rozoznávame tri základné druhy napätosti, a to:

- priamkovú (jednoosovú),
- rovinnú (dvojosovú),
- priestorovú (trojosovú).

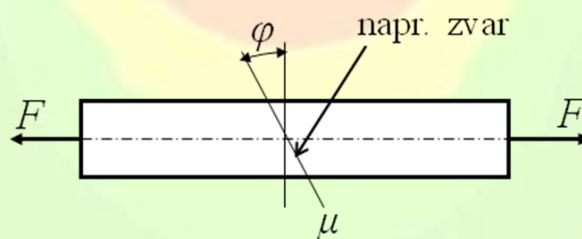
8.2 Priamková napätosť

Priamková (jednoosová) napätosť je napätosť, kedy v dvoch protiľahlých rovinách sú napätia nenulové a v ostatných rovinách sú rovné nule. Obr. 8.5 znázorňuje diferenciálny element priamkovej napätosti, ktorá sa vyskytuje pri úlohách jednoduchého ťahu a tlaku.



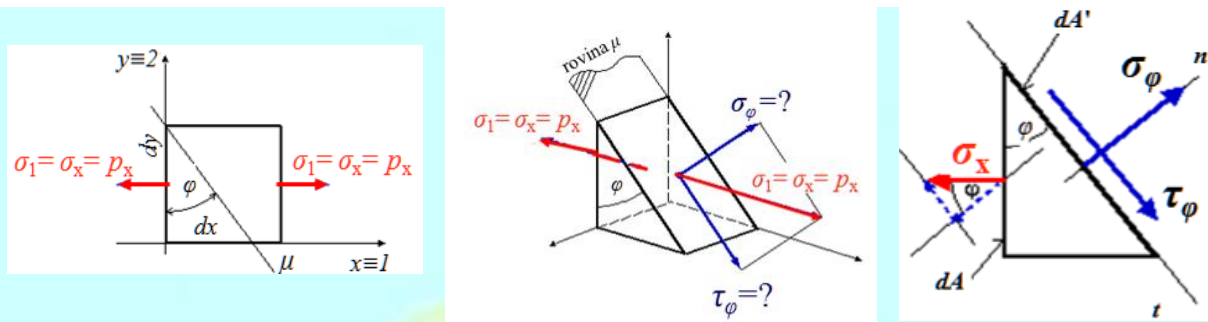
Obr. 8.5

Chceme určiť napätia σ_φ , τ_φ v ľubovoľnej inej rovine μ , ktorá je odklonená od smeru σ_x (x – os prúta) o uhol φ a prechádza daným bodom (obr. 8.6). Ak poznáme hlavné napätia v rovinách diferenciálneho elementu, potom možno určiť σ_φ , τ_φ . Ak by sa v rovine μ nachádzal zvar, potom tento zvar by bol namáhaný napätiami σ_φ , τ_φ .



Obr. 8.6

Napätia σ_φ , τ_φ odvodíme zo statických podmienok rovnováhy pre odrezanú časť diferenciálneho elementu priamkovej napätosti podľa obr. 8.7.



Obr. 8.7

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0; \quad \sigma_\varphi dA' - \sigma_x \cos \varphi dA = 0 \\ \sum F_t = 0; \quad \tau_\varphi dA' - \sigma_x \sin \varphi dA = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Zároveň možno písať:

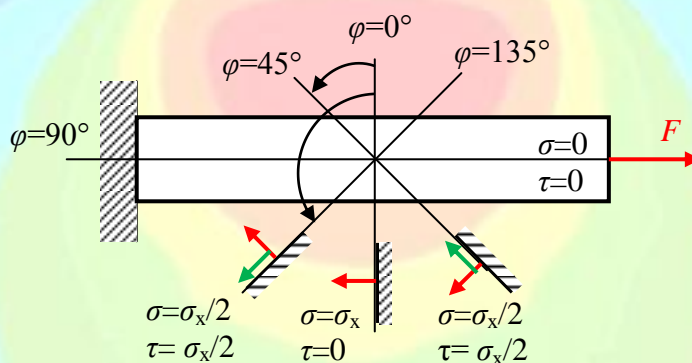
$$\cos \varphi = \frac{dA}{dA'} \Rightarrow dA' = \frac{dA}{\cos \varphi} \quad (8.10)$$

Potom z (8.9) po dosadení (8.10) vyplýva:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sigma_x \cos^2 \varphi \\ \tau_\varphi &= \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (8.11)$$

V praxi nás zaujímajú extrémne hodnoty napätí, podľa ktorých dimenzujeme konštrukcie. Možno určiť roviny, v ktorých normálové a šmykové napätia nadobúdajú extrémne hodnoty pri priamkovej napätosti.

Extrémy normálového napätia (σ_{\max}) a šmykového napätia (τ_{\max}) možno zistiť podľa tab. 8.1. Maximálne normálové napätie σ_{\max} je v rovine $\varphi=0^\circ$ (obr. 8.8) a maximálne šmykové napätie τ_{\max} je v rovine $\varphi=45^\circ$ a 135° .



Obr. 8.8

Tab. 8.1

Uhol	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 45^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 135^\circ$
Normálové napätie	$\sigma(\varphi = 0^\circ) = \sigma_x$	$\sigma(\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$	$\sigma(\varphi = 90^\circ) = 0$	$\sigma(\varphi = 135^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$
Šmykové napätie	$\tau(\varphi = 0^\circ) = 0$	$\tau(\varphi = 45^\circ) = \frac{\sigma_x}{2}$	$\tau(\varphi = 90^\circ) = 0$	$\tau(\varphi = 135^\circ) = -\frac{\sigma_x}{2}$

8.2.1 Mohrova kružnica pre priamkovú napätosť

Určiť napätia σ_φ , τ_φ v ľubovoľnej inej rovine μ prechádzajúcej daným bodom možno aj graficky. Na grafické riešenie priamkovej napätosti používame Mohrovu kružnicu.

Po úprave vzťahov (8.11), ich umocnení a sčítaní dostávame:

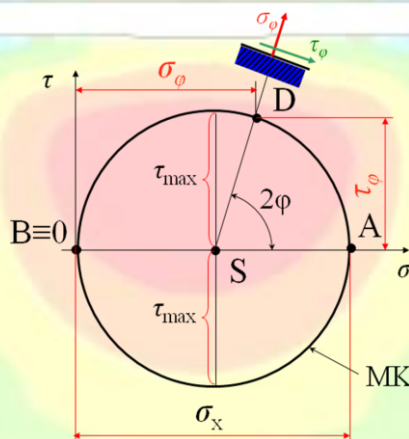
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \quad (8.12)$$

Uvedená rovnica je rovnicou kružnice: $(x-m)^2 + y^2 = R^2$, kde na os x -ovú sa vynášajú normálové napätia σ , na os y -ovú šmykové napätia τ . Stred Mohrovej kružnice od počiatku súradnicového systému je $m = \frac{\sigma_x}{2}$ a jej polomer $R = \frac{\sigma_x}{2}$.

Súradnice každého bodu Mohrovej kružnice predstavujú napätia σ_φ a τ_φ v rovine odklonenej od smeru σ_x o uhol φ .

Postup zostrojenia Mohrovej kružnice pre priamkovú napätosť (obr. 8.9):

1. Nanesieme σ_x na os σ , napr. 1MPa zodpovedá 5cm.
2. Zostrojíme bod A [σ_x , 0], ktorý udáva napätie v hlavnej normálovej rovine a bod B [0, 0] udáva napätie v rovine kolmej na hlavnú normálovú rovinu.
3. Určíme stred Mohrovej kružnice S [$\frac{\sigma_x}{2}$, 0].
4. Zostrojíme Mohrovu kružnicu.
5. Nanesieme uhol 2φ s vrcholom v bode S.
6. Priesečník Mohrovej kružnice a ramena uhlu 2φ je bod D [σ_φ , τ_φ], ktorého súradnice zodpovedajú hľadaným napätiam. Spojnica SD je normálou.

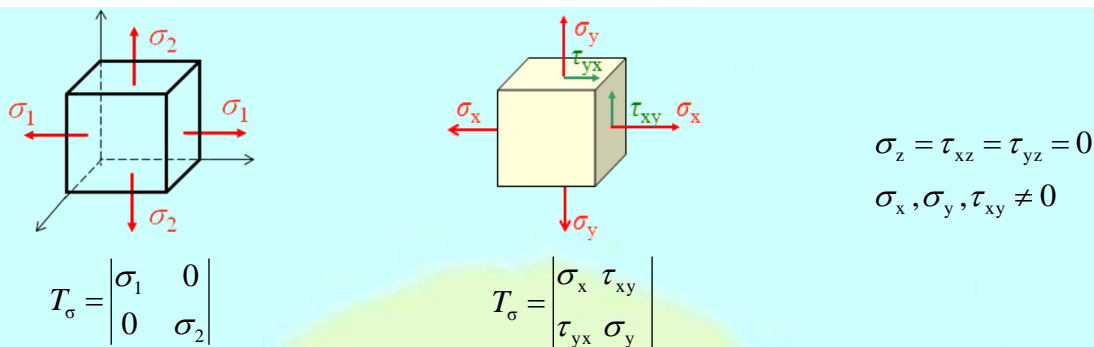


Obr. 8.9

8.3 Rovinná napätosť

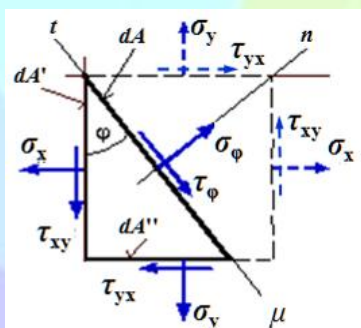
Rovinná (dvojosová) napätosť je napätosť, kedy v dvoch protiľahlých rovinách diferenciálneho elementu sú napätia nulové a v ostatných rovinách sú napätia nenulové. Diferenciálne elementy rovinatej napätosti s tenzormi napätia sú na obr. 8.10.





Obr. 8.10

Určíme napätia σ_{φ} , τ_{φ} v ľubovoľnej inej rovine μ u rovinnej napätosti. Východiskom pre odvodenie týchto napätí je obr. 8.11.



Obr. 8.11

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (8.14)$$

Napätia σ_{φ} a τ_{φ} nezávisia od dA a materiálových konštánt, ale sú funkciou uhla φ .

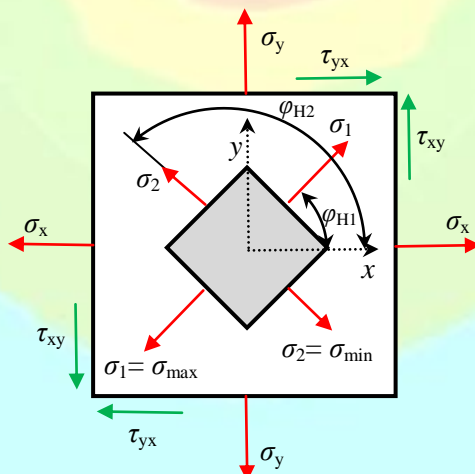
Napätia σ_x , σ_y na obr. 8.11 nie sú maximálne napätia a smery x , y , nie sú hlavné osi napätosti 1, 2. Hľadáme extrém pre normálové napätie.

Hľadaním extrému funkcie (8.13) $\sigma = \sigma(\varphi)$ nájdeme maximálne normálové napätie σ_1 a minimálne normálové napätie σ_2 :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.15)$$

kde $\sigma_{1,2}$ sú hlavné normálové napätia (extrémne hodnoty normálových napätí).

Roviny, v ktorých pôsobia $\sigma_{1,2}$ sa nazývajú hlavné roviny a normály týchto hlavných rovín nazývame hlavné osi napätosti.



Obr. 8.12

Deriváciou rovnice (8.13) dostaneme uhol odklonu normály hlavnej roviny φ_H :

$$\left. \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_H} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\varphi_H = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (8.16)$$

Vzťah (8.16) určuje dve navzájom kolmé smery s uhlami φ_{H1} a $\varphi_{H2} = \varphi_{H1} + \pi/2$ zobrazené na obr. 8.12.

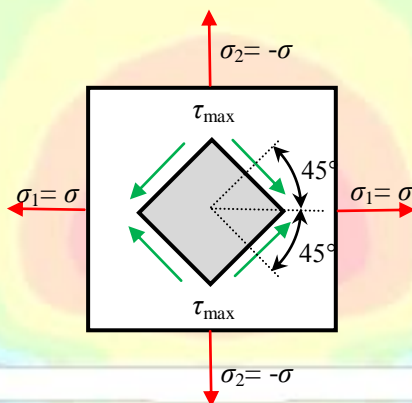
Ak by sme do rovnice (8.14) dosadili za $2\varphi = 2\varphi_H$ dostali by sme, že v hlavných rovinách sú šmykové napätia $\tau = 0$.

Platí, že súčet normálových napätí v dvoch ľubovoľných navzájom kolmých rovinách v tom istom bode telesa je konštantný a je rovný súčtu hlavných napätí.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{konšt.} \quad (8.17)$$

Hľadáme extrém pre šmykové napätie τ . Pri $\varphi = \pm 45^\circ$ ($\sin 2\varphi = \pm 1$) šmykové napätie τ má extrémnu hodnotu (obr. 8.13):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (8.18)$$

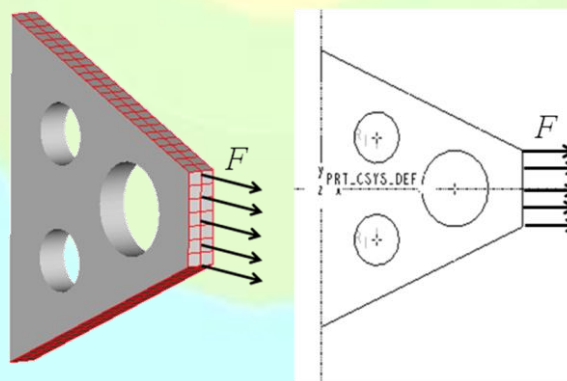


Obr. 8.13

Ak napätosť v bode nie je určená hlavnými normálovými napätiami σ_1 a σ_2 , potom:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (8.19)$$

Rovinná napätosť sa vyskytuje u tenkostenných nádob, škrupín, tenkých dosiek (obr. 8.14), u otvorených hrubostenných nádob, v prípadoch kombinovaného namáhania (σ , τ). Na obr. 8.14 je príklad rovinatej napätosti, t.j. doska konštantnej hrúbky (hrúbku možno zanedbať), ktorá je zaťažaná v rovine dosky.

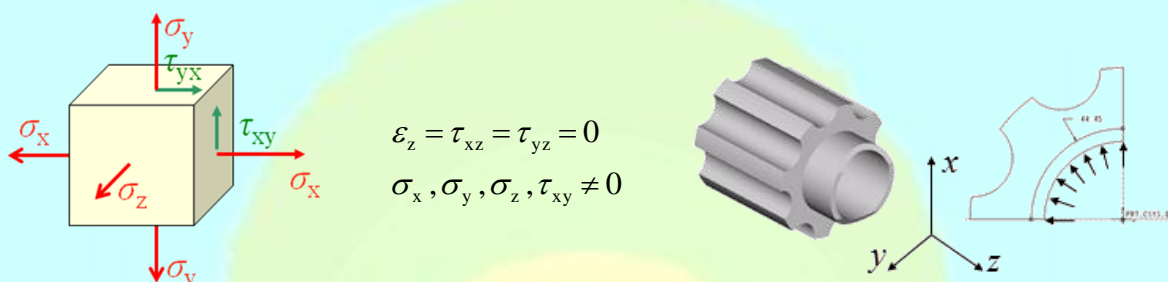


Obr. 8.14

8.3.1 Rovinná deformácia

Ide o špeciálny prípad napätosti. Deformácia ε_z v smere kolmom na pričný rez je veľmi malá, v porovnaní s deformáciou v ďalších dvoch smeroch. Deformáciu ε_z možno preto zanedbať. Hovoríme potom o rovinnej deformácii.

Diferenciálny element rovinnej deformácie je na obr. 8.15. Zároveň obr. 8.15 znázorňuje príklad rovinnej deformácie, ide o hrubostennú rúrku zaťaženú vnútorným tlakom p .

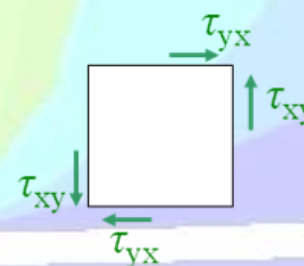


Obr. 8.15

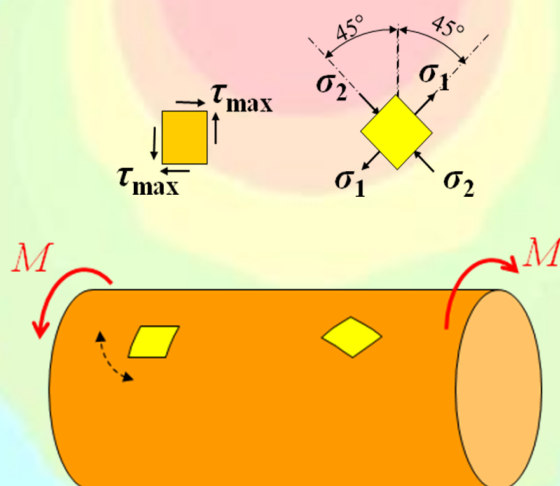
8.3.2 Čistý šmyk

Ide o špeciálny prípad napätosti. Diferenciálny element čistého šmyku je na obr. 8.16.

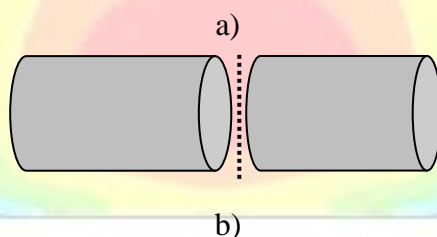
Na obr. 8.17 je príklad čistého šmyku. Ide o hriadeľ namáhaný jednoduchým krútením. Ak na povrchu vyberieme diferenciálny element budú šmykové napätia, ktoré sú maximálne, rozložené ako zobrazuje diferenciálny element vľavo. Pootočením tohto diferenciálneho elementu o $\pm 45^\circ$ získame diferenciálny element s hlavnými normálovými napätiami (vpravo), kde $\sigma_1 = \sigma$ a $\sigma_2 = -\sigma$. Pri $\varphi = \pm 45^\circ$ šmykové napätia majú extrémnu hodnotu.



Obr. 8.16



Obr. 8.17



Obr. 8.18 Obr. 8.18 ilustruje dôsledok uvedenej skutočnosti v praxi na charakter lomu. Lom je porušenie homogenity materiálu v celom priereze (trhlina – v časti prierezu). Hriadel' z krehkého materiálu (napr. liatina) má lomovú plochu tvaru skrutkovice (obr. 8.18a). Je porušený ťahovým hlavným normálovým napätím σ_1 , keďže krehký materiál má lepšie vlastnosti v tlaku ako v ťahu. Ide o statický krehký lom.

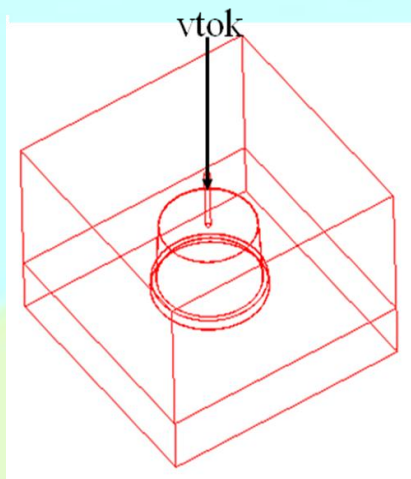
Hriadel' vyrobený z húževnatej ocele sa poruší v priečnom reze – rovinná lomová plocha (obr. 8.18b), čo spôsobia šmykové napätia, ktoré sú pre húževnaté materiály viac nebezpečné ako normálové.



8.4 Priestorová napätosť

Priestorová (trojosová) napätosť je napätosť, pri ktorej napätia vo všetkých rovinách sú nenulové. Diferenciálny element priestorovej napätosti je na obr. 8.3 a 8.4.

Priestorová napätosť sa vyskytuje u kombinovaného namáhania, u hrubých dosiek, u uzavretých hrubostenných nádob, v miestach kontaktu telies, pri koncentrácii napätia a pod. Príkladom priestorovej napätosti je obr. 8.19, kde rozloženie napätí pri plnení formy je priestorové.



Obr. 8.19



8.5 Deformácia v bode telesa

Pri zaťažení telesa vzniká okrem napätia aj deformácia. Deformácia je v každom bode telesa rôzna. Deformácia telesa je jednoznačne určená množinou posunutí všetkých jeho bodov. Deformáciou v bode telesa rozumieme pomernú deformáciu diferenciálneho elementu telesa, ktorý obsahuje tento bod. Deformáciu v bode telesa pre priestorovú napätosť možno vyjadriť pomocou tenzora deformácie:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (8.20)$$

kde ε sú pomerné deformácie v smere osí x , y , z a γ sú skosy v jednotlivých rovinách.

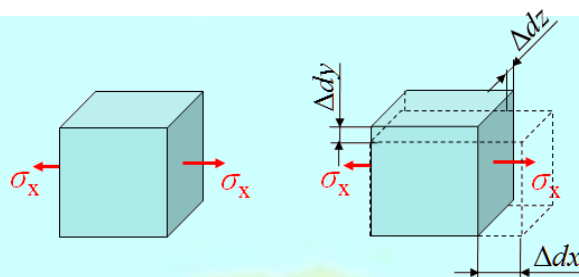
Pre priestorovú napätosť má tenzor deformácií vyjadrený pomocou hlavných pomerných deformácií tvar:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad (8.21)$$

Medzi tenzormi napätia a deformácie platí vzťah, tzv. zovšeobecnený (rozšírený) Hookeov zákon.

8.5.1 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri priamkovej napätosti

Určme deformáciu diferenciálneho elementu s rozmermi dx , dy , dz , na ktorý pôsobí len normálové napätie σ_x .



Obr. 8.20

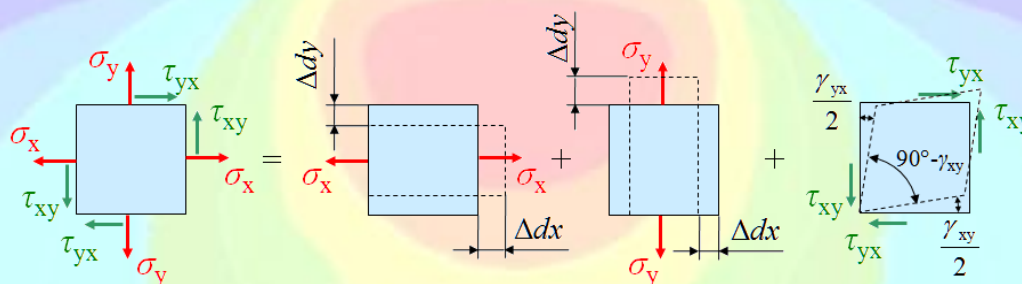
Diferenciálny element na obr. 8.20 predstavuje deformáciu v bode pri ťahanom prúte. Z pozorovania deformácie ťahaného prúta okrem predĺženia ε_x sa diferenciálny element (prút) priečne zúži o pomerné hodnoty ε_y a ε_z , ktoré sú rovnaké.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\Delta dy}{y} = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\Delta dz}{z} = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_y\end{aligned}\tag{8.22}$$

Z uvedeného vyplýva, že priamková napätosť vyvoláva priestorovú deformáciu. Rovnice (8.3) predstavujú zovšeobecnený Hookeov zákon pre priamkovú napätosť, ktoré sú nazývané aj rovnice elasticity.

8.5.2 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri rovinnej napätosti

Pri rovinnej napätosti na obr. 8.21 pôsobia na diferenciálny element s rozmermi dx , dy a dz normálové a šmykové napätia. Element sa deformuje. Deformačné účinky na element sú superponované, čo zobrazuje obr. 8.21 Normálové napätia spôsobujú deformáciu Δdx , Δdy a Δdz , z čoho možno vypočítať pomernú deformáciu strán elementu:



Obr. 8.21

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}\tag{8.23}$$

Šmykové napätia spôsobujú uhlovú deformáciu γ_{xy} , nazývanú skos, čo je zmena pravých uhlov diferenciálneho elementu.

Pomerná deformácia ε' od normálového napätia σ_x :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x' &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y' &= -\mu \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_z' &= -\mu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}\tag{8.24}$$

Pomerná deformácia ε'' od normálového napätia σ_y :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x'' &= -\mu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y'' &= \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_z'' &= -\mu \frac{\sigma_y}{E}\end{aligned}\tag{8.25}$$

Skos od τ_{xy} :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\tag{8.26}$$

Sčítaním jednotlivých účinkov dostávame zovšeobecnený Hookeov zákon (rovnice elasticity) pre rovinnú napätosť:

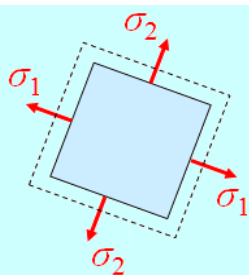
$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}\tag{8.27}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

V špeciálnom prípade, ak ε_z je veľmi malé, možno ho v praktických úlohách zanedbať, a vtedy hovoríme o rovinnej deformácii.

Ak pootočime diferenciálny element na obr. 8.21 o určitý uhol tak, aby šmykové napätia boli rovné nule, potom na diferenciálny element pôsobia len hlavné normálové napätia (obr. 8.22) a potom uhol skosu takto orientovaného elementu je nula (nedochádza k zmene pravého uhlu elementu) a vzniknuté pomerné deformácie ε možno označiť ε_1 a ε_2 , čo sú hlavné pomerné deformácie.

Pre izotropné materiály sú smery hlavných normálových napätí zároveň aj smery hlavných pomerných deformácií. Hlavné normálové napätia a hlavné pomerné deformácie sú extrémne hodnoty.



Obr. 8.22

Tensor deformácie pre element na obr. 8.22 je:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{vmatrix} \quad (8.28)$$

8.5.3 Zovšeobecnený Hookeov zákon pri priestorovej napätosti

Postupujeme podobne ako pri rovinnej napätosti, teda superponujeme účinky napätí na diferenciálny element a určíme deformáciu od napätí σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} a sčítame zložky deformácie. Dostávame zovšeobecnený Hookeov zákon (rovnice elasticity) pre priestorovú napätosť:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Rovnice (8.29) možno použiť aj pre rovinnú napätosť, ak σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} položíme rovné nule, aj pre priamkovú napätosť, ak σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} položíme rovné nule. Modul pružnosti v šmyku G je vyjadrený pomocou vzťahu (5.1).

Uvedených šesť rovníc možno zapísať ako maticovú rovnicu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (8.30)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je stĺpcová matica tvorená šiestimi zložkami \mathbf{T}_ε , $\boldsymbol{\sigma}$ je stĺpcová matica tvorená šiestimi zložkami \mathbf{T}_σ a \mathbf{C}^{-1} je inverzná matica materiálových (elastických) konštánt. Maticová rovnica (8.30) má tvar:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

Inverzný tvar zovšeobecneného Hookeovho zákona je:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.32)$$

kde \mathbf{C} je matica materiálových (elastických) konštánt. Z rovníc (8.29) možno vyjadriť napätia:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_x + \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G \cdot \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_y &= \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_y + \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G \cdot \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \sigma_z &= \frac{E}{(1+\mu)} \varepsilon_z + \frac{E \cdot \mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G \cdot \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\
 \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \\
 \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} = G \cdot \gamma_{zx}
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

kde λ je Lamého konštanty. Potom:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

Uvedené vzťahy v (8.29) – (8.34) platia pre izotropný materiál, pre ktorý stačí poznať dve nezávislé materiálové konštanty E a μ .

Zovšeobecnený Hookeov zákon pre ortotropný materiál:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

Zovšeobecnený Hookeov zákon pre priečne izotropný materiál:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

8.5.4 Deformačná energia pri priestorovej napätosti

Pri pružnej deformácii telesa vykonávajú vonkajšie sily prácu, ktorá sa mení na deformačnú energiu telesa akumulovanú v celom telese.

Zo (8.4) vyplýva, že pomerné deformácie diferenciálneho elementu na obr. 8.24 sú:

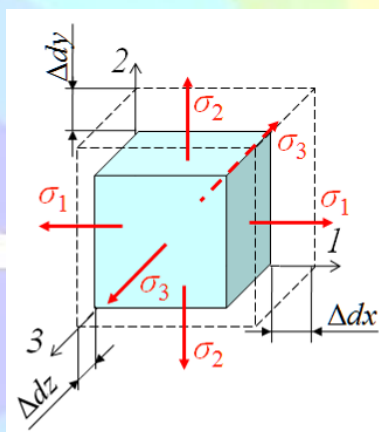
$$\Delta dx = \varepsilon_1 dx, \quad \Delta dy = \varepsilon_2 dy, \quad \Delta dz = \varepsilon_3 dz \quad (8.37)$$

Potom deformačná energia pre diferenciálny element na obr. 8.24 je:

$$dU = \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) dV \quad (8.38)$$

kde dV je objem diferenciálneho elementu.

Deformačná energia je rozložená v celom objeme telesa, preto chceme určiť „hustotu“ deformačnej energie, teda veľkosť deformačnej energie pripadajúcej na jednotku objemu. Túto veličinu nazývame merná deformačná energia A , resp. objemová hustota deformačnej energie.



Obr. 8.24

$$A = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3) \quad (8.39)$$

Do (8.39) dosadíme pomerné deformácie zo zovšeobecneného Hookeovho zákona (8.29), pričom indexy x, y, z zameníme indexmi $1, 2, 3$ a dostávame:

$$A = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_2)] \quad (8.40)$$

Merná deformačná energia A je súčet mernej deformačnej energie zmeny objemu A_o a mernej deformačnej energie zmeny tvaru A_t :

$$A = A_o + A_t \Rightarrow A_t = A - A_o \quad (8.41)$$

Mernú deformačnú energiu pre zmenu objemu A_o možno vyjadriť podľa (8.40), (8.7) a (8.8):

$$\begin{aligned} A_o &= \frac{1}{2E} [\sigma_s^2 + \sigma_s^2 + \sigma_s^2 - 2\mu(\sigma_s^2 + \sigma_s^2 + \sigma_s^2)] = \frac{3\sigma_s^2}{2E} (1 - 2\mu) = \\ &= \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (8.42)$$

Ak z (8.41) vyjadríme A_t a dosadíme (8.42), po úprave dostaneme:

$$A_t = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 \cdot \sigma_3) \quad (8.43)$$

Ak nie sú známe hlavné normálové napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, potom:

$$A_t = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y - \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \sigma_z) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (8.44)$$



9 DIMENZOVANIE KONŠTRUKČNÝCH PRVKOV

Pod dimenzovaním rozumieme návrh rozmerov konštrukcie (resp. jej prvkov) tak, aby nenastal nebezpečný (medzný) stav. Nebezpečný stav je stav, pri ktorom dochádza v niektorom bode telesa:

- k plastickej deformácii prekročením medze klzu R_e pre húževnaté materiály,
- k jeho porušeniu (lomu) prekročením medze pevnosti R_m pre krehké materiály.

Z uvedeného vyplýva, že pevnostná podmienka pre húževnaté materiály je $\sigma_{\max} \leq R_e$ a pre krehké materiály $\sigma_{\max} \leq R_m$. Požadujeme, aby maximálne napätie σ_{\max} (vypočítané, resp. prevádzkové) bolo menšie nanajvýš rovné medzným hodnotám: R_e , R_m . Avšak tieto pevnostné podmienky nemajú žiadnu rezervu výpočtu (!).

Vypočítané napätie v telese sa môže odlišovať od prevádzkového (skutočného), a to z nasledujúcich dôvodov:

- chyby materiálu (póry, dutinky, trhlinky, vtrúseniny),
- náhodné neuvažované zmeny vonkajšieho zaťaženia,
- zvyškové napätia v materiáli,
- nevhodná výpočtová metóda,
- nesprávny výpočtový model (nevhodné zjednodušenie) a pod.

Aby sme eliminovali vplyv uvedených príčin rozdielností medzi vypočítaným a skutočným napätím, v pevnostných výpočtoch musíme vždy uvažovať s mierou bezpečnosti k ! Preto konštrukcie dimenzujeme podľa dovoleného napätia σ_D . Dovolené napätie je napätie, ktoré možno pokladať za bezpečné. Je to maximálna prípustná hodnota napätia v materiáli konštrukcie.

Dovolené napätie pre húževnaté materiály vypočítame:

$$\sigma_D = \frac{R_e}{k_e} \quad (9.1)$$

kde k_e je miera bezpečnosti pre húževnaté materiály. Dovolené napätie pre krehké materiály:

$$\sigma_D = \frac{R_m}{k_m} \quad (9.2)$$

kde k_m je miera bezpečnosti pre krehké materiály.

Miery bezpečnosti sú určené normami STN. Napríklad rozsah miery bezpečnosti k_e pri statickom namáhaní je $k_e = 1,4 \div 1,6$. Platí $k > 1$.

Pevnostná podmienka pre výpočty má tvar:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_D \quad (9.3)$$

Uvedené platí aj pre šmykové napätia. Pevnostná podmienka bez rezervy výpočtu je pre húževnaté materiály $\tau_{\max} \leq R_{\text{er}}$ a pre krehké materiály $\tau_{\max} \leq R_{\text{mr}}$, kde R_{er} je medza klzu v šmyku a R_{mr} je medza pevnosti v šmyku.

Dovolené šmykové napätie vypočítame pre húževnaté a krehké materiály:

$$\tau_D = \frac{R_{\text{er}}}{k_e}, \quad \tau_D = \frac{R_{\text{mr}}}{k_m} \quad (9.4)$$

Pevnostná podmienka má tvar:

$$\tau_{\max} \leq \tau_D \quad (9.5)$$



9.1 Hypotézy pevnosti

Pevnostná podmienka (9.3) je postačujúca pre priamkovú napätosť ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$). Na určenie nebezpečného stavu postačujú experimentálne skúšky pri jednoosovom namáhaní (ťahová skúška).

Posúdiť nebezpečný stav pri priestorovej napätosti (prípadne rovinnej) nie je také jednoznačné ako pri priamkovej napätosti, čo možno ilustrovať na dvoch napätových stavoch:

$$\mathbf{T}_{\sigma_1} = \begin{vmatrix} 30 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{T}_{\sigma_2} = \begin{vmatrix} 80 & 15 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

U týchto dvoch napätostí chceme rozhodnúť, ktorý záťažový stav je nebezpečnejší, čo je ťažko uskutočniteľné, keďže napätosť je daná pomocou niekoľkých zložiek napätia. Dôležité však je aj to, či tieto napätosti vznikajú v krehkom alebo húževnatom materiáli, pretože pre krehké materiály sú nebezpečnejšie normálové napätia, pre húževnaté šmykové napätia.

Pri rovinnej ($\sigma_3 = 0$) a priestorovej napätosti nebezpečný stav môže nastať pri rôznych kombináciách zložiek napätí, ktorými je daná napätosť. Ak poznáme napríklad hlavné normálové napätia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ museli by sme experimentálne určiť pri akej kombinácii $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nastane nebezpečný stav. Tieto laboratórne skúšky by vyžadovali množstvo vzoriek materiálov skúšaných pri rôznych pomeroch hodnôt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, čo je prakticky len ťažko uskutočniteľné.

Z tohto dôvodu pri dimenzovaní, resp. pevnostnej kontrole telies s rovinnou, resp. priestorovou napätosťou, nahradzame túto napätosť kvázi priamkovou napätosťou, ktorá je definovaná redukovaným napätím σ_{red} . Redukované (porovnávacie) napätie σ_{red} je napätie, ktoré by vyvolalo rovnaký nebezpečný stav ako skutočná rovinná alebo priestorová napätosť. Podmienka pevnosti pre akúkoľvek napätosť a použitú hypotézu pevnosti je:

$$\sigma_{\text{red}} \leq \sigma_D \quad (9.6)$$

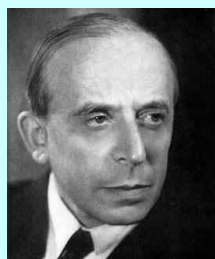
Výpočet redukovaného napätia je definovaný podľa rôznych hypotéz pevnosti, ktoré sa odlišujú podľa voľby kritéria nebezpečného stavu.

9.1.1 HMH hypotéza pevnosti, hypotéza maximálnej mernej deformačnej energie pre zmenu tvaru

Skratka HMH pochádza z prvých písmen mien autorov tejto hypotézy, a to: Huber – von Mises¹⁵ – Hencky. Táto hypotéza dáva najpresnejšie hodnoty a je najčastejšie používaná. Je vhodná pre húževnaté materiály. Kritériom nebezpečného stavu je maximálna merná deformačná energia pre zmenu tvaru $A_{t \text{ max}}$.

HMH hypotéza pevnosti predpokladá, že nebezpečný stav nastane vtedy, keď merná deformačná energia pre zmenu tvaru danej napätosti prekročí hodnotu mernej deformačnej

15



Richard Edler von Mises (1883, Lvov, Ukrajina – 1953, Boston, USA) patrí medzi najväčších odborníkov na aplikovanú matematiku 20. storočia. Pôsobil v oblasti teórie pravdepodobnosti, aeromechaniky a aplikovanej mechaniky. Gymnázium a technologickú univerzitu vyštudoval vo Viedni. Už pri ukončení štúdia (1906) pôsobil na brnenskej nemeckej technike ako asistent, kde sa habilitoval. Vo veku 26 rokov sa stal profesorom aplikovanej matematiky v Štrasburgu. Pôsobenie na mieste profesora mechaniky na technike v Brne bolo prerušené prvou svetovou vojnou, po ktorej pôsobil v Drážďanoch a Berlíne. Po nástupe nacizmu odišiel do Istanbulu (Turecko) a odtiaľ do USA, kde sa v roku 1939 stal prednšajúcim na Harvarde.

energie pre zmenu tvaru priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha. Požadujeme splnenie nerovnosti:

$$A_{t\max} \leq A_D \quad (9.7)$$

Nebezpečný stav nastáva pri mernej deformačnej energii pre zmenu tvaru:

$$A_{tD} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_D^2 \quad (9.8)$$

Pričom (pozri (14.24)):

$$A_{t\max} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3) \quad (9.9)$$

Dosadením vzťahov (9.8) a (9.9) do (9.7) a úpravou dostávame pevnostnú podmienku podľa HMM hypotézy pevnosti pre priestorovú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} \leq \sigma_D \quad (9.10)$$

Pre rovinnú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq \sigma_D \quad (9.11)$$

Pre rovinnú napätosť danú normálovým a šmykovým napätím:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_D \quad (9.12)$$

Výhodou HMM hypotézy pevnosti je, že redukované napätie možno vypočítať aj bez znalosti hlavných normálových napätí. Redukované napätie možno priamo vypočítať pre napätosť danú 6 nezávislými zložkami napätia:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \leq \sigma_D$$

HMM hypotéza pevnosti je využívaná vo výpočtových softvéroch, kde je redukované napätie podľa HMM hypotézy pevnosti nazývané Misesovo napätie.

9.1.2 Guestova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho šmykového napätia

Guestova hypotéza pevnosti je vhodná pre húževnaté materiály a nevhodná pre krehké materiály. Kritériom nebezpečného stavu je maximálne šmykové napätie τ_{\max} .

Guestova hypotéza pevnosti predpokladá, že nebezpečný stav nastane vtedy, keď najväčšie šmykové napätie danej napätosti dosiahne hodnotu šmykového napätia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha, čo možno vyjadriť:

$$\tau_{\max} \leq \tau_D \quad (9.13)$$

Nebezpečný stav nastáva pri šmykovom napätí:

$$\tau_D = \frac{\sigma_D}{2} \quad (9.14)$$

Pričom:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (9.15)$$

Dosadením vzťahov (9.14) a (9.15) do (9.13) a úpravou dostávame pevnostnú podmienku podľa Guestovej hypotézy pevnosti pre priestorovú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^G = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_D \quad (9.16)$$

Pre rovinnú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^G = \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_D \quad (9.17)$$

Pre rovinnú napätosť danú normálovým a šmykovým napätím:

$$\sigma_{\text{red}}^G = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_D \quad (9.18)$$

9.1.3 Rankinova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho normálového napätia

Rankinova hypotéza pevnosti sa používa pre krehké materiály (sklo, sadra, keramika a pod.). Kritériom nebezpečného stavu je maximálne normálové napätie. Ostatné napätia akoby nemali vplyv na pevnosť materiálu.

Rankinova hypotéza pevnosti predpokladá, že nebezpečný stav nastane vtedy, keď najväčšie normálové napätie danej napätosti dosiahne hodnotu normálového napätia priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva lom (R_m), resp. veľké plastické deformácie (R_e). Musí byť splnená podmienka:

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_D \quad (9.19)$$

Pevnostná podmienka podľa Rankinovej hypotézy pri ťahu:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_1 = \sigma_{\text{red}}^R \leq \sigma_D \quad (9.20)$$

Pri indexovaní hlavných normálových napätí musí byť splnená podmienka $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Môže vzniknúť napät'ový stav (napr. 34MPa>-5MPa>-70MPa), kedy σ_3 je tlakové napätie a pritom $|\sigma_3| > \sigma_1$. Potom pevnostná podmienka podľa Rankinovej hypotézy pri tlaku:

$$\sigma_{\text{max}} = |\sigma_3| = \sigma_{\text{red}}^R \leq \sigma_D \quad (9.21)$$

9.1.4 Saint-Venantova hypotéza pevnosti, hypotéza maximálneho pomerného predĺženia

Saint-Venantova hypotéza pevnosti je vhodná pre krehké materiály. Kritérium nebezpečného stavu je maximálne pomerné predĺženie ε_{max} .

Saint-Venantova hypotéza pevnosti predpokladá, že nebezpečný stav nastane vtedy, keď pomerné predĺženie (resp. skrátenie) ε v ktoromkoľvek smere danej napätosti dosiahne hodnotu pomerného predĺženia (resp. skrátenia) pri priamkovej napätosti, pri ktorej nastáva porucha. Požaduje sa splnenie nerovnosti:

$$\varepsilon_{\text{max}} \leq \varepsilon_D \quad (9.22)$$

Maximálne pomerné predĺženie pri priestorovej napätosti podľa (14.10) je:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (9.23)$$

Z Hookeovho zákona pre dovolené pomerné predĺženie platí:

$$\varepsilon_D = \frac{\sigma_D}{E} \quad (9.24)$$

Dosadením (9.23) a (9.24) do (9.22) dostávame pevnostnú podmienku podľa Saint-Venantovej hypotézy pre priestorovú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{SV}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_D$$

Pre rovinnú napätosť:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{SV}} = \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2 \leq \sigma_D$$



9.2 Pevnostná kontrola s využitím hypotéz pevnosti

Príklad 9.1

Priestorová napätosť je definovaná pomocou hlavných normálových napätí $\sigma_1 = 120\text{MPa}$, $\sigma_2 = -80\text{MPa}$ a $\sigma_3 = -100\text{MPa}$:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{vmatrix}$$

Poissonovo číslo daného materiálu je $\mu = 0,3$ a dovolené napätie je $\sigma_D = 220\text{MPa}$. Zistíme, či je splnená pevnostná podmienka pre danú napätosť. Pretože ide o priestorovú napätosť, musíme vypočítať redukované (porovnávacie) napätie σ_{red} , ktoré určíme podľa jednotlivých hypotéz pevnosti (Tab. 9.1).

Tab. 9.1

Hypotéza pevnosti	Redukované napätie σ_{red}
HMH hypotéza	$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} =$ $= \sqrt{120^2 + (-80)^2 + (-100)^2 - 120 \cdot (-80) - 120 \cdot (-100) - (-80) \cdot (-100)} =$ $= 211\text{MPa}$
Guestova h.	$\sigma_{\text{red}}^{\text{G}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 120 - (-100) = 220\text{MPa}$
Rankinova h.	$\sigma_{\text{red}}^{\text{R}} = \sigma_1 = 120\text{MPa}$
Saint-Venantova h.	$\sigma_{\text{red}}^{\text{SV}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) =$ $= 120 - 0,3(-80 + (-100)) = 174\text{MPa}$

Pevnostná podmienka (9.6) je splnená podľa každej hypotézy pevnosti. V prípade Guestovej hypotézy pevnosti má však daná napätosť medznú hodnotu.



10 ZLOŽENÉ (KOMBINOVANÉ) NAMÁHANIE

V praxi len ojedinele sa vyskytujú prvky konštrukcií, súčiastky, ktoré sú namáhané len jedným základným druhom namáhania. Zvyčajne ide o kombináciu základných druhov namáhania. Akékoľvek rôzne kombinácie základných druhov namáhania vzniknú, kombinované namáhanie môže spôsobiť vznik len dvoch druhov napätí, a to normálového a šmykového.

Výslednú napätosť a deformáciu pri kombinovanom namáhaní možno v oblasti pružných deformácií (t.j. v oblasti platnosti Hookeovho zákona) určiť superponovaním jednotlivých namáhání, teda oddelením jednotlivých druhov namáhání, ich napätovo-deformačnou analýzou a následným zložením (napr. sčítaním, vektorovým sčítaním).

Medzi najčastejšie sa vyskytujúce zložené namáhania patrí:

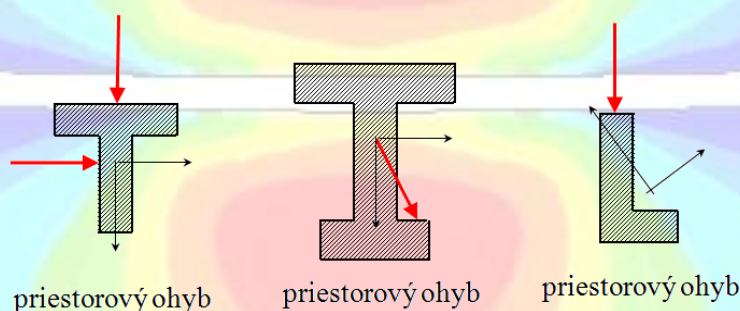
- priestorový (šikmý) ohyb, ide o kombináciu rovinných ohybov
- excentrický ťah/tlak, ide o súčasné pôsobenie ohybu a ťahu/tlaku
- súčasné pôsobenie ohybu a krútenia.



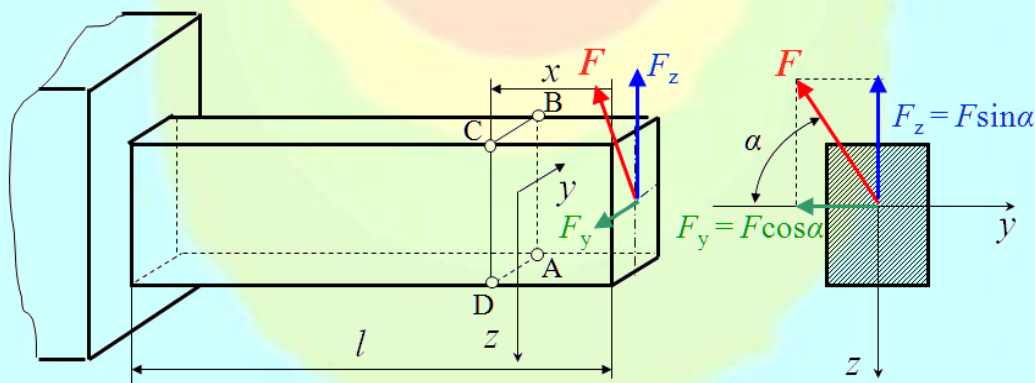
10.1 Priestorový ohyb

Rozdiel medzi priestorovým, resp. šikmým, ohyb a rovinným ohybom spočíva v tom, že pri priestorovom ohybe vonkajšie zaťaženie nepôsobí v rovinách symetrie priečného prierezu, t.j. nepôsobí v hlavných rovinách (v rovinách hl. centrálnych osí), obr. 10.1.

Pri výpočte priestorového ohybu transformujeme ho na výpočet rovinných ohybov v hlavných rovinách. Zároveň využívame princíp superpozície.



Obr. 10.1



Obr. 10.2

Na obr. 10.2 je zobrazený nosník zaťažený silou F pôsobiacou pod uhlom α . Táto sila spôsobuje vznik priestorového ohybu. Vznikajú dve zložky ohybových momentov v mieste definovanom súradnicou x :

$$\begin{aligned} M_y(x) &= F_z \cdot x = F \cdot x \cdot \sin \alpha \\ M_z(x) &= F_y \cdot x = F \cdot x \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (10.1)$$

Napätie v ľubovoľnom bode nosníka je:

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{J_y} \cdot z + \frac{M_z(x)}{J_z} \cdot y \quad (10.2)$$

kde y, z sú súradnice bodu, v ktorom napätie vyšetrujeme a J_y, J_z sú kvadratické momenty k hlavným centrálnym osiam.

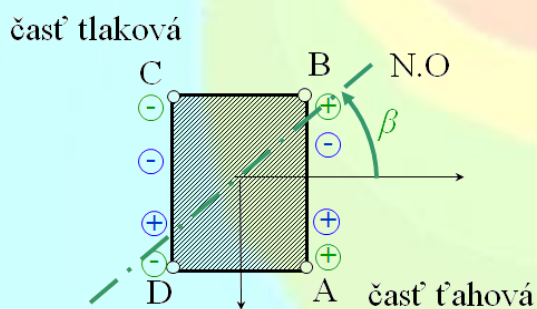
Obr. 10.3

Aby sme vypočítali napätia v jednotlivých rohoch prierezu pre nosník na obr. 10.2, musíme urobiť tzv. znamienkovú analýzu na obr. 10.3. Súradnice y, z bodov A, B, C, D dosadzujeme bez znamienok !

Pre určenie polohy neutrálnej osi budeme vychádzať z definície neutrálnej osi, a to, že normálové napätia na neutrálnej osi sú nulové: $\sigma=0$, súradnice bodov neutrálnej osi označíme y_N, z_N . Vo vzťahu (10.2) položíme $\sigma=0$ a dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{M_y(x)}{J_y} \cdot z_N + \frac{M_z(x)}{J_z} \cdot y_N \\ \frac{z_N}{y_N} &= \operatorname{tg} \beta = - \frac{M_z(x)}{M_y(x)} \cdot \frac{J_y}{J_z} \end{aligned} \quad (10.3)$$

kde β je uhol, pod ktorým vedieme neutrálnu os. Neutrálna os rozdelí prierez na ťahovú a tlakovú časť, pričom pri priestorovom ohybe prechádza ťažiskom prierezu (obr. 10.4).



Obr. 10.4

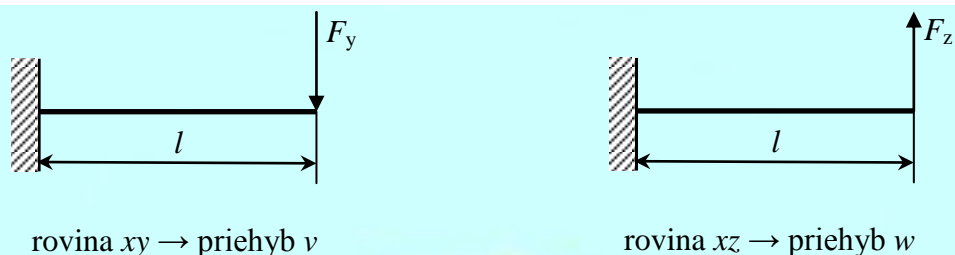
Výpočet výsledného priehybu δ vykonáme využitím superpozície dvoch rovinných priehybov v a w v hlavných rovinách (obr. 10.5):

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (10.4)$$

kde v je prieťah v smere osi y a w je prieťah v smere osi z . Podobne platí pre uhol pootočenia φ . Prieťah δ je kolmý na neutrálnu os.

Prieťahy u a w vypočítame podľa niektorej metódy pre výpočet deformácie pri ohybe (kapitola 7). Pre uvedený príklad platí:

$$v = \frac{F_y \cdot l^3}{3E \cdot J_z}; \quad w = \frac{F_z \cdot l^3}{3E \cdot J_y} \quad (10.5)$$



Obr. 10.5

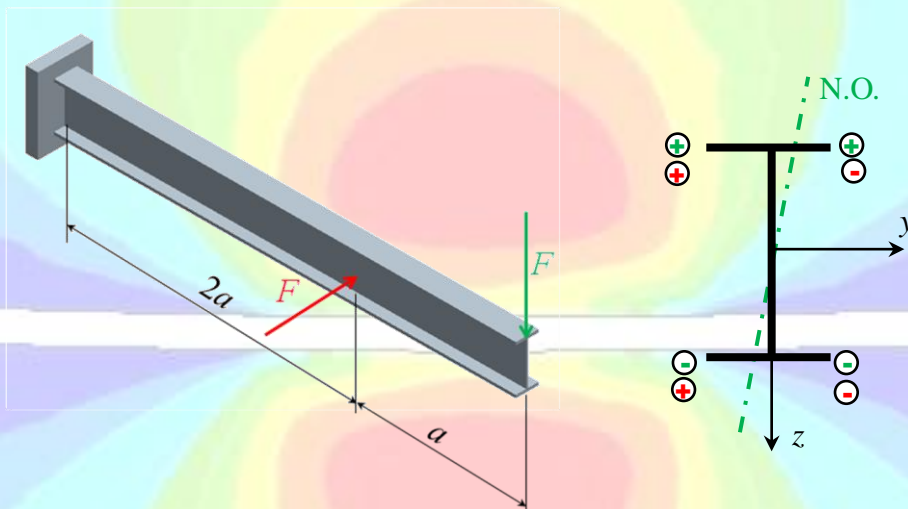
Príklad 10.1

Určte pre nosník z ocele s normalizovaným profilom I160 na obr. 10.6 polohu neutrálnej osi a maximálne normálové napätie v najviac namáhanom priereze a určte veľkosť najväčšieho priehybu δ , ak sú dané hodnoty F a dĺžkový rozmer a .

D: $F=2$ kN, $a=0,5$ m, $E=2 \cdot 10^5$ MPa, prierez I 160 (zo strojníckych tabuliek):

$$J_y=935\text{cm}^4, J_z=54,7\text{cm}^4$$

H: $\beta, \sigma_{\max}, \delta (w, v)$



Obr. 10.6

Určenie polohy neutrálnej osi v najviac namáhanom mieste (votknutie):

$$M_y(x) = -F \cdot 3a$$

$$M_z(x) = -F \cdot 2a$$

$$\text{tg } \beta = -\frac{M_z(x)}{M_y(x)} \cdot \frac{J_y}{J_z} = -\frac{-F \cdot 2a}{-F \cdot 3a} \cdot \frac{J_y}{J_z} = -\frac{2J_y}{3J_z} = -\frac{2 \cdot 935\text{cm}^4}{3 \cdot 54,7\text{cm}^4} = 11,4 \Rightarrow \beta = 85^\circ$$

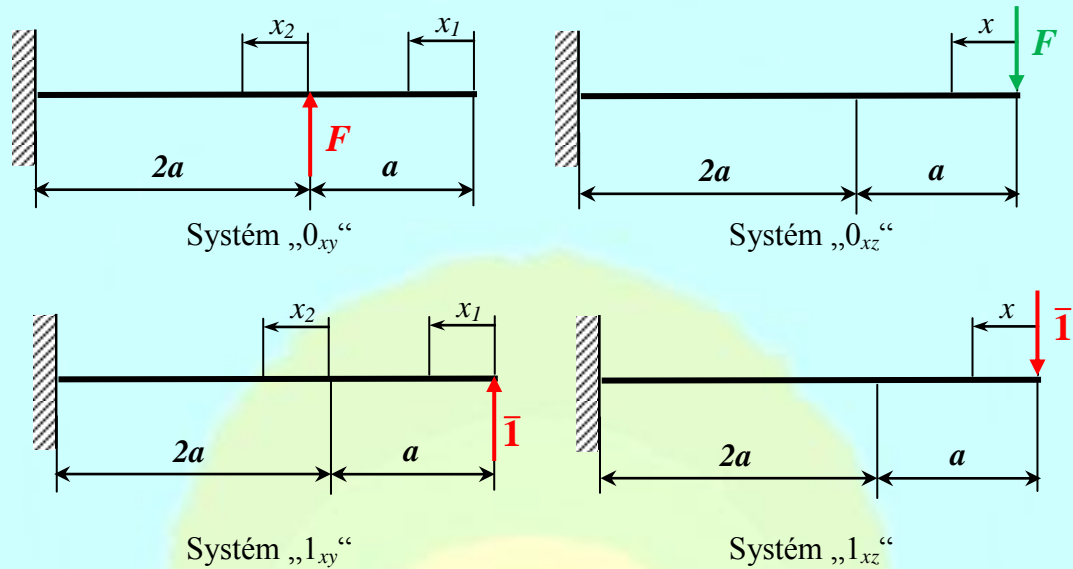
Hodnota maximálneho normálového napätia vo votknutí (výška profilu I160 je 160mm, šírka profilu I 160 je 74mm):

$$|\sigma_{\max}| = \frac{F \cdot 3a}{J_y} \cdot z + \frac{F \cdot 2a}{J_z} \cdot y = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 3 \cdot 500 \text{ mm}}{9 \ 350 \ 000 \text{ mm}^4} \cdot 80 \text{ mm} + \frac{2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 2 \cdot 500 \text{ mm}}{547 \ 000 \text{ mm}^4} \cdot 37 \text{ mm} = 160,95 \text{ MPa}$$

Veľkosť najväčšieho priehybu δ je na voľnom konci nosníka. Výpočet priehybu zrealizujeme podľa Mohr-Maxwellovej vety v dvoch rovinách, a to xy a xz .

Rovina xy

Rovina xz



Obr. 10.7

Priehyb v rovine xy :

$$M_0(x_1) = 0 \qquad M_1(x_1) = \bar{I} \cdot x_1$$

$$M_0(x_2) = F \cdot x_2 \qquad M_1(x_2) = \bar{I} \cdot (a + x_2)$$

Potom:

$$v = \frac{1}{E \cdot J_z} \left(\int_0^a M_0(x_1) M_1(x_1) dx_1 + \int_0^{2a} M_0(x_2) M_1(x_2) dx_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_z} \int_0^{2a} (F \cdot x_2 \cdot a + F \cdot x_2^2) dx_2 = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[F \cdot a \cdot \frac{x_2^2}{2} + F \cdot \frac{x_2^3}{3} \right]_0^{2a} = \frac{14F \cdot a^3}{3E \cdot J_z}$$

Po dosadení:

$$v = \frac{14 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (500 \text{ mm})^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 547\,000 \text{ mm}^4} = 10,7 \text{ mm}$$

Priehyb v rovine xz :

$$M_0(x) = -F \cdot x \qquad M_1(x) = -\bar{I} \cdot x$$

Potom:

$$w = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^{3a} M_0(x) M_1(x) dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \int_0^{3a} F \cdot x^2 dx = \frac{1}{E \cdot J_y} \left[F \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{3a} = \frac{9F \cdot a^3}{E \cdot J_y}$$

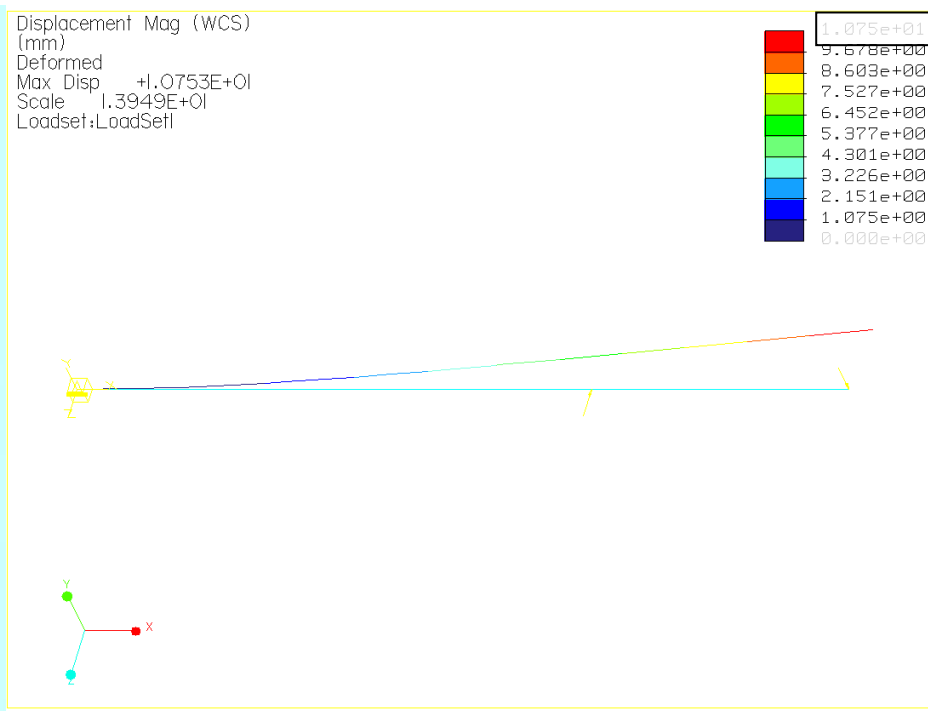
Po dosadení:

$$w = \frac{9 \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (500 \text{ mm})^3}{2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 9\,350\,000 \text{ mm}^4} = 1,2 \text{ mm}$$

Výsledný priehyb δ :

$$\delta = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{(10,7 \text{ mm})^2 + (1,2 \text{ mm})^2} = 10,76 \text{ mm}$$

Uvedený výsledný priehyb možno porovnať s numerickým riešením na obr. 10.8.

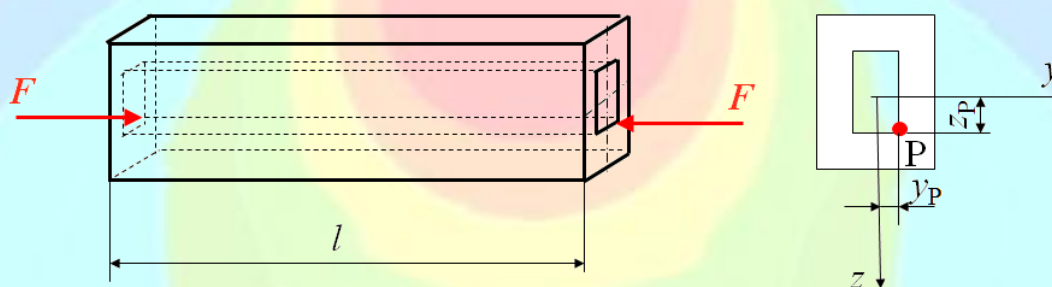


Obr. 10.8



10.2 Excentrický ťah/tlak

Pri excentrickom ťahu/tlaku sila pôsobiaci na prút nepôsobí v osi prúta, preto v dôsledku sily F vzniká v ľubovoľnom priereze osová sila $N = F$ (ťahová), resp. $N = -F$ (tlaková), a dva ohybové momenty M_y a M_z . Na obr. 10.9 je excentricky zaťažovaný prút tlakovou silou F . Najčastejším príkladom excentricky zaťažovaného prúta sú excentricky tlačené stĺpy.



Obr. 10.9

Pre osovú silu a ohybové momenty prúta na obr. 10.9 platí:

$$\begin{aligned}
 N &= -F \\
 M_y &= F \cdot z_p \\
 M_z &= F \cdot y_p
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

kde y_p a z_p sú súradnice pôsobiska P sily F v súradnicovom systéme prechádzajúcom ťažiskom prierezu.

$\sigma_A = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_P}{J_y} z_A - \frac{F \cdot y_P}{J_z} y_A$
 $\sigma_B = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_P}{J_y} z_B - \frac{F \cdot y_P}{J_z} y_B$
 $\sigma_C = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_P}{J_y} z_C + \frac{F \cdot y_P}{J_z} y_C$
 $\sigma_D = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_P}{J_y} z_D + \frac{F \cdot y_P}{J_z} y_D$

Obr. 10.10

Normálové napätie v ľubovoľnom bode prúta vypočítame:

$$\sigma = \pm \frac{N(x)}{A} \pm \frac{M_y(x)}{J_y} z \pm \frac{M_z(x)}{J_z} y \quad (10.7)$$

kde A je veľkosť plochy prierezu.

Po znamienkovej analýze zistíme znamienka pri jednotlivých členoch vo vzťahu (10.7) pre jednotlivé krajné body prierezu (obr. 10.10). Súradnice y , z bodov A, B, C, D dosadzujeme pri výpočte bez znamienok.

Neutrálna os pri excentrickom ťahu/tlaku neprechádza ťažiskom prierezu (obr. 10.11). Pre rovnicu neutrálnej osi možno písať úsekový tvar rovnice priamky:

$$\frac{y_N}{p} + \frac{z_N}{q} = 1 \quad (10.8)$$

kde y_N , z_N sú súradnice bodov neutrálnej osi a p , q sú úseky, ktoré vytína neutrálna os na osiach y a z . Úseky p , q vypočítame:

$$p = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad q = -\frac{i_y^2}{z_P} \quad (10.9)$$

kde i_y^2 , i_z^2 sú druhé mocniny kvadratických polomerov prierezu, ktoré vypočítame:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A} \quad (10.10)$$

Obr. 10.11

10.2.1 Jadro prierezu

Niektoré materiály majú rozdielne mechanické vlastnosti v ťahu aj tlaku. Napríklad liatina a betón majú nízku medzu pevnosti v ťahu, preto je dôležité, aby sa v celom priereze prúta z takéhoto materiálu vyskytlo len tlakové napätie. Z tohto dôvodu počítame jadro prierezu.

Jadro prierezu je časť prierezu, v ktorej môžu ležať pôsobiská sily F vyvolávajúce v celom priereze normálové napätia s rovnakým znamienkom, t.j. len ťahové alebo len tlakové.

Postup výpočtu jadra prierezu je nasledovný:

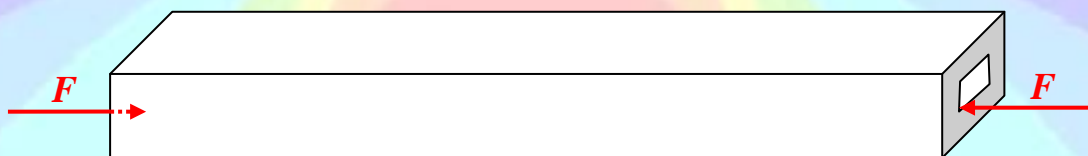
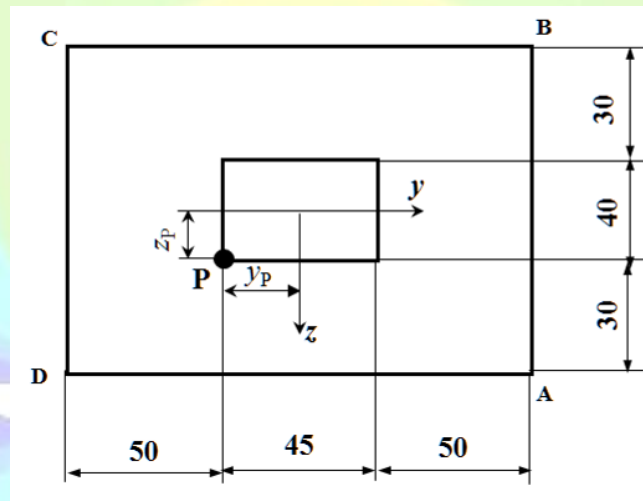
1. Okraj jadra prierezu určíme z podmienky, že neutrálna os sa bude dotýkať prierezu prúta. Ak sa neutrálna os prierezu len dotýka, nepretína prierez, potom v celom priereze je normálové napätie s rovnakým znamienkom.
2. Pre každú neutrálnu os, ktorá sa dotýka prierezu určíme úseky p , q , z ktorých vypočítame súradnice pôsobísk y_P , z_P pre každú možnú neutrálnu os.
3. Pospájame jednotlivé pôsobiská. Spojnice vytvoria jadro prierezu.

Príklad 10.2

Vykreslite priebeh normálových napätí a určte polohu neutrálnej osi (NO) pre prút s prierezom podľa obr. 10.12, ktorý je zaťažený tlakovou silou F s pôsobiskom P podľa obr. 10.12.

D: tlaková sila $F=50\text{kN}$

H: N.O., „ σ “



Obr. 10.12

Určenie polohy neutrálnej osi:

Kvadratické momenty k centrálnym osiam:

$$J_y = \frac{145 \cdot 100^3}{12} - \frac{45 \cdot 40^3}{12} = 11,84 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_z = \frac{100 \cdot 145^3}{12} - \frac{40 \cdot 45^3}{12} = 25,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Plocha prierezu:

$$A = 145 \cdot 100 - 40 \cdot 45 = 12\,700 \text{ mm}^2$$

Druhé mocniny kvadratických polomerov prierezu:

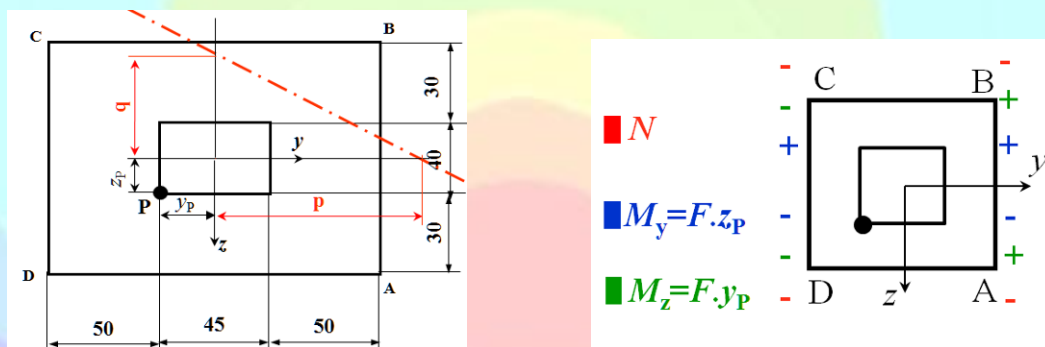
$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{11,84 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{12\,700 \text{ mm}^2} = 932,3 \text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{25,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{12\,700 \text{ mm}^2} = 1976,4 \text{ mm}^2$$

Súradnice pôsobiska P sily F : $P[-22,5;20]$. Potom úseky p a q , ktoré vytína NO na osi y a z (obr. 10.13):

$$p = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{1976,4 \text{ mm}^2}{-22,5 \text{ mm}} = 87,84 \text{ mm}$$

$$q = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{932,3 \text{ mm}^2}{20 \text{ mm}} = -46,62 \text{ mm}$$



Obr. 10.13

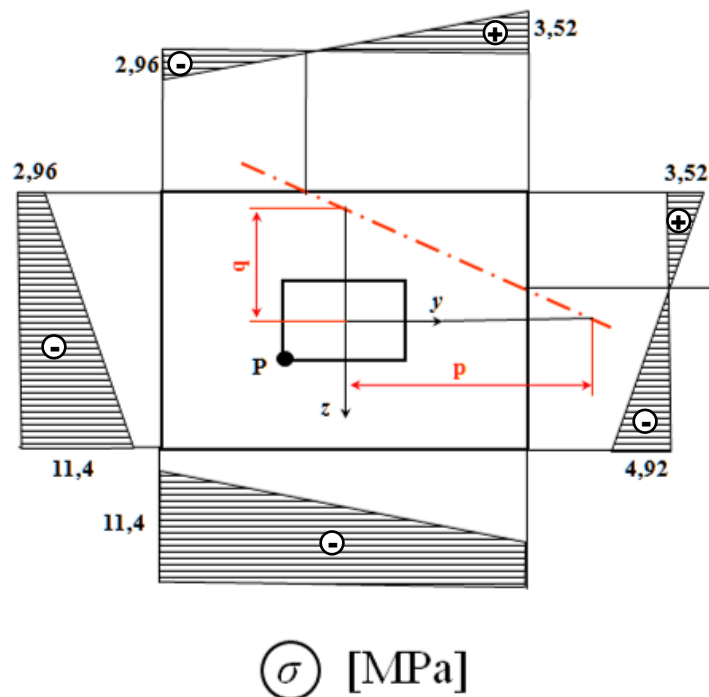
Výpočet normálového napätia:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_P}{J_y} \cdot z_A + \frac{F \cdot y_P}{J_z} \cdot y_A = \\ &= -\frac{50 \cdot 10^3 \text{ N}}{12700 \text{ mm}^2} - \frac{50 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 20 \text{ mm}}{11,84 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 50 \text{ mm} + \frac{50 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 22,5 \text{ mm}}{25,1 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot 72,5 \text{ mm} = \\ &= -3,94 \text{ MPa} \quad -4,22 \text{ MPa} \quad +3,24 \text{ MPa} \quad = -4,92 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_P}{J_y} \cdot z_B + \frac{F \cdot y_P}{J_z} \cdot y_B = \\ &= -3,94 \text{ MPa} + 4,22 \text{ MPa} + 3,24 \text{ MPa} = 3,52 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_P}{J_y} \cdot z_C - \frac{F \cdot y_P}{J_z} \cdot y_C = -2,96 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_P}{J_y} \cdot z_D - \frac{F \cdot y_P}{J_z} \cdot y_D = -11,4 \text{ MPa}$$



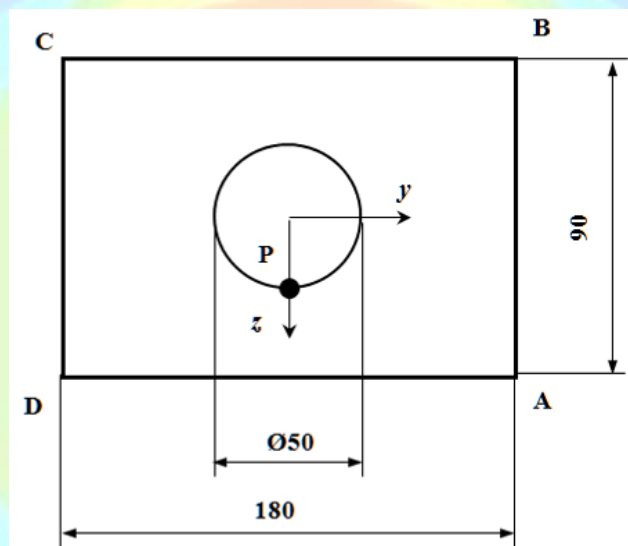
Obr. 10.14

Príklad 10.3

Určte polohu neutrálnej osi (NO) pre prút s prierezom podľa obr. 10.15, ktorý je zaťažený tlakovou silou F s pôsobiskom P podľa obr. 10.15.

D: tlaková sila $F=20\text{kN}$

H: N.O., „ σ “



Obr. 10.15

Určenie polohy neutrálnej osi:

Kvadratické momenty k centrálnym osiam:

$$J_y = \frac{180 \cdot 90^3}{12} - \frac{\pi \cdot 25^4}{4} = 10,63 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_z = \frac{90 \cdot 180^3}{12} - \frac{\pi \cdot 25^4}{4} = 43,43 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Plocha prierezu:

$$A = 180 \cdot 90 - \pi \cdot 25^2 = 14236,5 \text{ mm}^2$$

Druhé mocniny kvadratických polomerov prierezu:

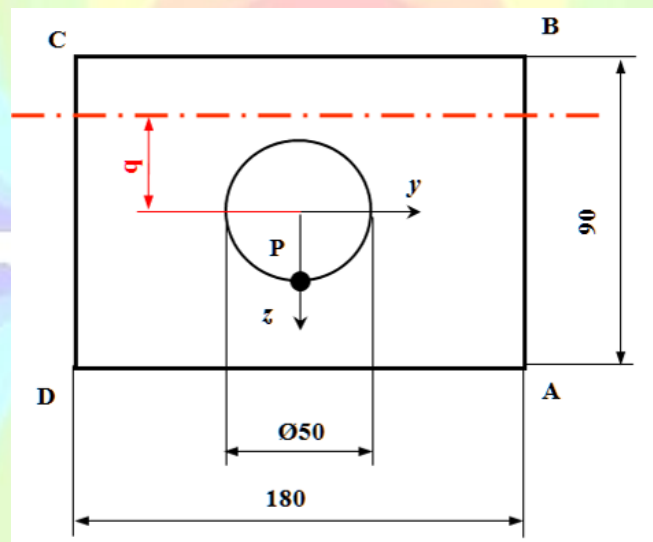
$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{10,63 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{14236,5 \text{ mm}^2} = 746,67 \text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{43,43 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{14236,5 \text{ mm}^2} = 3050,61 \text{ mm}^2$$

Súradnice pôsobiska P sily F : $P[0; 25]$. Potom úseky p a q , ktoré vytína NO na osi y a z (obr. 10.16):

$$p = -\frac{i_z^2}{y_P} = \infty$$

$$q = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{746,67 \text{ mm}^2}{25 \text{ mm}} = -29,87 \text{ mm}$$



Obr. 10.16

Príklad 10.4

Určte jadro prierezu (JP) pre obdĺžnikový prierez na obr. 10.17.

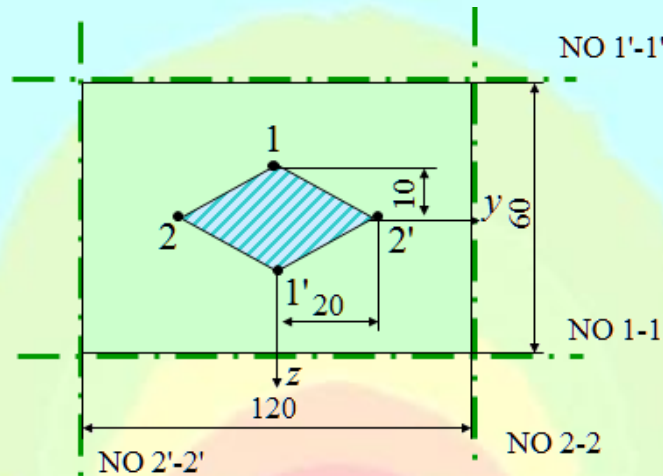
D: rozmery priečného prierezu v mm

H: JP

Pre určenie jadra prierezu budeme potrebovať druhé mocniny kvadratických polomerov prierezu:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{(60\text{ mm})^2}{12} = 300\text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12} = \frac{(120\text{ mm})^2}{12} = 1200\text{ mm}^2$$



Obr. 10.17

Úseky, ktoré vytína NO 1-1 na obr. 10.17 sú: $p_1 = \infty$, $q_1 = 30\text{ mm}$. Potom súradnice bodu 1 jadra prierezu vypočítame:

$$y_{p1} = 0; \quad z_{p1} = -\frac{i_y^2}{q} = -\frac{300\text{ mm}^2}{30\text{ mm}} = -10\text{ mm}$$

Bod 1 má súradnice: $[0; -10]$.

Úseky, ktoré vytína NO 1'-1' sú: $p_{1'} = \infty$, $q_{1'} = -30\text{ mm}$. Bod 1' má súradnice: $[0; 10]$.

Úseky, ktoré vytína NO 2-2 sú: $p_2 = 60\text{ mm}$, $q_2 = \infty$. Súradnice bodu 2 vypočítame:

$$y_{p2} = -\frac{i_z^2}{p} = -\frac{1200\text{ mm}^2}{60\text{ mm}} = -20\text{ mm}; \quad z_{p2} = 0$$

Bod 2 má súradnice: $[-20; 0]$.

Úseky, ktoré vytína NO 2'-2' sú: $p_{2'} = -60\text{ mm}$, $q_{2'} = \infty$. Bod 2' má súradnice: $[20; 0]$.

Pospájaním bodov 1, 2, 1', 2' dostávame jadro prierezu (šrafovaná plocha na obr. 10.17).

Príklad 10.5

Určte jadro prierezu pre obdĺžnikový prierez na obr. 10.18.

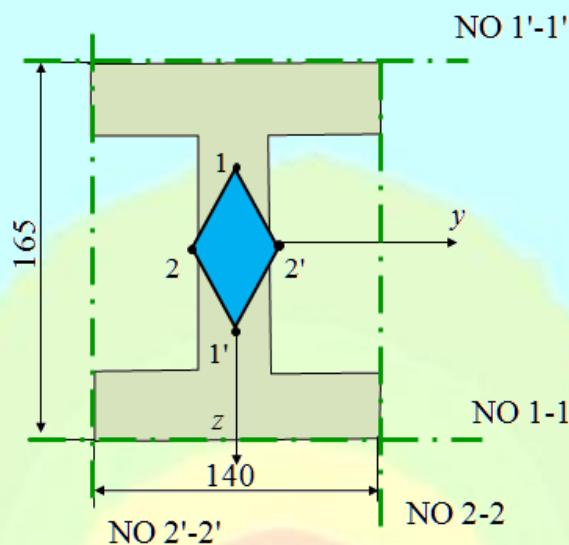
D: $J_y = 40,8 \cdot 10^6\text{ mm}^4$, $J_z = 13 \cdot 10^6\text{ mm}^4$, $A = 11550\text{ mm}^2$, rozmery prierezu v mm

H: JP

Druhé mocniny kvadratických polomerov prierezu:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{40,8 \cdot 10^6\text{ mm}^4}{11550\text{ mm}^2} = 3532,5\text{ mm}^2$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{13 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{11550 \text{ mm}^2} = 1125,5 \text{ mm}^2$$



Obr. 10.18

Úseky, ktoré vytína NO 1-1 na obr. 10.18 sú: $p_1 = \infty$, $q_1 = 82,5 \text{ mm}$. Potom súradnice bodu 1 jadra prierezu vypočítame:

$$y_{p1} = 0; \quad z_{p1} = -\frac{i_y^2}{q_1} = -\frac{3532,5 \text{ mm}^2}{82,5 \text{ mm}} = -42,8 \text{ mm}$$

Bod 1 má súradnice: $[0; -42,8]$.

Úseky, ktoré vytína NO 1'-1' sú: $p_{1'} = \infty$, $q_{1'} = -82,5 \text{ mm}$. Bod 1' má súradnice: $[0; -42,8]$.

Úseky, ktoré vytína NO 2-2 sú: $2 p_2 = 70 \text{ mm}$, $q_2 = \infty$. Súradnice bodu 2 vypočítame:

$$y_{p2} = -\frac{i_z^2}{p_2} = -\frac{1125,5 \text{ mm}^2}{70 \text{ mm}} = -16,1 \text{ mm}; \quad z_{p2} = 0$$

Bod 2 má súradnice $[-16,1; 0]$.

Úseky, ktoré vytína NO 2'-2' sú: $p_{2'} = -70 \text{ mm}$, $q_{2'} = \infty$. Bod 2' má súradnice: $[16,1; 0]$.

Pospájaním bodov 1, 2, 1', 2' dostávame jadro prierezu (modrá plocha na obr. 10.18).

10.3 Súčasné pôsobenie ohybu a krutu

Predpokladajme hriadeľ, ktorý je vo väčšine prípadov namáhaný súčasne ohybom a krútením v dvoch rovinách. Maximálne normálové napätie od ohybu vypočítame:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J} \frac{d}{2} = \frac{M_{\max}}{W_0} = \frac{32 M_{\max}}{\pi d^3} \quad (10.11)$$

kde M_{\max} je maximálny ohybový moment na hriadeľi, J je kvadratický moment, d je priemer hriadeľa a W_0 je modul prierezu v ohybe.

Maximálne šmykové napätie od krútenia vypočítame:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_K} = \frac{16 T_{\max}}{\pi d^3} \quad (10.12)$$

kde T_{\max} je maximálny krútiaci moment na hriadeľi a W_K je modul prierezu v krútení.



Keďže normálové a šmykové napätie pôsobia súčasne, potom pri dimenzovaní alebo pevnostnej kontrole hriadeľa, ktorý je súčasne zaťažený ohybom aj krutom použijeme nasledovné podmienky pevnosti:

- podľa HMH hypotézy pevnosti:

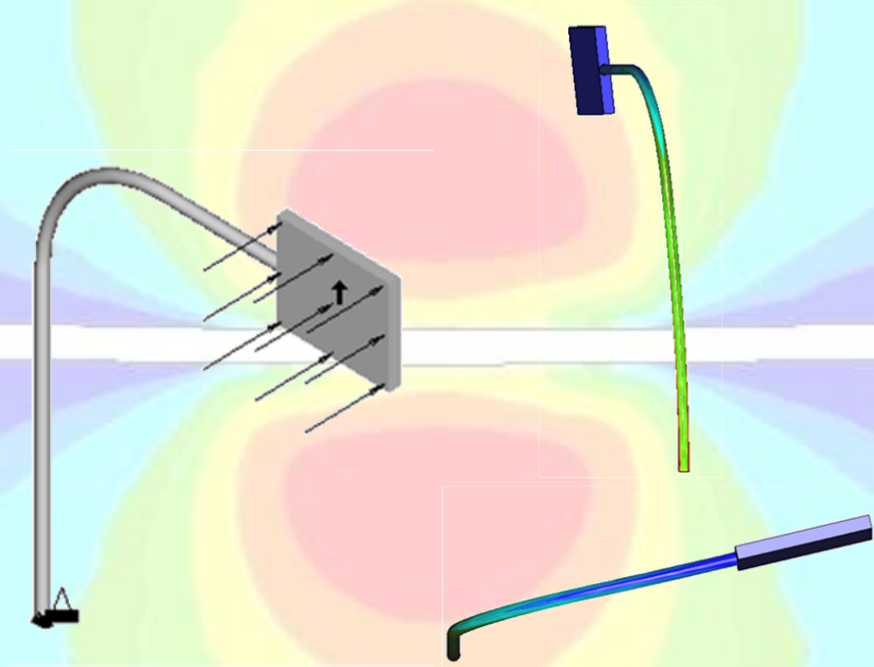
$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 3\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{max}}}{W_O}\right)^2 + 3\left(\frac{T_{\text{max}}}{W_K}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{max}}^2 + 0,75T_{\text{max}}^2}}{W_O} \leq \sigma_D \quad (10.13)$$

Pričom platí: $W_K = 2W_O$

- podľa Guestovej hypotézy pevnosti:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{G}} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{\text{max}}}{W_O}\right)^2 + 4\left(\frac{T_{\text{max}}}{W_K}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{\text{max}}^2 + T_{\text{max}}^2}}{W_O} \leq \sigma_D$$

Na obr. 10.19 je konštrukcia zaťažená súčasne ohybom aj krutom. Zároveň na obrázku je zdeformovaná konštrukcia v dvoch pohľadoch v dvoch na seba kolmých rovinách.



Obr. 10.19

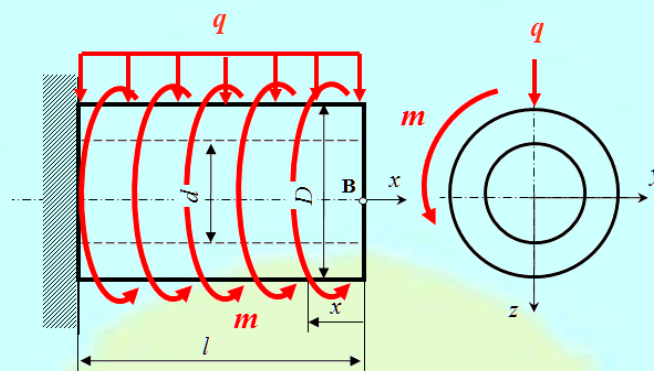
Príklad 10.6

Posúďte podľa HMH hypotézy pevnosti, či vyhovuje teleso z materiálu hliník zobrazené a zaťažené podľa obr. 10.20 a vypočítajte priehyb a uhol pootočenia v bode B.

D: $m = 0,3\text{kNm}\cdot\text{m}^{-1}$, $q = 0,2\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$, $l = 3\text{m}$, $D = 80\text{mm}$, $d = 70\text{mm}$, $E = 7\cdot 10^4\text{MPa}$,

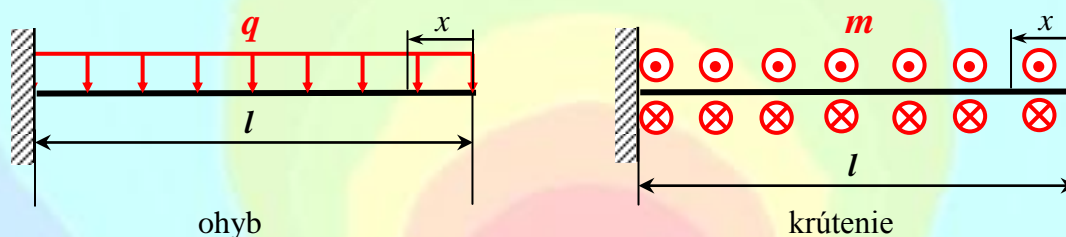
$G = 2,7\cdot 10^4\text{MPa}$, $\sigma_D = 50\text{MPa}$

H: σ_{red} , w_B , φ_B



Obr. 10.20

Využijeme superpozíciu a rozdelíme súčasné pôsobenie ohybu a krútenia na dve časti (obr. 10.21).



Obr. 10.21

Maximálne normálové napätie od ohybu:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_y} \cdot z_{\max} = \frac{q \cdot \frac{l^2}{2}}{\pi(D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16ql^2 \cdot D}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{16 \cdot 0,2 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1} (3\text{ m})^2 \cdot 0,08\text{ m}}{\pi(0,08^4 - 0,07^4)\text{ m}^4} = 43,27 \text{ MPa}$$

Maximálne šmykové napätie od krútenia:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{J_p} \cdot r = \frac{m \cdot l}{\pi(D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16ml \cdot D}{\pi(D^4 - d^4)} = \frac{16 \cdot 0,3 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 3\text{ m} \cdot 0,08\text{ m}}{\pi(0,08^4 - 0,07^4)\text{ m}^4} = 21,63 \text{ MPa}$$

Výpočet redukovaného napätia podľa HMMH hypotézy pevnosti:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau_{\max}^2} \leq \sigma_D$$

$$\sqrt{(43,27 \text{ MPa})^2 + 3 \cdot (21,63 \text{ MPa})^2} \leq \sigma_D$$

$$57,23 \text{ MPa} > 50 \text{ MPa}$$

Konštrukcia nevyhovuje. Existujú rôzne možnosti riešenia, a to, že zväčším rozmery prierezu, zruším diery, zmenším priemer diery, zmením materiál na pevnejší a pod.

V prípade, že priemer D ostane rovnaký a prierez bude bez diery, potom konštrukcia vyhovuje:

$$\sigma_{\max} = \frac{16ql^2}{\pi \cdot D^3} = 17,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16m.l}{\pi.D^3} = 8,95 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = 20 \text{ MPa} < 50 \text{ MPa}$$

Ďalšou možnosťou je zmenšenie priemeru diery d z pôvodných 70mm na 60mm, potom konštrukcia vyhovuje:

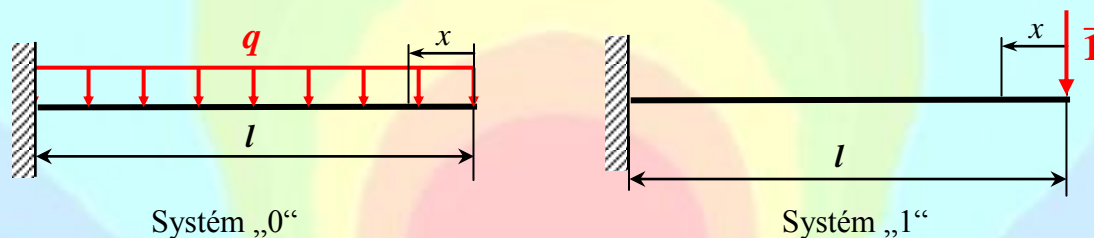
$$\sigma_{\max} = 26,2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 13,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{HMH}} = 34,7 \text{ MPa} < 50 \text{ MPa}$$

Deformáciu vypočítame pre zmenený prierez, a to, $D = 80 \text{ mm}$, $d = 60 \text{ mm}$.

Výpočet priehybu v bode B podľa Mohr-Maxwellovej vety, na obr. 10.22 sú systémy „0“ a „1“:



Obr. 10.22

$$w_B = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l M_0(x)M_1(x)dx = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l -q \frac{x^2}{2} \cdot (-\bar{1} \cdot x)dx = \frac{1}{E.J_y} \int_0^l q \frac{x^3}{2} dx = \frac{q.l^4}{8E.J_y}$$

Kvadratický moment k centrálnej osi y :

$$J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi(0,08^4 - 0,06^4) \text{ m}^4}{64} = 13,74 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

Veľkosť priehybu v bode B:

$$w_B = \frac{q.l^4}{8E.J_y} = \frac{0,2 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1} \cdot (3 \text{ m})^4}{8 \cdot 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 13,74 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 0,021 \text{ m}$$

Výpočet uhla pootočenia v bode B:

$$\varphi_B = \int_0^l \frac{T(x)}{G.J_p} dx = \int_0^l \frac{m \cdot x}{G.J_p} = \frac{m.l^2}{2G.J_p}$$

Polárny kvadratický moment:

$$J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(0,08^4 - 0,06^4) \text{ m}^4}{32} = 27,48 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

Veľkosť uhla pootočenia v bode B:

$$\varphi_B = \frac{m.l^2}{2G.J_p} = \frac{0,3 \cdot 10^3 \text{ Nm} \cdot \text{m}^{-1} \cdot (3 \text{ m})^2}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 27,48 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4} = 0,0182 \text{ rad} = 1,04^\circ$$

Použitá literatúra

- [1] Assler, H.. Design of aircraft structures under special consideration of NDT. In: *Jörg Völker, editor, 9th European NDT Conference (ECNDT)*, Berlin, 2006.
- [2] Bolek, A. – Kochman a kol.: *Části strojů*, 1. svazek, SNTL, Praha 1989.
- [3] Grajciar, I. – Sága, M. – Žmindák M.: *Základy mechaniky telies II. Mechanika poddajných telies*, Žilinská univerzita v Žiline, Strojnícka fakulta, Žilina 2004.
- [4] Holloway, C. M.: From Bridges and Rockets, Lessons for Software Systems, In: *Conference Proceedings of the 17th International System Safety Conference*, August 16-21, 1999, Orlando, Florida, str. 598-607
- [5] http://aladin.elf.stuba.sk/Katedry/KMECH/slovakversion/person/kutis/Mechanika_cvika.pdf
- [6] http://aladin.elf.stuba.sk/Katedry/KMECH/slovakversion/Predmety/PRP-DIST/pdf_mechpolia
- [7] <http://www.laduna.borec.cz/3.%20Pruznost%20a%20pevnost.pdf>
- [8] Kochaník, J. et al.: *Teória pružnosti a plasticity : Teória a príklady*. 1. vyd.. Prešov : FVT TU, 2006.
- [9] Kochaník, J. – Pavlenko, S. – Uram, V. – Haľko, J.: *Teória pružnosti a plasticity*. FVT TU Košice, Prešov 2006.
- [10] Kompiš, V. – Murčinková, Z.: Kompozitné materiály vystužené krátkymi vláknami. In: *Strojárstvo*. ISSN 1335-2938 : XIII, 2009.
- [11] Laš, V.: *Mechanika kompozitních materiálů*. FAV, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2008.
- [12] Leckie, F. A. – Dal Bello, D. J.: *Strength and Stiffness of Engineering Systems*. Springer, New York 2009.
- [13] Murčinková, Z.: Porovnanie analytického a numerického riešenia priamych, lomených a zakrivených nosníkov. In: *Trendy ve vzdělávání 2009*: Olomouc : Votobia, 2009. p. 144-147.
- [14] Murčinková, Z.: *Vybrané kapitoly z mechaniky poddajných telies. Rovinný a priestorový ohyb, deformácia pri ohybe*. Ing. Zuzana Murčinková, PhD., Prešov 2009.
- [15] Murčinková, Z. – Kompiš, V.: Advanced modelling of short-fibre reinforced composites. In: *Strojnícky časopis*. roč. 59, č. 1 (2008), s. 27-40.
- [16] Murčinková, Z. – Monková, K.: *Základy modelovania konštrukcií v MKP: Programy Pro/Engineer - Pro/Mechanica*. 1. vyd. Prešov: Apeiron EU, 2007. 88 s.
- [17] Pavlenko, S. – Murčinková, Z. – Kochaník, J.: *Krútenie a ohyb tenkostenných prútov. Teória a príklady*. FVT TU, Prešov 2004.
- [18] Pavlenko, S. – Murčinková, Z. - Uram, V. – Kochaník, J: *Metóda konečných prvkov: Teória a príklady*. Prešov : FVT TU, 2005. 142 s.
- [19] Řezníček, J. – Řezníčková, J.: *Pružnost a pevnost v technické praxi, Příklady I*. ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Praha 2005.
- [20] Servít, R. – Doležalová, E. – Crha, M.: *Teorie pružnosti a plasticity I*. SNTL, Praha 1981.
- [21] Syč-Milý, J. et al: *Pružnost a pevnost, Řešené příklady*. Alfa Bratislava 1988
- [18] Tomblin, J.: *Overview of Composite Material Trends in Aviation Manufacturing*, National Institute for Aviation Research, Wichita State University
- [23] Trebuňa, F. – Šimčák, F. – Jurica, V.: *Pružnost a pevnost I.*, Vienaľa, Košice 2000.

- [24] Trebuňa, F. – Šimčák, F. – Jurica, V.: *Príklady a úlohy z pružnosti a pevnosti I.*, Viena, Košice 2000.
- [25] Vasilko, K.: *Analytická teória trieskového obrábania*. FVT TU, Prešov 2007.
- [26] Vasilko, K. – Murčinková, Z.: Analysis of geometric accuracy of turned workpieces. *Manufacturing Technology*, Vol. 13, No. 2, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 2013.

doc. Ing. Zuzana MURČINKOVÁ, PhD.

e-mail: zuzana.murcinkova@tuke.sk

Pracovisko: Štúrova 31, 080 01 Prešov, č. dverí: 5



Profesijné zameranie

- mechanika poddajných telies,
- aplikovaná mechanika, metóda konečných prvkov,
- počítačové modelovanie a simulácie – systém Pro/Engineer (PTC Creo), Pro/Engineer Mechanica, Pro/Engineer: Mechanism Design
- výskum v oblasti numerického modelovania mechanického a tepelného a dynamického správania kompozitných vláknových materiálov

Vzdelanie a kvalifikácia

- 1987-1991 Gymnázium v Prešove, na ulici Tarasa Ševčenka 1
- 1992-1997 univerzitné štúdium, Fakulta výrobných technológií, TU Košice, Študijný odbor 23-17-8 *Všeobecné strojárstvo*
- 1997 Cena rektora Technickej univerzity v Košiciach za vynikajúce študijné výsledky počas celého štúdia a za aktívnu vedecko-výskumnú prácu na FVT TU Košice
- 1991-1997 Jazyková škola v Prešove, jazyk anglický, štátna skúška
- 1995-1996 Doplnkové pedagogické štúdium na Pedagogickej fakulte Univerzity P. J. Šafárika v Prešove, štátna skúška
- 2002-2006 PhD.: Doktorandské štúdium na Strojníckej fakulte (Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti) Žilinskej univerzity v Žiline, Vedný odbor: 31-01-9 *Aplikovaná mechanika*
- 2012 doc.: Habilitácia v odbore 5.2.50 *Výrobná technika* na FVT v Prešove TU v Košiciach

Pedagogická činnosť:

Pružnosť a pevnosť (garant, prednášky, cvičenia), Pružnosť a pevnosť I., Pružnosť a pevnosť II., Inžinierska dokumentácia I., Inžinierska dokumentácia II., Počítačová grafika, Napät'ové analýzy na PC (garant, prednášky, cvičenia), 3D modelovanie; vedenie záverečných prác

Vedecké granty a projekty:

- vedúca projektu: **VEGA 1/014/08**: Simulácia správania sa kompozitných materiálov vystužených tuhými mikro/nano-častočkami a krátkymi vláknami.
- spoluriešiteľ projektov: **VEGA 1/0048/10** Výskum ukazovateľov technologickej dedičnosti obrobeného povrchu pri vŕtaní ťažkoobrábateľných materiálov, **VEGA 1/0558/08**: Multivariantná tvorba výrobných postupov s optimalizáciou z hľadiska zvyšovania konkurencie schopnosti podnikov, **VEGA 1/2215/05**: Výskum a vývoj dvojstupňových viacvýstupových harmonických prevodov s rozdielnymi prevodovými pomermi, **Aplikovaný výskum AV 4/2020/08**: Zakružovanie tenkých plechov elastickým prostredím s menším priemerom zakružovania, **Aplikovaný výskum**

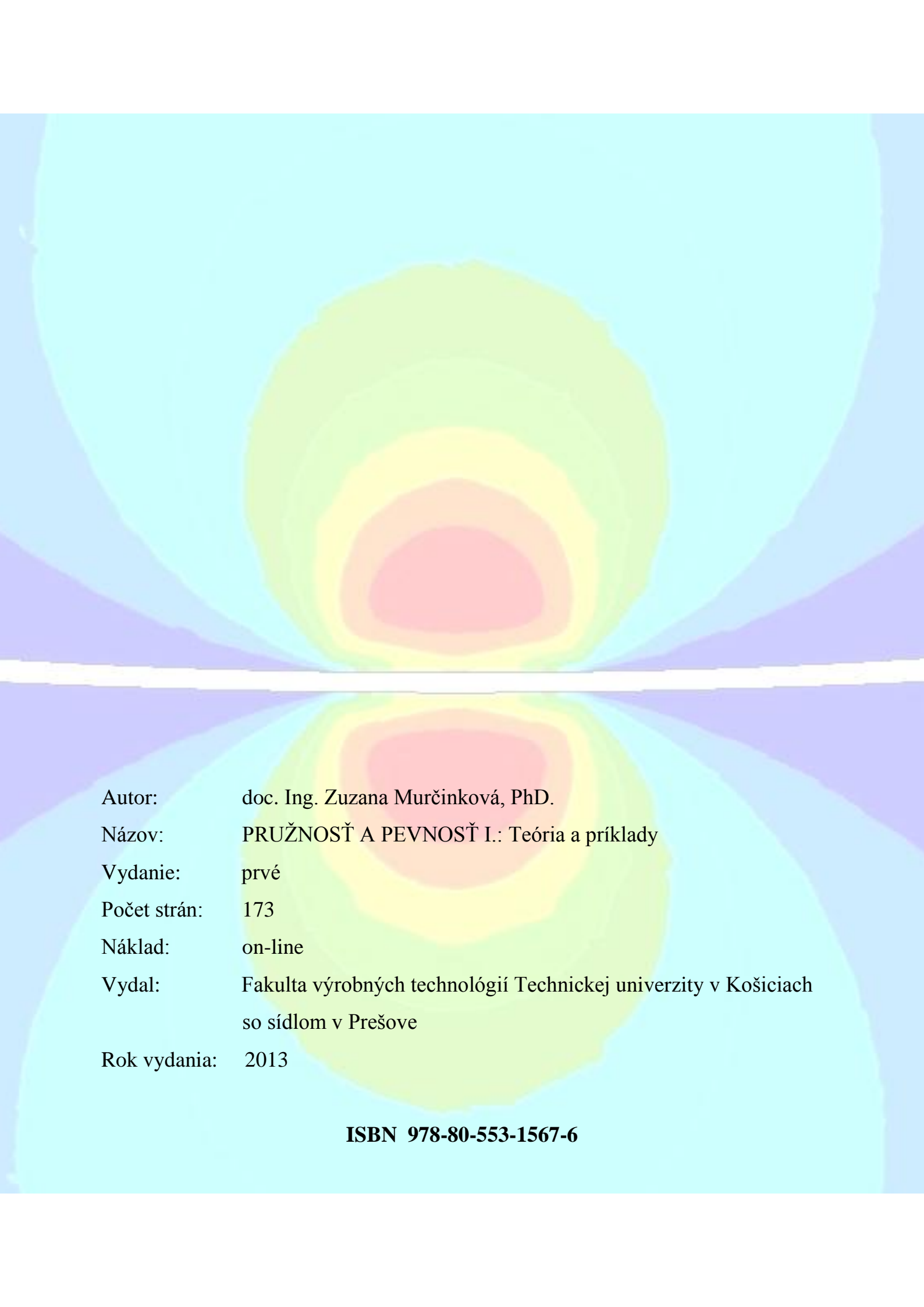
AV2/2022/08: Výskum a vývoj kreovania "soft" foriem a ich verifikovanie pre oblasť environmentálnych použití, **KEGA 461-764TUKE-4/2010:** Vzdelávanie učiteľov v oblasti rozvíjania priestorovej predstavivosti žiakov základných a stredných škôl ako fundament technického myslenia, **KEGA 270/014TUKE-4/2010:** Implementácia nových prístupov pri zvyšovaní úrovne edukačného procesu v oblasti kinematickej a dynamickej analýzy komponentov mechanických sústav v súlade so štandardmi európskych univerzít, **Projekty zo štrukturálnych fondov EU** (Operačný program Výskum a vývoj): **ITMS kód 26220220125** odborný riešiteľ: Vývoj a implementácia experimentálnych simulačných metód pre optimalizáciu procesov na technologických pracoviskách, **ITMS kód 26220220103** odborný riešiteľ: Výskum a vývoj inteligentných nekonvenčných aktivátorov na báze umelých svalov,

Indexované publikácie:

Scopus WEB OF KNOWLEDGESM

1. Murčinková, Z., Murčinko, J.
Monitoring of processes in component joints by intelligent system (2013) ICSSE 2013 - IEEE International Conference on System Science and Engineering, Proceedings, art. no. 6614684, pp. 325-328.
2. Vasilko, K., Murčinková, Z.
Analysis of geometric accuracy of turned workpieces (2013) Manufacturing Technology, 13 (2), pp. 247-252.
3. Murčinko, J., Murčinková, Z.
Implementation of intelligent elements in vibration diagnostics of CNC machines (2013) Applied Mechanics and Materials, 308, pp. 87-93.
4. Murčinko, J., Murčinková, Z.
On-line monitoring system applied to explosive conditions of printing machine dryers (2012) WIT Transactions on Information and Communication Technologies, 44, pp. 305-316. Cited 3 times.
5. Kompiš, V., Žmindák, M., Murčinková, Z.
MFS for modeling of inhomogeneous materials with large aspect ratio reinforcing elements (2012) ECCOMAS 2012 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, e-Book Full Papers, pp. 9062-9074.
6. Kompiš, V., Murčinková, Z., Rjasanow, S., Grzibovskis, R., Qin, Q.H.
Computational simulation methods for fiber reinforced composites (2010) Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China, 4 (3), pp. 396-401. Cited 1 time.
7. Kompiš, V., Murčinková, Z.
Deformation and temperature fields in short fibre composites (2009) ICCM International Conferences on Composite Materials, .
8. Kompiš, V., Štiavnický, M., Žmindák, M., Murčinková, Z.
Trefftz radial basis functions (TRBF) (2008) Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 15 (3-4), pp. 239-249. Cited 2 times.
9. Murčinková, Z., Kompiš, V., Štiavnický, M.
Trefftz functions for 3D stress concentration problems (2008) Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 15 (3-4), pp. 305-318. Cited 2 times.

Indexované citácie: 24



Autor: doc. Ing. Zuzana Murčinková, PhD.
Názov: PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ I.: Teória a príklady
Vydanie: prvé
Počet strán: 173
Náklad: on-line
Vydal: Fakulta výrobných technológií Technickej univerzity v Košiciach
so sídlom v Prešove
Rok vydania: 2013

ISBN 978-80-553-1567-6

ISBN 978-80-553-1567-6