

Jaromír Máca, Bohuš Leitner

OPERAČNÁ ANALÝZA I

Deterministické metódy operačnej analýzy

OBSAH

Predhovor	5
1. Predmet operačná analýza	7
Literatúra	12
2. Riadenie a rozhodovanie	13
2.1 Základná schéma riadenia	13
2.2 Informácia v systéme riadenia	16
2.3 Rozhodovanie v systéme riadenia	18
2.4 Rozdelenie metód rozhodovania	19
2.4.1 Empirické metódy rozhodovania	20
2.4.2 Exaktné metódy rozhodovania	21
2.4.3 Heuristické metódy rozhodovania	21
Literatúra	32
3. Základné postupy a metódy optimalizácie	33
3.1 Voľné extrémny funkcií	34
3.2 Viazané extrémny funkcií	37
3.3 Základné pojmy variačného počtu	39
Cvičenia	41
Literatúra	41
4. Lineárne programovanie	42
4.1 Príklady jednoduchých úloh lineárneho programovania	44
4.2 Grafické riešenie úloh lineárneho programovania	51
Cvičenia	57
Literatúra	59
5. Simplexový algoritmus	60
5.1 Kanonický tvar úlohy lineárneho programovania	60
5.2 Vlastný simplexový algoritmus	63
5.3 Dvojfázový simplexový algoritmus	69
5.4 Dualita úloh lineárneho programovania	72
5.5 Celočíselné lineárne programovanie	75
5.5.1 Grafické riešenie úlohy celočíselného programovania	76
5.5.2 Metóda „Branch and Bound“	77
5.5.3 Gomoryho algoritmus	80

5.6	Analýza citlivosti v úlohách lineárneho programovania.....	83
	Cvičenia	88
	Literatúra.....	90
6.	Distribučné problémy.....	91
6.1	Dopravná úloha	91
6.1.1	Formulácia a matematický model dopravnej úlohy.....	91
6.1.2	Určenie východiskového bázického riešenia doprovnej úlohy.....	96
6.1.2.1	Metóda severozápadného rohu (MSZR).....	97
6.1.2.2	Metóda indexová (MI)	98
6.1.2.3	Vogelova aproximačná metóda (VAM).....	99
6.1.3	Kritérium optima a iteračné úpravy v dopravnej úlohe.....	101
6.1.4	Nevyrovnaná úloha a degenerované bázické riešenie.....	106
6.1.5	Viacrozmerná dopravná úloha	110
6.1.6	Optimálne rozmiestňovanie zdrojov	116
6.1.7	Záverečné poznámky k dopravnej úlohe	119
6.2	Prirad'ovacia úloha	121
6.2.1	Riešenie prirad'ovacej úlohy pre maximálnu hodnotu účelovej funkcie	126
6.3	Záverečné poznámky k distribučným úlohám.....	128
	Cvičenia	128
	Literatúra.....	129
7.	Základy teórie grafov	130
7.1	Minimálna kostra grafu	135
7.2	Minimálne cesty v grafoch	137
7.2.1	Matematický model úlohy minimálnej cesty.....	144
7.3	Optimálne toky v sieťach.....	145
7.4	Minimálna okružná cesta v grafe	149
	Cvičenia	152
	Literatúra.....	154
8.	Základy sieťovej analýzy	155
8.1	Metóda kritickej cesty (CPM).....	156
8.2	Metóda CPM-GE.....	169
	Cvičenia	176
	Literatúra.....	178
	ZÁVER.....	179

PREDHOVOR

*Rozumný človek sa prispôsobí svojmu okoliu.
Nerozumný sa snaží prispôbiť okolie sebe.
Preto všetok pokrok závisí od nerozumných ľudí.*

G. B. SHAW

Predkladaná učebnica „**Operačná analýza I**“ bola spracovaná ako základný vyučovací text pre rovnomenný predmet v študijnom odbore Občianska bezpečnosť. Vychádza z niekoľkoročných skúseností z prednášok a cvičení v predmetoch podobného zamerania na Fakulte špeciálneho inžinierstva, pričom je doplnený o niektoré najnovšie poznatky a metódy.

V učebnici sú zaradené predovšetkým deterministické modely a metódy operačnej analýzy, pričom hlavný dôraz je položený na tvorbu matematických modelov. Z metód riešenia sú pragmaticky a bez dôkazov uvádzané iba najdôležitejšie a najpoužívanejšie algoritmy, pretože pri dnešnom rozšírení výpočtovej techniky a komerčných programových produktov z uvedenej oblasti majú rozhodujúci význam predovšetkým správna matematická formulácia úlohy, kvalifikovaná príprava vstupných údajov, výber vhodnej metódy riešenia spolu s posúdením riešiteľnosti a kvalifikovaná interpretácia získaných výsledkov. Vlastný výpočet prakticky ľubovoľne rozsiahlych úloh pritom prebieha na primerane výkonnej výpočtovej technike.

Text učebnice je rozdelený do ôsmich kapitol.

V 1.kapitole je stručne definovaný predmet operačnej analýzy a uvedené najdôležitejšie etapy jej vývoja, prehľad využívaných metód a schematické postupy tvorby matematických modelov najrozšírenejších problémov.

2.kapitola uvádza základnú schému riadenia. Obsahuje rozbor základného cyklu riadenia, v ktorom je pozornosť venovaná najmä rozhodovaniu a jeho

metódam. Detailnejšie sú rozpracované najmä postupy pri multikriteriálnom (viackriteriálnom) rozhodovaní a postupy využívajúce rozhodovacie tabuľky.

3.kapitola obsahuje stručný súhrn metód a problémov optimálneho rozhodovania, so zameraním na lokalizáciu a skúmanie voľných i viazaných extrémov funkcií a problematiku variačného počtu.

4.kapitola je venovaná základom lineárneho programovania. Obsahuje základné problémy, ktoré možno popísať sústavami lineárnych nerovníc a na príkladoch grafického riešenia jednoduchých úloh definuje základné pojmy.

5.kapitola sa zaoberá riešením úloh lineárneho programovania s využitím simplexového algoritmu. Stručne je uvedený dvojfázový simplexový algoritmus, dualita úloh lineárneho programovania ako aj citlivosť lineárnych modelov.

6.kapitola je venovaná formulácii a riešeniu dopravných a priradovacích úloh, pri ktorých sú uvedené možnosti riešenia s využitím simplexového algoritmu i špeciálne algoritmy - metóda potenciálov, maďarská metóda a ich niektoré aplikácie a rozšírenia.

7.kapitola uvádza základné pojmy a metódy teórie grafov, kde sú riešené problémy súvisiace s hľadaním minimálnych ciest a minimálnych okružných ciest v grafoch, určovaním minimálnej kostry grafu a optimálneho toku v sieti.

8.kapitola ukazuje využitie teórie grafov pri základnej úlohe sieťovej analýzy - metóde kritickej cesty (CPM) a jej modifikácii – metóde CPM - GE.

Na záver každej kapitoly sú uvedené jednoduché príklady k precvičeniu preberanej problematiky a rozhodujúce literárne zdroje, z ktorých autori čerpali. Ďalšie odkazy na čiastkové problémy sú väčšinou uvedené priamo v nich.

Záverom predhovoru si autori učebnice považujú za milú povinnosť poďakovať recenzentom predkladaného textu akademikovi Norbertovi Szuttorovi, akademikovi Ladislavovi Skývovi a docentke Eve Slamkovej za cenné pripomienky a podnety k jeho skvalitneniu a súčasne by radi požiadali o pripomienky a ďalšie námety i jeho budúcich čitateľov.

Autori.

1. PREDMET OPERAČNEJ ANALÝZY

„Koňa môžeš dovieŤ k rieke, ale až keď ho presvedčíš, aby plával na chrbte, niečo si dokázal.“

HARTLEYHO PRVÝ ZÁKON

U rôznych autorov je možné nájsť rôzne definície predmetu operačná analýza, prípadne operačný výskum (z anglického „Operational Research“ príp. „Operations Research“ v americkej angličtine) v závislosti na tom, akej oblasti jej využitia sa ten ktorý autor vo svojich prácach venuje.

Z hľadiska účelu zaradenia predmetu Operačná analýza do študijného plánu študijných odborov zabezpečovaných Fakultou špeciálneho inžinierstva (bývalou Vojenskou fakultou) Žilinskej univerzity by bolo možné definovať **operačnú analýzu ako súhrn oblastí, kde sa využívajú moderné vedecké metódy k riešeniu komplexu problémov vznikajúcich pri riadení zložitých výrobných, ekonomických, administratívnych, vojenských a iných systémov zložených z kolektívov ľudí, techniky a materiálnych prostriedkov.**

Predmetom operačnej analýzy je vždy zostavenie vedeckého modelu skúmaného systému, ktorý obsahuje meranie a vyhodnocovanie takých faktorov ako sú zisk, náklady, šanca, riziko a umožňuje porovnávať výsledky alternatívnych riešení, stratégií riadenia prípadne získať optimálne riešenia z pohľadu rôznych hodnotiacich kritérií.

Ako je zjavné z prídavného mena „**operačná**“ vlastný vznik vedeckej disciplíny operačná analýza je priamo spojený s uplatnením metód exaktného vedeckého hodnotenia problémov a získaniu podkladov pre kvalifikované rozhodovanie pri riadení vojenských operácií v priebehu 2.svetovej vojny.

Spája sa najčastejšie s menom profesora **P.M.S. Blacketta**, ktorý spolu so svojím tímom vedcov a technikov bol britskou vládou poverený riešiť problémy riadenia a rozhodovania spojené s nasadzovaním nových zbraňových systémov a zariadení v priebehu rozhodujúcich operácií 2.svetovej vojny. Uvedená skupina sledovala a hodnotila viac taktických situácií, v ktorých niektoré zbrane a zariadenia neboli využívané s optimálnou účinnosťou. Pritom sa zistilo, že podstatne lepšieho účinku možno dosiahnuť často len po exaktnom vedeckom zhodnotení všetkých faktorov ich nasadenia.

Ako jeden z prvých klasických príkladov jednoduchého využitia toho, čomu sa niekedy u nás hovorí „jednoduchý sedliacky rozum“ pri rozhodovaní, bol návrh na zmenu nastavenia hĺbky výbuchu u hlbinných bômb používaných proti ponorkám. Tieto bomby mali pôvodne nastavenú hĺbku výbuchu cca 50 m pod hladinou, čo bolo založené na predpoklade, že ponorka môže vidieť útočiacie lietadlo v priemere 2 minúty pred útokom a za ten čas je schopná sa ponoriť asi do hĺbky 50 m. Takže hlbinná bomba vybuchujúca v tejto hĺbke, by mala mať pre ponorku zničujúci účinok. Táto stratégia ale nebola úspešná, pretože účinnosť útokov na ponorky bola v praxi hodnotená ako veľmi nízka. Pôvodná požiadavka na lepšie riešenie preto znela vyvinúť zapalovač bômb, ktorý bude reagovať nie na hĺbku, ale na blízkosť ponorky.

Detailným sledovaním neúspešného útoku a jeho jednoduchou analýzou bolo ale zistené, že celá pôvodná stratégia má zásadnú chybu. A síce, ak osádka ponorky zbadala útočiacie lietadlo a včas sa s ňou ponorila, posádka lietadla nevedela, kde presne má zhodiť bomby, a preto účinnosť útokov bola veľmi nízka. Na druhej strane, pokiaľ ponorka útočiacie lietadlo nezbadala a zostala na hladine, explózie v hĺbke 50 m ponorke neuškodili, pretože polomer ničenia u hlbinných bômb bol približne 6,5 m. Na základe týchto zistení bolo doporučené zmeniť nastavenie zapalovačov hlbinných bômb z 50 m na 8 m a nariadiť posádkam lietadiel nebombardovať ponorky, ktoré sa ponorili skôr ako pred pol minútou.

Keď boli tieto odporúčenia realizované, zistilo sa, že účinnosť leteckých útokov proti ponorkám sa zvýšila viac ako dvojnásobne, takže vývoj zapalovača reagujúceho na blízkosť ponorky sa ukázal ako nepotrebný. Tieto výsledky potvrdili i spravodajské služby nepriateľa, ktoré po prvom nasadení novej stratégie referovali o tom, že britská armáda musela zrejme vyvinúť nové účinnejšie hlbinné bomby, pretože straty nemeckých ponoriek sa zrazu zvýšili na viac ako dvojnásobok.

Podobnými, aj keď postupne zložitejšími metódami boli ešte v priebehu vojny riešené aj niektoré ďalšie úlohy súvisiace hlavne s :

- optimálnym nasadením batérií protiletectvej obrany,
- optimálnym zostavením lodných konvojov,
- logistickým zabezpečením inváznych vojsk,
- plánovaním zloženia, využitia a zabezpečenia bombardovacích zväzov a mnoho ďalších.

Po vojne, keď sa vedecká skupina okolo prof. Blacketta rozišla do rôznych oblastí, začali sa metódy vyvinuté pôvodne pre vojenské účely aplikovať i v ďalších oblastiach ako v priemysle, doprave, zdravotníctve apod., pričom sa začali vo vyvíjajúcej sa vedeckej disciplíne využívať i poznatky publikované pred vojnou. Z mnohých vedcov, ktorí sa na rozvoji novej vedy podieľali uvedieme pre zaujímavosť aspoň niektorých :

- v r. 1916 publikoval Lanchester prácu zaoberajúcu sa vyjadrením bojovej činnosti matematickými metódami,
- v r. 1917 publikuje Edison dielo zaoberajúce sa taktikou boja s ponorkami, v tom istom roku publikuje Erlang matematický model telefónnej ústredne,
- v r. 1926 Borůvka a v r. 1934 Jarník publikujú historicky prvé algoritmy z teórie grafov (minimálna kostra grafu, optimálne spojenie v sieti),
- v r. 1936 Leontieff publikuje matematický model národného hospodárstva vyjadrovaný štruktúrnymi vzťahmi,
- v r. 1939 Kantorovič v knihe „Matematické metody v organizácii a plánovaní výroby“ definuje problémy ako :
 - ⇒ rozdelenie výroby na stroje zabezpečujúce maximálnu produktivitu,
 - ⇒ maximálny plán pri danom sortimente,
 - ⇒ optimálne využitie strojov (mechanizmov),
 - ⇒ minimálny odpad pri delení materiálu,
 - ⇒ maximálne využitie energie,
 - ⇒ optimálne rozdelenie oševnej plochy,
 - ⇒ najvhodnejší plán prepravy a pod.
- v r. 1944 Dantzig vyvinul simplexový algoritmus, ktorý sa stal univerzálnou metódou riešenia optimalizačných úloh popísaných lineárnymi vzťahmi tzv. lineárneho programovania,
- v r. 1954 - 56 Ford a Fulkerson publikovali prvé práce aplikujúce lineárne programovanie do oblasti riešenia dopravných úloh a teórie grafov.

Ďalší vývoj spojený s postupným rozvojom výpočtovej techniky smeroval postupne ku stavu, ktorý poznáme dnes, keď do vednej disciplíny operačná analýza (bez nároku na úplnosť) väčšinou zvykneme radiť :

- matematické programovanie
 - ⇒ lineárne,
 - ⇒ nelineárne,
 - ⇒ dynamické
- úlohy optimálneho priradovania
 - ⇒ dopravné úlohy,
 - ⇒ priradovacie úlohy,
- aplikácie teórie grafov,
 - ⇒ sieťovú analýzu
- teóriu hromadnej obsluhy,
- teóriu zásob,
- teóriu obnovy a spoľahlivosti,
- teóriu hier

a samozrejme veľa ďalších metód.

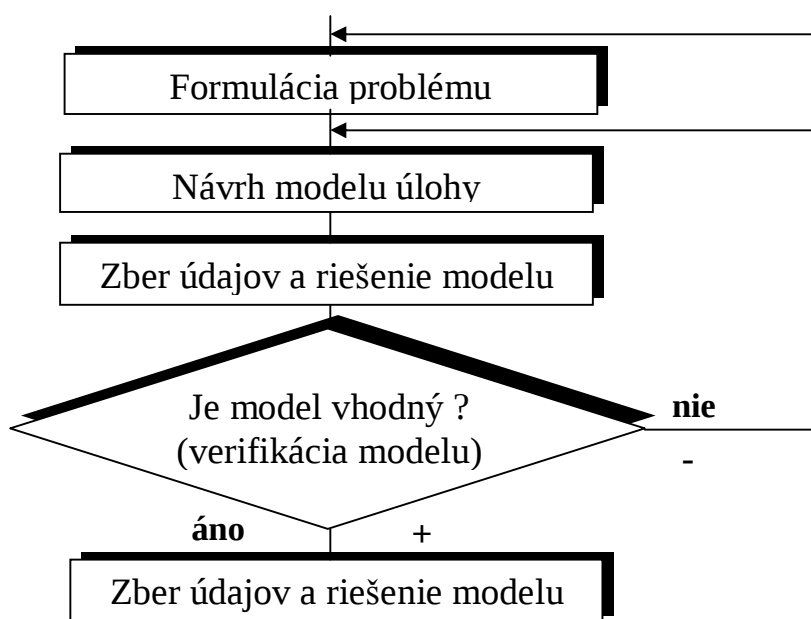
Uvedené metódy pritom možno deliť aj podľa ďalších kritérií. Napríklad na oblasť metód **deterministických**, pracujúcich s jednoznačnými matematickými modelmi skúmaných problémov dávajúcimi i jednoznačné výsledné riešenia a oblasť metód **stochastických**, ktoré uvažujú s náhodnými vplyvmi a výsledky uvádzajú s ich štatistickými charakteristikami ako stredná hodnota, rozptyl atď.

Často používaným delením metód je delenie podľa typu veličín, s ktorými sa v matematických modeloch pracuje. V takomto prípade rozlišujeme modely **diskrétné**, u ktorých nadobúdajú veličiny (premenné) iba určitých, presne určených hodnôt a modely **spojité**, v ktorých premenné nadobúdajú hodnôt ľubovoľných.

Záverom tejto úvodnej kapitoly je potrebné ešte upresniť dva základné pojmy, ktoré už boli v texte uvedené a ktoré budú používané v celej učebnici a to pojmy **operácia** a **model**. I keď, ako už bolo uvedené, termín „**operácia**“ pôvodne znamenal operáciu vojenskú, dnes možno operáciu chápať ako akúkoľvek činnosť zameranú na dosiahnutie stanoveného cieľa (napr. operácia vojenská - odrazenie úderu protivníka prostriedkami protivzdušnej obrany, operácia ekonomická - návrh optimálneho plánu výroby k dosiahnutiu maximálneho zisku).

Pojem operácia v lekárstve a technologická operácia (súčasť výrobného postupu) sú bežne známe a používané a môžu byť tiež zahrnuté pod všeobecnú definíciu. Pojem „**model**“ si môžeme zjednodušene definovať ako znázornenie systému, ktorý je potrebné skúmať. Model je teda určitým obrazom nejakej časti objektívnej reality. Po formálnej stránke budeme v našej problematike využívať modely matematické, po ktorých budeme vyžadovať, aby popisovali skúmané skutočnosti s požadovanou presnosťou (napr. s 95% - nou pravdepodobnosťou).

Celkový postup riešenia všeobecnej úlohy operačnej analýzy si môžeme potom znázorniť schémou uvedenou na *obr.1.1*.



Obr.1.1. Etapy riešenia všeobecnej úlohy operačnej analýzy.

K jednotlivým základným etapám (krokom) riešenia :

a) Formulácia problému

Formulácia problému je prvou a najdôležitejšou etapou rozboru úlohy operačnej analýzy. V rámci jej realizácie je potrebné predovšetkým stanoviť cieľ riešenia a určiť premenné, ktoré problém ovplyvňujú, nájsť reálne obmedzujúce podmienky úlohy, prípadne formulovať možné variantné riešenia. Napríklad pri klasickej úlohe operačnej analýzy - optimálnom pláne výroby si môžeme stanoviť ako cieľ riešenia navrhnúť výrobný sortiment podniku tak, aby podnik realizoval maximálny zisk, pričom obmedzujúcimi podmienkami môžu byť napr. výrobné kapacity, maximálne prípustné náklady, maximálna prípustná spotreba energie, zásoby surovín atď.

b) Návrh modelu

Návrh modelu zahŕňa väčšinou matematický popis problému, v ktorom sa snažíme popísať jeho vyššie uvedené časti, tzn. najmä cieľ riešenia, ktorý sa niekedy všeobecne vyjadruje ako efektívnosť systému a samotné obmedzujúce podmienky, ktoré sa snažíme vyjadriť ako funkcie premenných vstupujúcich do problému vo vzťahu k určeným limitným hodnotám (rovnice alebo nerovnice).

c) Zber údajov a riešenie úlohy

Ak už bol zostavený model problému, je potrebné s využitím získaných súborov vstupných údajov model riešiť alebo využitím niektorej z analytických metód, prípadne pomocou metód simulačných.

d) Verifikácia modelu

Model musí byť opisom reálnej skutočnosti, reálneho systému a preto sa očakáva, že dokáže s požadovanou presnosťou predpovedať reálne správanie sa systému. K posudzovaniu presnosti pritom môžu slúžiť štatistické analýzy výsledkov správania sa skutočného modelu a ich porovnanie s výsledkami získanými riešením navrhnutého modelu. Ak sú odchýlky správania sa modelu a reálneho systému väčšie ako predpísaná (požadovaná) presnosť, je potrebné sa vrátiť pri riešení najčastejšie k etape návrhu modelu, niekedy je však potrebné prehodnotiť i celkovú formuláciu problému (Obr.1.1).

e) Využívanie modelu

Ak bol raz model uznaný ako vyhovujúci pre riešenie formulovaného problému, je možné jeho využívanie k stanovenému účelu.

LITERATÚRA

- [1] Churchman, C., W. – Ackoff, R., L. – Arnoff, E., A. : Úvod do operačného výskumu. ALFA, Bratislava 1968.
- [2] Jaiswal, N., K. : *Military Operations Research*. Kluwer Academic Publishers, Boston /Utrecht/ London 1997.
- [3] Rybár, M. – Horyna, V. – a kol. : *Operační výzkum ve vojenství*. MNO ČSSR, Praha 1969.
- [4] Kureš, J. – Vavroch, O. – Franta, V. : *Základy modelování*. SNTL, Praha 1989.

2. RIADENIE A ROZHODOVANIE

„Ak existuje čo i len jedna možnosť na odsunutie dôležitého rozhodnutia, či už súkromného alebo obecného, tak ju dobrá byrokracia aj nájde.“

PARKINSONOV PIATY ZÁKON

V predchádzajúcej kapitole sme si stručne definovali operačnú analýzu ako súhrn vhodných metód dávajúcich podklady získané na vedeckej úrovni ku kvalifikovanému riadeniu komplexných systémov. Bude preto vhodné, ak sa v úvodných kapitolách budeme zaoberať riadením všeobecne, ukážeme si miesto a úlohu rozhodovania v procese riadenia a pojmy „optimálny“ a „optimalizácia“ si vysvetlíme najmä v spojitosti s pojmami „**optimálne riadenie**“ a „**optimálne rozhodovanie**“.

2.1 Základná schéma riadenia

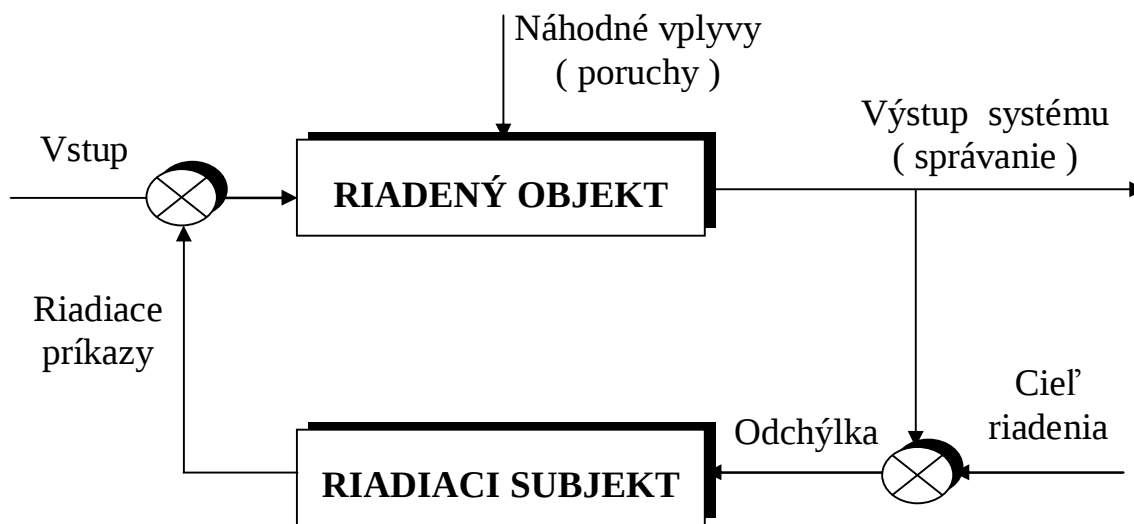
Pod pojmom **riadenie** všeobecne rozumieme každé cieľavedomé pôsobenie riadiaceho člena (subjektu, systému) na riadený objekt (sústavu). V spojitosti s riadením v ozbrojených zložkách sa používa pojem **velenie**, ktorý môže byť chápaný alebo priamo ako riadenie v ozbrojených silách, alebo riadenie po línii priamej podradenosti, zatiaľ čo po línii odbornej sa používa pojem **riadenie**.

Už z tejto stručnej definície vyplýva, že pokiaľ budeme hovoriť o riadení, vždy sa budeme zaoberať tromi základnými pojmami, ktorými sú :

- **cieľ riadenia,**
- **riadiaci subjekt (systém) a**
- **riadený objekt.**

Pritom môže ísť o riadené systémy rôznej zložitosti i rôznej fyzikálnej, ekonomickej či prípadne biologickej podstaty, od najjednoduchších regulátorov (napr. klasický automatický odstredivý regulátor otáčok strojov), cez výrobné podniky, živé organizmy, riadenie národného hospodárstva, riadenie štátu a pod.

Pri abstrakcii a zjednodušení možno vo všeobecnosti každý systém riadenia znázorniť schémou uvedenou na obr.2.1.



Obr. 2.1. Základná schéma riadenia.

Základný cyklus riadenia potom prebieha nasledovne : Do riadeného objektu prichádzajú určité veličiny - **vstupy**. Úlohou riadeného objektu je transformovať tieto vstupy podľa stanoveného cieľa riadenia na požadované **výstupy**. Na správanie sa systému pritom okrem jeho vstupov pôsobia aj **náhodné vplyvy** (jeho okolie), ktoré riadiaci subjekt nie je schopný ovplyvniť. Výstupy - reálne správanie sa systému - je potrebné sledovať a porovnávať so stanoveným **cieľom riadenia**.

Ak sa reálne správanie sa systému odlišuje od požadovaného (v závislosti od cieľa riadenia), riadiaci subjekt túto odchýlku vyhodnotí a vydá riadiace príkazy k ovplyvneniu správania sa systému najčastejšie zmenou vstupov.

Pre ilustráciu sa pokúsme demonštrovať cyklus riadenia na zjednodušenom príklade riadenia fakulty vysokej školy. Za vstupy (vstupné faktory) možno považovať kvalitu prijímaných študentov, zloženie, kvalifikáciu a odbornú vyspelosť vedecko-pedagogického zboru, úroveň materiálneho a finančného zabezpečenia apod..

Cieľom riadenia je potom najmä transformácia týchto vstupov na čo najkvalitnejších absolventov schopných pracovať s najnovšími vedeckými poznatkami v danom odbore. Transformácia pritom prebieha pri výučbe, samostatnej vedecko-odbornej činnosti atď. Ak reálni absolventi tento cieľ nenapĺňajú, je potrebné vykonať zásahy, súvisiace najmä so skvalitnením výberu prijímaných študentov, zvýšením kvality vedecko-pedagogického zboru, zabezpečením moderného materiálneho vybavenia (výpočtová technika) atď.

Za okolie systému (náhodné vplyvy), ktoré nemôže vedenie fakulty ako riadiaci subjekt ovplyvňovať, ale na ktorých pôsobenie musí reagovať, možno považovať napr. politickú situáciu v spoločnosti a z nej vyplývajúce personálne zloženie riadiacich zložiek na nadriadených orgánoch (vrátane osobnostných charakteristík konkrétnych nadriadených), existujúcu legislatívu a jej prípadné zásadné zmeny, rozpočtové prostriedky a pravidlá nakladania s nimi a iné.

Z uvedenej schémy je zrejmé, že pri riadení musia byť zabezpečené :

- potrebné informácie o správaní sa riadeného objektu,
- algoritmus porovnania reálnej činnosti riadeného objektu s cieľom riadenia,
- algoritmus rozhodovania o tom, ako ovplyvniť vstupy na základe zistených odchýlok,
- realizácia prijatých rozhodnutí.

V technickej oblasti podľa týchto základných úloh pri riadení rozlišujeme :

- **prvky snímacie** (ovládacie), podávajúce informácie o správaní sa objektu (merajú rozmer, otáčky, výšku hladiny a pod.),
- **prvky riadiace** (vlastný riadiaci systém), ktoré informácie od snímacích prvkov vyhodnotia a na základe zadaného rozhodovacieho algoritmu vydajú rozhodnutie,
- **prvky výkonové** (realizačné), ktoré zabezpečia vlastný výkon príslušného rozhodnutia (prestavenie regulačných ventilov a pod.).

Prvým, kto postihol spoločné znaky u všetkých typov systémov riadenia, bol Norbert Wiener, ktorý formuloval na základe analógií medzi riadením a komunikáciou v najdokonalejších známych systémoch riadenia - živých organizmoch a riadením technických a ekonomických systémov všeobecné zákony komunikácie a riadenia takýchto systémov.

Základom týchto teórií je využitie procesov prenosu, spracovania a využívania informácií k riadeniu systémov v súlade so zadanými cieľmi riadenia, ktoré by mali byť schopné navyše reagovať na okolie a jeho zmeny.

Práve schopnosť reagovať na zmeny okolia (adaptovať sa) je znakom najkomplexnejších známych systémov riadenia (živých organizmov, ale dnes už aj systémov technických - tzv. **adaptívnych systémov riadenia**).

Za najvyšší stupeň riadenia pritom dnes považujeme schopnosť meniť na základe posúdenia vplyvu výkonu predchádzajúcich rozhodnutí na správanie systémov aj vlastný **rozhodovací algoritmus**. Takýmto systémom, ktorých správanie je najbližšie správaniu živých organizmov hovoríme „**učiace sa systémy**“.

Z uvedených základných zjednodušených definícií vyplýva, že v systéme riadenia musí byť zabezpečený zber, prenos a spracovanie informácií. Ďalej musí byť riadiaci subjekt schopný spracované informácie vyhodnotiť, na základe tohto vyhodnotenia informácií vydať rozhodnutie a taktiež zabezpečiť realizáciu (výkon) prijatého rozhodnutia.

Stretávame sa tu pritom s dvoma základnými pojmami, s ktorými sa v teórii riadenia systémov pracuje a to s pojmami **informácia** a **rozhodnutie**. I keď každý je zrejmé schopný na základe poznatkov z každodenného života intuitívne základný význam týchto pojmov vycítiť, pre úplnosť k nim uvedieme niekoľko základných poznámok.

2.2 Informácia v systéme riadenia

Pojem „**informácia**“ je pokladaný za jeden z hlavných pojmov v riadení a kybernetike vôbec. Informáciami a informačnými procesmi sa zaoberá dôležitá časť teoretickej kybernetiky – **teória informácie**. Teória informácie má pre riadenie a kybernetiku zásadný význam. Vzťah kybernetiky a informácie je podobný, ako napr. vzťah matematiky k pojmu číslo, alebo energetiky k pojmu energia a pod.

Teória informácie sa zaoberá najmä :

- úlohou informácie v procese riadenia,
- otázkami kvantitatívneho a kvalitatívneho definovania informácie,
- podstatou vzniku, zberu, presunu, spracovania a uchovania informácie.

Existuje celý rad definícií od rôznych autorov napr. „**Informácia je všetko, čo odstraňuje nejakú neurčitost**“ (Wiener) alebo „**Informácia je všetko, čo nesie otláčok nejakého faktu alebo udalosti, ktorá sa stala alebo sa má stať. Je to všetko, čo nám o týchto faktoch dáva správu**“ (Poletajev).

Avšak spoločným obsahom všetkých vyslovených a uznávaných definícií je označenie informácie, ako oznamu o ukončenom, prebiehajúcim príp. očakávanom deji alebo jave.

Všeobecne teda možno informáciu definovať ako **určitý oznam, ktorý odovzdáva určitá zložka inej zložke o tom, ako sa správala, správa, alebo bude správať**. Ide teda o určitý oznam o tom, že nastal, alebo nastane určitý jav, alebo množstvo javov. Prostredníctvom tohoto oznamu sa potom u príjemcu znižuje istá neznalosť a neurčitosť tzn. ide o oznam, ktorý ovplyvňuje správanie sa a rozhodovanie príjemcu.

Každá informácia má stránku **kvantitatívnu** a **kvalitatívnu**.

Kvantitatívne chápeme informáciu ako veličinu, ktorá číselne vyjadruje zmenšenie neurčitosti, alebo neusporiadanosti v nejakej sústave, v množine javov a pod. po prijatí istej správy. Miera neurčitosti v istej množine javov sa nazýva **entrópia**. Potom množstvo informácií je rozdiel entrópie pred prijatím nejakej informácie a entrópie po jej prijatí.

Kvalitatívne (významovo) sa chápe informácia ako istý oznam, správa, príkaz, nariadenie a pod., ktorým sa u príjemcu zmenšuje neznalosť určitých faktov, alebo neistota pri istom rozhodovaní tzn. zvyšuje sa jeho informovanosť. Kvalita informácie je pritom určovaná hlavne jej účelnosťou, úplnosťou, hodnovernosťou, zrozumiteľnosťou, presnosťou a včasnosťou.

Informácie je možné deliť podľa rôznych hľadísk. Napríklad podľa zdroja sa informácie delia na :

- **vonkajšie** - vstupujú do sústavy zvonka tj. od riadiacej a riadenej zložky, od susedov apod. Zahŕňajú všetky druhy informácií tzn. oznamovacie, riadiace, prvotné atď. a vyžadujú správne zachytenie a spracovanie, pretože sú hlavnými podkladmi pre riadenie,
- **vnútorné** - sú uložené vo vnútri systému a sú používané podľa potreby. Sú charakteristické tým, že obsahujú a uchovávajú poznatky, zručnosti a návyky, metodické postupy, pravidlá činnosti, programy pracovných postupov apod. Zachovávajú sa ako poučenia, vedomosti, skúsenosti, algoritmus, metóda, program a pod. Riadiaca zložka ich vyberá z pamäti v potrebnom čase a uplatňuje ich v súvislosti s vonkajšími informáciami a stanoveným cieľom.

Podľa funkcie sa informácie delia na :

- **riadiace** – riadiaca zložka určuje riadenej zložke ciele a úlohy, ktoré má plniť, resp. aj spôsob akým sa má plniť a

- **oznamovacie** – informujú o minulom, súčasnom a budúcom stave objektívnej reality napr. spätná väzba (hlásenia, doklady apod.).

Podľa pôvodu možno informácie deliť na :

- **prvotné** – vznikajú ako bezprostredný obraz vlastností objektívnej reality, priamo pri zdroji informácie a
- **odvodené** – vznikajú spracovaním (transformáciou) prvotných informácií a majú vyššiu hodnotu, pretože už riešia spôsob splnenia určeného cieľa.

S pojmom informácia je úzko spojený pojem **signál**. K tomu, aby mohla informácia vôbec existovať a bolo možné jej odovzdávanie medzi zdrojom a príjemcom prostredníctvom ich komunikácie, musí mať svojho energetického, alebo hmotného nositeľa. Takémuto spojeniu obsahu informácie a nositeľa informácie hovoríme **signál**.

Signál je fyzikálny pochod nesúci informáciu, tj. pochod, ktorého niektoré stavy sú priradené niektorým vlastnostiam udalostí, alebo faktov. Je teda možné povedať, že signál nesie správu, ktorá obsahuje informáciu a môže existovať vždy len vo vnútri nejakej organickej sústavy.

2.3 Rozhodovanie v systéme riadenia

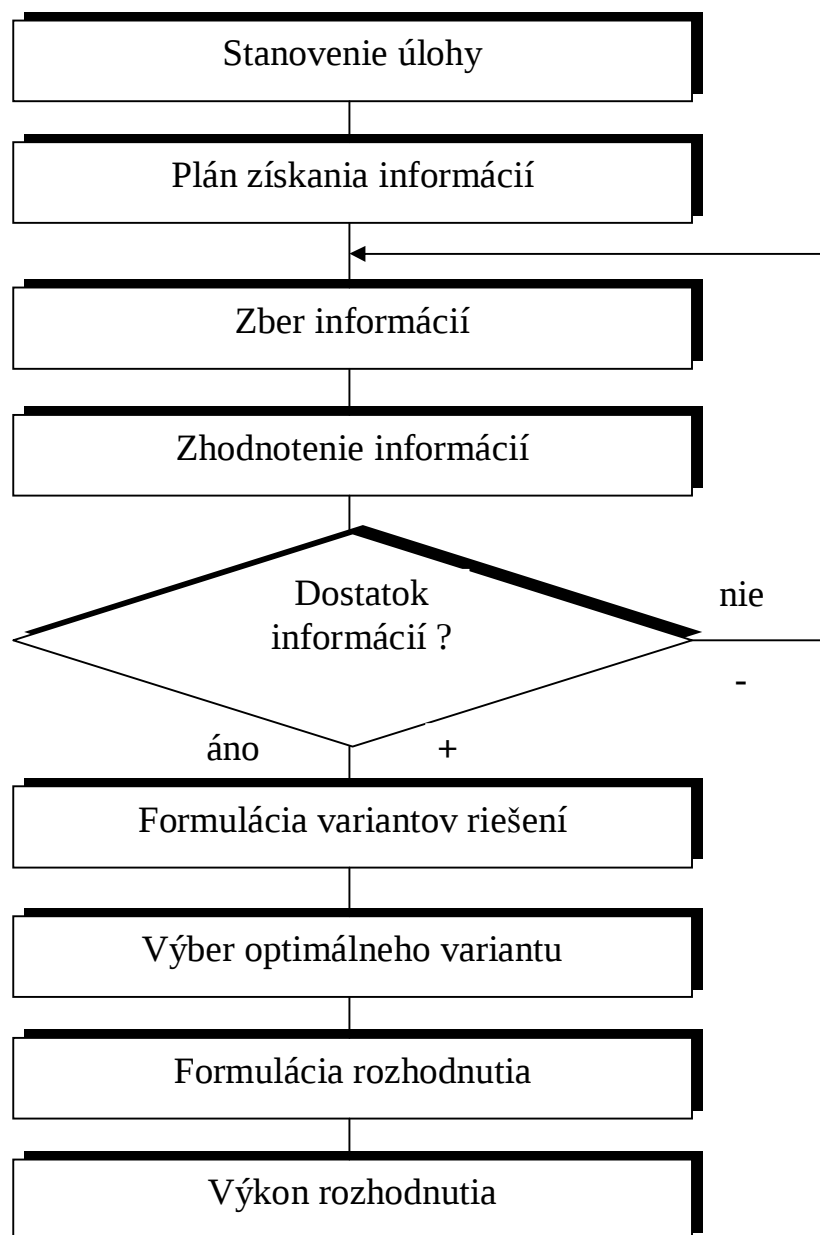
O rozhodovaní väčšinou hovoríme v súvislosti so systémami riadenými ľuďmi (ľudským činiteľom) i keď rozhodovacie bloky sú zaradované i do riadiacich algoritmov automatických systémov riadenia (počítačové riadenie). Tieto zväčša využívajú základné funkcie formálnej logiky a Booleovej algebry.

Predmetom nášho záujmu v operačnej analýze je riadenie komplexných systémov, kde rozhodovanie vykonáva jednotliviec alebo riadiaci kolektív a kde práve základné metódy operačnej analýzy majú pre kvalifikované rozhodovanie riadiacich subjektov dodávať vedecky zdôvodnené podklady. Preto je v tomto prípade možné rozhodovanie (rozhodovací proces) považovať za nenáhodnú voľbu (nenáhodný výber) jedného z množiny možných riešení na základe nejakého, premysleného dôvodu z hľadiska splnenia stanoveného cieľa.

Z toho je zrejmé, že vo všeobecnosti za predpoklady pre tvorbu úspešného rozhodnutia možno považovať :

- presnú formuláciu cieľa, ktorého sa má rozhodnutím dosiahnuť,
- dostatok informácií pre tvorbu rozhodnutia,
- dostatočnú kvalifikáciu rozhodovacieho subjektu a jeho prislúchajúce vybavenie vhodnými metódami, prostriedkami a vedomosťami.

Za základný formálny postup rozhodovania možno považovať postup uvedený na obr. 2.2.,



Obr. 2.2. Postup pri prijímaní rozhodnutí.

2.4 Rozdelenie metód rozhodovania

Zaužívaným hrubým spôsobom delenia rozhodovacích metód, je ich delenie podľa stupňa využitia vedeckých postupov pri formulácii rozhodnutia. Takto delíme metódy rozhodovania na tri základné skupiny :

- **metódy empirické,**
- **metódy exaktné,**
- **metódy heuristicke (zmiešané).**

2.4.1 Empirické metódy rozhodovania

Táto skupina metód je väčšinou založená na poznaní skutočnosti a vlastnej skúsenosti toho, kto rozhoduje (empíria = skúsenosť). Pritom je zrejmé, že kvalita rozhodnutia bude závisieť najmä na kvalifikácii, skúsenostiach, ale aj okamžitej dispozícii rozhodovacieho subjektu.

Medzi základné metódy empirického rozhodovania patrí metóda „**pokusov a omylov**„ (*Trial and Error*), ktorá vo svojej klasickej podobe znamená náhodnú postupnosť rozhodnutí s následným vyhodnotením, ako správanie sa riadeného objektu po ich výkone odpovedá požadovanému cieľu riadenia. Za rozhodnutie, ktoré sa má realizovať sa v závere zvolí to, pri ktorom je odchýlka skutočného správania sa riadeného systému od požadovaného stavu (cieľa riadenia) minimálna.

Táto, jedna z najjednoduchších metód rozhodovania, však môže tvoriť základ pre najmodernejšie metódy riadenia, tzv. **riadenie adaptívne**. Podstata spočíva v tom, že ak po vyhodnotení reakcie riadeného systému na prvý príkaz resp. rozhodnutie, sa vyhodnotí odchýlka správania sa niektorou z exaktných vedeckých metód (napr. niektorou z gradientných metód) a následné rozhodnutie sa už neformulujeme náhodne, ale s cieľom minimalizovať napr. strednú kvadratickú odchýlku správania sa systému od cieľa riešenia, dostaneme sa k teoretickému základu najmodernejších metód poznávania (identifikácie) systémov, ktoré sú využívané v dnes atraktívnych oblastiach, ako je teória učiacich sa systémov, rozpoznávanie obrazov a základy umelej inteligencie.

Vráťme sa však späť k metódam empirickým. Ak subjektívne rozhodnutie jednotlivca nahradíme rozhodnutím, ktoré vznikne po kolektívnej porade - analýze úlohy tímom odborníkov možno do určitej miery subjektivitu v empirickom rozhodovaní eliminovať. Medzi empirické metódy rozhodovania založené na kolektívnej analýze problému napr. pri hľadaní nekonvenčných riešení zložitých výskumných úloh patrí aj tzv. **brainstorming** („búrenie mozgov“ . Brainstorming hľadá najvýhodnejšie riešenia zadaného problému pri spoločnej porade tímu odborníkov najrôznejších odborností a profesií. Porada je vedená podľa špecifických pravidiel a schémy, ktorých cieľom je provokovať účastníkov k formulovaniu vlastných predstáv o možnostiach riešenia úlohy.

Tieto predstavy sú potom v diskusii podrobované analýze a taktiež z nej vyplývajúcej kritike. Pri vhodne vedenej diskusii je možné, samozrejme v závislosti na kvalifikácii a tvorivom potenciáli zúčastnených, nájsť vhodné netradičné riešenia i veľmi komplikovaných úloh.

2.4.2 Exaktné metódy rozhodovania

Medzi exaktné metódy rozhodovania zvykneme radiť v súlade s definíciou disciplíny operačná analýza predovšetkým jej základné metódy. Ich krátky prehľad je uvedený v predchádzajúcej kapitole a základné deterministické metódy sú predmetom výkladu v ďalších kapitolách tejto učebnice.

2.4.3. Heuristické (zmiešané) metódy rozhodovania

Slovo „**heuristika**“ má v slovníku cudzích slov uvedený význam ako „postup nachádzania nových vedných poznatkov založený na vyhľadávaní a hodnotení zdrojov“ a prídavné meno „**heuristický**“ sa zaužívalo ako výraz vyjadrujúci metódu založenú sčasti na subjektívnom hodnotení (úsudku), ktorého výsledky sú ďalej spracované podľa exaktných postupov (algoritmov) tak, aby mohlo byť vyslovené konečné rozhodnutie.

Rôzne literárne zdroje radia medzi heuristické metódy rozhodovania aj rozličné okruhy metód. Autori novších publikácií sa však viacmenej zhodujú na tom, že medzi heuristické metódy rozhodovania vo všeobecnosti patria :

- **metódy rozhodovacej analýzy,**
- **metóda rozhodovacieho stromu,**
- **rozhodovacie tabuľky**

a najnovšie aj

- **metóda „simulovaného žihania“,**
- **genetické algoritmy ,**
- **neurónové siete**

a niektoré ďalšie.

Z uvedeného krátkeho prehľadu si v tejto kapitole podrobnejšie uvedieme princípy niektorých postupov rozhodovacej analýzy a zmienime sa v krátkosti o rozhodovacích tabuľkách a ich použití.

„Metóda rozhodovacieho stromu“ bude detailnejšie prezentovaná v časti siedmej kapitoly venovanej niektorým základným metódam teórie grafov.

U ostatných metód budú uvedené iba stručne základné myšlienky, na ktorých sú založené a v prípade záujmu o podrobnejšie štúdium problematiky ich možno nájsť v príslušných literárnych zdrojoch.

Metódy rozhodovacej analýzy

Vychádzajú z podmienok určitosti, pokiaľ ide o výsledný účinok rozhodovania a z podmienky neurčitosti (neistoty), pokiaľ ide o odhad rizika rozhodovania. Pracujú s informáciami získanými v etape rozboru problému a merajú účinok i riziko rozhodnutia podľa pokiaľ možno väčšieho počtu kritérií. Všeobecne to znamená, že metódy rozhodovacej analýzy sa dotýkajú problému tzv. **multikritériálneho rozhodovania** resp. **multikritériálnej optimalizácie** a preto je najdôležitejším krokom v rozhodovacej analýze nesporne výber kritérií.

Existuje viacej rozličných metód, ktoré majú v zásade rovnaký princíp - posúdenie niekoľkých variantov riešenia zadaného problému podľa zvolených kritérií a stanovenie poradia variantov. Jednotlivé metódy sa líšia podľa toho, ako sa určuje tzv. **váha jednotlivých kritérií** a ako sa číselne hodnotí stupeň, ktorým jednotlivé varianty riešenia napĺňajú zvolené kritériá.

Za základnú metódu možno považovať tzv. **metódu rozhodovacej matice** (DMM - Decision Matrix Method), ktorá môže mať taktiež viacej variantov. Jeden z variantov spočíva v hodnotení váhy (dôležitosti) jednotlivých kritérií **bodovou stupnicou od 1 po 10** tak, že stupeň **1** je priradený najmenej váhe a stupeň **10** váhe najväčšej. Rovnakou stupnicou sa taktiež hodnotí, ako jednotlivé varianty riešenia vyhovujú zvoleným kritériám tzn. od „1“ - nevyhovuje až po „10“ - vyhovuje ideálne.

Vlastné hodnotenie je zrejmé z *tab.2.1*, v ktorej sú hodnotené hypotetické ponuky zariadení od troch dodávateľov podľa toho, ako vyhovujú zvoleným kritériám hodnotenia, za ktoré boli zvolené – **cena ponuky, doba dodania, platobné podmienky a spoľahlivosť**.

Tab. 2.1. Rozhodovacia matica pre optimálny výber dodávateľa.

Kritérium	Váha	Hodnotenie dodávateľa		
		Dodávateľ 1	Dodávateľ 2	Dodávateľ 3
Cena ponuky	10	9	6	5
Doba dodávky	7	8	9	6
Platobné podmienky	6	7	8	9
Spoľahlivosť	8	6	7	8
Vážený súčet		236	227	210
Poradie		1	2	3

Za výsledné kritérium pre rozhodnutie sa potom volí najväčší vážený súčet (súčet súčinov hodnotenia miery splnenia kritériá a ich váhy). Pri takto zvolenom prístupe sú sporné dva aspekty. Prvým je vysoký podiel subjektivity v hodnotení ako jednotlivé varianty riešenia vyhovujú zvoleným kritériám a druhým aspektom je subjektívne určenie váhy jednotlivých kritérií.

Uvedené nevýhody metódy DMM čiastočne odstraňuje tzv. **modifikovaná metóda rozhodovacej matice** (FDMM - Forced Decision Matrix Method), pri ktorej sa váhy jednotlivých kritérií, ako aj hodnotenie variantov ako splňajú jednotlivé kritériá, určujú tzv. **párovým porovnaním**. Znamená to, že pri porovnaní dvoch kritérií, je významnejšie (pre naše rozhodovanie dôležitejšie) kritérium hodnotené „1“, menej významné kritérium „0“.

Podobne pri hodnotení toho, ako dva varianty vyhovujú kritériám hodnotenia, je variant vyhovujúci lepšie hodnotený „1“ a variant hodnotený horšie hodnotený „0“. Ak potom problém riešený v tab.2.1. riešime uvedeným spôsobom, dopracujeme sa k výsledkom uvedeným v tab. 2.2. a - f.

Tab.2.2. Upravená metóda rozhodovacej matice.

a) Párové porovnanie kritérií

Kritérium	1	2	3	4	Súčet	Váha
1	-	1	1	1	3	0,5
2	0	-	1	0	1	0,167
3	0	0	-	0	0	0
4	0	1	1	-	2	0,333

b) Porovnanie variantov riešenia podľa kritéria 1

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	1	1	2	0,667
2	0	-	1	1	0,333
3	0	0	-	0	0

c) Porovnanie variantov riešenia podľa kritéria 2

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	0	1	1	0,333
2	1	-	1	2	0,667
3	0	0	-	0	0

d) Porovnanie variantov riešenia podľa kritéria 3

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	0	0	0	0
2	1	-	0	1	0,333
3	1	1	-	2	0,667

e) Porovnanie variantov riešenia podľa kritéria 4

Variant	1	2	3	Súčet	Hodnotenie
1	-	0	0	0	0
2	1	-	0	1	0,333
3	1	1	-	2	0,667

f) Rozhodovacia tabuľka pri modifikovanej metóde rozhodovacej matice

	Kritérium	Váha	Hodnotenie dodávateľa		
			Dodávateľ 1	Dodávateľ 2	Dodávateľ 3
1	Cena ponuky	0,500	0,667	0,333	0
2	Doba dodávky	0,167	0,333	0,667	0
3	Platobné podmienky	0	0	0,333	0,667
4	Spôľahivosť	0,333	0	0,333	0,667
	Vážený súčet		0,38911	0,38877	0,22211
	Poradie		1	2	3

Pri pohľade na uvedené tabuľky, jediné, čo potrebuje krátke vysvetlenie je fakt, že výsledné hodnotenie variantov alebo váhu kritérií dostaneme tak, že hodnotenie „normujeme“, tj. požadujeme, aby súčet všetkých hodnotení resp. váh bol rovný 1.

Uvedená metóda má oproti predchádzajúcej výhodu v tom, že váhu kritérií stanovuje už exaktnejšie, ale na druhej strane nevýhodu, že dostávame veľké rozdiely v hodnotení jednotlivých variantov alebo kritérií i vtedy, keď sa líšia iba málo.

Napríklad z hodnotenia dodávateľov 1 a 3 podľa štvrtého kritéria tzn. spoľahlivosti a ktoré bolo v prvej metóde 6 a 8 sme získali hodnoty 0 a 0,667, ktoré sa líšia veľmi významne. Navyše pri určení váhy kritéria alebo hodnotenia alternatívy rovnom „0“, príslušné hodnoty nemajú na celkové hodnotenie žiadny vplyv.

Tieto nevýhody odstraňuje ďalšia z metód rozhodovacej analýzy, ktorá v podstate spája výhody oboch metód predchádzajúcich a súčasne aj eliminuje do istej miery ich nedostatky a tou je „**analytická viacúrovňová metóda**“ (AHP - Analytic Hierarchy Process). Metóda je vo svojej podstate založená taktiež na párovom porovnávaní stupňa významnosti jednotlivých kritérií a miery toho ako hodnotené varianty riešenia tieto kritériá spĺňajú. Stupnica hodnotenia je však podstatne komplexnejšia.

Hodnotenie je v oboch prípadoch (porovnanie kritérií i variantov) založené na tzv. „expertnom odhade“, pri ktorom odborníci v danom odbore porovnávajú vzájomné vplyvy dvoch faktorov. Tieto hodnotia na základe stupnice [**rovnaký – slabý – stredný – silný - veľmi silný**], pričom tomuto slovnému hodnoteniu odpovedajú číselné hodnoty [**1 - 3 - 5 - 7 - 9**] podľa obr.2.3.

	9	7	5	3	1	3	5	7	9	
Faktor A								X	X	Faktor B
	Veľmi silný	Silný	Stredný	Slabý	Rovnaký	Slabý	Stredný	Silný	Veľmi silný	

Obr. 2.3. Formulár k posudzovaniu vplyvu 2 faktorov.

V prípade, podľa obr.2.3, keď sú vo formulári pre hodnotenie vyznačené 2 možnosti (konkrétne silná a veľmi silná prevaha vplyvu faktora B nad faktorom A), ako výsledné hodnotenie sa v riadku faktora B stĺpci A objaví hodnota „8“ a v riadku faktora A a stĺpci odpovedajúcemu porovnaniu s faktorom B sa uvedie prevrátená hodnota tj. hodnota „1/8“. Príklad tabuľky pre možné párové porovnanie troch variantov je uvedené v tab.2.3.

Tab. 2.3. Párové porovnanie pre analytickú viacúrovňovú metódu rozhodovania

Faktor	A	B	C
A	1	3	5
B	1/3	1	2
C	1/5	1/2	1

Z tab.2.3 vyplýva ešte ďalšia odlišnosť od tabuliek pri prostom párovom porovnaní a to taká, že do rozhodovacej matice sa zaraďuje i vzájomné porovnanie rovnakých premenných s hodnotením vplyvu „1“ (rovnaký vplyv).

Ďalší postup určenia váh kritérií a porovnania variantov riešení je oproti predchádzajúcim metódam komplikovanejší, pretože je potrebné pre každú maticu párového porovnania určiť **normovaný vlastný vektor** odpovedajúci najväčšej reálnej **vlastnej hodnote (číslu)** matice, uvažovanej v absolútnej hodnote. Jeho zložky potom podobne ako v predchádzajúcej metóde párového porovnania určujú váhy kritérií a hodnotenie variantov riešenia podľa jednotlivých kritérií, pričom výsledné ohodnotenie variantov dostaneme rovnako ako vážený súčet určených hodnotení násobených váhami kritérií.

Pre porovnanie je v *tab.2.4. a – f* spracovaný rovnako zadaný príklad ako v *tab.2.1.a tab.2.2.*

Tab.2.4. Príklad hodnotenia analytickou viacúrovňovou metódou.

a) Porovnanie kritérií

Kritérium	1	2	3	4
1	1	5	7	3
2	1/5	1	3	1/5
3	1/7	1/3	1	1/4
4	1/3	5	4	1

Vlastné číslo $\lambda_{\max}=4,245$

Normovaný vlastný vektor (váhy kritérií) $\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} 0,550 \\ 0,105 \\ 0,057 \\ 0,288 \end{bmatrix}$

b) Porovnanie variantov podľa kritéria 1

Variant	1	2	3
1	1	5	7
2	1/5	1	3
3	1/7	1/3	1

Vlastné číslo $\lambda_{\max}=3,065$

Normovaný vlastný vektor (hodnotenie) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0,731 \\ 0,188 \\ 0,081 \end{bmatrix}$

c) Porovnanie variantov podľa kritéria 2

Variant	1	2	3
1	1	1/3	4
2	3	1	5
3	1/4	1/5	1

Vlastné číslo $\lambda_{\max}=3,086$

Normovaný vlastný vektor (hodnotenie) $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0,280 \\ 0,627 \\ 0,093 \end{bmatrix}$

d) Porovnanie variantov podľa kritéria 3

Variant	1	2	3
1	1	1/3	1/5
2	3	1	1/3
3	5	3	1

Vlastné číslo $\lambda_{\max}=3,039$

Normovaný vlastný vektor (hodnotenie) $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0,105 \\ 0,258 \\ 0,637 \end{bmatrix}$

e) Porovnanie variantov podľa kritéria 4

Variant	1	2	3
1	1	1/3	1/4
2	3	1	1/2
3	4	2	1

Vlastné číslo $\lambda_{\max}= 3,0183$

Normovaný vlastný vektor (hodnotenie) $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0,122 \\ 0,320 \\ 0,558 \end{bmatrix}$

f) Výsledné hodnotenie

Kritérium	Váha	Hodnotenie dodávateľ'a		
		Dodávateľ 1	Dodávateľ 2	Dodávateľ 3
Cena ponuky	0,550	0,731	0,188	0,081
Doba dodávky	0,105	0,280	0,627	0,093
Platobné podmienky	0,057	0,105	0,258	0,637
Spol'ahlivosť	0,288	0,122	0,320	0,558
Vážený súčet		0,473	0,276	0,251
Poradie		1	2	3

Analytická viacúrovňová metóda multikritériálneho rozhodovania je považovaná v súčasnosti za najkomplexnejšiu metódu rozhodovacej analýzy. Existujú aj presné kritériá hodnotenia vierohodnosti jednotlivých rozhodovacích matíc na základe tzv. **indexu konzistencie matíc**. Navyše je táto metóda, ako už vyplýva z jej názvu, vhodná aj pre viacúrovňové tzv. hierarchické rozhodovanie.

Znamená to, že každé zvolené kritérium môže byť ďalej rozdelené na subkritériá a tieto prípadne na sub-subkritériá, podľa ktorých sa porovnávajú všetky varianty riešenia. Napríklad hlavné kritérium **platobné podmienky** môže byť rozdelené na podkritériá : **termíny splátok, úrokové sadzby, požadovaná mena, spol'ahlivosť banky apod.**

Uvedené podrobnosti, ako aj ďalšie, sú už mimo rámec našej publikácie a záujemcovia o túto problematiku ich môžu nájsť v príslušnej literatúre, napr. [4], [5]. Rovnako na literatúru zo základov lineárnej algebry odkážeme čitateľov pre detaily postupov určenia vlastných hodnôt a vlastných vektorov matíc.

Rozhodovacie tabuľky

Rozhodovacie tabuľky tvoria relatívne samostatnú disciplínu pre riešenie úloh z ekonomickej, prípadne technickej praxe, založených na základných logických funkciách. Slúžia najmä ako :

- nástroj definovania logiky zadaného problému,
- prostriedok pre dokumentáciu spôsobu a postupu riešenia (najmä ako základ pre vypracovanie počítačových algoritmov).

Definované sú ako dvojrozmerné usporiadané informácie, ktoré využívajú základné vzťahy matematickej logiky k určeniu variantov rozhodnutí alebo činností (závislých výrokov), ktoré logicky vyplývajú zo splnenia alebo nesplnenia kombinácie daných podmienok (nezávislých výrokov).

Detailný výklad problematiky tvorby rozhodnutí nájde čitateľ v špeciálnej literatúre [3]. Pre informatívne zoznámenie s princípom rozhodovacích tabuliek postačujú v zásade základné poznatky o formálnom usporiadaní rozhodovacej tabuľky, ktorej všeobecný tvar je uvedený v *tab.2.5*.

Tab.2.5. Základný formát rozhodovacej tabuľky.

Záhlavie tabuľky (názov problému)	Záhlavie kombinácií (pravidiel riešenia)
1. Kvadrant (zoznam) podmienok	3. Kvadrant stavov (kombinácií) podmienok
2. Kvadrant (zoznam) činností	4. Kvadrant voľby (kombinácií) činností

Všeobecne postup riešenia úlohy prebieha v smere číslovania kvadrantov, pričom sa hľadajú najmä odpovede na otázky :

- 1) Aké sú rozhodovacie podmienky riešenia problému ?
- 2) Ktoré všetky činnosti sú požadované pre riešenie problému ?
- 3) Aké sú možné kombinácie podmienok ?
- 4) Ktoré činnosti je potrebné vykonať pri pôsobení jednotlivých kombinácií podmienok ?

Pre informatívne oboznámenie sa s fungovaním rozhodovacích tabuliek budú uvedené teoretické zásady prezentované na jednoduchom príklade rozhodovania o prechode križovatky, ktorého riešenie je uvedené v *tab.2.6*.

V takto zadanom príklade je zrejmé, že základné rozhodnutie o tom, či prejsť križovatkou alebo počkať (rozhodnutie o výkone niektorej z činností) sa uskutočňuje na základe možných kombinácií podmienok riešenia (tzn. či je križovatka riadená, alebo nie, aké signálne svetlo na riadenej križovatke svieti, aká je premávka na neriadenej križovatke apod.).

Vo zvolenom príklade využitia rozhodovacích tabuliek bol zvolený najjednoduchší typ rozhodovacej tabuľky, v ktorom sa vo všeobecnosti vyskytujú iba 2 odpovede na každú otázku (podmienku riešenia) - **ÁNO resp. NIE** a kde sú takisto k dispozícii iba dve voľby vykonania rozhodnutia o každej činnosti (riešení problému) - **prejsť alebo počkať**.

Tab. 2.6. Príklad rozhodovacej tabuľky

PRECHOD KRIŽOVATKY	Kombinácie				
	1	2	3	4	5
Riadená križovatka	A	A	N	N	N
Svieti zelená	A	N	-	-	-
Voľno v smere premávky	-	-	A	N	N
Prichádzajúce vozidlo v dostatočnej vzdialenosti	-	-	-	A	N
PREJSTĚ	X	-	X	X	-
POČKAŤ	-	X	-	-	X

Z uvedeného je zrejmé, že v hlavných oblastiach využitia rozhodovacích tabuliek, za ktoré sú považované najmä

- analýza, modelovanie a projektovanie rozhodovacích procesov v riadiacich systémoch,
- riadenie technologických procesov a havarijných stavov v reálnom čase,
- diagnostika, klasifikácia a porovnávanie systémov rozličnej povahy,
- príprava a riadenie bánk údajov (organizácia zberu, ukladania a výberu dát z bánk dát),
- racionalizácia programovania a systémovej analýzy,
- komunikácia medzi systémovou analýzou a programovaním pri vývoji úloh automatizácie riadenia,
- simulácia funkcie systémov (sústav) a predpovedanie možných dôsledkov vyplývajúcich zo zistených stavov systémov,
- analýza, riešenie a optimalizácia zložitých jednoúčelových rozhodovacích procesov strategického významu,

budú rozhodovacie tabuľky podstatne zložitejšie a nebudú vždy pracovať iba s bivalentnými podmienkami a rozhodnutiami. Základný princíp ich tvorby a riešení (rozhodovania) však zostáva nezmenený.

Ďalšie heuristické metódy rozhodovania.

Metóda simulovaného žihania

Metóda je založená na analógií medzi procesom žihania (pri ktorom sa ohrevom kovovej súčasti a jej nasledovným riadeným ochladzovaním dosahuje stav charakterizovaný nízkou vnútornou energiou - nízkym vnútorným pnutím) a problémom optimalizácie kombinatorickej úlohy. Uvažuje sa pritom, že rôzne tepelné stavy pevného telesa odpovedajú prípustným riešeniam optimalizačnej úlohy a vnútorná energia telesa, ktorá sa má minimalizovať odpovedá účelovej funkcii $f(x)$. Technika, ktorá sa pri tom výhodne využíva sa volá „**Metropolisov algoritmus**“ a je založená na počítačovej simulácii jedného z typov náhodných procesov „Random Walk“ (tj. postupností nekorelovaných náhodných hodnôt). Táto metóda je vhodná pre prácu so spojitými premennými, pretože sa ľahko implementuje a relatívne ľahko rieši aj problémy s veľkým počtom premenných. Je využiteľná pre veľké množstvo rozličných problémov, avšak čas výpočtu v porovnaní s ostatnými metódami je väčší.

Genetický algoritmus

Vychádza z princípov prírodnej genetiky a prirodzeného výberu. Využíva základné postupy genetiky ako kódovanie, inicializácia, reprodukcia, kríženie, mutácie, náhodný prirodzený výber (najschopnejších jedincov) atď. Využíva sa tiež v optimalizačných kombinatorických problémoch. K riešeniu sa využíva okrem iného aj počítačová simulácia, ktorou sa vytvárajú náhodné kombinácie riešení, pričom pre ďalší „vývoj“ k ďalšej optimalizácii sa vyberajú iba tie, ktoré vyhovujú zadaným obmedzujúcim podmienkam. Genetický algoritmus je vhodný najmä pre problémy s diskretnými premennými. Ľahko sa prakticky implementuje, ale vyžaduje vždy niektoré špecifické vedomosti o probléme, aby bolo možné určiť vstupné hodnoty - dĺžku reťazca a veľkosť populácie. Je vhodná pre paralelné výpočty, pričom začína s viac ako jedným východiskovým riešením a preto aj ďalej pracuje súčasne s viacerými reťazcami.

Umelé neurónové siete

Sú intenzívne skúmané už dlhší čas v oblastiach dotýkajúcich sa tzv. **umelej inteligencie**, napríklad pri procesoch súvisiacich s rozpoznávaním reči, vytváraním a rozpoznávaním obrazov apod. Umelé neurónové siete sa snažia napodobniť algoritmy myslenia a práce mozgu, ktoré hromadne využívajú paralelné miestne riešenia so široko distribuovanými charakteristikami, na rozdiel od klasickej práce riadiacich jednotiek počítačov.

Tie sú síce veľmi rýchle, ale pracujú sekvenčne a informácie ukladajú v presne adresovaných oblastiach pamäti. V súčasnosti tvoria umelé neurónové siete relatívne uzatvorenú oblasť, ktorá rieši optimalizáciu úloh pracujúcich s bivalentnými premennými (typu 0 – 1). Vhodné sú pre účelové funkcie v lineárnom tvare, vyžadujú relatívne veľké operačné pamäte počítačov a preto nie sú vhodné pre optimalizáciu viacrozmerných úloh. Oproti tomu hardwarové implementácie týchto modelov sú relatívne jednoduché a ich hlavnou prednosťou je najmä relatívne veľká rýchlosť ich realizácie. Preto sú určené najmä pre aplikácie pracujúce v reálnom čase.

Vzhľadom na účel tejto publikácie, mohli byť uvedené iba niektoré zo známych a najviac používaných heuristických metód optimálneho rozhodovania. V novšej literatúre sa uvádzajú aj ďalšie napr. **hľadanie „tabu“ riešení** (Tabu Search) alebo tzv. **„cieľová analýza“** (Target Analysis), ktoré tiež patria do oblastí dotýkajúcich sa tzv. umelej inteligencie. Pre záujemcov o hlbšie poznanie problematiky však môžu slúžiť ako inšpirácia pre optimálne rozhodovanie napríklad v oblastiach súvisiacich s krízovým riadením.

LITERATÚRA

- [1] Skýva, L. : *Teória systémov. Fakulta riadenia VŠDS, Žilina 1992.*
- [2] Vavříň, J. - Zelina, P: *Automatické řízení počítačem. SNTL, Praha 1979 .*
- [3] Chvalovský, V. : *Rozhodovací tabulky. SNTL, Praha 1984.*
- [4] Křovák, J. – Zamrazilová, E. : *Expertní odhady. SNTL, Praha 1989.*
- [5] Jaiswal, N., K. : *Military Operations Research. KAP, Boston, 1997.*

3. ZÁKLADNÉ POSTUPY A METÓDY OPTIMALIZÁCIE

*Skôr či neskôr nastane najhoršie možné
usporiadania okolností.*

*Následok : Každý systém treba navrhnuť tak, aby
vydržal aj najhoršie možné usporiadanie okolností.*

SODDOV DRUHÝ ZÁKON

V predchádzajúcich kapitolách bolo viackrát uvedené, že základné metódy operačnej analýzy slúžia v značnej miere k získaniu vedecky zdôvodnených – optimálnych – rozhodnutí, potrebných ku kvalifikovanému riadeniu rôznych typov komplexných systémov. Je preto logické, že významná časť z metód operačnej analýzy sú metódy **optimalizačné**, ktorými určujeme z množiny možných riešení (rozhodnutí) také riešenie, ktoré z určitého pohľadu (kritéria) najlepšie vyhovuje vopred určeným požiadavkám.

Pri upresňovaní a ujasňovaní základných významov pojmov „optimálny“ a „optimálne riešenie“, možno uviesť, že pôjde o určenie riešenia, ktoré najlepšie vyhovuje stanovenému kritériu. Napríklad návrh plánu výroby, pri ktorom bude dosiahnutý maximálny zisk, tzn. určenie plánu výroby je tu riešenie a maximálny zisk je stanovené kritérium optimálnosti riešenia.

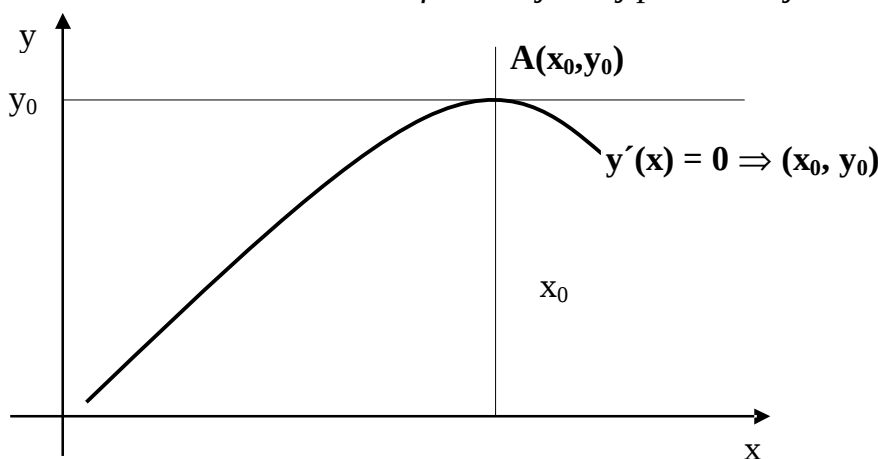
V predchádzajúcej kapitole, v časti venovanej rozhodovacej analýze, sme sa zaoberali tzv. **multikriteriálnou optimalizáciou**, pri ktorej sa hodnotili možné varianty riešenia z viacerých pohľadov (kritérií). Avšak výsledným súhrnným (agregovaným) kritériom pre výber optimálneho variantu bol pritom maximálny súčet súčinov váh jednotlivých čiastkových kritérií a príslušných hodnotení variantov (maximálny vážený súčet). Problematika optimalizácie je teda v zásade problematikou hľadania extrémov, extrémnych riešení.

Preto bude vhodné stručne charakterizovať prehľad základných problémov určovania extrémov, pripomenúť si základný matematický aparát využívaný pri hľadaní extrémov a zaradiť do týchto súvislostí i oblasti optimalizácie riešené metódami operačnej analýzy.

3.1 Voľné extrémymy funkcií

Problematika hľadania voľných extrémov funkcií jednej resp. viacerých premenných je všeobecne známa zo základného kurzu matematiky. Pripomeňme si len pre úplnosť, že extrém (maximum alebo minimum) priebehu funkcie jednej premennej (*obr.3.1*) určujeme z podmienky, že derivácia funkcie je rovná nule. To či ide o maximum alebo minimum potom určuje znamienko druhej derivácie (ak je kladná, ide o minimum, ak je záporná o maximum).

Obr.3.1. Extrém funkcie jednej premennej.



Príklad 3.1 Určte, ktorý z obdĺžnikov o obvode O ($O = 20$) má najväčší obsah!

Riešenie : Ak označíme strany obdĺžnika a a b , bude obsah $S = a \cdot b$ a obvod $O = 2 \cdot (a + b)$.

Zo vzťahu pre výpočet obvodu dostaneme

$$b = \frac{O}{2} - a$$

a po dosadení do vzťahu pre výpočet plochy platí

$$S = a \cdot \left(\frac{O}{2} - a \right) = \frac{O}{2} \cdot a - a^2 \quad \text{pre } a \in (0, O/2).$$

$$\text{Z podmienky} \quad \frac{dS}{da} = 0$$

dostaneme tvar

$$\frac{O}{2} - 2 \cdot a = 0 \Rightarrow a = \frac{O}{4}$$

a po dosadení do vzťahu pre b dostaneme $b = \frac{O}{4}$.

Z toho vyplýva, že maximálny obsah má štvorec ($a = b$), tzn. po číselnom dosadení $S = 25$.

V praxi sa možno často stretnúť s problémom, keď na jednej premennej závisia dve funkcie, ktoré majú extrémny pre rôzne hodnoty nezávisle premennej. Napríklad závislosti spotreby a výkonu spaľovacieho motora na otáčkach majú typický tvar podľa obr.3.2. V literatúre sa potom uvádza, že optimálna oblasť využitia spaľovacieho motora leží medzi otáčkami minimálnej spotreby $n_{\gamma \min}$ a otáčkami maximálneho výkonu $n_{P \max}$.

Je možné však vytvoriť novú kritériálnu funkciu $F_{(n)}$, (takisto závislú na otáčkach n), ktorej hodnoty možno určiť ako súčet hodnôt relatívneho poklesu výkonu a relatívneho zvýšenia spotreby

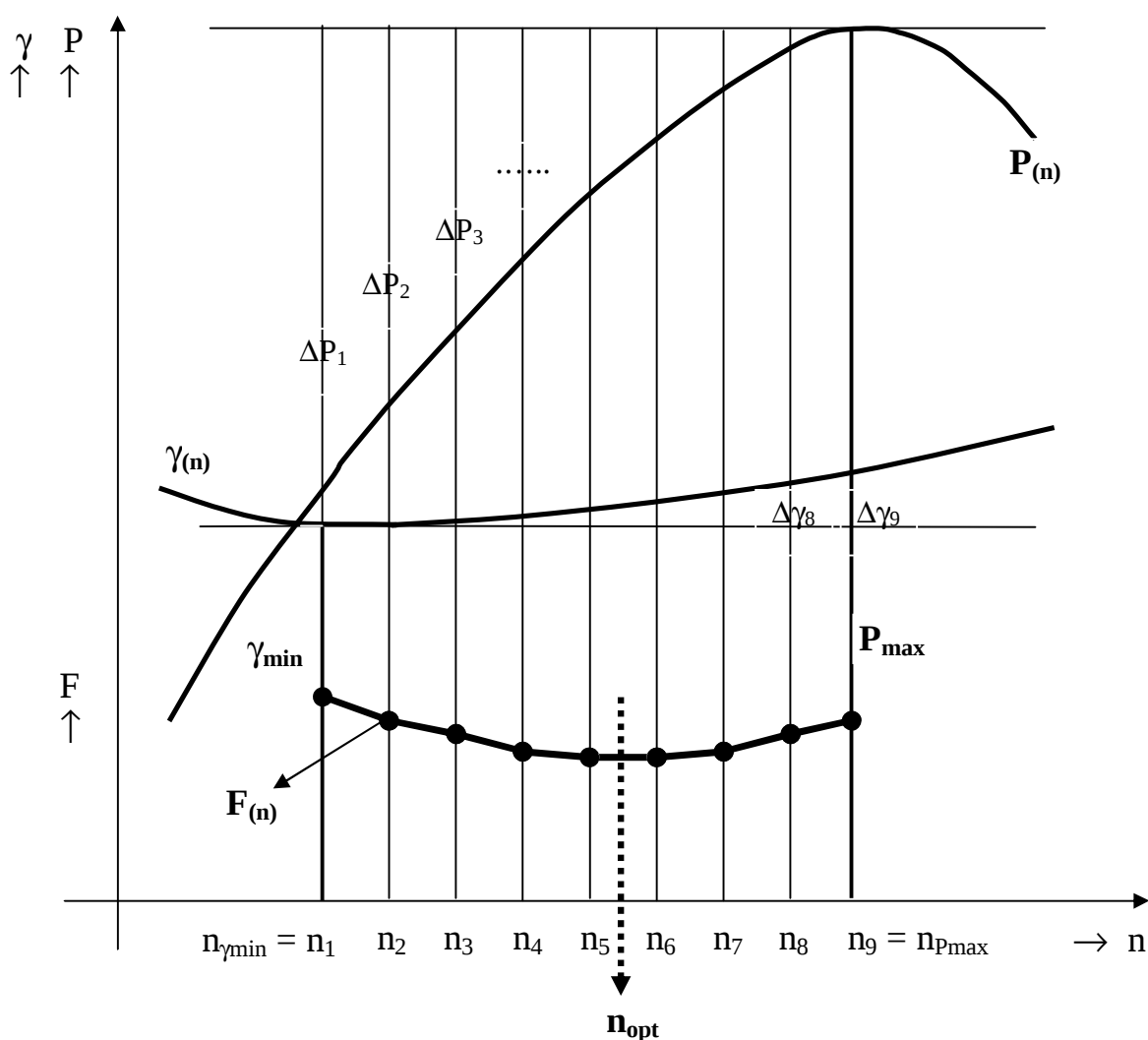
$$F_{(n)} = \frac{\Delta \gamma_{(n)}}{\gamma_{\min}} + \frac{\Delta P_{(n)}}{P_{\max}},$$

kde pre $\Delta \gamma(n)$ a $\Delta P(n)$ platí $\Delta \gamma_{(n)} = \gamma_{(n)} - \gamma_{\min}$

a $\Delta P_{(n)} = P_{\max} - P_{(n)}$.

Jej priebeh možno určiť numericky alebo graficky, pretože v tomto prípade bývajú pôvodné funkcie iba výnimočne vyjadrené analyticky. Pri pohľade na obr.3.2 vidíme, že i táto závislosť má svoje minimum a že teda možno určiť otáčky n_{opt} pre nové, združené (agregované) kritérium optima.

Je zrejmé, že pri uvedenom tvare nového kritéria optima dávame obidvom pôvodným závislostiam rovnakú váhu. Je však tiež možné jednoducho kritérium modifikovať, podľa toho, či budeme klásť väčší dôraz na úspornosť prevádzky alebo výkon. S podobným tvarom závislostí sa možno v technickej alebo ekonomickej praxi stretnúť častejšie (napr. závislosť životnosti a produktivity strojného zariadenia na pracovných podmienkach) a preto sú možnosti využitia uvedeného prístupu oveľa širšie.



Obr.3.2. Závislosť výkonu a spotreby spaľovacieho motora na otáčkach.

Pre voľné extrémny funkcií viacej premenných platia podobné vzťahy. Ak uvažujeme všeobecne funkciu n – premenných v tvare

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n),$$

súradnice extrému $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)}$ dostaneme ako riešenie sústavy n – rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Príklad 3.2 Určte rozmery nádrže o danom objeme V tak, aby jej povrch (dno a steny) bol minimálny.

Riešenie : Ak označíme rozmery dna x a y a výšku nádrže z , bude platiť pre objem vzťah

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \cdot F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a z podmienok (rovníc)

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

s využitím rovníc $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0$, (spolu $n + m$ rovníc) možno jednoducho zistiť hľadané súradnice extrémů $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ a Lagrangeove multiplikátory $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Príklad. 3.3 Nájdite extrémů funkcie v tvare $y = x_1^2 + x_2^2$ pri splnení podmienky $x_1^2 + 4x_2^2 - 1 = 0$.

Riešenie : Pomocná funkcia G bude v tvare

$$G(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda \cdot (x_1^2 + 4x_2^2 - 1) = x_1^2 \cdot (1 + \lambda) + x_2^2 \cdot (1 + 4\lambda) - \lambda.$$

Po vykonaní parciálnych derivácií, bude sústava rovníc pre určenie súradníc extrémů :

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2 \cdot x_1^{(0)} \cdot (1 + \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 2 \cdot x_2^{(0)} \cdot (1 + 4\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

a

$$x_1^{(0)2} + 4 \cdot x_2^{(0)2} - 1 = 0.$$

Pre $\lambda = -1$ dostaneme z druhej a tretej rovnice $x_2^{(0)} = 0$ a $x_1^{(0)} = \pm 1$. Podobne pre $\lambda = -1/4$ bude $x_1^{(0)} = 0$ a $x_2^{(0)} = \pm 0,5$.

Po dosadení prvej dvojice hodnôt do pôvodnej funkcie bude $y = 1$, čo znamená **lokálne maximum**, z druhej dvojice získame hodnotu $y = 0.25$ prezentujúcu **lokálne minimum**.

Je zrejmé, že určenie extrémů pri rozsiahlejších problémoch (väčšinou problémoch nelineárnych) je iba výnimočne možné priamo a obmedzujúce podmienky pritom bývajú častejšie v tvare nerovníc ako v tvare rovníc.

Poznámka : V technických alebo ekonomických aplikáciách sa často využívajú k modelovaniu základných závislostí lineárne funkcie, či už jednej alebo viacej

premenných. Je zrejmé, že tu s uvedenými postupmi nevystačíme, pretože derivácie lineárnych funkcií dávajú ako výsledok konštanty. Riešením takýchto úloh, kde i základná (účelová) funkcia i obmedzujúce podmienky majú tvar lineárnych funkcií viacej premenných sa potom zaoberá jedna zo základných metód operačnej analýzy – **lineárne programovanie** (vid'. kapitola 4 a ďalšie), ktoré k optimálnemu riešeniu dochádzajú väčšinou po krokoch tzn. **iteračným postupom**.

3.3 Základné pojmy variačného počtu

Pre úplnosť budú v tejto kapitole uvedené aj niektoré základné informácie o špecifickej oblasti určovania extrémov tzv. **variačnom počte**. Variačný počet sa zaoberá problematikou hľadania extrémnych hodnôt výrazov obsahujúcich integrál, tzv. **funkcionálov**. Jeho základy sú spojené s menami známych matematikov ako boli Euler, Lagrange, Bernoulli a iní.

Nimi pôvodne riešené úlohy ako napr.

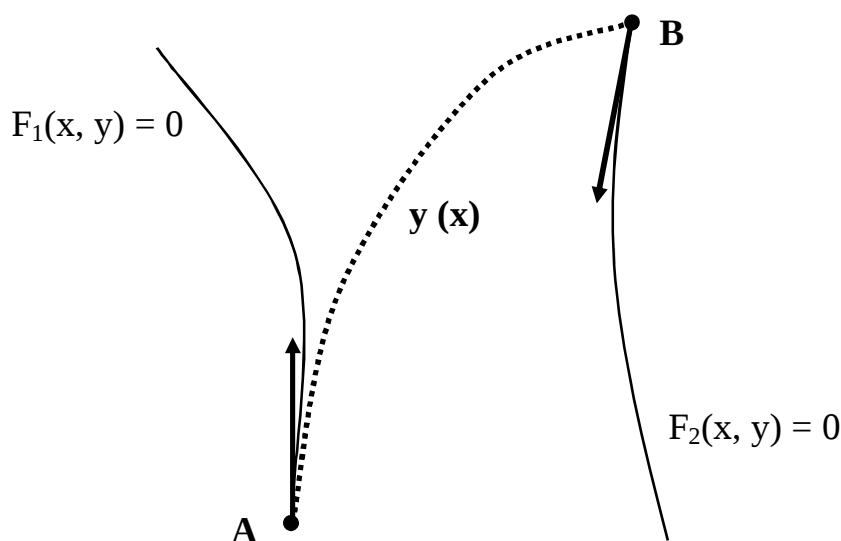
- určenie krivky, ktorá spája 2 body na ploche (v rovine) a má minimálnu dĺžku,
- určenie krivky, ktorá pri danom obvode vytvorí v rovine obrazec o najväčšej ploche,
- určenie krivky, po ktorej sa hmotný bod pôsobením gravitácie dostane z jedného bodu v rovine v minimálnom čase (tzv. úloha o brachystochrone)

a niektoré ďalšie sa postupne vyvinuli do moderných výpočtových metód, pomocou ktorých sa dnes riešia problémy ako napríklad tzv. **úloha s voľnými koncami** (alebo tiež transversálny problém) prezentovaná na obr.3.3. Jej zadáním je nájsť tvar spojnice $y = y(x)$ o minimálnej dĺžke medzi 2 bodmi A a B, ktoré sa zadanou rýchlosťou pohybujú po všeobecných krivkách $F_1(x, y) = 0$ a $F_2(x, y) = 0$.

Ak sa táto úloha rozšíri na trojrozmerný priestor, je zrejmé, že sa stala teoretickým základom dnešnej astronautiky.

V predchádzajúcich príkladoch bola funkcionálom vo väčšine prípadov dĺžka krivky (či už priestorovej alebo rovinnej), pre ktorú je známe, že napr. v rovine ju určuje výraz

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$



Obr. 3.3 : Variačná úloha s voľnými koncami.

Ďalšou významnou oblasťou, kde sa dnes variačný počet hromadne využíva v technickej praxi, je riešenie základnej úlohy technickej pružnosti a pevnosti tzn. **určovanie deformácie a namáhania** ľubovoľne zložitých a ľubovoľne zaťažených konštrukcií. Funkcionálom je tu potenciálna energia deformovaného telesa (konštrukcie) vyjadrená vo forme integrálu a aplikáciou variačného počtu sa hľadá taký tvar, ktorý je charakterizovaný minimom potenciálnej energie.

Túto úlohu numericky rieši **metóda konečných prvkov** (Finite Element Method), ktorá je v súčasnosti považovaná za univerzálnu metódu určovania pevnostných i dynamických vlastností konštrukcií.

Pre ilustráciu matematického aparátu, ktorý sa vo variačnom počte využíva si uveďme, aký tvar nadobudne základná rovnica variačného počtu pre najjednoduchší funkcionál v tvare

$$I [y (x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx.$$

Z podmienky, že variácia funkcionálu (odtiaľ názov „variačný počet“) musí byť pre extrém rovná nule tzn.

$$\delta I [y_o(x)] = 0,$$

sa odvodzuje jeden z dvoch základných tvarov rovnice variačného počtu

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y'(x) - \frac{d}{dx} F_{y'y'} \cdot y(x) = 0$$

tzv. Eulerov tvar, alebo tvar

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

ktorý predstavuje tzv. Lagrangeov tvar. Symboly F_y a F_x pritom znamenajú parciálne derivácie podľa jednotlivých premenných. Základnými rovnicami, s ktorými variačný počet pracuje sú teda parciálne diferenciálne rovnice. Ich riešením je potom tvar funkcie, pre ktorú zadaný funkcionál nadobúda extrémnych hodnôt tzv. **extremála**.

Z uvedeného nepriamo vyplýva, že úlohy variačného počtu sú v uzatvorenom tvare exaktne riešiteľné iba výnimočne (aj to iba v prípadoch riešenia úloh najjednoduchších) a sú v súčasnosti väčšinou riešené metódami numerickej matematiky s maximálnym využitím výpočtovej techniky.

CVIČENIA

1. Vypočítajte optimálny rozmer nosníka obdĺžnikového prierezu namáhaného na ohyb, ktorý je možné vyrezať z guľatiny daného prierezu.
2. Nájdite najkratšiu vzdialenosť bodu $P[0, 1]$ od elipsy zadanej rovnicou v tvare $4x^2 + 4y^2 = 36$.
3. Určte na ploche $f(x, y, z) = 0$ krivku, ktorá je najkratšou spojnicou dvoch rôznych bodov $P_0[x_0, y_0, z_0]$ a $P_1[x_1, y_1, z_1]$ tejto plochy.
4. Určte krivku $y = y(x)$, ktorá spája dva body A a B, ležiace v tej istej rovine, nie však na spoločnej vertikále, pričom hmotný bod M pohybujúci sa po tejto krivke iba pôsobením zemskej tiaže sa dostane z bodu A do bodu B za najkratší čas. Odpor prostredia a trenie neuvažujte.

LITERATÚRA

- [1] *Rektorys, K. – a kol. : Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1973.*
- [2] *Rektorys, K. : Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. SNTL, Praha 1974.*
- [3] *Dantzig, G. B. : Lineárne programovanie a jeho rozvoj. SNTL, Bratislava 1966.*
- [4] *Lasdow, L., S. : Optimizacia bolšich sistem. Nauka, Moskva 1975.*

4. LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

*V krízových situáciách,
ktoré nútia ľudí rozhodnúť sa medzi rôznymi metódami,
väčšina zvolí tú najhoršiu.*

RUDINOV ZÁKON

Oblasť lineárneho programovania patrí medzi najrozšírenejšie a najviac prepracované oblasti matematického programovania, tj. hľadania optimálnych riešení úloh s obmedzujúcimi podmienkami. Pritom, ako názov napovedá, u úloh lineárneho programovania obe základné časti ich matematického modelu ľubovoľného problému tzn. **cieľ riešenia** vyjadrený **cieľovou** (kriteriálnou, účelovou) **funkciou** aj **obmedzujúce podmienky** majú tvar lineárnych funkcií viacej premenných.

Všeobecne možno úlohu lineárneho programovania zapísať matematickým modelom v tvare

$$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \mathbf{K K K} + c_n \cdot x_n \rightarrow \text{opt (max, min)} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \mathbf{K K K K} + a_{1n} \cdot x_n & \geq = < & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \mathbf{K K K K} + a_{2n} \cdot x_n & \geq = < & b_2 \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \mathbf{K K K} + a_{mn} \cdot x_n & \geq = < & b_m \end{array} \quad (4.2)$$

kde rovnica (4.1) vyjadruje **účelovú funkciu** a sústava nerovníc príp. rovníc (4.2) popisuje **obmedzujúce podmienky** problému.

Pri použití maticového zápisu možno problém zapísať jednoducho v tvare :

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} && \rightarrow && \mathbf{opt} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &&& && > = < \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \\ c_n \end{bmatrix}$$

je vektor koeficientov účelovej funkcie,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \\ x_m \end{bmatrix}$$

je stĺpcový vektor premenných problému.

$$\mathbf{A}_{[m,n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{M} & \mathbb{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{L} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

je matica sústavy obmedzujúcich podmienok a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \\ b_m \end{bmatrix}$$

je stĺpcový vektor pravej strany obmedzujúcich podmienok.

4.1 Príklady jednoduchých úloh lineárneho programovania

Pomocou lineárneho programovania je možné určovať riešenia prakticky ľubovoľných problémov optimalizácie. Záleží len na schopnosti formulovať zadanú úlohu a zostaviť jej matematický model tak, aby s požadovanou presnosťou úlohu popisoval. Pri zostavovaní modelu sa osvedčilo dodržiavať nasledujúcu hrubú postupnosť krokov :

- a) **Slovné zadanie – formulácia úlohy.**
- b) **Formalizácia zápisu do tabuľky.**
- c) **Zostavenie matematického modelu úlohy, obsahujúceho dve základné časti :**
 - I. účelovú funkciu a smer jej optimalizácie (MAX, MIN),
 - II. sústavu obmedzujúcich podmienok v tvare nerovníc, príp. rovníc
- d) **Samotné optimálne riešenie úlohy.**

Demonštrujme si tento základný postup na klasickom prípade aplikácie teoretického aparátu lineárneho programovania – optimálnom pláne výroby.

Príklad 4.1 Optimálny plán výroby.

a) **Slovné zadanie**

Podnik vyrába 2 typy výrobkov V_1 a V_2 v dvoch prevádzkach P_1 a P_2 . Za jeden výrobok V_1 realizuje zisk 10 jednotiek (tisíc), za jeden výrobok V_2 zisk 12 jednotiek. Kapacita prevádzky P_1 stačí na výrobu 6 výrobkov V_1 na zmenu alebo výrobu 12 výrobkov V_2 na zmenu. Kapacita prevádzky P_2 je alebo 12 výrobkov V_1 alebo 8 výrobkov V_2 na zmenu.

Úlohou je naplánovať výrobu (určiť počty výrobkov V_1 a V_2) tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk.

b) **Formálny zápis do tabuľky**

Výrobok Prevádzka	V_1	V_2	Kapacita
P_1	6	12	1
P_2	12	8	1
Zisk	10	12	MAX

c) Zostavenie matematického modelu úlohy

Po formálnom zápise úlohy do tabuľky je už vytvorenie jej matematického modelu elementárne. Ak hľadanému počtu výrobkov V_1 priradíme premennú x_1 a hľadanému počtu výrobkov V_2 premennú x_2 je zrejmé, že účelová funkcia bude mať tvar

$$z = 10 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX},$$

a obmedzujúce podmienky vyplývajúce z toho, že nesmú byť prekročené disponibilné množstvá (zásoby) surovín budú v tvare

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

pre prvú prevádzku a

$$\frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

pre druhú prevádzku. Z fyzikálneho princípu úlohy pritom vyplývajú ešte dve ďalšie obmedzujúce podmienky (počet výrobkov nemôže byť záporné číslo) a preto platí

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pre úplnosť uvedme tento model ešte v kompaktnom maticovom zápise, ktorého tvar bude

$$z = [10, 12] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \max$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}, & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12}, & \frac{1}{8} \\ 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ \leq \\ \geq \\ \geq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) Vlastné riešenie úloh lineárneho programovania

Do podobného tvaru možno pritom upraviť nespočetné množstvo úloh. Uvedieme aspoň niektoré klasické príklady, na ktoré sa lineárne programovanie najčastejšie prakticky využíva. Je zrejmé, že modely reálnych podnikov budú komplexnejšie a obmedzujúcich podmienok bude podstatne viac.

Napr. spotreba energie, spotreba pracovnej sily, kapacita vnútropodnikovej i vonkajšej dopravy a mnoho ďalších a že súčasne i kritériálne funkcie môžu byť komplexnejšie tzn. môžu spájať viac kritérií s rôznymi váhami podľa kapitoly 2. To už je ale záležitosť skôr formálna, pretože rozhodujúce je, že matematické modely sú rovnakého typu.

Príklad 4.2 Optimálny plán výroby obmedzený zásobami (surovín, súčiastok)

a) Slovné zadanie

Opravovňa robí 3 druhy opráv O_1 , O_2 , O_3 , na ktoré spotrebováva 2 druhy súčiastok S_1 a S_2 . Zisky z jednotlivých opráv sú po rade 54, 45 a 52 jednotiek. Na opravu O_1 (1.typu) sa pritom spotrebujú 2 súčiastky S_1 a 3 súčiastky S_2 , na opravu O_2 je potrebná 1 súčiastka S_1 a 2 súčiastky S_2 a na O_3 potrebujeme 3 súčiastky S_1 a 2 súčiastky S_2 . Na sklade je pritom 600 súčiastok S_1 a 800 súčiastok S_2 . Ďalšou požiadavkou je, že pre zabezpečenie chodu organizácie je potrebné zabezpečiť minimálne 50 opráv O_1 , 100 opráv O_2 a 80 opráv O_3 . Úlohou je naplánovanie počtov opráv tak, aby zisk opravovne za ich vykonanie bol maximálny.

b) Tabuľka úlohy

Opravy	O_1	O_2	O_3	Zásoba
Súčiastky				
S_1	2	1	3	600
S_2	3	2	2	800
Min. počty opráv	50	100	80	
Zisk	54	45	52	MAX

c) Matematický model

$$z = 54 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 + 52 \cdot x_3 \rightarrow \text{MAX}$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 600$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 800$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_3 \geq 80$$

Medzi klasické úlohy lineárneho programovania patria aj tzv. zmiešavacie (nutričné) problémy, ktoré je možné demonštrovať na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.3 Zmiešavací problém.

a) Slovné zadanie

Úlohou je vyrobiť pri minimálnych nákladoch zmes o obsahu minimálne 54 jednotiek zložky A, minimálne 45 jednotiek zložky B a minimálne 52 jednotiek zložky C. K dispozícii sú 2 suroviny S_1 a S_2 o jednotkových cenách 600 a 800 jednotiek. Pritom surovina S_1 obsahuje v jednotkovom množstve 2 jednotky zložky A, 1 jednotku zložky B a 3 jednotky zložky C, surovina S_2 obsahuje 3 jednotky zložky A, 2 jednotky zložky B a 2 jednotky zložky C.

b) Tabuľka úlohy

Suroviny Zložky	S_1	S_2	Požiadavky
A	2	3	54
B	1	2	45
C	3	2	52
Ceny	600	800	MIN

c) Matematický model úlohy

$$z = 600 \cdot x_1 + 800 \cdot x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 54$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 45$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 52$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Formálne na rovnaký model vedie aj modifikácia klasického zadania nutričnej úlohy, ktorá rieši optimálne zloženie stravy s udanými požiadavkami na dodržanie zásad zdravého stravovania (percento základných zložiek stravy v jedlách) s cieľom minimalizovať náklady na nákup potravín, na spotrebovanú energiu a prácu pri príprave jedál.

Ďalšou z klasických úloh lineárneho programovania je návrh optimálneho rezného plánu.

Príklad 4.4. Optimálny rezný plán.

a) Slovné zadanie

Z polotovaru o dĺžke $l = 8$ m je potrebné narezať minimálne 1000 prírezov o dĺžke $l_1 = 2,5$ m, 600 prírezov dĺžky $l_2 = 3,0$ m a 200 prírezov dĺžky $l_3 = 3,5$ m tak, aby odpad vzniknutý pri rezaní bol minimálny.

b) Tabuľka úlohy

Dĺžka prírezu	Varianty rezania						Potreba
	1	2	3	4	5	6	
$l_1 = 2,5$ m	3	-	-	2	1	-	1 000
$l_2 = 3,0$ m	-	2	-	1	-	1	600
$l_3 = 3,5$ m	-	-	2	-	1	1	200
Odpad	0,5	2,0	1,0	0	2,0	1,5	MIN

c) Matematický model

$$z = 0,5 \cdot x_1 + 2,0 \cdot x_2 + 1,0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 2,0 \cdot x_5 + 1,5 \cdot x_6 \rightarrow \text{MIN}$$

$$\begin{array}{rcll}
 3 \cdot x_1 & + 2 \cdot x_4 & + x_5 & \geq 1000 \\
 & 2 \cdot x_2 & + x_4 & \geq 600 \\
 & & 2 \cdot x_3 & + x_5 + x_6 \geq 200 \\
 & & & x_j \geq 0 \text{ pre } j=1\dots6
 \end{array}$$

Z porovnania uvedenej tabuľky a matematického modelu je zrejmé, že v tomto prípade boli za premenné úlohy $x_1, x_2, \dots, x_6$ zvolené použité počty možných variantov rezania, ktorými možno z polotovaru požadované dĺžky narezať a koeficienty účelovej funkcie $c_1, c_2, \dots, c_6$ sú dĺžky odpadu vznikajúce pri použití jednotlivých variantov.

Poznámka : Uvedený príklad predstavuje klasický model optimálneho rezného plánu uvádzaný všeobecne v literatúre. Jeho riešením je

$x_3 = 100, x_4 = 600, x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$ a hodnota účelovej funkcie $Z = 100$.

Dosadením do obmedzujúcich podmienok zistíme, že sú splnené :

$$2 \cdot 600 > 1000$$

$$600 = 600$$

$$2 \cdot 100 = 200.$$

Pri detailnejšom posúdení však zistíme, že pri uvedenom riešení bolo narezaných navyše 200 ks dĺžky 2,5 m. Záleží na konkrétnych podmienkach, či na uvedené množstvo bude prípadný odbyt. Preto niekedy výhodnejším kritériom pre prevádzkovateľa pily bude minimálny počet spotrebovaných polotovarov, čo možno zapísať formou účelovej funkcie v tvare

$$Z' = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \text{MIN}.$$

Pri tomto riešení ($x_2 = 50$, $x_3 = 100$, $x_4 = 500$, $x_1 = x_5 = x_6 = 0$, $Z' = 650$) dostaneme síce väčší odpad ($Z = 200$ m), avšak celkový počet použitých polotovarov sa zníži o 50 ks, tzn., že celková narezaná dĺžka ($650 \times 8 = 5200$) bude o 400 m kratšia, ako v prvom prípade.

Ďalší príklad z vojenskej oblasti rieši problém optimálnej ochrany objektu.

Príklad 4.5 Optimálna ochrana objektu.

a) Slovné zadanie

Veliteľ má za úlohu brániť základňu proti leteckým útokom. K dispozícii má 5 kusov typov rakiet R_1 a R_2 . U rakety R_1 stojí inštalácia jednej z nich 7 jednotiek nákladov, u R_2 stojí inštalácia 8,5 jednotiek. K dispozícii má celkom 60 jednotiek nákladov. Jedná raketa R_1 vyžaduje obsluhu 6 mužov, jedná raketa R_2 obsluhu 2 mužov. Pritom je k dispozícii 32 vycvičených mužov. V prípade, že by základňa nebola vôbec bránená, je predpoklad jej zničenia 95%. Jedná raketa R_1 je schopná ubrániť 13% hodnoty základne, raketa R_2 9%. Úlohou je zabezpečiť maximálnu možnú ochranu objektu príp. jeho minimálne zničenie .

b) Tabuľka úlohy

Rakety			
Položky	R_1	R_2	Zásoba
Náklady	7	8,5	60
Obsluhy	6	2	32
Zásoby	5	5	
Ochrana (%)	13	9	MAX

c) Matematický model úlohy

$$z = 13.x_1 + 9.x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\text{príp. } z^* = 95 - 13.x_1 - 9.x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

$$7.x_1 + 8,5.x_2 \leq 60$$

$$6.x_1 + 2.x_2 \leq 32$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq 5$$

Príklad 4.6 Optimálny plán výroby.

a) Slovné zadanie

Podnik vyrába 2 typy výrobkov V_1 a V_2 , pri čom spotrebováva dva druhy surovín S_1 a S_2 . Za jeden výrobok V_1 realizuje zisk 70 tisíc Sk, za jeden výrobok V_2 realizuje zisk 90 tisíc Sk. Na výrobu výrobku V_1 je potrebných 5 jednotiek suroviny S_1 a 2 jednotky suroviny S_2 a na výrobu výrobku V_2 sa spotrebujú 4 jednotky suroviny S_1 a 5 jednotiek suroviny S_2 . Zásoba suroviny S_1 je 1300 jednotiek a zásoba suroviny S_2 je 1200 jednotiek. Úlohou je naplánovať výrobu tak, aby podnik dosiahol maximálny zisk.

b) Formálny zápis do tabuľky

Výrobok Prevádzka	V_1	V_2	Kapacita
S_1	5	4	300
S_2	2	5	200
Zisk	70	90	MAX

c) Matematický model úlohy

$$z = 70.x_1 + 90.x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$5.x_1 + 4.x_2 \leq 1300$$

$$2.x_1 + 5.x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Podobných úloh by bolo možné uviesť desiatky a dajú sa bez problémov nájsť v bohatej dostupnej literatúre zaoberajúcej sa problematikou lineárneho programovania. Niektoré sú k dispozícii v príkladoch na precvičenie uvedených za kapitolou prípadne ďalšie budú uvedené v pripravovaných skriptách „Návody na cvičenia z operačnej analýzy I“.

Heslovito je možné uviesť niektoré z nich :

- optimálny plán ničenia,
- optimálny plán montáže,
- optimálne nasadenie jednotky,
- optimálne zloženie strojových zostav,
- optimálne osevné plány, ale i
- optimálne plány rozvozu tovaru (dopravná úloha),
- optimálne umiestnenie výrobní,
- optimálne priradenie a pod.,

ale taktiež

- najkratšia cesta v grafe,
- maximálny tok v sieti,
- optimálny plán zložitých projektov atď.

Ako bude uvedené v ďalšom, prakticky všetky úlohy bude možné riešiť všeobecnými algoritmi lineárneho programovania, avšak pre niektoré z nich – dopravný a priradovací problém, úlohy teórie grafov - boli vyvinuté špeciálne metódy a algoritmy riešenia, ktoré sú efektívnejšie ako postupy všeobecné.

4.2 Grafické riešenie úloh lineárneho programovania

Jednoduchšie úlohy lineárneho programovania s dvomi resp. tromi premennými možno výhodne riešiť graficky a na postupe riešenia si názorne demonštrovať niektoré základné pojmy a princípy, ktoré pri riešení úloh s viac premennými nie sú natoľko zrejmé. Zo základov analytickej geometrie v rovine, prípadne trojrozmernom priestore je známe, že grafickým znázornením lineárnej funkcie dvoch premenných v rovine je **priamka**. V trojrozmernom priestore predstavuje lineárnu funkciu 3 premenných **rovina**.

Základný postup riešenia si demonštrujeme na riešení *príkladu 4.1*, pre ktorý boli obmedzujúce podmienky definované v tvare :

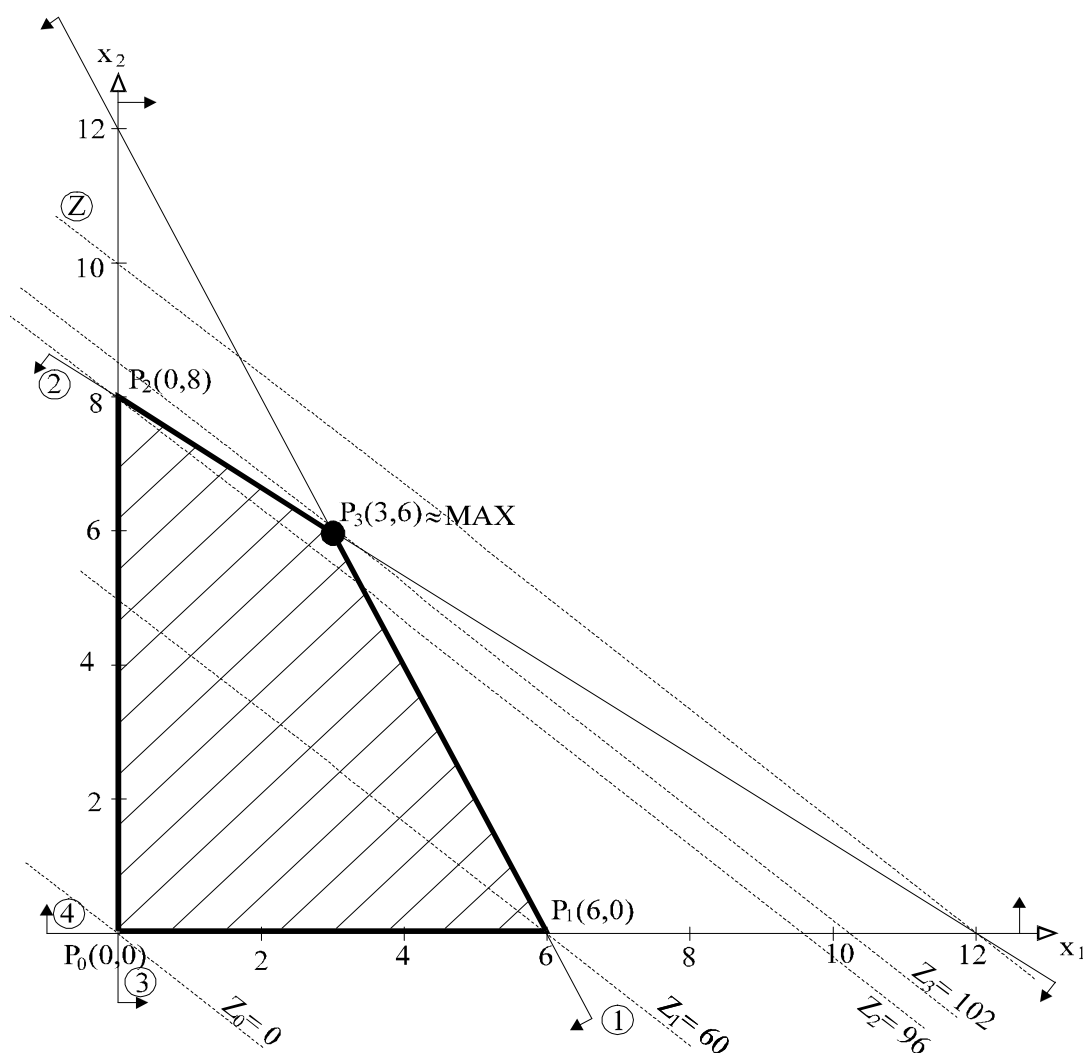
$$(1) \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

$$(2) \quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0$$

$$(4) \quad x_2 \geq 0$$

Každá z týchto štyroch priamok (očíslovaných podľa ich nerovníc) rozdelí rovinu na dve polroviny (*obr.4.1*), z ktorých v jednej je podmienka nerovnice splnená (vrátane hranice), v druhej podmienka splnená nie je.



Obr.4.1. Grafické riešenie príkladu 4.1.

U nerovníc, v ktorých hranice polrovín vytvárajú osi ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$), je určenie príslušných polrovín elementárne. U nerovníc, kde to nie je na prvý pohľad zrejmé, je výhodné dosadiť do príslušného vzťahu ((1) , (2)) súradnice počiatku a tak zistiť, či počiatok patrí do oblasti vyhovujúcej nerovnici, alebo nie. V našom prípade leží u oboch nerovníc v oblastiach vyhovujúcich danému tvaru nerovnice.

Prienikom týchto štyroch polrovín vznikol v našom prípade štvoruholník (vo všeobecnom prípade n -hran), ktorý vrátane svojich strán vytvára v rovine tzv. **oblasť prípustných riešení** (vyšrafovaná), tzn. oblasť, v ktorej sú splnené súčasne podmienky všetkých nerovníc.

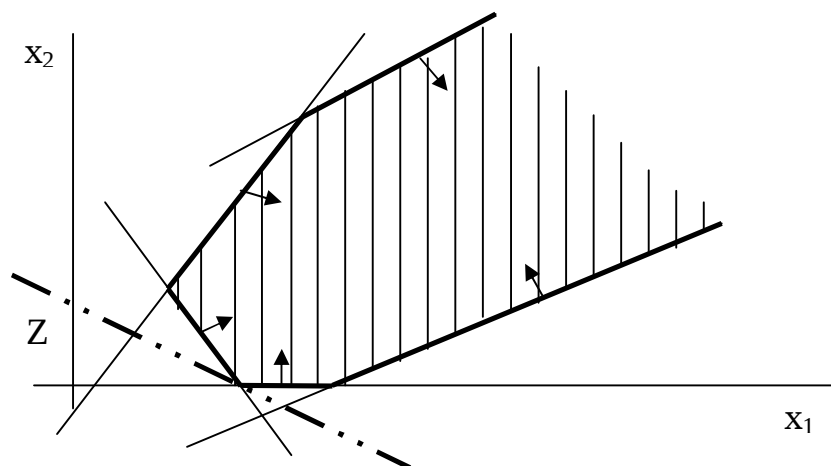
Je zrejmé, že prípustných riešení (dvojíc súradníc x_1 a x_2), ktoré vyhovujú uvedeným obmedzujúcim podmienkam, je nekonečne veľa, a práve cieľom riešenia úlohy lineárneho programovania je nájsť také riešenie (dvojicu hodnôt x_1 a x_2), pre ktoré nadobudne zadaná účelová funkcia extrémnych (optimálnych) hodnôt, tj. maxima (ako v našej úlohe), alebo minima. Pre zaujímavosť, ak dosadíme do rovnice účelovej funkcie postupne súradnice vrcholov získaného štvoruholníka, dostaneme hodnoty účelovej funkcie vo vrchole $P_0 (0, 0) \rightarrow z_0 = 0$, vo vrchole $P_1 (6, 0) \rightarrow z_1 = 60$, vo vrchole $P_2 (0, 8) \rightarrow z_2 = 96$ a vo vrchole $P_3 (3, 6) \rightarrow z_3 = 102$.

Ak si uvedené výrazy ($Z_i = 10 \cdot x_{1i} + 12 \cdot x_{2i}$) graficky zobrazíme, dostaneme sústavu rovnobežných priamok. Z ich grafického zobrazenia je zrejmé, že hraničnými hodnotami pri ktorých majú priamky Z_i s oblasťou prípustných riešení „niečo spoločné“ sú hodnoty $z_0 = 0$, ktorá zrejme znamená minimálnu prípustnú hodnotu a $z_3 = 102$, ktorá je maximálna, čiže súradnice bodu P_3 ($x_1=3$, $x_2=6$) znamenajú súčasne optimálne riešenie zadaného problému.

Ak sa teda vrátíme k pôvodnému zadaniu – optimálny plán výroby bude 3 výrobky V_1 a 6 výrobkov V_2 za smenu a bude pri ňom realizovaný zisk $Z = 102$ jednotiek.

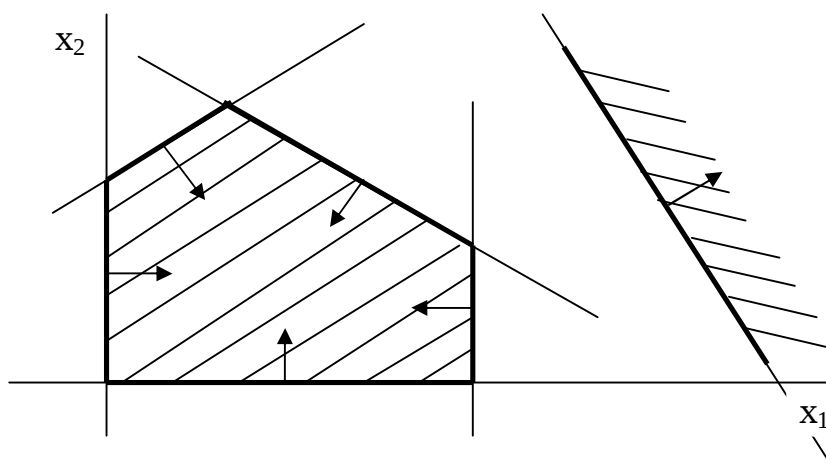
Poznámka :

1. Z geometrického názoru je zrejmé, že všeobecne môže mať úloha jedno jediné optimálne riešenie pre
 - oba smery optimalizácie (ako v uvedenom prípade),
 - riešenie iba pre jeden smer optimalizácie (obr.4.2.) ak je oblasť prípustných riešení neohraničená,



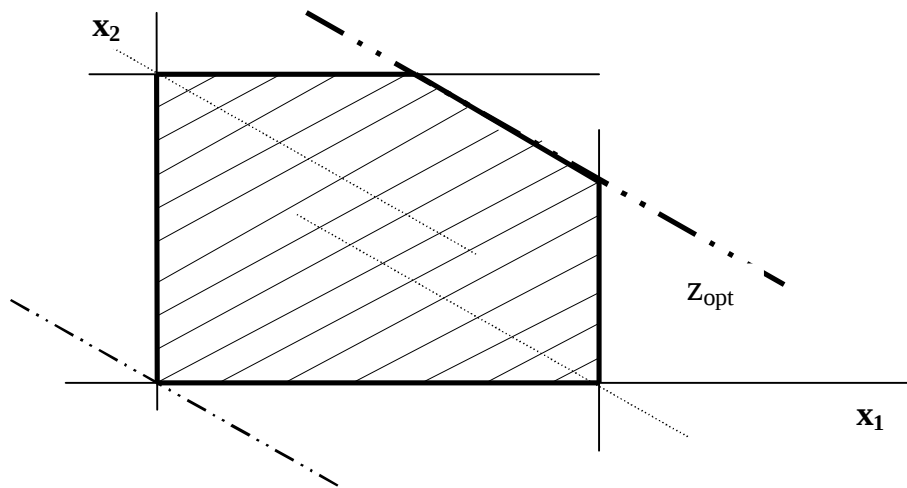
Obr.4.2. Neohraničená oblasť prípustných riešení.

- žiadne riešenie, ak obmedzujúce podmienky nevytvoria prienik - oblasť prípustných riešení (obr.4.3),



Obr.4.3. Prázdna množina prípustných riešení.

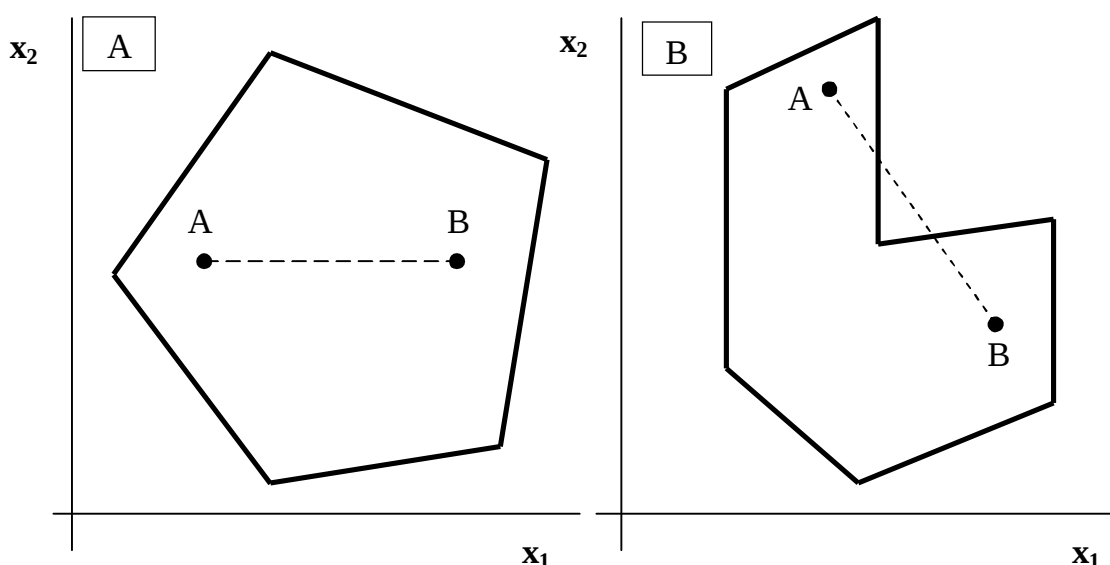
- nekonečne veľa riešení, ak smernica účelovej funkcie je totožná so smernicou niektorej z obmedzujúcich podmienok (obr.4.4).



Obr.4.4. : Problém s nekonečne veľa optimálnymi riešeniami.

2. Pre úplnosť je potrebné uviesť dva základné pojmy často používané v tejto problematike a to pojem **konvexná oblasť** (množina) prípustných riešení a **krajný bod**.

Pojem **konvexnej množiny** (oblasti) má svoju exaktnú definíciu v teórii vektorov, resp. množín. Pre našu potrebu postačuje uviesť hlavný rozdiel medzi konvexnou a nekonvexnou množinou názorne (obr.4.5 a, b), ktorý by sa mohol zjednodušene definovať tak, že spojnice ľubovoľných dvoch bodov konvexnej množiny celá do príslušnej množiny patrí, zatiaľ čo u nekonvexnej množiny tomu tak nie je.



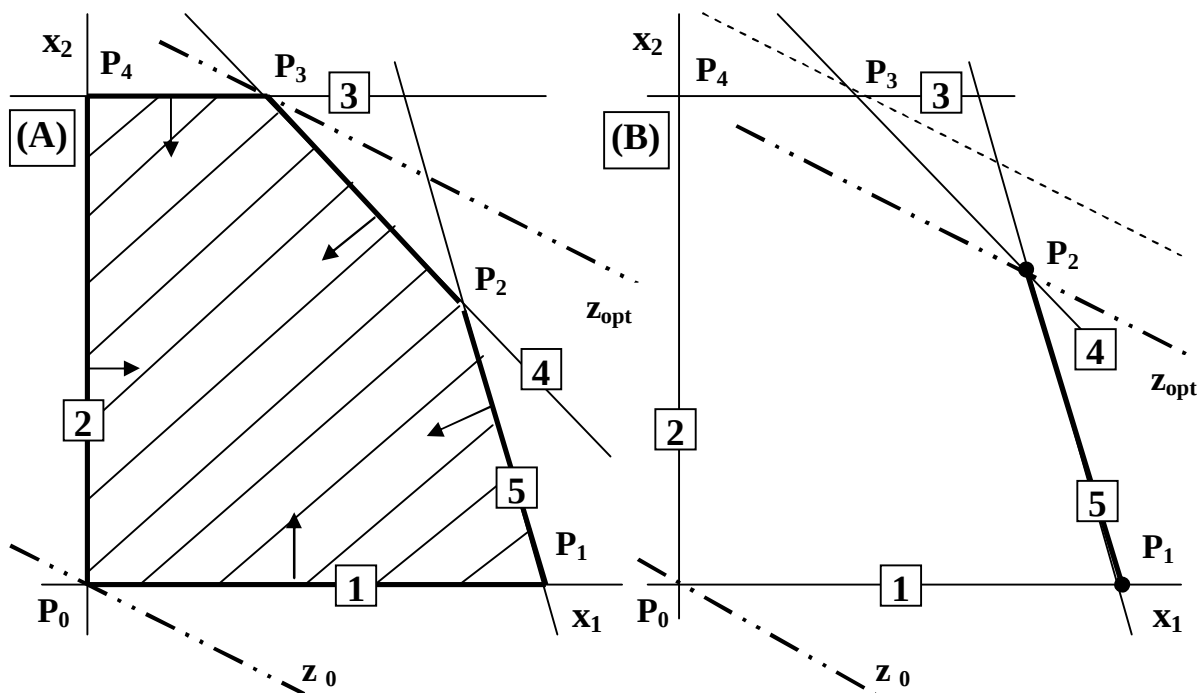
Obr.4.5.. Konvexná oblasť (množina A) a nekonvexná oblasť (množina B)

Krajný bod (vrchol) množiny je taký bod, ktorý nie je možné vyjadriť pomocou lineárnej kombinácie bodov iných, ale ktorý predsa k množine patrí.

3. Grafické vyjadrenie dáva tiež názornú ilustráciu o zásadnom rozdiel medzi obmedzujúcou podmienkou zadanou v tvare rovnice a nerovnice (obr.4.6).

A	1) $x_1 \geq 0,$	B	1) $x_1 \geq 0,$
	2) $x_2 \geq 0,$		2) $x_2 \geq 0,$
	3) $x_2 \leq b_3$		3) $x_2 \leq b_3$
	4) $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1,$		4) $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1,$
	5) $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2,$		5) $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2,$

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$



Obr.4.6. Rozdiel medzi obmedzujúcimi podmienkami v tvare nerovnice (A) a v tvare rovnice (B).

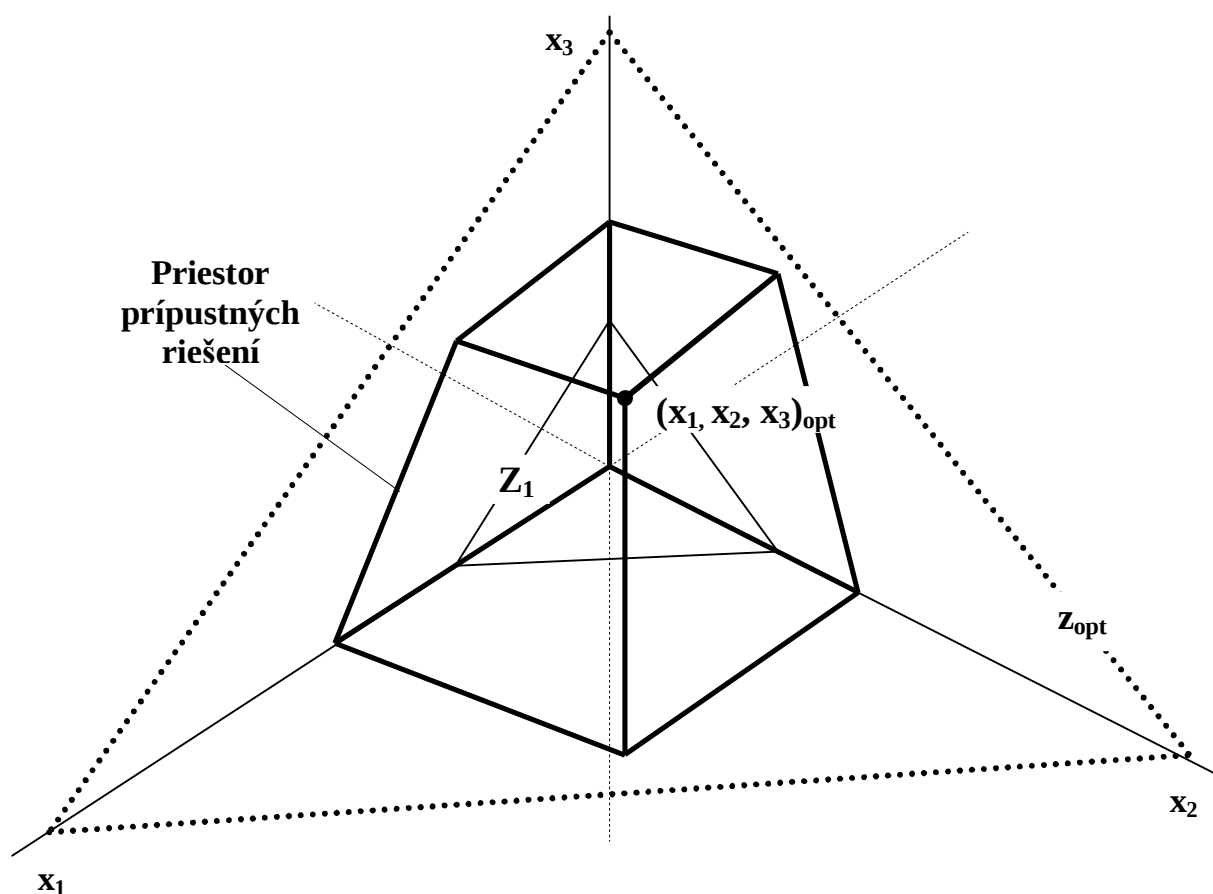
Aj keď sú výrazy v obidvoch príkladoch formálne podobné, je zrejmé, že ak pre *obr.4.6.b* platí podmienka (4) v tvare rovnice, oblasť prípustných riešení sa redukuje z päťuholníka (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) iba na úsečku (P_1, P_2), čo navyše pri naznačenom smere účelovej funkcie mení i optimálne riešenie (z vrcholu P_3 do P_2), tzn. hodnoty premenných x_1 a x_2 i optimálnu hodnotu účelovej funkcie.

4. Grafické vyjadrenie je možné pri vhodne zvolenej metóde premietania využiť i pre úlohy s troma premennými (*obr.4.7*).

Obmedzujúce podmienky majú aj v tomto prípade tvar nerovníc, v ktorých vystupujú 3 neznáme parametre a z ktorých každá rozdeľuje priestor na dva **polpriestory**. Jeden, v ktorom je podmienka nerovnice splnená a druhý, v ktorom podmienka splnená nie je. Prienikom týchto polpriestorov je potom mnohosten (polyéder), ktorý vytvára **oblasť (priestor) prípustných riešení**.

Takisto účelová funkcia vytvára pre rôzne zvolené hodnoty Z sústavu rovnobežných rovín, pričom o optimálnych riešeniach platí v zásade to, čo už bolo uvedené. Znamená to, že pokiaľ existuje riešenie, môže byť alebo jediné (v niektorom z vrcholov mnohostenu), ale môže ich byť tiež nekonečne veľa (na niektorej z hrán, alebo na celej stene).

Pre problémy s viac ako 3 premennými už s grafickým vyjadrením nevystačíme, pretože nám to už neumožňuje ľudská predstavivosť.



Obr.4.7. Grafické riešenie optimalizačnej úlohy s 3 premennými

O obmedzujúcich podmienkach a rovnici účelovej funkcie zvykneme hovoriť, že sú **rovnícami nadrovín** a pre oblasť prípustných riešení sa používa tiež výraz **konvexný polyéder**.

CVIČENIA

1. Podnik vyrába 2 druhy výrobkov V_1 a V_2 , ktoré sa opracovávajú na 2 typoch výrobných zariadení Z_1 a Z_2 . Zhotovenie jedného výrobku V_1 vyžaduje 5 hodín práce na stroji Z_1 a 2 hodiny práce na stroji Z_2 a výroba jedného výrobku V_2 vyžaduje 4 hodiny práce na stroji Z_1 a 3 hodiny práce na stroji Z_2 . Podnik má mesačne k dispozícii celkom 2500 strojových hodín na strojoch Z_1 a 2200 strojových hodín na strojoch Z_2 . Cena výrobku V_1 je 38 jednotiek a ceny výrobku V_2 je 29 jednotiek. Úlohou je sformulovať matematický model úlohy a úlohu vyriešiť graficky.
2. Podnik vyrába 3 výrobky - V_1 , V_2 a V_3 s cenami 20, 40 a 30 jednotiek. Tieto výrobky montuje z 3 montážnych celkov M_1 , M_2 , M_3 so zásobami 150, 120 a 90 zásobných jednotiek. Úlohou je navrhnúť plán výroby tak, aby bol zisk maximálny.

3. Krmovinová zmes musí obsahovať aspoň 60 jednotiek látky L_1 , 160 jednotiek látky L_2 a 180 jednotiek látky L_3 . Zmes je možné vyrábať z dvoch krmovín K_1 a K_2 , pričom kilogram krmoviny K_1 obsahuje 3 jednotky látky L_1 , 4 jednotky látky L_2 a 2 jednotky látky L_3 , pričom jej cena je 25 Sk. 1 kg krmoviny K_2 obsahuje 1 jednotku látky L_1 , 3 jednotky látky L_2 a 4 jednotky látky L_3 , pričom jej cena je 32 Sk. Sformulujte matematický model tak, aby celkové náklady na použité krmoviny boli čo najnižšie.

4. Určte graficky optimálne hodnoty účelovej funkcie

$$z = 20 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \quad (\text{MIN, MAX})$$

pri obmedzujúcich podmienkach v tvare

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \leq 5, \quad x_2 \leq 9,$$

$$8x_1 + 16x_2 \geq 48$$

$$20x_1 + 10x_2 \geq 60$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24.$$

5. Firma potrebuje pri stavbe mostu, železné tyče do betónu. K dispozícii je 1000 kusov tyčí dĺžky 550 cm a 800 kusov dĺžky 700 cm. Pri stavbe sú potrebné tyče dĺžky 200 cm a dĺžky 250 cm, pričom počet narezaných tyčí dĺžky 250 cm má byť aspoň trojnásobok počtu tyčí dĺžky 200 cm. Úlohou je navrhnúť koľko tyčí určenej dĺžky sa má narezať pri držaní stanovených podmienok, aby bol odpad pri rezaní minimálny.
6. Výrobný podnik vyrába 3 druhy pneumatík a pri ich výrobe spotrebovávajú 3 druhy surovín, ktoré má k dispozícii v obmedzenom množstve. Údaje o zásobách, cenách a spotrebe surovín pri výrobe jednotlivých druhov pneumatík sú uvedené v nasledovnej tabuľke. Napíšte matematický model úlohy a určte graficky výrobný sortiment podniku, aby bol zisk maximálny.

Surovina	P_1	P_2	P_3	Zásoba
S_1	1	1	-	100
S_2	-	2	2	200
S_3	3	-	3	300
Cena	10	20	50	MAX

LITERATÚRA

- [1] Dantzig, G. B. : *Lineárne programovanie a jeho rozvoj*. SNTL, Bratislava 1966.
- [2] Mejzlík, M. : *Základní metody operačního výzkumu a jejich aplikace v železničním vojsku*. Vojenská fakulta VŠDS, Žilina 1982.
- [3] Janáček, J. : *Operačná analýza I. Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina 1997*.
- [4] Slamková, E. – Cajchanová, O. – Chromjaková, F. : *Operačná a systémová analýza*. Strojnícka fakulta ŽU, Žilina 1997.
- [5] Kuben, J. : *Lineární programování*. Vojenská akademie , Brno 1992.

5. SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

*„Nikdy nie je čas urobiť to poriadne, ale
vždy sa nájde čas urobiť to ešte raz.,,*

MESKIMENOV ZÁKON

Univerzálnou metódou riešenia úloh lineárneho programovania je **simplexová metóda** (simplexový algoritmus), ktorá vyžaduje pre svoje použitie najskôr upraviť ľubovoľnú všeobecnú úlohu na tzv. **kanonický** (predpísaný, uzákonený) **tvár**.

Vlastné riešenie potom prebieha podľa formálne jednoduchého postupu :

1. **Určí sa východiskové (počiatočné) tzv. bázické riešenie.**
2. **Toto riešenie sa posúdi kritériom optima.**
3. **Ak je riešenie optimálne, výpočet končí.**
4. **Ak riešenie optimálne nie je, vykonajú sa úpravy v požadovanom smere rastu (alebo poklesu) účelovej funkcie.**
5. **Pokračuje sa bodom 2 dovedy, pokiaľ určené riešenie podmienkam optimálnosti nevyhovuje.**

Platí pravidlo, že ak je úloha prevedená na kanonický tvar, tak vždy možno nájsť optimálne riešenie po konečnom počte iteračných krokov.

5.1 Kanonický tvar úlohy lineárneho programovania

V predchádzajúcich kapitolách sme ukázali, že matematický model úlohy lineárneho programovania je tvorený väčšinou 2 základnými časťami :

- a) účelovou funkciou v tvare lineárnej funkcie viacej premenných a
- b) sústavou obmedzujúcich podmienok v tvare lineárnych nerovníc resp. rovníc

Kanonický tvar možno všeobecne napísať maticovo ako :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.1)$$

$$z - \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} = 0 \rightarrow \text{MAX (MIN)},$$

pričom, pre vektor premenných $\mathbf{x}$ a vektor pravej strany $\mathbf{b}$ musí platiť, že všetky ich zložky sú nezáporné. Formálne $b_i \geq 0, x_i \geq 0$.

Na maticu $\mathbf{A}$ je pritom navyše kladená požiadavka, že musí obsahovať tzv. **jednotkovú bázu** (tzv. simplex, z čoho vznikol názov metódy). V rozpísanom tvare vyjadrený kanonický tvar, z ktorého je zrejмый tvar matice sústavy bude :

$$\begin{array}{cccccccc} \left[\begin{array}{cc|c|c|cc|c|c} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1,n-m} & 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2,n-m} & 0 & 1 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{m,n-m} & 0 & 0 & \mathbf{K} & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_n \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \mathbf{M} \\ b_m \end{array} \right] \\ \mathbf{A}' & & \mathbf{J} & \mathbf{x} & \mathbf{b} \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \text{ pre } j = 1 \dots n$$

$$b_i \geq 0 \text{ pre } i = 1 \dots m$$

$$m < n$$

Ako vidíme, matica $\mathbf{A}$ o rozmeroch $(m \cdot n)$ je rozdelená na dve submatice, **všeobecnú maticu** $\mathbf{A}'$ o rozmeroch $(m, n-m)$ a **jednotkovú maticu** $\mathbf{J}$ o rozmeroch (m, m) . Pri tomto označení premenné $[x_{n-m+1}, x_{n-m}, \mathbf{K} x_n]$ tvoria vektor jednotkovej bázy (hovoríme o nich, že sú v báze).

Úpravy všeobecného modelu na kanonický tvar.

a) Pri nesplnení **podmienky nezápornosti** premennej je potrebné

- ak $x_j \leq 0$, dosadiť $x_j' = -x_j$, pre ktoré je podmienka nezápornosti splnená a po ukončení riešenia sa vrátiť k pôvodnej premennej;
- ak x_j je ľubovoľné, tzn. môže nadobúdať kladných i záporných hodnôt, nahradí sa novými 2 premennými podľa vzťahu $x_j = x_j'' - x_j'$, pre ktoré platí $x_j'' \geq 0, x_j' \geq 0$, pretože každé (kladné i záporné) číslo je možné vyjadriť ako rozdiel dvoch kladných čísiel.

b) Pri nesplnení podmienky nezápornosti pravej strany ($b_i < 0$) sa celá rovnica násobí (-1).

- c) Nerovnice typu „ $\leq$ “ sa prevedú na rovnice pridaním tzv. **prídavných premenných** napr. $3.x_1 + 2.x_2 \leq 3$ sa zmení na $3.x_1 + 2.x_2 + x_3 = 3$.
- d) Nerovnice typu „ $\geq$ “ sa analogicky prevedú na rovnice, ak sa prídavná premenná odpočíta a pripočíta sa tzv. **umelá premenná**.
- e) Jednotková báza sa v nerovniciach typu „ $\leq$ “ vytvorí automaticky z prídavných premenných. U rovníc (alebo nerovníc typu „ $\geq$ “, ktoré sme podľa bodu d) na rovnice previedli), je možné jednotkovú bázu vytvoriť alebo výpočtom (využitím Gauss–Jordanovej eliminácie), alebo zaradením tzv. **umelých premenných**, pre ktoré ale musíme zaviesť aj ďalšiu tzv. **pomocnú účelovú funkciu**.

Ako príklad si uveďme zadanie podobné príkladu 4.2. z predchádzajúcej kapitoly, na ktorom si budeme vysvetľovať celý postup využitia simplexového algoritmu.

Príklad.5.1

Slovná formulácia prvých troch obmedzujúcich podmienok nech je rovnaká ako v príklade 4.2 (tzn. spotreba súčiastok na jednotlivé výrobky a obmedzenia dané zásobami príslušných súčiastok). Pre jednoduchosť zrušíme požiadavky na minimálne počty jednotlivých výrobkov.

Matematický model potom bude :

$$z = 54.x_1 + 45.x_2 + 52.x_3 \rightarrow \text{MAX}$$

$$2.x_1 + x_2 + 3.x_3 \leq 600$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 \leq 800$$

Jeho úprava na kanonický tvar je elementárna :

$$z - 54.x_1 - 45.x_2 - 52.x_3 = 0 \quad (\text{MAX})$$

$$2.x_1 + x_2 + 3.x_3 + x_4 = 600$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 + x_5 = 800$$

Poznámka : Používame čiastočne odlišný postup oproti postupu štandardne používanému v literatúre a síce v tom, že rovnicu účelovej funkcie priradíme k ostatným rovniciam získaným úpravou účelových podmienok tak, že „z“ považujeme za ďalšiu bazickú premennú. Výhoda tohto postupu sa prejaví pri vlastnom riešení.

5.2. Vlastný simplexový algoritmus

Rámcová slovná formulácia algoritmu je uvedená v úvode tejto kapitoly. V ďalšom postupe riešenia je potrebné iba upresniť kritéria rozhodovania o optimálnosti riešenia a uviesť detailný postup pri úpravách (iteráciách) riešenia smerom k požadovanému optimu.

Ak si napíšeme maticový kanonický tvar úlohy lineárneho programovania tak, že do ($m+1$). riadku matice sústavy prepíšeme účelovú funkciu, dostaneme všeobecne

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \mathbf{K} + a_{1,n-m}.x_{n-m} + x_{n-m+1} & & = b_1 \\
 a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \mathbf{K} + a_{2,n-m}.x_{n-m} & + x_{n-m+2} & = b_2 \\
 a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + \mathbf{K} + a_{3,n-m}.x_{n-m} & + x_{n-m+3} & = b_3 \\
 \mathbb{M} & & \mathbb{M} \\
 a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \mathbf{K} + a_{m,n-m}.x_{n-m} & + x_n & = b_m \\
 a_{m+1,1}.x_1 + a_{m+1,2}.x_2 + \mathbf{K} + a_{m+1,n-m}.x_{n-m} & + z & = b_{m+1}
 \end{array} \quad (5.3)$$

Je zrejmé že prvých m –rovníc o n –neznámych, keď $m < n$, má všeobecne z matematického hľadiska nekonečne veľa riešení. Cieľom optimalizácie je potom vybrať z týchto nekonečne veľa riešení jedno jediné, pre ktoré nadobúda premenná „ z “ extrémnych hodnôt v zadanom smere (maximálnych alebo minimálnych). Zaužívaným spôsobom určenia jedného z množiny prípustných riešení je zvoliť ľubovoľné hodnoty ($n-m$) premenných, dosadiť ich do sústavy a zvyšných m premenných zo sústavy dorátať. Z tohto postupu vychádza aj simplexová metóda a to tak, že sa položí prvých ($n-m$) premenných rovných nule a z tvaru matice sústavy s jednotkovou bázou okamžite vyplynie východiskové bázické riešenie tzn.

$$\begin{array}{rcl}
 x_1, x_2, \mathbf{K}, x_{n-m} & = & 0, \\
 x_{n-m+1} & = & b_1, \\
 x_{n-m+2} & = & b_2, \\
 \mathbb{M} & & \\
 x_n & = & b_m
 \end{array} \quad (5.4)$$

a jemu prislúchajúca hodnota účelovej funkcie $z = b_{m+1}$. Kritériom optimálnosti pri tomto type zápisu sú hodnoty koeficientov v ($m+1$). rovnici s účelovou funkciou a síce :

- pri hľadaní **maxima** účelovej funkcie je znamením, že maximum už bolo dosiahnuté, ak všetky koeficienty v tejto rovnici sú nezáporné (tj. $a_{m+1,j} \geq 0$ pre $j = 1, 2 \dots n$),
- znakom dosiahnutia **minima** sú všetky koeficienty nekladné (tj. $a_{m+1,j} \leq 0$ pre $j = 1 \dots n$).

Ďalší postup riešenia (úpravy) je vhodné vysvetľovať po zapísaní sústavy (5.3) do tzv. **simplexovej tabuľky**, ktorá je jednak vhodným formulárom pre ručné riešenie úlohy a súčasne dáva i veľmi dobré východisko pre spracovanie programu pre počítačové riešenie úlohy.

Tvar simplexovej tabuľky (tab.5.1) vychádza z kanonického tvaru problému lineárneho programovania tzn., že do tabuľky sa pod označenie premenných x_j v záhlaví tabuľky prepíšu jednotlivé prvky matice sústavy, pod označenie vektora pravej strany **b** sa zapíšu jeho jednotlivé zložky b_i .

Tab. 5.1 Simplexová tabuľka.

Báza	b	x_1	x_2	..	x_k	..	x_{n-m+1}	x_{n-m+2}	..	x_n	z	w_i
x_{n-m+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	:	a_{1k}	:	1	0	:	0	0	b_1/a_{1k}
x_{n-m+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	:	a_{2k}	:	0	1	:	0	0	b_2/a_{2k}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
x_{n-m+r}	b_r	a_{r1}	a_{r2}	:	a_{rk}	:	0	0	:	0	0	b_r/a_{rk}
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
x_n	b_m	a_{m1}	a_{m2}	:	a_{mk}	:	0	0	:	1	0	b_m/a_{mk}
z	b_{m+1}	$a_{m+1,1}$ ($-c_1$)	$a_{m+1,2}$ ($-c_2$)	..	$a_{m+1,k}$ ($-c_k$)	..	0 ...	0 ...	..	0 ...	1	MAX (MIN)

Oproti kanonickému tvaru rozšírenej matice sústavy sú v tabuľke navyše dva stĺpce – stĺpec označený **báza** a stĺpec **pomocných hodnôt** w_i . V stĺpci báza je symbolmi uvedený zoznam premenných, ktoré tvoria jednotkovú bázu a v stĺpci označenom w_i sú zaznamenávané pomocné hodnoty w_i slúžiace počas výpočtu k rozhodovaniu o úpravách matice sústavy pri jednotlivých iteračných krokoch.

Je zrejmé, že okamžite po prvom vyplnení simplexovej tabuľky dostávame východiskové bázičné riešenie (ak si medzi bázičné premenné a zložky vektora pravej strany položíme znamienko „=“), súčasne s východiskovou hodnotou účelovej funkcie ($z = b_{m+1}$).

Kritériá optimálnosti bázičného riešenia už boli uvedené. Zostáva uviesť v krokoch základný postup pri úpravách neoptimálneho bázičného riešenia k jeho vylepšeniu požadovaným smerom. Princíp úprav spočíva v tom, že preto, aby sa bázičné riešenie zlepšilo, sa jedna z pôvodných bázičných premenných z bázy vyradí a miesto nej sa do bázy zaradí premenná nová.

Prvým krokom rozhodovania je rozhodnutie o tom, ktorú novú premennú je potrebné do bázy zaradiť k vylepšeniu riešenia. Rozhodnutie možno formulovať tak, že do bázy sa zaradí všeobecne premenná x_k , pre ktorú platí, že koeficient $a_{m+1,k}$ v jej stĺpci je v absolútnej hodnote najväčší v „nežiadúcom“ smere (tj. pri maximalizácii najväčší záporný v absolútnej hodnote a pri minimalizácii najväčší kladný).

K rozhodnutiu o tom, ktorú premennú je potrebné z bázy vyradiť, slúžia pomocné hodnoty w_i , ktoré v každom riadku vypočítame tak, že prvok pravej strany b_i vydělíme koeficientom a_{ik} zo stĺpca novozaradovanej bázičnej premennej ($w_i = b_i / a_{ik}$). Z bázy vyradíme tú bázičnú premennú, v ktorej riadku r je hodnota w_r minimálna kladná. Z toho vyplýva že príslušné a_{rk} musí byť kladné. Riadok vyradovanej bázičnej premennej sa stáva pre ďalšie úpravy tzv. **riadiacim (kľúčovým) riadkom** a prvok v jeho k -tom stĺpci a_{rk} tzn. v stĺpci novozaradovanej premennej je **riadiacim prvkom úprav** tzv. **pivotom**.

Podstatou ďalších úprav simplexovej tabuľky pre 1.iteráciu riešenia je využitie Gauss–Jordanovej eliminačnej metódy, ktoré prebieha v dvoch základných krokoch :

1. Riadiaci riadok r vydělíme pivotom preto, aby po úprave bol koeficient $a_{rk}^* = 1$.
2. Všetky ostatné prvky upravíme tzv. Gaussovým eliminačným krokom tak, že bude platiť

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} \cdot a_{rj}.$$

Slovne možno tento vzorec rozpísať nasledovne : Nový koeficient (prvok) v tabuľke dostaneme, ak **od pôvodného prvku odpočítame podiel nulovaného prvku a pivota vynásobený koeficientom z riadiaceho riadku v stĺpci upravovaného prvku**.

Uvedený postup je vhodné demonštrovať na riešení jednoduchého príkladu. Ak si prepíšeme do simplexovej tabuľky *príklad 5.1* dostaneme tvar uvedený v *tab.5.2.a*.

Tab.5.2.a : Riešenie simplexového algoritmu – nájdenie počiatočného východiskového riešenia.

Báza	b	↓ x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	z	w
x ₄	600	2	1	1	1	0	0	300
← x ₅	800	<u>3</u>	2	2	0	1	0	<u>800/3</u>
z	0	-54	-45	-52	0	0	1	MAX

Z uvedenej tabuľky okamžite možno určiť **počiatočné (východiskové)** **bázické riešenie** úlohy : $x_1, x_2, x_3 = 0$; $x_4 = 600, x_5 = 800$ a jemu odpovedajúca hodnota účelovej funkcie $z^{(0)} = 0$. Je zrejmé, že uvedené riešenie formálne patrí do množiny prípustných riešení, ale už z toho, že nenulové hodnoty nadobudli prídavné premenné vyplýva, že zrejme nepôjde o riešenie optimálne.

Potvrdzujú to aj koeficienty v riadku účelovej funkcie, kde sú až tri záporné hodnoty. Najväčšia z nich v absolútnej hodnote („najzápornejšia“) je hodnota $a_{13} = -54$ v prvom stĺpci, z čoho vyplýva, že riešenie úlohy sa vylepší v zmysle požadovaného optima, ak do bázy zaradíme premennú x_1 .

Poznámka.: V uvedenom príklade sú hodnoty koeficientov v riadku účelovej funkcie priamo rovné záporne braným hodnotám jej koeficientov ($a_{13} = -c_1, a_{23} = -c_2$ a $a_{33} = -c_3$), pretože po zaradení prídavných premenných bola upravená účelová funkcia priamo v bázickom tvare. Vo všeobecnosti to však platiť nemusí (ako bude ukázané v ďalšej kapitole). Preto bolo zvolené aj uvedené označenie koeficientov.

Zostáva určiť, ktorú premennú je potrebné z bázy vyradiť. Kritériom sú pomocné hodnoty, pre ktoré platí

$$w_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{600}{2} = 300, \quad w_2 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{800}{3} = 266 \frac{2}{3}.$$

Menšia z nich je w_2 a preto z bázy bude vyradená premenná x_5 . Z toho vyplýva, že riadiacim riadkom úpravy bude riadok druhý a riadiacim prvkom (pivotom) prvok $a_{21} = 3$.

Tým dostaneme základné východiskové údaje pre úpravy tabuľky v prvej iterácii tzn., že po úprave musí byť prvok $a_{21} = 1$, a prvky a_{11} a a_{31} sa musia rovnať nule (nulované prvky). Po úpravách v naznačenom zmysle bude ďalší krok riešenia podľa *tab.5.2.b*.

Tab.5.2.b : Riešenie simplexového algoritmu – 1.iterácia.

Báza	b	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	z	w
$\leftarrow x_4$	200/3	0	-1/3	<u>5/3</u>	1	-2/3	0	<u>40</u>
x_1	800/3	1	2/3	2/3	0	1/3	0	400
z	14 400	0	-9	-16	0	54/3	1	MAX

Ak rovnakým postupom posúdime tabuľku po 1.iterácii, vidíme, že riešenie po prvej iterácii je

$$x_1 = 800/3, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 200/3, \quad x_5 = 0$$

ktorému prislúcha hodnota účelovej funkcie

$$z^{(1)} = 14400.$$

Poznámka : Kontrolou správnosti môže byť dosadenie určených hodnôt x_1 , x_2 , a x_3 , do pôvodného tvaru účelovej funkcie

$$z^{(1)} = 54 \cdot \frac{800}{3} + 45 \cdot 0 + 52 \cdot 0 = 14400.$$

Riešenie však ešte nie je optimálne, pretože v riadku účelovej funkcie zostávajú dva záporné koeficienty. Aplikáciou uvedených kritérií rozhodovania určíme za novozaradenú bázičku premennú x_3 a za vyradovanú premennú x_4 a zopakujeme uvedený postup.

Tvar simplexovej tabuľky po vykonaní ďalších dvoch iteračných krokov je uvedený v *tab.5.2.c*.

Tab.5.2.c: Riešenie simplexového algoritmu 2.a 3.iterácia (optimálne riešenie)

Báza	b	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	z	w
x_3	40	0	-1/5	1	3/5	-2/5	0	-200
$\leftarrow x_1$	240	1	<u>4/5</u>	0	-2/5	3/5	0	<u>300</u>
z	15 040	0	-61/5	0	48/5	58/5	1	MAX
x_3	100	1/4	0	1	1/2	-1/4	0	
x_2	300	5/4	1	0	-1/2	3/4	0	
z	18 700	61/4	0	0	7/2	83/4	1	MAX

Z uvedenej tabuľky, ktorá uvádza v postupnosti za sebou úpravy pre 2. a 3. iteráciu riešenia vyplýva, že optimálne riešenie nebolo dosiahnuté ani po 2.iterácii (koeficient $a_{32} = -61/5$ v riadku účelovej funkcie). Bolo preto potrebné vykonať ešte 3.iteráciu (z bázy vyradiť x_1 a zaradiť x_2), ktorá konečne viedla k určeniu optimálneho riešenia.

Optimálne riešenie teda je $x_1 = 0$, $x_2 = 300$, $x_3 = 100$ s odpovedajúcou hodnotou účelovej funkcie $z^{(opt)} = 18\,700$.

Ak sa vrátíme k pôvodnému zadaniu úlohy a jej pôvodnému matematickému modelu, optimálnym plánom výroby podniku z hľadiska maximálneho zisku bude : **nevyrábať žiadny výrobok V_1 , vyrábať 300 výrobkov V_2 a 100 výrobkov V_3 a dosiahnutý zisk z ich výroby bude 18 700 jednotiek.**

Po dosadení týchto hodnôt do obmedzujúcich podmienok úlohy a zvolenej účelovej funkcie vidíme, že podmienky

$$2.0 + 1.300 + 3.100 \leq 600$$

$$3.0 + 2.300 + 2.100 \leq 800$$

$$z = 54.0 + 45.300 + 52.100 = 18\,700 \rightarrow \text{MAX}$$

sú splnené.

5.3 Dvojfázový simplexový algoritmus

V časti 5.1 boli prezentované požiadavky na kanonický tvar problému lineárneho programovania a naznačené základné postupy úprav základných typov matematického modelu na kanonický tvar. Často sa však vyskytujú úlohy, pri ktorých po úprave nerovníc na rovnice nedostaneme priamo kanonický tvar rozšírenej matice sústavy tj. problému, kde sú obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc typu „ $\geq$ “ a kde sa bázický tvar získava zavedením tzv. **umelých premenných**. Postup si objasníme na konkrétnom príklade.

Príklad 5.2

Slovné zadanie a matematický model sú v kapitole 4.1, ako príklad 4.3.

Matematický model v tvare

$$\begin{array}{rcl} 2.x_1 + & 3.x_2 & \geq 54 \\ & x_1 + & 2.x_2 \geq 45 \\ & 3.x_1 + & 2.x_2 \geq 52 \\ \hline z = 600.x_1 + 800.x_2 & \rightarrow & \text{MIN} \end{array}$$

prevedieme na rovnice odčítaním prídavných premenných x_3, x_4, x_5 . Pomocou umelých premenných u_1, u_2, u_3 a pomocnej účelovej funkcie „ p “ potom možno relatívne jednoducho vytvoriť jednotkovú bázu.

Po úpravách teda budú obmedzujúce podmienky v tvare :

$$\begin{array}{rclclcl} 2.x_1 + & 3.x_2 - x_3 & & + u_1 & & \geq 54 \\ & x_1 + & 2.x_2 & & - x_4 & + u_2 & \geq 45, \\ 3.x_1 + & 2.x_2 & & - x_5 & & + u_3 & \geq 52 \end{array}$$

pôvodná účelová funkcia

$$z - 600.x_1 - 800.x_2 = 0 \quad (\text{MIN})$$

a pomocná účelová funkcia

$$p - u_1 - u_2 - u_3 = 0 \quad (\text{MIN}) .$$

Je zrejmé, že tvar pomocnej účelovej funkcie požiadavkám na bázický tvar nevyhovuje (rovnica obsahuje premenné u_1, u_2, u_3).

Odstrániť ich môžeme sčítaním s rovnicami obmedzujúcich podmienok, po ktorom bude mať rovnica pomocnej účelovej funkcie tvar :

$$p + 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 151$$

Postup riešenia úlohy je potom podobný, ako pri základnom algoritme popísanom v kapitole 5.2, len s tým rozdielom, že riešenie sa rozdelí na dve fázy. V prvej fáze sa rieši úloha ako minimalizácia pomocnej účelovej funkcie „p“ (v jej riadku nesmú zostať žiadne kladné hodnoty). Pritom sa priebežne upravuje i pôvodná účelová funkcia „z“. Po dosiahnutí minima pomocnej účelovej funkcie sa jej riadok i stĺpce umelých premenných z riešenia (simplexovej tabuľky) vypustia a v druhej fáze sa hľadá požadované optimálne riešenie pre pôvodnú účelovú funkciu.

Na demonštráciu riešenia dvojfázového simplexového algoritmu použijeme taktiež zápis do simplexovej tabuľky, ktorá bude mať tvar uvedený v *tab.5.3* .

Tab.5.3 : Riešenie dvojfázového simplexového algoritmu.

			↓									
Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p	w
$\leftarrow u_1$	54	2	<u>3</u>	-1	0	0	1	0	0	0	0	<u>18</u>
u_2	45	1	2	0	-1	0	0	1	0	0	0	45/2
u_3	52	3	2	0	0	-1	0	0	1	0	0	26
z	0	-600	-800	0	0	0	0	0	0	1	0	
p	151	6	<u>7</u>	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	MIN

		↓										
x_2	18	2/3	1	-1/3	0	0	1/3	0	0	0	0	27
u_2	9	-1/3	0	2/3	-1	0	-2/3	1	0	0	0	-27
$\leftarrow u_3$	16	<u>5/3</u>	0	2/3	0	-1	-2/3	0	1	0	0	<u>48/5</u>
z	14400	-200/3	0	-800/3	0	0	800/3	0	0	1	0	
p	25	<u>4/3</u>	0	4/3	-1	-1	-7/3	0	0	0	1	MIN

Báza	b	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p	w
x_2	58/5	0	1	-3/5	0	2/5	3/5	0	-2/5	0	0	-58/3
$\leftarrow u_2$	61/5	0	0	<u>4/5</u>	-1	-1/5	-4/5	1	1/5	0	0	<u>61/4</u>
x_1	48/5	1	0	2/5	0	-3/5	-2/5	0	3/5	0	0	24
z	15040	0	0	-240	0	-40	240	0	40	1	0	
p	61/5	0	0	<u>4/5</u>	-1	-1/5	-9/5	0	-4/5	0	1	MIN

x_2	83/4	0	1	0	-3/4	1/4	0	3/4	-1/4	0	0	
x_3	61/4	0	0	1	-5/4	-1/4	-1	5/4	1/4	0	0	
x_1	7/2	1	0	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0	0	
z	18700	0	0	0	-300	-200	0	300	100	1	0	MIN
p	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1	MIN

Zo stavu tabuľky po 3.iterácii vyplýva že :

- pomocná účelová funkcia bola už minimalizovaná (jej hodnota je rovná nule, takisto umelé premenné u_1 , u_2 , u_3 sú rovné nule);
- ak stĺpce umelých premenných z riešenia vypustíme, zistíme, že súčasne bolo dosiahnuté aj minimum pôvodnej účelovej funkcie a že teda riešenie pôvodne zadaného problému je

$$x_1 = 7/2 = 3,5, \quad x_2 = 83/4 = 20,75$$

a jemu prislúchajúca hodnota účelovej funkcie (minimálna) je

$$z = 18\,700.$$

Aj tu sa môžeme presvedčiť o správnosti riešenia dosadením do obmedzujúcich podmienok a pôvodného tvaru účelovej funkcie :

$$\begin{array}{rclcl}
 2 \cdot 3,5 & + & 3 \cdot 20,75 & \geq & 54 \\
 3,5 & + & 2 \cdot 20,75 & \geq & 45 \\
 3 \cdot 3,5 & + & 2 \cdot 20,75 & \geq & 52 \\
 \hline
 z = 600 \cdot 3,5 & + & 800 \cdot 20,75 & = & 18700
 \end{array}$$

V prípade, že by po vyradení pomocnej účelovej funkcie a umelých premenných z riešenia, pôvodná účelová funkcia nevyhovovala podmienkam optima, bolo by potrebné vykonať ďalšie iteračné kroky riešenia už iba s pôvodnými a prídavnými premennými a pôvodnou účelovou funkciou až do splnenia podmienok optima.

5.4. Dualita úloh lineárneho programovania.

Ak porovnáme pôvodné matematické modely zadaní príkladov, ktoré boli riešené v predchádzajúcich kapitolách a ich výsledky riešení - východiskové a výsledné iterácie riešenia (tab.5.4.a, b) zistíme, že je medzi nimi istá súvislosť.

a)

$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 & \leq & 600 \\
 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 & \leq & 800
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 & \geq & 54 \\
 x_1 + 2 \cdot x_2 & \geq & 45 \\
 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 & \geq & 52
 \end{array}$$

$$z = 54 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 + 52 \cdot x_3 \rightarrow \text{MAX} \quad z = 600 \cdot x_1 + 800 \cdot x_2 \rightarrow \text{MIN}$$

Tab.5.4.a : Východisková a výsledná iterácia riešenia príkladu 5.1.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	w
x_4	600	2	1	1	1	0	0	300
x_5	800	3	2	2	0	1	0	800/3
z	0	-54	-45	-52	0	0	1	MAX

x_3	100	1/4	0	1	1/2	-1/4	0	
x_2	300	5/4	1	0	-1/2	3/4	0	
z	18 700	61/4	0	0	7/2	83/4	1	MAX

Tab.5.4.b : Východisková a výsledná iterácia riešenia príkladu 5.2.

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	z	p
u_1	54	2	3	-1	0	0	1	0	0	0	0
u_2	45	1	2	0	-1	0	0	1	0	0	0
u_3	52	3	2	0	0	-1	0	0	1	0	0
z	0	-600	-800	0	0	0	0	0	0	1	0
p	151	6	7	-1	-1	-1	0	0	0	0	1

x_2	83/4	0	1	0	-3/4	1/4	0	3/4	-1/4	0	0
x_3	61/4	0	0	1	-5/4	-1/4	-1	5/4	1/4	0	0
x_1	7/2	1	0	0	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0	0
z	18700	0	0	0	-300	-200	0	300	100	1	0
p	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	1

Realizované porovnanie bude výraznejšie pri maticovom vyjadrení (ak parametre a premenné druhého modelu označíme s pruhom).

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \quad (\text{MAX})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 54 \\ 45 \\ 52 \end{bmatrix}$$

b)

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{c}}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} \quad (\text{MIN})$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 54 \\ 45 \\ 52 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 600 \\ 800 \end{bmatrix}$$

Z uvedeného je zrejmé, že oba modely majú veľa spoločného a síce

- matica sústavy prvej úlohy je rovná transponovanej matici sústavy úlohy druhej ($\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^T$),
- vektor koeficientov pravej strany prvej sústavy je rovný vektoru koeficientov účelovej funkcie úlohy druhej a naopak ($\mathbf{c} = \bar{\mathbf{b}}$, $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{c}}$).

Úlohy sa pritom líšia v znamienkach nerovníc a smere optimalizácie. Zatiaľ čo v prvej úlohe sú znamienka nerovníc typu „ $\leq$ “ a účelová funkcia sa maximalizuje, v druhej úlohe sú znamienka nerovníc typu „ $\geq$ “ a účelová funkcia sa minimalizuje. Takýmto úlohám hovoríme, že sú **duálne symetrické** a ako je zrejmé zo simplexových tabuliek, ich spoločné rysy sa neobmedzujú iba na matematický model, ale objavujú sa i v konečnom riešení :

- Obe úlohy majú rovnaké hodnoty účelovej funkcie pre nájdené optimálne riešenie.
- Riešenie prvej úlohy možno nájsť v riadku účelovej funkcie v stĺpcoch pôvodných bázických premenných úlohy druhej a naopak.

Pre duálne združené úlohy platí základná veta (veta o dualite) : **Ak má jedna z úloh (primárna alebo duálna) optimálne riešenie, má optimálne riešenie aj druhá, pričom extrémne hodnoty ich účelových funkcií sú rovnaké.** Ak účelová funkcia jednej z úloh nie je ohraničená, druhá úloha nemá prípustné riešenie. Je možné uviesť aj príklady duálne nesymetrických úloh, napr. k problému zadanému maticovo

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MIN}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

je duálny problém v tvare

$$\bar{z} = \bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{c} ,$$

alebo pre úlohu

$$\mathbf{z} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

je duálna úloha v tvare

$$\bar{z} = \bar{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{b} \rightarrow \text{MIN}$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c} , \bar{x}_i \geq 0 .$$

Praktické použitie javu duality sa ponúka pre riešenie úlohy, v ktorej sú obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc typu „ $\geq$ “ (prípadne v tvare rovníc), ktorú sme podľa kapitoly 5.3 pôvodne riešili dvojfázovým simplexovým algoritmom (so zavedením umelých premenných a pomocou účelovej funkcie).

Znamená to, že je možné sa vyhnúť riešeniu úlohy pomocou dvojfázového simplexového algoritmu riešením úlohy duálne symetrickej, ktorá vyžaduje iba jednoduchý simplexový algoritmus. Pritom sa využijú vopred uvedené vlastnosti duálnych úloh – rovnaká hodnota účelovej funkcie a riešenie duálnej úlohy v riadku účelovej funkcie.

Na záver tejto časti je potrebné uviesť ešte vecný význam duálnych premenných. Ak v primárnej úlohe koeficienty c_i znamenajú ceny procesov, premenné x_i množstvá a koeficienty a_{ij} množstvo i -teho činiteľa na j -ty proces. Premenné $\bar{x}_i$ majú v duálnej úlohe rozmer [cena / činiteľ], oceňujú teda činitele a preto sa zvyknú nazývať **duálnymi** (fiktívnymi, tieňovými) **cenami**.

5.5 Celočíselné lineárne programovanie

Uvedené algoritmy riešenia úloh lineárneho programovania predstavujú matematický aparát, ktorý (pokiaľ sa zostaví matematický model v kanonickom tvare) vždy po konečnom počte iterácií vedie k optimálnemu riešeniu. Z princípu vykonávaných úprav (Gauss-Jordanova eliminácia) však vyplýva, že nie vždy výsledné optimálne riešenie vyhovuje charakteru riešeného problému.

Ide totiž o to, že niektoré úlohy zo svojej podstaty vyžadujú celočíselné riešenie napr. v uvedených príkladoch zo štvrtej kapitoly počty výrobkov, počty opráv, počty použitých variantov rezania, počty rakiet atď.

V prípade, že optimálne riešenie celočíselné nie je, máme k dispozícii v podstate 2 možnosti :

1. Neceločíselné riešenie zaokrúhliť na najbližšie nižšie celočíselné hodnoty a opraviť hodnotu účelovej funkcie.
2. Použiť niektorú z exaktných metód celočíselného programovania a celočíselné riešenie určiť presne.

Prvá možnosť je samozrejme najjednoduchšia, ale nie vždy môže viesť ku korektnému výsledku. Použiť ju môžeme vtedy, keď zlomková časť riešenia je oproti jeho celočíselnej časti malá (štatisticky nevýznamná) napr. ak výsledok $x_1 = 2732 \frac{1}{3}$, zaokrúhlením riešenia na $x_1 = 2732$ sa zrejme veľkej chyby nedopustíme. Pokiaľ ale výsledné hodnoty premenných sú povedzme $x_1 = 3.38$ a $x_2 = 2.65$, zaokrúhlenie na najbližšie nižšie (prípadne vyššie) hodnoty by znamenalo už významné zmeny riešenia a teda aj hodnoty účelovej funkcie.

Preto je potrebné použiť pre získanie optimálneho riešenia niektorú z exaktných metód **celočíselného programovania**. V literatúre [2, 3] sa ich uvádza niekoľko a my sa oboznámime s dvoma najrozšírenejšími - **Gomoryho algoritmom** a **metódou vetvenia a hraníc** (Branch and Bound).

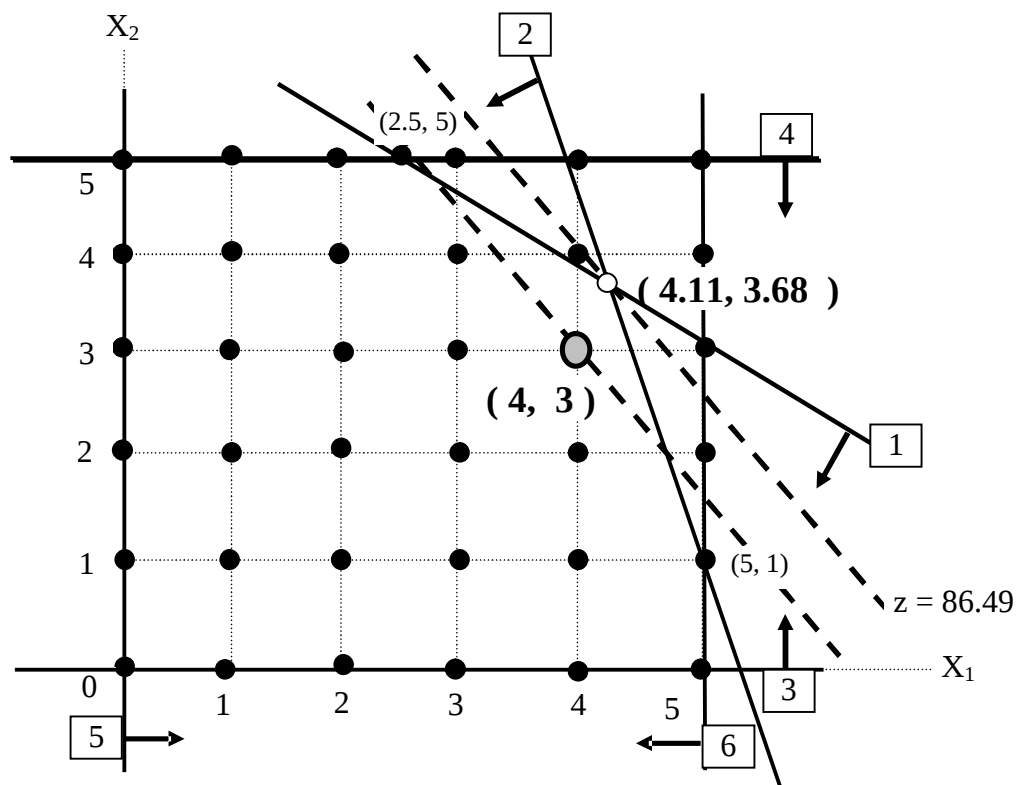
5.5.1 Grafické riešenie úlohy celočíselného programovania

Vráťme sa k zadaniu úlohy optimálnej ochrany objektu (*Príklad 4.5*), ktorej matematický model bol v tvare :

$$\begin{array}{rcl}
 z = & 13.x_1 + 9.x_2 & \rightarrow \text{MAX} \\
 \hline
 & 7.x_1 + 8.5.x_2 & \leq 60 \\
 & 6.x_1 + 2.x_2 & \leq 32 \\
 & 0 \leq x_1 & \leq 5 \\
 & 0 \leq x_2 & \leq 5
 \end{array}$$

Pretože ide o úlohu iba s dvomi premennými, možno nájsť jej optimálne riešenie jednoducho graficky (*Obr. 5.1*). Z obrázku je zrejmé, že optimálne riešenie ($x_1 = 4.11$, $x_2 = 3.68$, $z = 86.49$) všeobecne nevyhovuje podmienkam celočíselnosti riešenia (premenné znamenajú počty rakiet).

Ak však do obrázku doplníme celočíselnú sieť, je možné vidieť, že prípustné riešenia budú tentoraz ležať na jej priesečníkoch, pričom najbližšie teoretickej hodnote neceločíselného riešenia ležia hodnoty $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ a im odpovedajúca hodnota účelovej funkcie $z = 79 \rightarrow \text{MAX}$.



Obr.5.1 Celočíselné grafické riešenie

5.5.2 Metóda „Branch and Bound“,

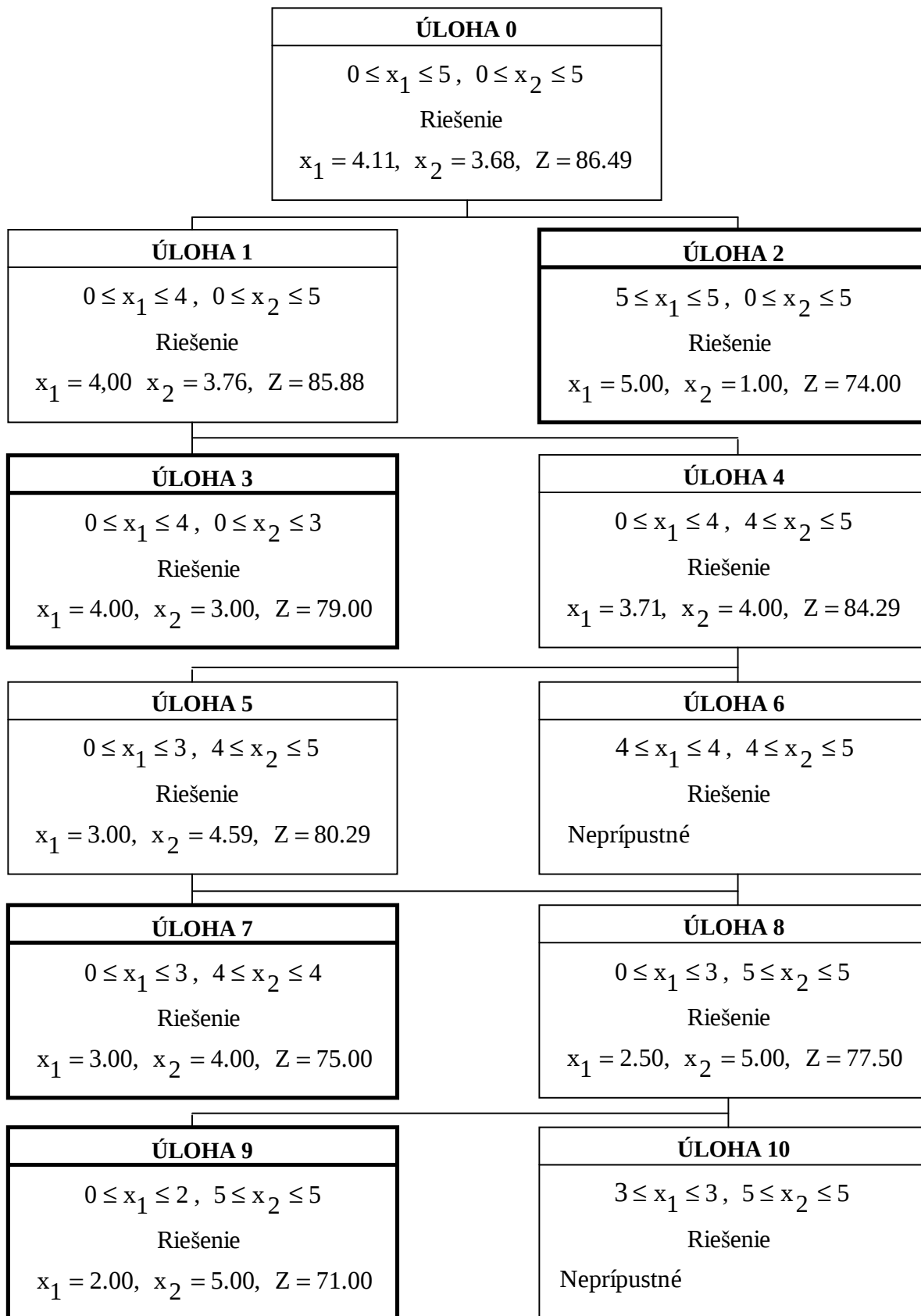
Metóda „**Branch and Bound**“ je metóda určená pre riešenie úloh, u ktorých sú definované hranice obmedzujúce hodnoty premenných. Jej princíp spočíva v tom, že sa pri riešení postupne menia hranice jednotlivých premenných, čím sa vytvárajú nové úlohy lineárneho programovania a po ich vyriešení sa spätne posudzuje, či riešenie vyhovuje podmienkam celočíselnosti a aká je jeho prípadná hodnota účelovej funkcie.

Ak budeme aplikovať túto metódu na rovnaký príklad, môžeme považovať riešenie získané simplexovou metódou za riešenie úlohy nulte. (*tab.5.5*)

Z neho vidíme, že počet rakiet prvého typu by mal byť 4,11 a druhého typu 3,68. Maximálny počet pre oba typy môže byť 5. Pretože x_1 môže nadobudnúť iba celočíselných hodnôt, môže sa rovnať niektorej z hodnôt 0 až 4. (*úloha 1*) alebo 5 (*úloha 2*). Preto môžeme vytvoriť dve nové optimalizačné úlohy, ak zavedieme tieto obmedzenia. V tabuľke *tab.5.5* sú označené aj s riešením ako *úloha 1* a *úloha 2*.

Ako je z *tab.5.6* zrejmé, riešenie *úlohy 1* je $z = 85.88$, $x_1 = 4$ a $x_2 = 3.76$. Riešenie *úlohy 2* je $z = 74$, $x_1 = 5$ a $x_2 = 1$.

Tab.5.5. Strom úloh pre problém optimalizácie obrany objektu.



Riešenie úlohy 2 teda podmienke celočíselnosti vyhovuje, v riešení úlohy 1 je hodnota x_1 celočíselná, ale hodnota x_2 nie. Preto je možné smerom k premennej x_2 formulovať 2 nové úlohy, označené ako úloha 3 a úloha 4.

Úloha 4 má riešenie $z = 84.29$, $x_1 = 3.71$ a $x_2 = 4$, zatiaľ čo úloha 3 má riešenie celočíselné. Pretože x_1 nie je v úlohe 4 celočíselné, môžeme vytvoriť 2 nové úlohy (úloha 5 a úloha 6).

Riešenie úlohy 6 je neprípustné, pričom úloha 5 má neceločíselné riešenie. Podobne pokračujeme ďalej tak, že ju rozčleníme na úlohy 7 a 8. Úloha 7 celočíselné riešenie má, z úlohy 8 s neceločíselným riešením môžeme preto opäť rozvetviť dve nové úlohy (úlohu 9 a úlohu 10).

Úloha 9 má riešenie $z = 71$, $x_1 = 2$ a $x_2 = 5$ a úloha 10 prípustné riešenie nemá. Ďalej úlohu nie je možné vetviť, čím je hľadanie riešení ukončené.

Ak výsledky riešení sumarizujeme v *tab.5.6* vidíme, že iba 4 riešené úlohy majú celočíselné riešenie pre obe premenné. Pretože najvyššiu hodnotu účelovej funkcie sme dostali riešením úlohy 3, považujeme toto riešenie za optimálne riešenie zadaného problému.

Tab.5.6 Sumarizácia riešení úloh v metóde Branch and Bound.

Úloha číslo	Riešenie		
	x_1	x_2	Z
0	4.11	3,68	86.49
1	4	3.76	85.88
2	5	1	74.00
3	4	3	79.00
4	3.71	4	84.29
5	3	4.59	80.29
6	Neprípustné riešenie		
7	3	4	76.00
8	2.5	5	77.5
9	2	5	71.00
10	Neprípustné riešenie		

Ak sa vrátíme k zadaniu príkladu, pre obranu objektu sa na základe získaného optimálneho riešenia použijú 4 rakety typu R_1 a 3 rakety typu R_2 , ktoré zabezpečia jeho ochranu na 79%.

5.5.3 Gomoryho algoritmus

Gomoryho algoritmus niekedy nazývaný **Gomoryho metóda roviny rezu** (Cutting Plane Method) je možné zhrnúť do nasledovných krokov :

1. Najskôr určíme optimálne riešenie zadanej úlohy simplexovou metódou bez ohľadu na podmienku celočíselnosti.
2. V každej rovnici s neceločíselným riešením výsledok (pravá strana) b_i rozdelíme na celočíselnú časť d_i a zlomkovú časť r_i tzn. do tvaru $b_i = d_i + r_i$.
3. Zvolíme rovnicu i , v ktorej sa požaduje celočíselné riešenie a v ktorej je neceločíselná hodnota r_i maximálna a v nej sa rozložia koeficienty ľavej strany na ich celočíselné časti d_{ij} a zlomkové časti r_{ij} tzn. do tvaru $a_{ij} = d_{ij} + r_{ij}$.
4. K rovnici vybranej v bode 3 postupu vytvoríme tzv. **doplnkovú rovnicu** v tvare $-r_{i1} \cdot x_1 - r_{i2} \cdot x_2 - \dots - r_{in} \cdot x_n + s = -r_i$, o ktorú rozšírime riešenú sústavu a v ktorej s je nová prídavná premenná.
5. V riešení pokračujeme tak, že pripojený riadok považujeme za **riadiaci riadok** úpravy. Stĺpec novo zaraďovanej bázeickej premennej určíme tak, že vypočítame podiely z_j / r_{ij} pre všetky stĺpce a minimálna absolútna hodnota podielu definuje **riadiaci stĺpec**.
6. Riešenie rozšíreného problému by malo byť aspoň v jednej premennej už celočíselné. Ak je riešenie celočíselné aj pre ostatné premenné, s výpočtom sa skončí. Ak zostanú niektoré hodnoty neceločíselné, postup sa opakuje od 2.kroku tak, že sústava sa rozšíri o ďalšiu rovnicu s novou premennou s_2 atď.

Postup riešenia si budeme demonštrovať na nasledovnom jednoduchom príklade (*príklad 5.3*).

Príklad 5.3 : Optimálne zostavenie strojových zostáv

Stavebný podnik má k dispozícii 8 nakladačov, 16 nákladných automobilov a 10 buldozéro. Z nich môže zostaviť 3 rôzne pracovné zostavy. Prvá zostava v zložení 1 nakladač, 3 nákladné automobily a 1 buldozér má výkon 70 m^3 premiestnenej zeme za zmenu. Druhá zostava s 1 nakladačom, 4 nákladnými automobilmi a 1 buldozérom premiestni 88 m^3 za zmenu a tretia zostava – 1 samotný buldozér je schopný premiestniť 8 m^3 za zmenu. Ako je potrebné rozmiestniť stroje, aby bol výkon maximálny ?

Po zostavení tabuľky úlohy

Zostava Stroj	Z₁	Z₂	Z₃	K dispozícii
Nakladač	1	1	0	8
Nákladné auto	3	4	0	16
Buldozér	1	1	1	10
Výkon	70	88	8	MAX

je matematický model úlohy v tvare

$$z = 70 \cdot x_1 + 88 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \rightarrow \text{MAX}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \end{aligned} .$$

Pri zápise do simplexovej tabuľky a troch iteračných krokoch možno získať riešenie zrejmé z *tabuľky 5.7.a*.

Tab.5.7.a. Príklad optimálneho zostavenia strojových zostáv – východiskové bázičné riešenie.

Báza	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	z	
x ₄	8	1	1	0	1	0	0	0	0. itera cia
x ₅	16	3	4	0	0	1	0	0	
x ₆	10	1	1	1	0	0	1	0	
z	0	-70	-88	-8	0	0	0	1	

Po vykonaní troch iteračných krokov možno získať optimálne neceločíselné riešenie, uvedené v (*Tab.5.7.b*).

Tab.5.7.b. Optimálne neceločíselné riešenie úlohy – 3. iterácia

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	s	
x_4	2 2/3	0	- 1/3	0	1	- 1/3	0	0	0	3. iterá cia
x_1	5 1/3	1	4/3	0	0	1/3	0	0	0	
x_3	4 2/3	0	-1/3	1	0	-1/3	1	0	0	
z	410 2/3	0	2 2/3	0	0	20 2/3	8	1	0	
s	- 2/3	0	- 2/3	0	0	-2/3	0	0	1	

Z vyššie uvedeného všeobecného postupu aplikácie Gomoryho algoritmu je zrejmé, že maximálna neceločíselná časť (2/3) je u premenných x_4 a x_3 . Pretože x_4 je premenná prídavná, doplnková rovnica podľa bodu 4 všeobecného postupu sa určí k rovnici pre x_3 . Uvedená je v riadku pod účelovou funkciou.

Poznámka : Pri tomto postupe je potrebné vždy brať do úvahy, že prvky v matici sa rozkladajú na celočíselnú **plus** zlomkovú časť, takže napr. $-1/3 = -2 + 2/3$.

Absolútna hodnota podielu koeficientov riadku účelovej funkcie a novej rovnice je v druhom stĺpci 4 a v piatom 31, z čoho vyplýva, že **novu zaradenou bázičkou premennou bude x_2** . Po ďalšej iterácii tak dostaneme riešenie, ktoré je zrejmé z tabuľky 5.7.c.

Tab.5.7.c. Optimálne celočíselné riešenie úlohy

Báza	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
x_4	3	0	0	0	1	- 2/3	0	0
x_1	4	1	0	0	0	-1	0	0
x_3	5	0	0	1	0	0	1	0
x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
z	408	0	0	0	0	9	0	1

Nájdene celočíselné optimálne riešenie je

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 5$$

ktoré už podmienkam celočíselnosti vyhovuje a ktoré dáva hodnotu účelovej funkcie $z = 408$, ktorá je dostatočne blízka hodnote neceločíselného optima ($z = 410,666$).

Poznámka : Ak by sme túto úlohu riešili iba rutinne, zaokrúhlením hodnôt x_1 na 5 a x_3 takisto na 5, dostali by sme síce riešenie prípustné, ale jeho hodnota účelovej funkcie by bola iba $z = 70 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 390$, čo je hodnota významne nižšia, ako hodnota určená Gomoryho algoritmom.

V skutočných úlohách praxe nemusia mať všetky premenné predpísané celočíselné hodnoty. Takéto úlohy voláme **zmiešané úlohy celočíselného programovania**. Špeciálnym prípadom celočíselného programovania sú úlohy, v ktorých premenné môžu nadobúdať iba hodnoty „0“ alebo „1“ tzv. **bivalentné premenné**. Stretávame sa s nimi predovšetkým v úlohách, pri ktorých sa využíva binárne rozhodovanie. Zvláštnym prípadom tohoto typu úloh je tzv. **priradovací problém**, ktorým sa budeme zaoberať v nasledujúcej kapitole.

5.6 Analýza citlivosti v úlohách lineárneho programovania

V reálnych úlohách často nastávajú zmeny vstupných údajov, ktoré môžu mať vplyv na určené optimálne riešenie. Tieto zmeny sa môžu týkať **prvkov pravých strán obmedzujúcich podmienok** (napr. zmena množstva zdrojov), **koeficientov účelovej funkcie** (napr. zmena ceny výrobku) alebo **štruktúrnych koeficientov** (napr. zmena noriem spotreby surovín, prípadne technických parametrov výrobného zariadenia).

Analýza citlivosti (senzitivnosti) skúma vplyv zmeny ľubovoľného parametra úlohy na vypočítané optimálne riešenie a je súčasťou tzv. **postoptimalizačnej analýzy**. Postoptimalizačná analýza je nástroj, umožňujúci analyzovať systém a jeho štruktúru a poukázať na následky vzniknutých zmien.

Postoptimalizačná analýza skúma vplyv týchto zmien :

- zmeny (jedného alebo viacerých) koeficientov účelovej funkcie,
- zmeny prvkov vektora pravej strany,
- zmeny štruktúrnych koeficientov,
- zmeny v počte ohraničení,
- zmeny v počte rozhodovacích premenných,

- zmeny koeficientov účelovej funkcie alebo prvkov pravej strany v závislosti od jedného alebo viacerých explicitne zadaných parametrov.

V tejto časti sa budeme venovať len úlohám, pri ktorých sa nemení báza, pretože z hľadiska naplnenia cieľov učebnice sú postačujúce na objasnenie princípov postoptimalizačnej analýzy.

Sú to úlohy dotýkajúce sa najčastejšie používaných zmien :

1. **ľubovoľného prvku pravej strany a zistenie prípustného intervalu zmeny.**
2. **ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie a určenie prípustného intervalu možnej zmeny.**

Podstatu analýzy citlivosti si ukážeme na možnosti zistenia **prípustného intervalu zmeny ľubovoľného prvku pravej strany** a vplyvu tejto zmeny. Avšak zisťovanie prípustného intervalu zmeny ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie je založené na podobných princípoch a preto z hľadiska rozsahu a obsahového zamerania učebnice sa ním nebudeme bližšie zaoberať.

Zmenu v niektorých prvkoch pravej strany obmedzujúcich podmienok je možné chápať ako problém, ktorého cieľom riešenia je zistenie vplyvu uvažovanej zmeny na bázu vypočítaného optimálneho riešenia (napr. o koľko sa môže množstvo uvažovaného zdroja zmeniť bez toho, aby sa zmenili vlastnosti optimálnosti nájdeného riešenia), pričom základným predpokladom však zostáva fakt, že všetky ďalšie vstupné údaje (koeficienty účelovej funkcie, ostatné prvky pravej strany, štruktúrne koeficienty) zostávajú pritom nezmenené.

Zmenu pôvodného vektora pravej strany na nový vektor prostredníctvom vektora zmien je možné vyjadriť vzťahom :

$$\bar{\mathbf{b}}^n = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}}^Z$$

kde $\bar{\mathbf{b}}$ - pôvodný vektor pravej strany
 $\bar{\mathbf{b}}^n$ - nový vektor pravej strany
 $\bar{\mathbf{b}}^Z$ - vektor zmien pravej strany.

Pre úlohu lineárneho programovania v kanonickom tvare potom platí

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j = \text{MIN}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i + b_i^Z \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m \text{ a } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j \geq 0$$

kde b_i^Z je i-ta zložka vektora zmien.

Pri analýze prípustného rozsahu zmien i-teho prvku pravej strany je potrebné vychádzať zo vzťahu pre výpočet optimálneho riešenia

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}$$

kde $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}}$ - je vektor bázičných zložiek optimálneho riešenia ,
 $\bar{\mathbf{B}}^{-1}$ - je inverzná matica k matici optimálnej bázy úlohy a
 $\bar{\mathbf{b}}$ - je pôvodný vektor pravej strany.

Pritom musíme postupovať tak, aby pri nezmenených ostatných vstupných podmienkach zostala vypočítaná báza optimálna (napr. nezmenený optimálny výrobný program).

Zmena vektora pravej strany sa musí prejavíť v optimálnom riešení úlohy lineárneho programovania, pričom výpočet vektora $\bar{\mathbf{x}}_{\text{opt}}$ a tým aj vektora $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}}$, je závislý od tejto zmeny

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}}^n = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}^n = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}}^Z) = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}^Z = \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}} + \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}^Z.$$

Pre optimálne riešenie musí byť zachovaná podmienka primárnej prípustnosti, čiže musí platiť vzťah

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}}^n = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{b}}^Z) = \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B} \text{ opt}} + \bar{\mathbf{B}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{b}}^Z \geq \mathbf{0}.$$

Ukážme si aplikáciu uvedeného prístupu pri zmene prvku pravej strany na príklade 4.6 zadanom v predchádzajúcej kapitole.

Matematický model príkladu bol nasledovný :

$$z = 70 \cdot x_1 + 90 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 1300$$

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Aplikáciou algoritmu simplexovej metódy (uvedený v kapitole 5), príp. pomocou grafického riešenia úlohy (dve premenné x_1 , x_2) získame optimálne riešenie, ktoré v prípade zadaného príkladu je nasledovné : **Optimálny výrobný**

plán bude daný výrobou 100 kusov výrobku V_1 a 200 kusov výrobku V_2 , pričom hodnota účelovej funkcie $z = 25\,000$ peňažných jednotiek.

K objasneniu princípu analýzy výsledkov riešenia úlohy predpokladajme, že sa bude meniť zásoba suroviny S_2 , čiže bude sa meniť druhá zložka vektora pravej strany b_2 o hodnotu b_2^Z , ktorá je rôzna od nuly.

Aby bola zachovaná podmienka primárnej prípustnosti musí platiť

$$\bar{x}_{\text{Bopt}}^n = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/17 & -4/17 \\ -2/17 & 5/17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b_2^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - 4/17 \cdot b_2^Z \\ 200 + 5/17 \cdot b_2^Z \end{pmatrix} \geq 0.$$

Prípustný interval zmien pre hodnoty b_2^Z určíme riešením sústavy dvoch lineárnych rovníc o jednej neznámej

$$100 - 4/17 \cdot b_2^Z \geq 0$$

$$200 + 5/17 \cdot b_2^Z \geq 0$$

z čoho dostaneme interval $(-680 \leq b_2^Z \leq 425)$.

Z vypočítaných hodnôt je možné určiť minimálnu a maximálnu hranicu pre zásobu suroviny S_2 , tj. taký interval hodnôt b_2 , kedy za predpokladu zachovania ostatných podmienok zostane zachovaná báza optimálneho riešenia. Teda prípustný interval pre b_2 je

$$520 \leq b_2 \leq 1625,$$

pričom pôvodná hodnota $b_2 = 1200$.

Aj keď sa nemení báza optimálneho riešenia tzn. nemení sa štruktúra výrobného programu, pri zmenách hodnoty b_2 sa zmenia aj hodnoty bázických premenných tzn. množstvo výrobkov V_1 a V_2 a účelovej funkcie „ z “ tzn. zisku z realizácie optimálneho výrobného programu.

Podobným spôsobom môžeme vypočítať aj prípustný interval zmeny hodnoty b_1 (surovina S_1). Potom prípustné zmeny zložiek vektora pravej strany sú uvedené v nasledovnom prehľade :

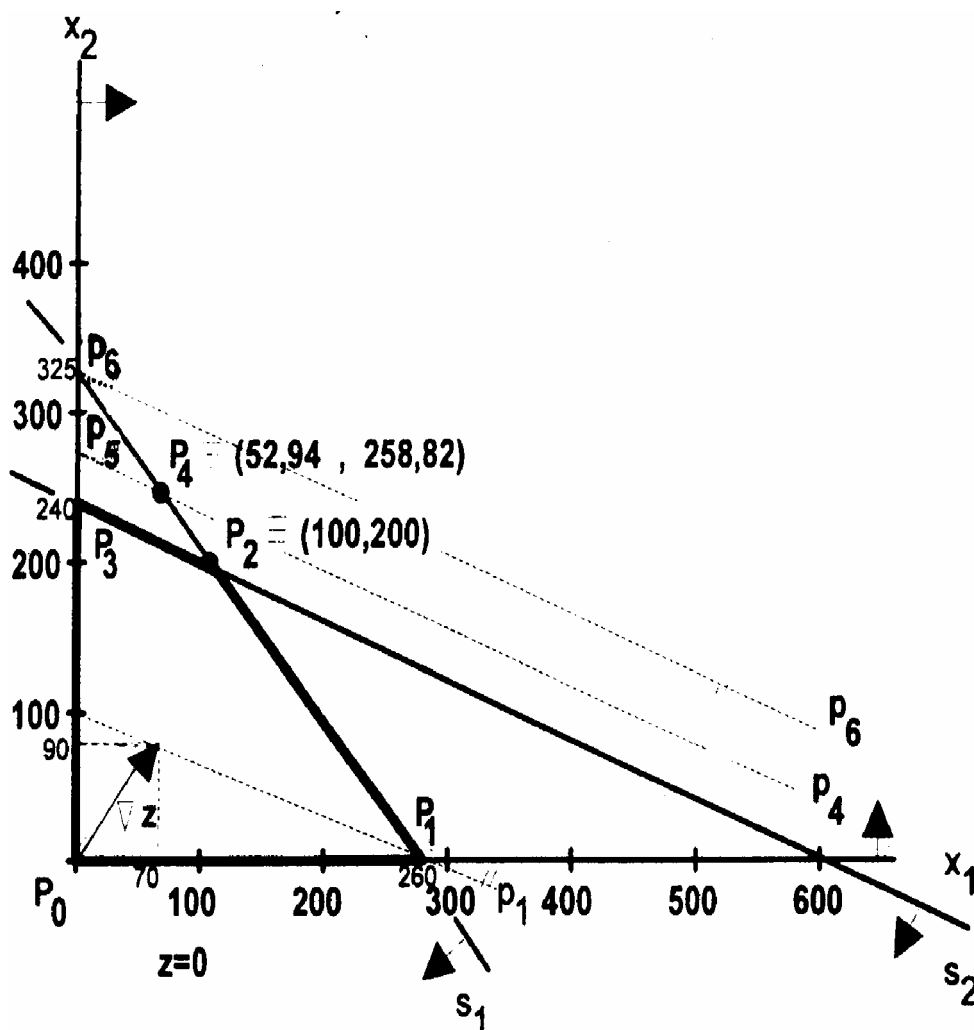
Ohraničenie	<i>Min. hodnota b_i</i>	<i>Pôvodná hodnota b_i</i>	<i>Max. hodnota b_i</i>
Surovina S_1 (b_1)	960	1 300	3 000
Surovina S_2 (b_2)	520	1 200	1 625

Zmena zásoby suroviny S_2 je graficky znázornená na obr.5.2. Optimálne riešenie pôvodnej úlohy je v bode $P_2 = (100, 200)$, ktorý predstavuje priesečník priamok určených rovnicami $5x_1 + 4x_2 = 1300$ (priamka s_1) a $2x_1 + 5x_2 = 1200$ (priamka s_2).

Pri zmene hodnoty b_2 smerom k hornej hranici prípustného intervalu sa priamka s_2 posúva v smere od počiatku súradnicového systému. Pri nezmenených ostatných vstupných podmienkach sa bod optimálneho riešenia posúva po priamke s_1 smerom k bodu P_6 .

To znamená, že ak zvýšime hodnotu b_2 (zásob) o 200 (jednotiek suroviny S_2), tejto zmene zodpovedá priamka p_4 pretínajúca priamku s_1 v bode $P_4 = (53.94, 258.88)$, ktorý predstavuje nové optimálne riešenie.

Vidíme, že báza sa nezmenila, tzn. štruktúra výrobného programu zostáva, ale zmenili sa hodnoty bazických premenných tj., znížil sa počet výrobkov V_1 a zvýšil sa počet výrobkov V_2 .



Obr.5.1 Zmena prvku pravej strany – zmena výšky zásoby suroviny S_2 .

Hodnota účelovej funkcie bude $z = 70.53,94 + 90.258,88 = 27\,000$, čo je o 2000 jednotiek vyššia hodnota zisku, ako pôvodné optimálne riešenie.

Zvýšeniu b_2 o 425 jednotiek ($b_2=1625$) zodpovedá priamka p_6 prechádzajúca bodom $P_6 = (0, 325)$, v ktorom je hodnota účelovej funkcie $z = 29\,500$ jednotiek, čiže o 4250 viac ako pôvodná hodnota. Ak by sme zvyšovali b_2 nad maximálnu hranicu prípustného intervalu, surovina S_2 bude nadbytočná, pretože budú úplne spotrebované zásoby suroviny S_1 a hodnota účelovej funkcie sa nebude už zvyšovať.

Pri zmene koeficientov účelovej funkcie v úlohe lineárneho programovania zisťujeme, o koľko sa môže meniť ľubovoľný koeficient účelovej funkcie tak, aby sa nezmenila báza vypočítaného optimálneho riešenia, pričom predpokladáme, že ostatné vstupné parametre úlohy zostávajú nezmenené.

Význam zmeny ocenení koeficientov účelovej funkcie závisí od skutočnosti, či ide o koeficienty ocenení bazických alebo nebazických premenných. Pri analýze prípustného rozsahu zmien ľubovoľného koeficientu účelovej funkcie je potrebné, aby pri nezmenených ostatných parametroch úlohy zostala vypočítaná báza optimálna.

CVIČENIA

1. Podnik vyrába 3 výrobky V_1 , V_2 a V_3 s cenami 20, 40 a 30 jednotiek. Tieto výrobky montuje z 3 montážnych celkov M_1 , M_2 , M_3 so zásobami 150, 120 a 90 zásobných jednotiek. Úlohou je navrhnúť plán výroby tak, aby bol zisk maximálny.
2. Vo výkrmni má strava obsahovať 16 jednotiek zložky A, 12 jednotiek zložky B a 14 jednotiek zložky C. K dispozícii sú 3 krmivá K_1 , K_2 a K_3 , pričom krmivo K_1 stojí 5 000 Sk/t a obsahuje 2 jednotky zložky A, 2 jednotky zložky B a 3 jednotky zložky C. Krmivo K_2 stojí 6 000 Sk/t a obsahuje 1 jednotku zložky A, 4 jednotky zložky B a 2 jednotky zložky C. Krmivo K_3 stojí 1 000 Sk/t a obsahuje 3 jednotky zložky A, 2 jednotky zložky B a 1 jednotku zložky C. Úlohou je naplánovať krmnú dávku tak, aby boli náklady minimálne.
3. Firma potrebuje pri stavbe mostu, železné tyče do betónu. K dispozícii je 1000 kusov tyčí dĺžky 550 cm a 800 kusov dĺžky 700 cm. Pri stavbe sú potrebné tyče dĺžky 200 cm a dĺžky 250 cm, pričom počet narezaných tyčí

dĺžky 250 cm má byť aspoň trojnásobok počtu tyčí dĺžky 200 cm. Úlohou je navrhnúť koľko tyčí určenej dĺžky sa má narezať pri držaní stanovených podmienok, aby bol odpad pri rezaní minimálny.

4. Kapacita zlievarne podniku môže vyrobiť odliatky najviac pre 80 kusov výrobku 1 alebo 100 kusov výrobku 2. Kapacita lisovne umožňuje výrobu výliskov najviac pre 200 kusov výrobku 1 alebo pre 60 kusov výrobku 2. Montáž výrobku 1 má kapacitu 60 kusov a montáž výrobku 2 má kapacitu 80 kusov. Cena jedného kusa výrobku 1 i výrobku 2 je 35 000 Sk. Navrhните výrobný program, ktorý pri stanovených podmienkach zabezpečí maximálnu hodnotu produkcie.
5. Podnik vyrába nádoby typov A, B, C, D, na ktoré sa materiál vyrezáva z plechu štandardných rozmerov. Objednávateľ si objednal 1200 ks nádob typu A, 900 ks nádob typu B, 700 ks nádob typu C a 500 ks nádob typu D. K dispozícii sú 2 možnosti vyrezávania s relatívne malým odpadom :

I.	5A	4B	4C	2D
II.	4A	3B	5C	3D

Aké množstvá tabulí typu I. a II. potreba, aby ich spotrebovaný počet bol minimálny

6. Výrobný podnik vyrába 3 druhy pneumatík a pri ich výrobe spotrebovávajú 4 druhy surovín, ktoré má k dispozícii v obmedzenom množstve. Údaje o zásobách surovín, cenách za pneumatiky a spotrebe surovín pri výrobe jednotlivých druhov pneumatík sú uvedené v nasledovnej tabuľke.

	P₁	P₂	P₃	Zásoba
S₁	1	1	-	100
S₂	-	2	2	200
S₃	3	-	3	300
S₄	2	3	6	600
Cena	10	20	50	MAX

Určte optimálny plán výroby tak, aby bol zisk podniku maximálny.

LITERATÚRA

- [1] Dantzig, G. B. : *Lineárne programovanie a jeho rozvoj*. SNTL, Bratislava 1966.
- [2] Mejzlík, M. : *Základní metody operačního výzkumu a jejich aplikace v železničním vojsku*. Vojenská fakulta VŠDS, Žilina 1982.
- [3] Janáček, J. : *Operačná analýza I. Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina 1997*.
- [4] Slamková, E. – Cajchanová, O. – Chromjaková, F. : *Operačná a systémová analýza*. Strojnícka fakulta ŽU, Žilina 1997.
- [5] Kuben, J. : *Lineární programování*. Vojenská akademie, Brno 1992.

6. DISTRIBUČNÉ PROBLÉMY

*„Volba riešenia je daná momentom, keď
vás už rozmýšľanie prestane baviť.“*

MATZOVA AXIÓMA

Špeciálnu kategóriu problémov lineárneho programovania tvoria tzv. **distribučné problémy**. Patria sem úlohy ako dopravný problém so všetkými jeho modifikáciami, ktorý rieši optimálny plán rozvozu tovaru (materiálu), priradovací problém zaoberajúci sa optimálnym priradením objektov na miesta určenia, úlohy optimálneho rozmiestnenia zdrojov a niektoré ďalšie, prípadne ich kombinácie, ktoré radíme pod súhrnný názov distribučné problémy.

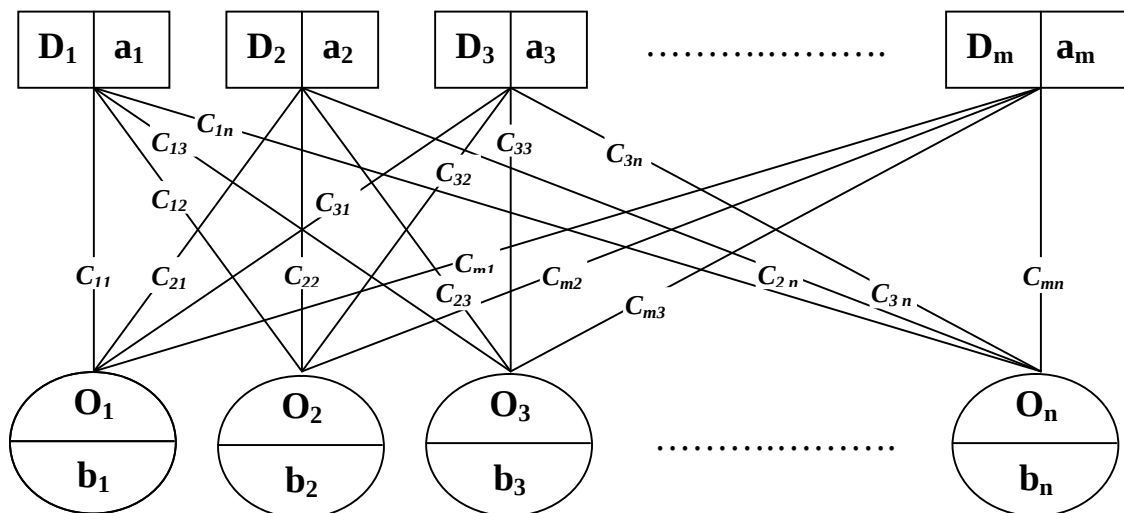
Ako si ukážeme, ich matematický model možno tiež riešiť prostredníctvom simplexového algoritmu, avšak tento prístup vedie väčšinou na úlohy veľkého rozsahu, ktorých riešenie je týmto postupom neefektívne (vyžaduje veľký počet iterácií). Preto boli vyvinuté špeciálne efektívne algoritmy prihliadajúce ku špecifikám matematických modelov jednotlivých typov úloh a s ktorými sa postupne oboznámime v nasledujúcich podkapitolách.

6.1. Dopravná úloha

6.1.1 Formulácia a matematický model dopravnej úlohy

Základným cieľom riešenia dopravnej úlohy je zostrojenie **optimálneho plánu rozvozu** tovaru (materiálu) od dodávateľov (zdrojov, výrobcov) definovaných svojimi kapacitami k odberateľom, ktorí sú charakterizovaní svojimi požiadavkami.

Pritom proces rozvozu je popísaný nákladmi na prepravu jednotkového množstva tovaru od daného dodávateľa k príslušnému odberateľovi tzv. **sadzbou** – c_{ij} . (obr.6. 1).



Obr. 6.1. Grafické znázornenie dopravnej úlohy.

Ako vidno z obrázku, z pohľadu potrebných vstupných údajov je uvedená všeobecná úloha zadaná :

- počtom dodávateľov m a ich kapacitami $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, ktoré zvykneme radiť do tzv. **vektora kapacít - a**,
- počtom odberateľov n a ich jednotlivými požiadavkami $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, analogicky ukladanými do **vektora požiadaviek - b** a
- jednotkovými nákladmi (sadzbami) - c_{ij} , pre $i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$ na prepravu tovaru od i -teho dodávateľa k j -temu odberateľovi, ktoré zapisujeme do tzv. **matice sadzieb - C**.

Za vstupný predpoklad pre základný matematický model úlohy je navyše zavedená požiadavka, aby sa súčet kapacít výrobcov rovnal súčtu požiadaviek odberateľov

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

(6.1)

tzn. aby úloha bola tzv. **vyrovnaná**.

Pre názornosť je výhodné celé zadanie úlohy prepísať do typizovanej tabuľky dopravnej úlohy (tab.6.1), ktorá sa vhodne využíva i k následnému

„ručnému“ riešeniu celej úlohy, ktoré bude názorne demonštrované na zvolených úlohách a postupoch.

Tab. 6.1. Tabuľka dopravnej úlohy

$\begin{matrix} O \\ D \end{matrix}$	O_1	O_2	O_3	$\dots$	O_n	a
D_1	$\begin{matrix} c_{11} \\ x_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{12} \\ x_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{13} \\ x_{13} \end{matrix}$		$\begin{matrix} c_{1n} \\ x_{1n} \end{matrix}$	a_1
D_2	$\begin{matrix} c_{21} \\ x_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{22} \\ x_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{23} \\ x_{23} \end{matrix}$		$\begin{matrix} c_{2n} \\ x_{2n} \end{matrix}$	a_2
D_3	$\begin{matrix} c_{31} \\ x_{31} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{32} \\ x_{32} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{33} \\ x_{33} \end{matrix}$		$\begin{matrix} c_{3n} \\ x_{3n} \end{matrix}$	a_3
$:$						$:$
D_m	$\begin{matrix} c_{m1} \\ x_{m1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{m2} \\ x_{m2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{m3} \\ x_{m3} \end{matrix}$		$\begin{matrix} c_{mn} \\ x_{mn} \end{matrix}$	a_m
b	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Ako z uvedeného vyplýva, cieľom riešenia úlohy je určiť prepravované množstvá x_{ij} od všetkých výrobcov ku všetkým dodávateľom, ktoré budú spĺňať nasledujúce požiadavky :

- vyhovujú požiadavkám všetkých dodávateľov,
- naplnia kapacity všetkých dodávateľov a
- náklady na celý rozvoz tovaru budú minimálne, resp. maximálne.

Všeobecný matematický model úlohy je možné potom napísať v tvare :

a) Účelová funkcia

$$z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \mathbf{K} + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + \mathbf{K} + c_{2n} \cdot x_{2n} + \mathbf{K} + c_{m1} \cdot x_{m1} + c_{m2} \cdot x_{m2} + \mathbf{K} + c_{mn} \cdot x_{mn} \rightarrow \text{MIN} \quad (6.2)$$

b) Obmedzujúce podmienky

$$\begin{array}{rcll}
 x_{11} + x_{12} + \mathbf{K} + x_{1n} & & & = a_1 \\
 & x_{21} + x_{22} + \mathbf{K} + x_{2n} & & = a_2 \\
 & & \mathbb{M} & \mathbb{M} \\
 & & x_{m1} + x_{m2} + \mathbf{K} + x_{mn} & = a_m \\
 x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} & = b_1 \\
 & x_{12} & + x_{22} & + x_{m2} & = b_2 \\
 & & \mathbb{M} & \mathbb{M} \\
 & x_{1n} & + x_{2n} & + x_{mn} & = b_n
 \end{array} \quad (6.3)$$

čo možno prepísať do kompaktnejšieho tvaru pomocou súm

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \text{MIN} \\
 \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad (i = 1 \mathbf{K} m) \\
 \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1 \mathbf{K} n),
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

s už uvedenou základnou požiadavkou na vyrovnanosť úlohy

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (6.5)$$

Z uvedeného matematického modelu je vidno, že k dispozícii máme všeobecne $(m + n)$ rovníc pre $(m \cdot n)$ neznámych. Z toho vyplýva, že prípustných riešení je nekonečne veľa a cieľom riešenia je vybrať z množiny prípustných riešení také, pri ktorom nadobudne účelová funkcia minimálnej možnej hodnoty.

Z toho, čo bolo uvedené v predchádzajúcich kapitolách je zrejmé, že ide o špeciálnu formu úlohy lineárneho programovania, ktorá sa vyznačuje tým, že :

- **všetky koeficienty a_{ij} v matici úlohy sú rovné 1 ($a_{ij} = 1, i = 1..m, j = 1..n$),**
- **všetky obmedzujúce podmienky majú tvar rovníc,**
- **matematický model úlohy nie je v bázickom tvare.**

Pokiaľ by sme chceli využiť simplexový algoritmus, bolo by preto potrebné zaviesť $(m + n)$ umelých premenných a pomocnú účelovú funkciu a úlohu riešiť dvojfázovým simplexovým algoritmom, čo je pri rozsiahlejších úlohách náročné i pre počítačové spracovanie.

Preto bol vyvinutý špeciálny algoritmus tzv. **metóda potenciálov**, ktorej základné teoretické odvozenie je založené na riešení duálnej úlohy (duálne nesymetrickej) k základnému matematickému modelu dopravného problému. Má všeobecný rámcový postup formálne zhodný so simplexovým algoritmom, v detailoch sú však jednotlivé kroky od simplexovej metódy zásadne odlišné.

Základná schéma riešenia dopravnej úlohy sa vo všeobecnosti skladá z troch hlavných krokov :

1. **Získanie východiskového bázického riešenia.**
2. **Kontrola jeho optimálnosti.**
3. **Iteračný výpočet až do dosiahnutia optima.**

Reálny význam riešenia dopravnej úlohy si ukážeme na konkrétnom jednoduchom príklade s tromi dodávateľmi a tromi odberateľmi zadanom vo forme tabuľky uvedenej v *tab.6.2* :

Tab. 6.2. Príklad dopravnej úlohy.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	15	22	11	5 000
D ₂	20	30	26	2 700
D ₃	18	26	13	2 300
b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\ 000$

Náhodne vybrané prípustné riešenia, môžu byť nasledovné (uvedené iba v skrátených tabuľkách *tab.6.3.a – d*).

Tab. 6. 3 : Prípustné riešenia príkladu

a)

4 200	0	800
0	0	2 700
1 300	1 000	0

$$\begin{aligned}
 x_{11} &= 4\ 200 \\
 x_{13} &= 800 \\
 x_{23} &= 2\ 700 \\
 x_{31} &= 1\ 300 \\
 x_{32} &= 1\ 000
 \end{aligned}
 \quad z = 191\ 400$$

b)

3 800	0	1 200
1 700	0	1 000
0	1 000	1 300

$$\begin{aligned}x_{11} &= 3\,800 \\x_{13} &= 1\,200 \\x_{21} &= 1\,700 \quad \mathbf{z = 173\,000} \\x_{23} &= 1\,000 \\x_{32} &= 1\,000 \\x_{33} &= 1\,300\end{aligned}$$

c)

3 200	0	1 800
0	1 000	1 700
2 300	0	0

$$\begin{aligned}x_{11} &= 3\,200 \\x_{13} &= 1\,800 \\x_{22} &= 1\,000 \quad \mathbf{z = 183\,400} \\x_{23} &= 1\,700 \\x_{31} &= 2\,300\end{aligned}$$

d)

1 500	0	3 500
2 700	0	0
1 300	1 000	0

$$\begin{aligned}x_{11} &= 1\,500 \\x_{13} &= 3\,500 \\x_{21} &= 2\,700 \quad \mathbf{z = 164\,400} \\x_{31} &= 1\,300 \\x_{32} &= 1\,000\end{aligned}$$

Bez toho, že by sme poznali exaktný prístup hľadania optimálneho riešenia vidíme, že rozdiel medzi najväčšou a najmenšou hodnotou je 27 000, čo predstavuje vyše 16 %.

Môžeme si teda predstaviť, že v reálnej praxi pri riešení rozsiahlych úloh (rozvoz pečiva v okrese apod.) môže schopnosť nájsť optimálne riešenie dopravnej úlohy znamenať významné úspory prepravných nákladov, ale taktiež výrazné zníženie negatívneho ekologického pôsobenia dopravy na prostredie, zlepšenie prejazdnosti komunikácií apod.

6.1.2 Určenie východiskového bázičného riešenia dopravnej úlohy

Ako už bolo uvedené, obmedzujúce podmienky vytvárajú v dopravnej úlohe $(m + n)$ rovníc pre $(m \cdot n)$ neznámych. Pretože však úloha je navyše viazaná podmienkou vyváženia kapacít a požiadaviek, znamená to, že iba $(m + n - 1)$ rovníc je **lineárne nezávislých**.

Ak zvolíme rovnaký zásadný prístup ako v simplexovej metóde a položíme $(m \cdot n - m - n + 1)$ premenných rovné nule, možno zvyšných $(m + n - 1)$ neznámych premenných dorátať.

Z toho vyplýva, že v prípade dopravnej úlohy tvorí úplné bázičné riešenie $(m+n-1)$ nenulových premenných. Ak sa pri použití niektorej z nasledujúcich metód určovania východiskových bázičných premenných nepodarí získať $(m+n-1)$ nenulových bázičných riešení, hovoríme, že bázičné riešenie je **degenerované** a to jedenkrát, dvakrát atď., podľa toho či do úplného bázičného riešenia chýba jedna, dve atď. nenulové premenné. Postup riešenia pri získaní degenerovaného bázičného riešenia je uvedený v *podkapitole 6.1.5*.

Z literatúry je známych viac metód pre určenie východiskového bázičného riešenia od najjednoduchších, ktoré dávajú východiskové bázičné riešenie veľmi rýchlo, ale jemu prislúchajúca hodnota účelovej funkcie je náhodná, nezávislá na charaktere úlohy (tvare matice sadzieb) až po najkomplikovanejšie, pomocou ktorých možno získať riešenia alebo priamo optimálne, alebo veľmi blízke optimu, u ktorých často nie je potrebné robiť ich iteračné spresňovanie.

V našej učebnici sa oboznámime s tromi metódami :

1. **metódou severozápadného rohu** (najjednoduchšia),
2. **metódou indexovou** a
3. **metódou Vogelovou** (z uvedených najpresnejšia).

Postup riešenia u všetkých metód bude vysvetľovaný na riešení rovnakého jednoduchého príkladu, ktorý bol uvedený už v predchádzajúcom texte.

6.1.2.1. Metóda severozápadného rohu (SZR)

Princíp metódy severozápadného rohu (SZ rohu) spočíva v tom, že pri priradovaní hodnôt bázičných premenných ako prvú nenulovú premennú určíme premennú x_{11} (v „severozápadnom rohu“ tabuľky).

Pritom jej priradíme maximálnu možnú hodnotu tak, aby sa alebo vyčerpali kapacity prvého dodávateľa alebo naplnili požiadavky prvého odberateľa. Znamená to, že premenná x_{11} bude rovná menšej z hodnôt a_1 a b_1 ($x_{11} = \min(a_1, b_1)$). Tým z bázičného riešenia vyradíme alebo premenné v prvom riadku, alebo premenné v prvom stĺpci (položíme ich rovné nule).

V riešení pokračujeme v riadku alebo stĺpci s nevyčerpanými kapacitami resp. požiadavkami všeobecne smerom „juhovýchodným“ tak, že najbližšej premennej (x_{12} resp. x_{21}) priradíme maximálne možné množstvo, ktoré opäť naplní alebo kapacity jedného dodávateľa alebo požiadavky jedného odberateľa.

Tak postupujeme dovtedy, pokiaľ nie sú splnené všetky obmedzujúce podmienky úlohy, tzn. nie sú naplnené kapacity všetkých dodávateľov a požiadavky všetkých odberateľov. Riešenie zadaného príkladu je uvedené v tabuľke *tab.6.4*.

Tab.6.4. Východiskové bázické riešenie metódou severozápadného rohu.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a	
D ₁	¹⁵ 5 000	²² 0	¹¹ 0	5 000	$x_{11} = 5\,000$ $x_{21} = 500$ $x_{22} = 1\,000$ $x_{23} = 1\,200$ $x_{33} = 2\,300$
D ₂	²⁰ 500	³⁰ 1 000	²⁶ 1 200	2 700	
D ₃	¹⁸ 0	²⁶ 0	¹³ 2 300	2 300	$z^{(0)} = 176\,100$
b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\,000$	

V tomto prípade sa priradila najskôr hodnota 5000 premennej $x_{11} = \min(5000, 5500)$ tzn. „obsadilo“ sa políčko (1,1). Tým sa vyčerpala kapacita prvého dodávateľa, tzn., že premenné x_{12} a x_{13} musia byť nulové. V druhom kroku sa priradila hodnota 500 premennej x_{21} (naplnila sa kapacita prvého odberateľa).

Analogicky sa priradením hodnôt postupne $x_{22} = 1000$ naplní požiadavka druhého odberateľa, $x_{23} = 1200$ vyčerpajú kapacity druhého dodávateľa a $x_{33} = 2300$ naplní kapacity tretieho výrobcu i požiadavku tretieho odberateľa. Tým je získanie východiskového bázického riešenia ukončené.

Zostáva ešte kontrola, či toto bázické riešenie je úplné. Vidíme, že počet nenulových premenných (počet obsadených políčok tabuľky) $p = 5$, čo sa rovná $(m+n-1) = (3+3-1) = 5$. Dostali sme teda **úplné východiskové bázické riešenie**, o kvalite ktorého však nie sme schopní povedať v tomto momente nič, pretože jednotlivé hodnoty premenných sme určovali bez ohľadu na náklady určené maticou sadzieb.

6.1.2.2. Metóda indexová (MI)

Indexová metóda sa snaží odstrániť nevýhodu vyššie uvedeného postupu jednoducho tak, že priraduje maximálne možné hodnoty premenným v poradí ich sadzieb. V princípe to znamená, že sadzby sa zoradia od minimálnej sadzby, ktorej sa priradí index „1“ ($i = 1$) neklesajúco tak, že nasledujúcim sadzbám sa priradia indexy s postupne vzrastajúcimi poradovými číslami.

Priradovanie potom prebieha podľa rovnakých zásad ako v metóde SZ rohu, tzn. že premennej s najnižšou sadzbou sa priradí maximálne možné množstvo tak, aby vyhovovalo obmedzujúcim podmienkam a v priradovaní sa pokračuje v poradí sadzieb, pokiaľ nie sú naplnené kapacity všetkých dodávateľov a požiadavky všetkých odberateľov.

V konkrétnom vzorovom príklade (tab.6.5) je minimálnou sadzba $c_{13}=11$, ktorej priradíme index i_1 , ďalšia v poradí je sadzba $c_{33} = 13$ s indexom i_2 atď.

Tab.6.5. Východiskové bázičné riešenie metódou indexovou.

D	O	O ₁	O ₂	O ₃	a	
D ₁	15	1 500	0	3 500	5 000	$x_{11} = 1\,500$ $x_{13} = 3\,500$ $x_{21} = 1\,700$ $x_{22} = 1\,000$ $x_{31} = 2\,300$
D ₂	20	1 700	1 000	0	2 700	
D ₃	18	2 300	0	0	2 300	$z^{(0)} = 166\,400$
b		5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\,000$	

$$i_1 \Rightarrow C_{13} = 11$$

$$C_{23} = 26$$

$$i_2 \Rightarrow C_{33} = 13$$

$$C_{11} = 15$$

$$i_4 \Rightarrow C_{31} = 18$$

$$i_5 \Rightarrow C_{21} = 20$$

$$i_{7,8} \Rightarrow$$

$$i_{7,8} \Rightarrow$$

Pri vlastnom priradovaní potom ako prvú určíme premennú $x_{13} = 3500$ (obmedzenie požiadavkou 3.odberateľa). Tým nadobudnú nulových hodnôt premenné x_{23} a x_{33} . Preto sadzbu s indexom i_2 nie je možné využiť a v priradovaní pokračujeme premennou x_{11} , ktorej priradíme hodnotu $x_{11} = 1500$. V ďalšom poradí priradíme hodnoty $x_{31} = 2300$, $x_{21} = 1700$ a nakoniec $x_{22} = 1600$.

Kontrolou bázičnosti riešenia určíme podobne ako v predchádzajúcom prípade, že východiskové bázičné riešenie je úplné. Avšak z toho, že sme uvedeným postupom boli nútení priradiť nenulovú hodnotu i premennej s najvyššou sadzbou ($c_{22} = 30$) vyplýva, že ani toto riešenie, aj keď je v zmysle smeru optimalizácie lepšie ako predchádzajúce, asi nebude optimálne.

6.1.2.3. Vogelova aproximačná metóda (VAM)

VAM vychádza z myšlienky, že k najviac nežiaducej zmene hodnoty účelovej funkcie dochádza vtedy, keď sa nám nepodarí v riadku alebo stĺpci

priradiť hodnotu premennej s minimálnou sadzbou a sme tak nútení vykonať priradenie i tam, kde je rozdiel medzi minimálnou a najbližšou vyššou sadzbou veľký. Z toho vyplýva i algoritmus riešenia, ktorý v prvom kroku určí v každom riadku i stĺpci rozdiel medzi minimálnou a najbližšou vyššou sadzbou.

Prvá hodnota sa pritom priradí premennej s najnižšou sadzbou v riadku alebo stĺpci, kde je uvedený rozdiel najväčší. Tým sa vyradia z riešenia hodnoty v jednom riadku alebo stĺpci. Je preto potrebné prehodnotiť určené rozdiely a v priradovaní pokračovať až do naplnenia obmedzujúcich podmienok vždy v smere od najväčšieho rozdielu ku rozdielom po rade menším. V našom príklade (tab.6.6) je najväčší rozdiel medzi sadzbami c_{21} a c_{23} v druhom riadku ($d = 6$).

Tab.6.6. Východiskové bázičné riešenie metódou Vogelovou.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a	
D ₁	15 2 800	22 1 000	11 1 200	5 000	d = 4, 7
D ₂	20 2 700	30 0	26 0	2 700	d = 6
D ₃	18 0	26 0	13 2 300	2 300	d = 5
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000	
	d = 3	d = 4	d = 2		

$$x_{11} = 2\,800, \quad x_{12} = 1\,000, \quad x_{13} = 1\,200, \quad x_{21} = 2\,700, \quad x_{33} = 2\,300$$

$$Z^{(0)} = 161\,100$$

Znamená to, že maximálnu možnú hodnotu musíme v 2.riadku priradiť premennej s minimálnou sadzbou a tou je x_{21} ($c_{21} = 20$), ktorá nadobudne hodnoty $x_{21}=2700$. Tým 2.riadok z riešenia vypadne (nehrozí, že budú musieť byť využité najväčšie sadzby $c_{22} = 30$ a $c_{23} = 26$). Okrem vyradenia 2. riadku nie je potrebné ostatné rozdiely prehodnocovať a preto sa priradí v 3.riadku ($d=5$) maximálna hodnota premennej s najnižšou sadzbou tj. $x_{33} = 2300$.

Rovnako sa pokračuje ďalej a postupne sa priradia hodnoty premenným $x_{13}=1200$ ($d = 4$), $x_{11}=2800$ ($d = 7$) a nakoniec $x_{12}=1000$. Získaná hodnota účelovej funkcie je zo všetkých doteraz získaných hodnôt najnižšia a je zrejmé, že uvedený postup má svoje oprávnenie. Aj pri VAM sme priradili premenným 5 nenulových hodnôt, čo znamená, že aj tu sme dostali **úplné bázičné riešenie**.

6.1.3. Kritérium optima a iteračné úpravy v dopravnej úlohe

Pri vlastnom riešení dopravnej úlohy vychádzame z východiskového riešenia určeného niektorou z uvedených metód. Metódou potenciálov určíme pomocou tzv. **riadkových a stĺpcových čísiel maticu nepriamych sadziieb C^*** .

Postup je pritom taký, že každému riadku priradíme jedno riadkové číslo (r_i) a každému stĺpcu jedno stĺpcové číslo (s_j). Určíme ich z podmienky, že pre premenné bázičkého riešenia musí platiť, že **súčet riadkového a stĺpcového čísla sa rovná príslušnej sadzbe** ($r_i + s_j = c_{ij}$).

Pretože nenulových premenných bázičkého riešenia je $(m + n - 1)$ a hľadaných hodnôt r_i a s_j je $(m + n)$, dostaneme z uvedenej podmienky $(m + n - 1)$ rovníc pre $(m + n)$ neznámych. Znamená to, že jednu hodnotu je možné zvoliť (výhodne rovnú nule a v tom riadku alebo stĺpci, kde je najviac bázičných premenných) a ostatné zo sústavy rovníc dorátať.

Keď si požadované riadkové a stĺpcové čísla vyššie uvedeným postupom určíme, môžeme zostrojiť požadovanú maticu nepriamych sadziieb a to síce tak, že pre **všetky jej prvky** bude platiť, že hodnota nepriamej sadzby sa rovná súčtu príslušného riadkového a stĺpcového čísla tzn. $c^*_{ij} = r_i + s_j$, pre $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Potom sa z rozdielu matice pôvodných sadziieb a matice nepriamych sadziieb určí tzv. **matica diferencií $D = C - C^*$** , ktorá je súčasne **kritériom optima**. A síce, ak sú všetky jej prvky d_{ij} nezáporné ($d_{ij} \geq 0$), je to znamením toho, že príslušné bázičné riešenie je už optimálne.

Matica diferencií optimálneho riešenia slúži súčasne aj ako kontrola správnosti riešenia a kritérium jeho jednoznačnosti, prípadne viacznačnosti. Riešenie je správne, ak bázičným premenným prislúchajú nulové diferencie. Je to logické, pretože pre bázičné premenné boli riadkové a stĺpcové čísla určované a musia byť teda pre nepriame a pôvodné sadzby rovnaké.

Ak je počet nulových diferencií v matici rovný počtu bázičných premenných ($m+n-1$), je to znamením toho, že riešenie je **jednoznačné**, ak je nulových diferencií viac, znamená to, že úloha je **viacznačná** tj. že je možné nájsť viac riešení s rovnakou hodnotou účelovej funkcie.

V prípade, že je v matici jeden alebo viacej prvkov záporných, je potrebné hľadať nové bázičné riešenie iteračnou úpravou tak, aby sa riešenie (hodnota účelovej funkcie) zmenilo v požadovanom smere.

Každý iteračný krok sa realizuje tzv. **presunom v cykle**, pri ktorom sa premennej, ktorej prislúchala v absolútnej hodnote najväčšia záporná diferencia, priradí najväčšia možná hodnota.

Cesta presunu musí pritom spĺňať dva základné požiadavky :

- **nesmú byť porušené obmedzujúce podmienky riešenia (musia zostať zachované riadkové i stĺpcové súčty) a**
- **nesmie byť narušená bázickosť riešenia (pretože sa jedna bázická premenná novovytvorí, jedna z bázických premenných sa musí zrušiť – „vynulovať“).**

Nové bázické riešenie sa musí znova podrobiť kritériu optima, čo znamená, že sa musia určiť nové matice nepriamych sadzieb C^* a matice diferencií D . Tento postup sa opakuje až do dosiahnutia optima. Celý postup určenia optimálneho riešenia dopravnej úlohy si budeme demonštrovať na zvolenom príklade, pričom za východiskové bázické riešenie zvolíme riešenie, získané metódou indexovou, ktoré je uvedené v tab.6.7.

Tab.6.7.a. Východiskové bázické riešenie dopravnej úlohy

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	a
D ₁	¹⁵ 1 500	²² 0	¹¹ 3 500	5 000
D ₂	²⁰ 1 700	³⁰ 1 000	²⁶ 0	2 700
D ₃	¹⁸ 2 300	²⁶ 0	¹³ 0	2 300
b	5 500	1 000	3 500	Σ=10 000

$$x_{11} = 1\,500$$

$$x_{13} = 3\,500$$

$$x_{21} = 1\,700$$

$$x_{22} = 1\,000$$

$$x_{31} = 2\,300$$

$$z^{(0)} = 166\,400$$

Z podkapitoly 6.1.2.2 už vieme, že toto riešenie optimálne nie je, pretože aplikáciou VAM sme získali bázické riešenie s nižšou hodnotou ÚF.

Úlohou je, presvedčiť sa o tom metódou potenciálov a vykonať úpravy potrebné k dosiahnutiu optima. Riadkové a stĺpcové čísla v tomto prípade dostaneme zo sústavy rovníc

$$r_1 + s_1 = 15 \quad r_2 + s_2 = 30$$

$$r_1 + s_3 = 11 \quad r_2 + s_1 = 20 .$$

$$r_3 + s_1 = 18$$

Ak zvolíme $s_1 = 0$ (v sústave sa vyskytuje trikrát), okamžite dostaneme $r_1 = 15$, $r_2 = 20$ a $r_3 = 18$. Z podmienky $r_1 + s_3 = 11$ určíme $s_3 = -4$ a z podmienky $r_2 + s_2 = 30$ vyplýva $s_2 = 10$.

Teraz je už možné určiť maticu nepriamych sadziieb

$$\mathbf{C}^{*(0)} = \begin{bmatrix} 15+0, & 15+10, & 15-4 \\ 20+0, & 20+10, & 20-4 \\ 18+0, & 18+10, & 18-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 11 \\ 20 & 30 & 16 \\ 18 & 28 & 14 \end{bmatrix}$$

a následne na to maticu diferencií

$$\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(0)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 25 & 11 \\ 20 & 30 & 16 \\ 18 & 28 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-3) & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Z výsledného tvaru matice diferencií vyplýva, že riešenie :

- **je správne** (nulové diferencie na miestach bazických premenných), ale
- **nie je optimálne**, pretože v matici diferencií sú až tri záporné prvky.

Preto je potrebné vykonať 1.iteráciu riešenia tak, že zvolíme novú bazickú premennú x_{12} (odpovedá jej „najzápornejšia“ diferencia). Nové bazické riešenie sa vytvorí zo stávajúceho už zmieným **presunom v cykle**. Nájdenie vhodnej cesty presunu býva najobťažnejšou časťou riešenia dopravnej úlohy, či už pri „ručnom“ riešení alebo pri tvorbe počítačového modelu. Vysvetlíme si ho v skrátenej tabuľke úlohy (*tab.6.7.b*).

Na hrubo vyznačené políčko (1, 2) je nutné presunúť maximálne možné množstvo tak, aby :

- zostali zachované riadkové a stĺpcové súčty a
- nenarušila sa bazickosť riešenia.

Je zrejmé, že ak premennú x_{12} novovytvoríme, k jej doterajšej nulovej hodnote musíme pripočítať (políčko označíme znamienkom {+}). To znamená, že aj v prvom riadku, aj v druhom stĺpci musíme tú istú hodnotu od doterajších bazických premenných odpočítať. Z začať musíme v 2. stĺpci, pretože je tam jediná nenulová premenná x_{22} . Označíme si teda políčko (2, 2) znamienkom {-}. Pokračovať budeme v druhom riadku a síce tak, že rovnakú hodnotu musíme pripočítať k hodnote už existujúcej (bazickosť riešenia).

Tab.6.7.b.: Hľadanie cesty presunu v cykle pri 1. iterácii.

1 500 { - }		3 500	5 000
1 700 { + }	1 000 { - }		2 700
2 300			2 300
5 500	1 000	3 500	

Jediná možnosť je premenná x_{21} v prvom stĺpci. Políčko (2, 1) označíme znamienkom {+}. Nakoniec nám zostáva cyklus presunu uzatvoriť cez políčko (1,1), pričom si označíme, že od premennej x_{11} musíme odpočítavať (znamienko {-} v políčku (1,1)). Tým sa cyklus presunu uzatvoril.

Zostáva určiť už iba presúvanú hodnotu. Je logické, že to bude menšia hodnota z premenných x_{11} a x_{22} , od ktorých sa odpočítava tzn. $\min(x_{11}, x_{22}) = 1000$. Z pohľadu na východiskové bázičné riešenie je zrejmé, že je to hodnota $x_{22} = 1000$, ktorú presunieme na políčko (1, 2), odpočítame od premennej x_{11} a pripočítame k premennej x_{21} . Tým dostaneme nové bázičné riešenie po 1. iterácii v tvare podľa tab.6.7.c. Z hodnoty jeho účelovej funkcie je zrejmé, že postup riešenia je správny a je preto potrebné opäť určiť prostredníctvom riadkových a stĺpcových čísiel maticu nepriamych sadzieb a matice diferencií.

Tab.6.7.c. Bázičné riešenie po 1. iterácii.

		$s_1=15$	$s_2=22$	$s_3=11$	
	D ^O	O ₁	O ₂	O ₃	a
$r_1=0$	D ₁	15 500	22 1 000	11 3 500	5 000
$r_2=5$	D ₂	20 2 700	30 0	26 0	2 700
$r_3=3$	D ₃	18 2 300	26 0	13 0	2 300
	b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\ 000$

$x_{11} = 500$
 $x_{12} = 1\ 000$
 $x_{13} = 3\ 500$
 $x_{21} = 2\ 700$
 $x_{31} = 2\ 300$

 $z^{(0)} = 163\ 900$

Už bez dlhšieho vysvetľovania (určené riadkové a stĺpcové čísla sú uvedené vedľa tabuľky) bude mať matica diferencií po 1. iterácii tvar :

$$\mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(1)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 22 & 27 & 16 \\ 18 & 25 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & (-1) \end{bmatrix}.$$

Vidno, že riešenie ešte stále nie je optimálne a že je možnosť na jeho vylepšenie zaradením premennej x_{33} do bázy. Vytvorenie presunu v cykle je zrejmé z *tab.6.7.d*.

Tab.6.7.d. Hľadanie cesty presunu v cykle pri 2. Iterácii

500 { + }	1 000	3 500 { - }	5 000
2 700			2 700
<u>2 300</u> { - }			2 300
5 500	1 000	3 500	

Z uvedených podmienok vyplýva, že presunúť možno hodnotu premennej $x_{31} = 2300$, takže bazické riešenie po 2. iterácii bude mať tvar podľa *tab.6.7.e*.

Tab.6.7.e. Riešenie po 2.iterácii.

		$s_1=15$	$s_2=22$	$s_3=11$	
	O	O_1	O_2	O_3	a
$r_1=0$	D_1	¹⁵ 2 800	²² 1 000	¹¹ 1 200	5 000
$r_2=5$	D_2	²⁰ 2 700	³⁰ 0	²⁶ 0	2 700
$r_3=2$	D_3	¹⁸ 0	²⁶ 0	¹³ 2 300	2 300
	b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\ 000$

$x_{11} = 2\ 800$
 $x_{12} = 1\ 000$
 $x_{13} = 1\ 200$
 $x_{21} = 2\ 700$
 $x_{33} = 2\ 300$

$z^{(0)} = 161\ 100$

 $\Rightarrow \text{OPTIMUM}$

Ak toto riešenie podrobíme znovu testu optima, získame tvar

$$\mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{C} - \mathbf{C}^{*(2)} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 27 & 16 \\ 17 & 24 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z určenej matice diferencií vidíme, že riešenie po 2.iterácii je už optimálne. Matica diferencií svojim tvarom odpovedá báziickému riešeniu a získané riešenie je jednoznačné.

Ak toto riešenie, porovnáme s východiskovým báziickým riešením určeným Vogelovou aproximačnou metódou vidíme, že VAM nám ponúkla už priamo riešenie optimálne. To samozrejme nemusí byť vždy, ale môžeme s istotou tvrdiť, že východiskové báziické riešenia získané VAM dávajú veľmi dobrú nultú iteráciu, väčšinou veľmi blízku optimu, takže jeho prípadné ďalšie určenie už vyžaduje iba minimum iteračných krokov.

6.1.4 Nevyrovnaná úloha a degenerované báziické riešenie

Doteraz sme sa naučili riešiť dopravné úlohy, ktoré vyhovovali všetkým základným požiadavkám na riešenie. Úlohy boli **vyrovnané**, tj. súčet kapacít všetkých dodávateľov sa rovnal súčtu požiadaviek všetkých odberateľov a súčasne sme vždy dostali úplné východiskové báziické riešenia.

Z poznania reálneho života však vyplýva, že takéto úlohy sa budú vyskytovať v praxi iba výnimočne. V skutočnosti alebo prevyšuje ponuka dodávateľov dopyt odberateľov, alebo naopak ponuka dopytu nestačí. V takých prípadoch hovoríme o **nevyrovnaných dopravných úlohách**.

Ich riešenie je veľmi jednoduché. Základný princíp úpravy spočíva v tom, že nevyrovnanú úlohu prevedieme na vyrovnanú tak, že do riešenia zaradíme alebo **fiktívneho dodávateľa** FD (pokiaľ sú požiadavky odberateľov vyššie ako kapacity dodávateľov), alebo **fiktívneho odberateľa** FO (ak sú naopak kapacity dodávateľov väčšie ako požiadavky odberateľov).

Týmto fiktívnym činiteľom pritom priradíme množstvo, ktoré úlohu vyrovná a nulové hodnoty sadzieb. Novú úlohu už riešime podľa základného postupu z predchádzajúcich podkapitol - postupu určenia východiskového báziického riešenia a preverenie kritéria optima.

Iný problém vznikne, ak východiskové bázické riešenie nemá požadovaný počet ($m+n-1$) nenulových premenných. Aj v tomto prípade je postup jednoduchý. Ak do bázickosti riešenia chýba iba jedna hodnota, jednej „vhodne“ zvolenej premennej, priradíme hodnotu „ ε “ blížiacu sa nule ($\varepsilon \rightarrow 0$).

V ďalšom riešení postupujeme štandardným spôsobom tak, že túto premennú považujeme za premennú bázickú. Pokiaľ chýbajú 2 alebo viacej nenulových bázických premenných, musíme priradiť viac hodnôt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Slovko „vhodný“ v tomto prípade má ten význam, že hodnotu ε je žiaduce priradiť takej premennej (obsadiť ňou také políčko), aby sa cez ňu dal **uzatvoriť cyklus presunu**, pretože hodnota ε sa spravidla z riešenia už po prvej iterácii vyradí.

Vyššie uvedené princípy úprav nevyrovnaného a degenerovaného riešenia budú demonštrované na riešení príkladu z *tab.6.8.a*.

Tab.6.8.a. Zadanie príkladu na nevyrovnanú a degenerovanú dopravnú úlohu.

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a
D ₁	7	5	8	5	4	80
D ₂	8	9	6	7	5	70
D ₃	11	10	9	7	5	50
b	50	100	30	90	30	200
						300

Je zrejmé, že úloha je nevyrovnaná, pretože súčet kapacít výrobcov je 200 a súčet požiadaviek odberateľov je 300. Je preto potrebné na vyrovnanie úlohy zaradiť fiktívneho dodávateľa FD (výrobcu), ktorému priradíme nedostávajúcu sa kapacitu (100) a nulové sadzby (*tab.6.8.b*).

Ak pre túto už vyrovnanú úlohu hľadáme východiskové bázické riešenie indexovou metódou (riadok fiktívneho výrobcu obsadzujeme až posledný) vidíme, že sa podarilo priradiť iba 7 nenulových hodnôt premenných, zatiaľ čo úplné bázické riešenie by malo mať nenulových hodnôt $8 = (5+4-1)$.

K vyriešeniu tohto problému priradíme premennej x_{35} hodnotu ε a budeme ju považovať za bázickú.

Tab.6.8.b. Úprava na vyrovnanú úlohu a východiskové bážické riešenie.

		$s_1 = 5$	$s_2 = 5$	$s_3 = 5$	$s_4 = 6$	$s_5 = 4$	
	$\begin{matrix} O \\ D \end{matrix}$	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	a
$r_1 = 0$	D_1	$\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}$ $\{ + \} \rightarrow \{ - \}$	$\begin{matrix} 4 \\ 30 \end{matrix}$	80
$r_2 = 1$	D_2	$\begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 30 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 40 \end{matrix}$ $\downarrow$	$\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}$ $\uparrow$	70
$r_3 = 1$	D_3	$\begin{matrix} 11 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 50 \end{matrix}$ $\downarrow$ $\{ - \} \leftarrow \{ + \}$	$\begin{matrix} 5 \\ \varepsilon \end{matrix}$	$50 + \varepsilon$
$r_4 = -5$	FD	$\begin{matrix} 0 \\ 50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	100
	b	50	100	30	90	$30 + \varepsilon$	$\Sigma = 300$

$$x_{12} = 50, \quad x_{15} = 30, \quad x_{23} = 30, \quad x_{24} = 40, \quad x_{34} = 50 \quad \mathbf{z}^{(0)} = 1$$

Keď známym postupom určíme riadkové a stĺpcové čísla (sú uvedené vedľa tabuľky) a maticu nepriamych sadziieb $\mathbf{C}^*$, bude matica diferencií pre východiskové bážické riešenie v nasledovnom tvare :

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \dots$$

Ako vidno, sú v nej 2 záporné hodnoty. Prednosť dáme skutočnej hodnote premennej x_{14} pred fiktívnou a preto presunom v cykle cez premenné x_{34} , x_{35} a x_{15} presunieme na políčko (1, 4) hodnotu 30. Pritom vidíme, že rovnaká hodnota bola priradená i premennej x_{35} , čím nám pomocná hodnota ε vypadla z riešenia.

Riešenie po prvej iterácii je uvedené v *tab.6.8.c* .

Tab.6.8.c Riešenie po prvej iterácii.

		$s_1=5$	$s_2=5$	$s_3=4$	$s_4=5$	$s_5=3$	
	D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	a
$r_1=0$	D ₁	⁷ 0	⁵ 50	⁸ 0	⁵ 30	⁴ 0	80
$r_2=2$	D ₂	⁸ 0	⁹ 0	⁶ 30	⁷ 40	⁵ 0	70
$r_3=2$	D ₃	¹¹ 0	¹⁰ 0	⁹ 0	⁷ 20	⁵ 30	50
$r_4=-5$	FD	⁰ 50	⁰ 50	⁰ 0	⁰ 0	⁰ 0	100
	b	50	100	30	90	30	Σ=300

$$x_{12} = 50, x_{14} = 30, x_{23} = 30, x_{24} = 40, x_{34} = 20, x_{35} = 30$$

$$Z^{(0)} = 1\ 150$$

Z hodnôt matice diferencií vyplýva, že :

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 & 5 \\ 11 & 10 & 9 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- riešenie je už optimálne,
- nie je však jednoznačné, pretože matica diferencií obsahuje viac núl, ako je členov bázy riešenia (vid' **0** (tučným písmom)).

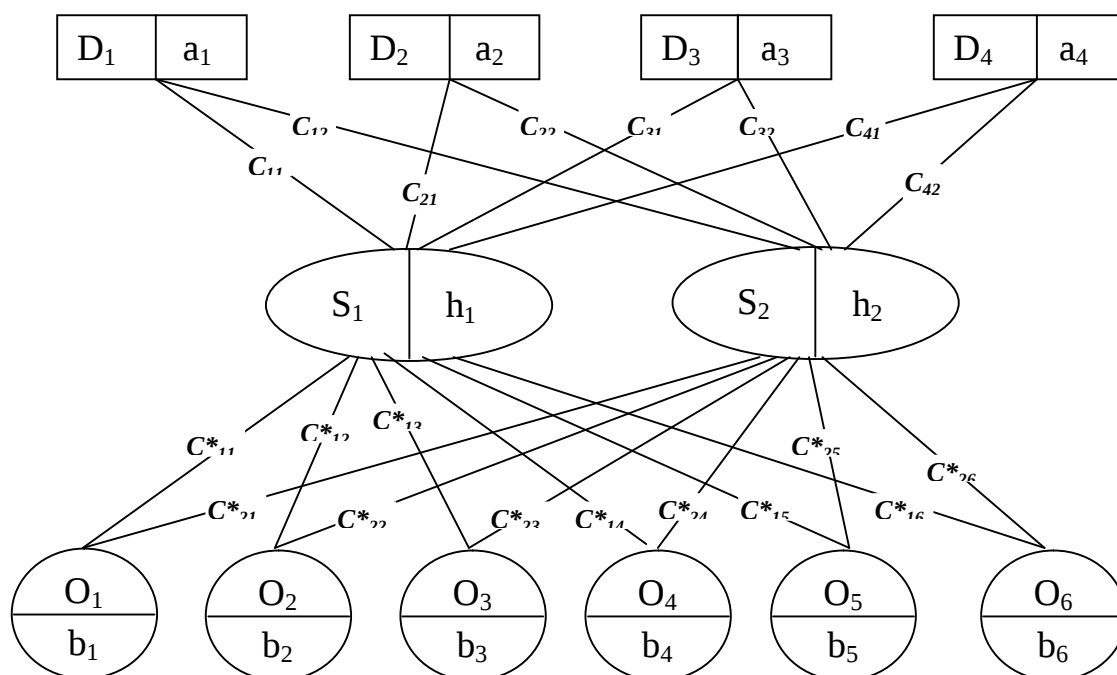
Napríklad, ak presunieme hodnotu 30 na políčko (2, 5) presunom v cykle cez políčka (2, 4) a (3, 4)

(2, 4)	⁷	(2, 5)	⁵
10		30	
(3, 4)	⁷	(3, 5)	⁵
50		0	

je zrejmé, že hodnota účelovej funkcie sa nezmení, pretože presuny v stĺpcoch sa vykonali medzi premennými s rovnakými sadzbami.

6.1.5. Viacrozmerná dopravná úloha

Reálny model rozvozu tovaru od dodávateľov (výrobcov) väčšinou nesmeruje priamo ku koncovým odberateľom (spotrebiteľom), ale uskutočňuje sa tak, že sa tovar od dodávateľov naváža do skladov (veľkoobchodných), odkiaľ sa rozváža potom ďalej ku koncovým odberateľom (obr.6.2).



Obr.6.2. : Schéma dvojrozmernej dopravnej úlohy

Vzniká tak **dvojfázová (dvojrozmerná) dopravná úloha**. Ak úloha v oboch fázach vyhovuje teoretickým zadávacím požiadavkám, najmä čo sa týka vyrovnanosti, je logické, že výsledné náklady budú súčtom nákladov obidvoch čiastkových úloh a teda aj výsledné optimálne riešenie bude súčtom obidvoch čiastkových optimálnych riešení.

Už sme si však uviedli, že tieto teoretické predpoklady sú v praxi splnené iba výnimočne. Najčastejšie sa vyskytuje situácia, že najmenšie sú požiadavky odberateľov, väčšie kapacity dodávateľov a najväčšie kapacity skladov.

U týchto nevyrovnaných úloh je potom väčšinou možné nájsť riešenia s nižšou hodnotou výslednej účelovej funkcie, ako je súčet optimálnych hodnôt oboch čiastkových úloh, ak úlohu riešime ako jeden súhrnný problém. Riešenie si ukážeme na príklade so štyrmi dodávateľmi, tromi skladmi a piatimi koncovými odberateľmi zadanom tabuľkou (tab.6.9.a,b). Z tabuľkového zadania je vidno, že úloha je v oboch fázach nevyrovnaná.

Tab.6.9.a. Dvojrozmerná dopravná úloha -1. fáza (Dodávateľia – sklady).

D \ O	S ₁	S ₂	S ₃	a
D ₁	4	7	13	135
D ₂	6	9	14	40
D ₃	3	4	10	295
D ₄	4	6	11	65
h	180	180	180	535
				540

Tab.6.9.b. Dvojrozmerná dopravná úloha – 2.fáza (Sklady – odberatelia).

D \ O	O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	h
S ₁	10	13	12	8	6	180
S ₂	7	16	10	5	3	180
S ₃	11	20	12	8	6	180
b	120	115	120	65	100	540
						520

Ďalší postup riešenia je potom nasledovný :

1. Nájďme optimálne riešenia oboch čiastkových úloh oddelene, pričom začneme s riešením druhej fázy. Následné riešenie 1.fázy hľadáme iba pre množstvá rovné súčtu kapacít dodávateľov.
2. Úlohu spojíme do úlohy jedinej, pričom spájajúcim riadkom je riadok fiktívneho odberateľa.
3. Skontrolujeme podmienky optima, ktoré sú širšie ako v jednofázovej úlohe. Ak označíme riadkové a stĺpcové čísla 1.fázy (r_i, s_j), druhej fázy (r_i^*, s_j^*), musia platiť okrem základných podmienok pre prvky matíc diferencií ($d_{ij} \geq 0, d_{ij}^* \geq 0$) aj dve prídavné podmienky a síce $r_i \leq 0$ pre všetky i a $s_j + s_j^* \leq 0$ pre všetky j . Pritom podmienka rovnosti $r_i = 0$ platí pre riadok, v ktorom je

nenulová hodnota fiktívnej premennej (v stĺpci FS) a podmienka $s_j^* = -s_j$ pre stĺpce s nenulovou hodnotou v riadku fiktívneho odberateľa FO.

4. Ak východiskové riešenie podmienkam optima nevyhovuje, vykoná sa presun v cykle ako v základnej úlohe s tým rozdielom, že prechod cez riadok fiktívneho odberateľa sa považuje za jeden z vrcholov presunu.

Podľa uvedeného postupu určené optimálne riešenie 2.fázy je v tabuľke *tab.6.10.a* a optimálne riešenie 1.fázy v *tab.6.10.b.*, pričom 1. fáza bola riešená iba pre kapacity rovné súčtu kapacít dodávateľov a tabuľka druhej fázy úlohy je otočená o 90 stupňov tak, aby bolo možné obidve tabuľky spojiť do jednej.

Tab.6.10.a. Čiastkové optimálne riešenie 2.fázy

O	D	S ₁	S ₂	S ₃	b
O ₁		10 -	7 120	11 -	120
O ₂		19 55	16 60	20 -	115
O ₃		12 105	10 -	12 15	120
O ₄		8 -	5 -	8 65	65
O ₅		6 -	3 -	6 100	100
FO		0 20	0 -	0 -	20
h		180	180	180	540 540

$$z_2^{(0)} = 5\,405$$

Tab.6.10.b. Čiastkové optimálne riešenie 1. fázy.

D	S	S ₁	S ₂	S ₃	FS	a
D ₁		4 135	7	13	0	135
D ₂		6 25	9	14	0 15	40
D ₃		3 ε	4 180	10 115	0	295
D ₄		4	6	11 65	0	65
h		160	180	180	15	535 535

$$z_1^{(0)} = 3\,275$$

Obe úlohy riešené oddelene dávajú celkovú hodnotu účelovej funkcie $Z^{(0)} = Z_1^{(0)} + Z_2^{(0)} = 8\,680$, ktorú sme dostali ako súčet účelových funkcií obidvoch čiastkových optimálnych riešení. Ak obe úlohy spojíme do jednej tabuľky, dostaneme východiskové riešenie uvedené v *tab.6.11.a*.

Tab.6.11.a) : Dvojmerná dopravná úloha – východiskové riešenie.

	$s_1 = 6$	$s_2 = 7$	$s_3 = 13$			
	S_1	S_2	S_3	FS	a	
D_1	⁴ 135	⁷	¹³	⁰	135	$r_1 = -2$
D_2	⁶ 25	⁹	¹⁴	⁰ 15	40	$r_2 = 0$
D_3	³ ϵ {+}	⁴ 180	¹⁰ 115 {-}	⁰	295	$r_3 = -3$ $z_1^{(0)} = 3275$
D_4	⁴ $\downarrow$ {-}	⁶	¹¹ 65 $\uparrow$ {+}	⁰	65	$r_4 = -2$
FO	⁰ 20 {-}	⁰	⁰ $\uparrow$ {+}		b	
O_1	¹⁰ $\downarrow$	⁷ 120	¹¹ $\uparrow$		120	$r_1^* = 16$
O_2	¹⁹ 55 $\downarrow$	¹⁶ 60	²⁰		115	$r_2^* = 25$
O_3	¹² 105 {+}	¹⁰	¹² 15 {-}		120	$r_3^* = 18$ $z_2^{(0)} = 5405$
O_4	⁸	⁵	⁸ 65		65	$r_4^* = 14$
O_5	⁶	³	⁶ 100		100	$r_5^* = 12$
h	180	180	180			$z^{(0)} = 8680$
	$s_1^* = -6$	$s_2^* = -9$	$s_3^* = -6$			

S určovaním riadkových a stĺpcových čísiel začneme v druhom riadku s fiktívnou premennou, v ktorom musí byť $r_2 = 0$. Ostatné hodnoty určíme bežným postupom.

Pri kontrole optima zistíme, že riešenie v 3.stĺpci nevyhovuje podmienke $s_3 + s_3^* \leq 0$. V skutočnosti $13 - 6 = 7 > 0$ a preto je potrebné v tomto stĺpci na políčko v riadku fiktívneho odberateľa presunúť v cykle najväčšie možné množstvo, ktorým je podľa naznačeného cyklu 15.

Riešenie úlohy po vykonaní naznačeného presunu v rámci prvej iterácie je uvedené v tab.6.11.b.

Tab.6.11.b. Dvojrozmerná dopravná úloha – riešenie po 1.iterácii

$$s_1 = 6 \quad s_2 = 7 \quad s_3 = 13$$

	S ₁	S ₂	S ₃	FS	a	
D ₁	⁴ 135	⁷	¹³	⁰	135	r ₁ = -2
D ₂	⁶ 25	⁹	¹⁴	⁰ 15	40	r ₂ = 0
D ₃	³ 15 {+}	⁴ 180 ←	¹⁰ 100 {-}	⁰	295	r ₃ = -3 z ₁ ⁽¹⁾ = 3170
D ₄	⁴ ↓ 5 {-}	⁶	¹¹ 65 ↑ 15 {+}	⁰	65	r ₄ = -2
FO	⁰	⁰	⁰		b	
O ₁	¹⁰ ↓	⁷ 120	¹¹ ↑		120	r ₁ [*] = 16
O ₂	¹⁹ 55	¹⁶ 60	²⁰		115	r ₂ [*] = 25
O ₃	¹² 120	¹⁰	¹²		120	r ₃ [*] = 18 z ₂ ⁽¹⁾ = 5405
O ₄	⁸ ↓ {+}	⁵ →	⁸ 65 ↓ {-}		65	r ₄ [*] = 21
O ₅	⁶	³	⁶ 100		100	r ₅ [*] = 19
h	180	180	180			z ⁽¹⁾ = 8575

$$s_1^* = -6 \quad s_2^* = -9 \quad s_3^* = -13$$

Pri kontrole optima zistíme, že nevyhovuje podmienkam optima matica diferencii $\mathbf{D}^*$, pretože diferencie d_{41}^* , d_{42}^* , d_{51}^* , d_{52}^* sú rovné hodnote -7 .

Presun je možné vykonať na ktorékoľvek z uvedených políček. Zvolíme políčko $(4,1)^*$ a hodnotu, ktorú možno presunúť rovnú hodnote 5. Po vykonaní naznačeného presunu je riešenie po 2. iterácii uvedené v *tab.6.11.c*.

Tab.6.11.c. Dvojrozmerná dopravná úloha - riešenie po 2.iterácii - OPTIMUM

	$s_1 = 6$	$s_2 = 7$	$s_3 = 13$		
	S_1	S_2	S_3	FS	a
D_1	⁴ 135	⁷	¹³	⁰	135
D_2	⁶ 25	⁹	¹⁴	⁰ 15	40
D_3	³ 20	⁴ 180	¹⁰ 95	⁰	295
D_4	⁴	⁶	¹¹ 65	⁰	65
FO	⁰	⁰	⁰ 20		b
O_1	¹⁰	⁷ 120	¹¹		120
O_2	¹⁹ 55	¹⁶ 60	²⁰		115
O_3	¹² 120	¹⁰	¹²		120
O_4	⁸ 5	⁵	⁸ 60		65
O_5	⁶	³	⁶ 100		100
h	180	180	180		

$s_1^* = -13$
 $s_2^* = -16$
 $s_3^* = -13$

$r_1 = -2$
 $r_2 = 0$
 $r_3 = -3$
 $r_4 = -2$
 $r_1^* = 23$
 $r_2^* = 32$
 $r_3^* = 25$
 $r_4^* = 21$
 $r_5^* = 19$

$z_1^{(2)} = 3\ 135$

 $z_2^{(2)} = 5\ 405$

 $z^{(2)} = 8\ 540$

Po určení riadkových a stĺpcových čísiel pri kontrole optima zistíme, že získané bázičné riešenie už všetkým štyrom podmienkam optima vyhovuje a preto hľadané optimálne riešenie je

$$\begin{aligned} x_{11}=135 \quad x_{21}=25 \quad x_{31}=20 \quad x_{32}=180 \quad x_{33}=95 \quad x_{43}=65 \quad z_1=3135 \\ x^*_{12}=120 \quad x^*_{21}=55 \quad x^*_{22}=60 \quad x^*_{31}=120 \quad x^*_{41}=5 \quad x^*_{43}=60 \quad x^*_{53}=100 \quad z_2=5405, \end{aligned}$$

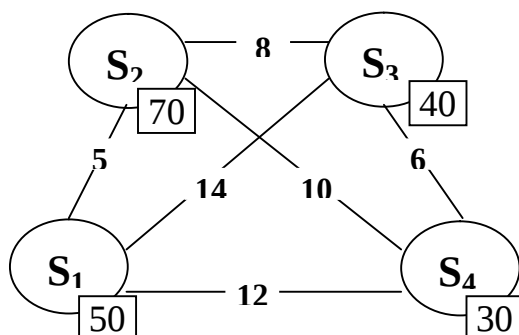
čo dáva výslednú hodnotu účelovej funkcie $z = z_1 + z_2 = 8\,540$.

Vidíme, že oproti pôvodnej hodnote účelovej funkcie získanej ako súčet optimálnych riešení dvoch čiastkových úloh, sa hodnota účelovej funkcie znížila o 140 jednotiek.

6.1.6. Optimálne rozmiestňovanie zdrojov

Jednoduchou aplikáciou čiastočne modifikovaných dopravných úloh s pomerne širokým uplatnením je úloha na optimálne rozmiestňovanie zdrojov. Jej princíp si vysvetlíme na jednoduchom príklade.

Príklad 6.1. Stavebný podnik má za úlohu zabezpečiť 4 stavby dodávkami betónu. Stavby sú pritom rozmiestnené podľa obr. 6.3., v ktorom sú uvedené tiež vzájomné vzdialenosti medzi stavbami a požiadavky jednotlivých stavieb na dodávky betónu. Úlohou je navrhnúť, na ktorých dvoch stavbách je najvýhodnejšie vybudovať betonárky a s akými kapacitami tak, aby súčet najjazdených $\text{m}^3 \cdot \text{km}$ bol minimálny.



Obr.6.3. Schéma rozmiestnenia stavieb pre príklad 6.1.

Ak pre danú úlohu budeme považovať za sadzby vzdialenosti stavieb, potom účelovú funkciu môžeme vytvoriť ako súčet súčinov prevezených množstiev a najjazdených vzdialeností ($\text{m}^3 \cdot \text{km}$), úloha bude mať taký istý formálny tvar (matica sadzieb, vektor požiadaviek, vektor kapacít, účelová funkcia) ako dopravná úloha.

Možností, ako umiestniť na 4 stavby 2 betonárky je

$$\binom{4}{2} = 6,$$

čo znamená, že je potrebné vytvoriť 6 čiastkových dopravných úloh, u každej z nich určiť optimálne riešenie a zo všetkých možných variantov vybrať ten, u ktorého je hodnota účelovej funkcie najmenšia. Pritom všetky varianty budú mať rovnaký vektor požiadaviek. Vektor kapacít je ale potrebné pre každú úlohu vytvoriť zvlášť.

Detaily vysvetlíme na riešení prvého možného variantu (umiestnení výrobní betónu na stavbách S_1 a S_2) uvedenom v *tab.6.13.a*, pričom ostatné varianty sú prehľadne usporiadané v *tab.6.13.b*.

Tab.6.13.a. Prvý variant umiestnenia zdrojov

Variant		S_1	S_2	S_3	S_4	a	Riešenie
1 (S_1, S_2)		0	5	14	12		$x_{11}=60, x_{22}=70,$ $x_{23}=40, x_{24}=30$
	z_1	60	-	-	-	60	
		5	0	8	10		$Z_1=620$
	z_2	-	70	40	30	140	
	b	60	70	40	30	200	

Pri tvorbe tabuľky dopravnej úlohy prvého variantu rozmiestnenia zdrojov (výrobní betónu), ktorá má formálne rovnaký tvar ako v klasickej dopravnej úlohe, môžeme určiť okamžite vektor požiadaviek a maticu sadziieb. Do matice sadziieb pritom zapíšeme v 1.riadku vzdialenosti medzi stavbou S_1 a všetkými ostatnými, v 2.riadku medzi stavbou S_2 a všetkými ostatnými.

Druhým krokom riešenia je už priamo vytvorenie jeho optimálnej podoby pre daný variant, pretože v zásade indexovou metódou priradíme maximálne možné množstvá premenným v poradí sadziieb. V danom príklade to budú v prvom rade premenné x_{11} a x_{22} ($c_{11} = c_{22} = 0$), ktorým priradíme hodnoty ich požiadaviek a pokračovať budeme v 3. a 4. stĺpci priradením požiadaviek b_3 a b_4 premenným x_{23} a x_{24} s minimálnymi sadzbami.

K doriešeniu úlohy zostáva dourčiť ešte kapacity oboch výrobní (súčet v riadku), čím je v podstate úloha ukončená. Riešenie je síce z pohľadu kritérií štandardných dopravných úloh degenerované (nenulových by malo byť $m+n-1 = 5$ premenných), je ale jasné, že výhodnejšie riešenie nemožno nájsť.

Môžeme sa o tom presvedčiť prípadne tak, že jednej premennej priradíme hodnotu ε a metódou potenciálov optimálnosť riešenia preveríme.

Tab.6.13.b. Zostávajúce varianty rozmiestnenia zdrojov.

Variant		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	a	Riešenie
2 (S ₁ , S ₃)	z ₁	0 60	5 70	14 -	12 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30
	z ₂	14 -	8 -	0 40	6 30	70	
							Z₂=530
3 (S ₁ , S ₄)	z ₁	0 60	5 70	14 -	12 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30
	z ₂	12 -	10 -	6 40	0 30	70	
							Z₃=590
4 (S ₂ , S ₃)	z ₁	5 60	0 70	8 -	10 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30
	z ₂	14 -	8 -	0 40	6 30	70	
							Z₄=480
5 (S ₂ , S ₄)	z ₁	5 60	0 70	8 -	10 -	130	x ₁₁ =60, x ₁₂ =70, x ₂₃ =40, x ₂₄ =30
	z ₂	12 -	10 -	6 40	0 30	70	
							Z₅=540
6 (S ₃ , S ₄)	z ₁	14 -	8 70	0 40	6 -	110	x ₁₂ =70, x ₁₃ =40, x ₂₁ =60, x ₂₄ =30
	z ₂	12 60	10 -	6 -	0 30	140	
	b	60	70	40	30	200	Z₆=1280

Z tabuliek všetkých variantov vyplýva, že najvýhodnejšie (optimálne) rozmiestnenie výrobní (betonárok) bude na stavbách S₂ a S₃ (variant 4) s kapacitami 130 a 70, pri ktorých účelová funkcia nadobúda hodnotu 480.

Naopak najhorší je variant 6 (na stavbách S_3 a S_4), kde účelová funkcia má hodnotu až 1280. I z tejto jednoduchšej úlohy je jasné, k akým úsporám, prípadne k akému zvýšeniu nákladov na dopravu môže viesť kvalifikované resp. nekvalifikované rozhodovanie a riadenie.

6.1.7. Záverečné poznámky k dopravnej úlohe

Prebrali sme základný model dopravnej úlohy, algoritmus jeho riešenia i jeho niektoré modifikácie. Samozrejme, že z hľadiska rozsahu učebnice nebolo možné na tomto obmedzenom priestore oboznámiť sa so všetkými nuansami problému. Je zrejmé, že i pri zadávaní dopravnej úlohy k riešeniu nemožno pristupovať mechanicky, ale že je potrebné základný algoritmus, prípadne vstupné údaje prispôbiť vecnej a ekonomickej podstate riešených problémov.

Tak napr. ak zo zadania úlohy vyplynie, že je potrebné (pri nevyrovnanej úlohe) zásobovať prednostne určitých odberateľov, prípadne prednostne využiť kapacity definovaných dodávateľov, je evidentné, že to je možné realizovať vhodnou úpravou matice sadzieb. Podobne je možné tzv. **prohibítnymi sadzbami** zabezpečiť, že k definovaným odberateľom (do definovaných medziskladov) bude navázaný až posledný zvyšok tovaru, po uspokojení ostatných požiadaviek.

Záverom je potrebné pripomenúť, že prezentované metódy určovania východiskového bázičného riešenia i celá metóda potenciálov ku kontrole optimálnosti riešenia sú formulované pre minimalizáciu účelovej funkcie.

Niekedy je však potrebné problém zadaný formálne rovnakým matematickým modelom ako dopravná úloha maximalizovať. Vtedy je k dispozícii niekoľko možností, z ktorých v tomto texte poukážeme na dve základné a jednu možnosť uvedieme v nasledujúcej podkapitole venovanej riešeniu pridelovacej úlohy.

Najjednoduchším spôsobom zmeny minimalizačného problému na problém maximalizačný je **vynásobenie matice sadzieb hodnotou (-1)** a problém riešiť ako minimalizačný. Po vyriešení je potrebné sa vrátiť k pôvodnej matici sadzieb.

Druhou možnosťou je podobným spôsobom, ako u simplexového algoritmu zmeniť kritérium optima. Ak u minimalizácie hodnoty účelovej funkcie bolo kritériom optima dosiahnutie nezáporných hodnôt u všetkých prvkov matice diferencií, budú zrejme kritériom maxima všetky prvky matice diferencií nekladné.

Takisto môžeme logicky obrátiť i postup vytvárania východiskových bázičných riešení metódou indexovou, prípadne metódou Vogelovou, u ktorej sa zrejme budú najskôr obsadzovať premenné s maximálnou sadzbou v riadku alebo stĺpci, kde je rozdiel medzi maximálnou sadzbou a sadzbou najbližšou nižšou najväčší.

Ako príklad si uveďme riešenie rovnakého zadania ako v úvodných častiach tejto kapitoly, tentoraz ale s cieľom účelovú funkciu maximalizovať. Východiskové bázičné riešenie určíme tentoraz prostredníctvom Vogelovej metódy (tab.6.12).

Tab.6.12. : Dopravná úloha ako problém maxima.

		$s_1=15$	$s_2=23$	$s_3=11$	
	O	O_1	O_2	O_3	a
	D				
$r_1=0$	D_1	15 4 200	22 -	11 800	5 000
$r_2=15$	D_2	20 -	30 -	26 2700	2 700
$r_3=3$	D_3	18 1 300	26 1 000	13 -	2 300
	b	5 500	1 000	3 500	$\Sigma=10\,000$

$x_{11} = 4\,200$
 $x_{13} = 800$
 $x_{23} = 2\,700$
 $x_{31} = 1\,300$
 $x_{32} = 1\,000$

$z^{(0)} = \mathbf{191\,400}$
(MAX)

Matica diferencií potom bude v tvare

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 11 \\ 20 & 30 & 26 \\ 18 & 26 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 23 & 11 \\ 30 & 38 & 26 \\ 18 & 26 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -10 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čo znamená, že riešenie získané hneď v nulte iterácii výpočtového postupu je už optimálne.

6.2 Prirad'ovacia úloha

Prirad'ovacia úloha je ďalšou špecifickou formou úloh lineárneho programovania. Cieľom jej riešenia je priradenie (rozmiestnenie) určeného počtu **objektov priradenia O** na rovnaký počet **miest určenia M** tak, aby priradenie bolo optimálne, tzn. aby účelová funkcia nadobudla minimálnej, alebo maximálnej hodnoty. Ohodnotením všetkých možných priradení je i v tomto prípade **matica sadzieb**.

Ak si úlohu znázorníme vo forme tabuľky (*tab.6.13*), je zrejmé, že i keď formálne úloha vyzerá rovnako ako úloha dopravná, jej matematický model bude mať niektoré zásadné odlišnosti.

Tab.6.13. Tabuľka prirad'ovacej úlohy.

O	M	M_1	M_2	M_3		M_n	a
O_1		c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}		c_{1n} x_{1n}	1
O_2		c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}		c_{2n} x_{2n}	1
O_3		c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}		c_{3n} x_{3n}	1
:							:
:							:
O_n		c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	c_{n3} x_{n3}		c_{nn} x_{nn}	1
b		1	1	1		1	$\Sigma = n$

Predovšetkým z podstaty úlohy vyplýva, že premenná x_{ij} je **bivalentná** tzn. môže nadobúdať iba hodnôt 0 a 1. Alebo sa priradenie i-teho objektu na j-te miesto určenia realizuje ($x_{ij} = 1$) alebo nerealizuje ($x_{ij} = 0$). Navyše každý objekt je možné priradiť iba na jedno miesto určenia, takisto na jedno miesto určenia je možné priradiť iba jediný objekt. Prakticky to znamená, že v každom riadku a stĺpci môže byť iba jedna nenulová premenná.

Takisto z podstaty úlohy vyplýva, že matica sadzieb je štvorcová (rovnaký počet objektov i miest určenia).

Základný matematický model takto definovanej úlohy potom bude :

a) Účelová funkcia

$$z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \mathbf{K} + c_{1n} \cdot x_{1n} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + \mathbf{K} + c_{2n} \cdot x_{2n} + \mathbf{K} + c_{n1} \cdot x_{n1} + c_{n2} \cdot x_{n2} + \mathbf{K} + c_{nn} \cdot x_{nn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \text{MIN(MAX)} \quad (6.6)$$

b) Obmedzujúce podmienky

$$x_{11} + x_{12} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{1n} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{2n} = 1$$

$\mathbb{M}$

$$x_{n1} + x_{n2} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{nn} = 1$$

$$x_{11} + x_{12} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{n1} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{n2} = 1$$

$\mathbb{M}$

$$x_{1n} + x_{2n} + \mathbf{K K K K K K K K K K K K} + x_{nn} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{alebo } \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 & \text{pre } i = 1..n \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1 & \text{pre } j = 1..n \quad (x_{ij} = 0 \wedge 1) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Z metód, s ktorými sme sa doteraz zoznámili je zrejmé, že úlohu možno riešiť ako

- **úlohu celočíselného lineárneho programovania s využitím simplexovej metódy a niektorej z metód celočíselného programovania alebo**
- **úlohu dopravnú.**

Pritom pri využití prvej možnosti sa stretneme s tými istými problémami ako pri úlohe dopravnej (umelé premenné, pomocná účelová funkcia) plus navyše problém celočíselného riešenia.

Pri využití algoritmu dopravnej úlohy dostaneme úlohu maximálne degenerovanú vo všetkých jej iteračných krokoch, čo znamená veľa neefektívnych presunov hodnôt ε pri presunoch v cykle.

Z uvedených dôvodov boli vyvinuté špeciálne efektívne algoritmy riešenia priradovacej úlohy. Najrozšírenejším z nich je tzv. **maďarská metóda**, s ktorou sa detailnejšie oboznámime.

Maďarská metóda vo svojej základnej podobe bola vyvinutá (podobne ako metóda potenciálov pri riešení dopravnej úlohy) ako úloha minimalizačná, hľadajúca minimálnu prípustnú hodnotu účelovej funkcie. Podobne ako u dopravnej úlohy ju však možno jednoduchou úpravou pretransformovať na úlohu maximalizačnú.

Formálny postup riešenia priradovacej úlohy je rovnaký ako u základného simplexového algoritmu alebo dopravnej úlohy a spočíva v troch základných krokoch :

1. **získaní východiskového riešenia,**
2. **posúdení jeho optimálnosti a**
3. **úpravách v prípade, keď riešenie podmienkam optima nevyhovuje.**

Východiskové bázické riešenie v priradovacej úlohe získavame tzv. **metódou redukcie sadzieb**, ktorej základný princíp je založený na základnej vlastnosti riešenia lineárnych úloh a síce, že ich riešenie sa nezmení, ak od niektorých rovníc (riadku alebo stĺpca matice sadzieb) odpočítame rovnaké číslo (zmení sa iba hodnota účelovej funkcie).

Vlastná realizácia základných krokov vyzerá tak, že

- v každom riadku sa nájde minimálna sadzba c_{ij} , ktorá sa od ostatných sadzieb v riadku odpočíta (tým je zabezpečené, že v každom riadku vznikne minimálne jedna nulová redukovaná sadzba),
- skontroluje sa, či sú nulové redukované sadzby aj v každom stĺpci,
- ak nie, vykoná sa redukcia sadzieb aj v tých stĺpcoch, kde doteraz žiadna nulová sadzba nebola, čím sa zabezpečí, že v každom riadku aj stĺpci je minimálne jedna nulová redukovaná sadzba.

Ďalším krokom riešenia je, že sa pokúsime priradiť maximálne možné množstvo nenulových hodnôt premenným s nulovými redukovanými sadzbami, pričom sa prednostne priradujú nenulové hodnoty premenným, v ktorých riadkoch alebo stĺpcoch je minimálne množstvo nulových sadzieb (najlepšie iba jediná).

Ak sa takto podarí priradiť všetky objekty na miesto určenia, tj. **ak počet všetkých nenulových hodnôt premenných x_{ij} je rovný rozmeru úlohy n** , bolo dosiahnuté optimálne riešenie. Hodnotu jeho účelovej funkcie je potrebné určiť z pôvodnej matice sadzieb. Ak sa pri základnom priradení nepodarí priradiť všetky objekty na miesta určenia, riešenie optimálne nie je, čo znamená, že je potrebné vykonať jeho úpravy.

Postup potrebných úprav je nasledovný :

1. Všetky premenné s nulovými redukovanými sadzbami sa prekryjú minimálnym počtom tzv. **krycích čiar**. Pritom sa prekrywajú najskôr tie riadky alebo stĺpce, v ktorých je nulových redukovaných sadzieb najviac. Podľa tzv. **Königovej vety** musí byť počet krycích čiar rovný počtu získaných nenulových premenných (súčasne je to i kontrola správnosti riešenia).
2. Nájde sa minimálna sadzba u neprekrytých premenných a tá sa :
 - I. **Odpočíta od sadzieb neprekrytých premenných.**
 - II. **Pripočíta k sadzbám premenných dvakrát prekrytých (u ktorých sa krycie čiary križujú).**
 - III. **Sadzby premenných jedenkrát prekrytých zostávajú nezmenené.**

Týmto postupom sa vytvorí nová matica redukovaných sadzieb, v ktorej sa znova snažíme realizovať priradenie, pričom sa celý postup opakuje až do dosiahnutia optima, tzn. priradenia všetkých objektov na miesta určenia, ktoré sú charakterizované nulovými redukovanými sadzbami.

Detailne si objasníme celý postup na riešení jednoduchšej priradovacej úlohy o rozmere 5 x 5 zadanej v *tab.6.15.a*.

Tab.6.15.a. Riešenie priradovacej úlohy – zadanie a prvé redukcie sadzieb.

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	a
O ₁	0, 20	20, 40	35, 50, 70	40, 60	5, 25	1
O ₂	10, 30	25, 45	0, 15, 35	0, 20	0, 20	1
O ₃	5, 40	0, 35	30, 45, 80	5, 40	10, 45	1
O ₄	40, 60	0, 20	5, 20, 40	15, 35	50, 70	1
O ₅	5, 35	0, 30	20, 35, 65	20, 50	30, 60	1
b	1	1	1	1	1	Σ = 5

Po prvej redukcii po riadkoch sú nulové redukované sadzby i vo všetkých stĺpcoch, okrem 3.stĺpca. Ak vykonáme redukcii i v ňom, výsledná matica redukovaných sadzieb pre prvý pokus o východiskové priradenie je v *tab.6.15.b*.

Tab.6.15.b. Riešenie priradovacej úlohy – výsledná matica sadzieb po prvej redukcii (nulte iterácii) a úvodné priradenie.

O \ M	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	a
O ₁	0	20	35	40	5	1
O ₂	10	25	0	0	0	1
O ₃	5	0	30	5	10	1
O ₄	40	0	5	15	50	1
O ₅	5	0	20	20	30	1
b	1	1	1	1	1	Σ = 5

Podľa popísaných zásad priradíme nenulové hodnoty najskôr premenným $x_{11} = 1$ (jediná nulová redukovaná sadzba v riadku i stĺpci), $x_{32} = 1$ (jediná v riadku) a $x_{23} = 1$ (jediná v stĺpci). Tým sú možnosti priradenia vyčerpané, pretože zvyšné nulové sadzby v druhom riadku a druhom stĺpci už nie je možné využiť. Pretože počet priradených nenulových hodnôt ($p = 3$) je menší ako rozmer úlohy ($n = 5$), je potrebné vykonať naznačené úpravy.

Ich prvou fázou je prekrytie všetkých nulových sadzieb kryciami čiarami. Ako prvé prekryjeme druhý riadok a druhý stĺpec, v ktorých sú po 3 nulové sadzby. Zostane potom iba jediná (c_{11}), ktorú prekryjeme vodorovne (riešené stále v *tab.6.15.b*). Pretože počet krycích čiar ($k = p = 3$) sa rovná počtu priradených nenulových premenných, je zrejmé, že riešenie prebieha správne.

V druhej fáze sa nájde neprekrytá minimálna sadzba ($c_{31} = c_{24} = c_{43} = c_{51} = 5$) a tá sa

- **odpočíta od všetkých sadzieb neprekrytých a**
- **pripočíta ku všetkým sadzbám dvakrát prekrytým (c_{12} a c_{22}).**

Matica sadzieb po tejto redukcii je uvedená v *tab.6.15.c*.

Tab.6.15.c. Riešenie priradovacej úlohy – výsledná matica sadzieb po 1.iterácii.

O \ M	M₁	M₂	M₃	M₄	M₅	a
O₁	0 1	25 -	35 -	40 -	5 -	1
O₂	10 -	30 -	0 -	0 -	0 1	1
O₃	0 -	0 -	25 -	0 1	5 -	1
O₄	35 -	0 -	0 1	10 -	45 -	1
O₅	0 -	0 1	15 -	15 -	25 -	1
b	1	1	1	1	1	$\Sigma = 5$

$Z^{(1)} = 150$ (MIN) – optimum

Pri nasledujúcom priradovaní v poradí $x_{11} = 1$ (jediná v riadku i stĺpci), $x_{52} = 1$ (jediná využiteľná v 5.riadku), $x_{25} = 1$ (jediná využiteľná v 5.stĺpci) a $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$, vidíme, že sa podarilo priradiť nenulové hodnoty práve piatim premenným a že získané riešenie je preto optimálne. Jemu odpovedajúca hodnota účelovej funkcie je (s využitím pôvodnej matice sadzieb)

$$Z^{(1)} = 20 + 20 + 40 + 40 + 30 = 150 \text{ (optimum)}.$$

6.2.1. Riešenie priradovacej úlohy pre maximálnu hodnotu účelovej funkcie

Zatiaľ čo u dopravnej úlohy v pôvodnom znení, je problém maximalizácie účelovej funkcie viacmenej výnimočný, pri formuláciách priradovacích problémov sa úloha nájsť maximálnu hodnotu vyskytuje pomerne často (úloha priradenia pracovníkov na pracoviská pre dosiahnutie maximálneho výkonu, priradenie zákazníkov pre maximálne uspokojenie ich potrieb alebo typický problém „sobášov“ – priradenie ženíchov a neviest, ktoré najlepšie vyjadrí ich vzájomné sympatie).

U dopravnej úlohy sme v predchádzajúcej podkapitole uviedli dva spôsoby transformácie úlohy minima na úlohu maxima. Obidva však pri priradovacej úlohe nie je možné celkom využiť.

Používa sa však iný jednoduchý spôsob transformácie (využiteľný i pri dopravnej úlohe), ktorý si v ďalšom vysvetlíme.

Jeho slovné vyjadrenie je asi nasledovné :

1. **V matici sadzieb sa nájde maximálna sadzba $m = c_{ij \text{ MAX}}$.**
2. **Vytvorí sa nová matica sadzieb C^* , v ktorej sa každý prvok vytvorí ako**

$$c^*_{ij} = m - c_{ij}.$$

3. **Riešia sa optimálne priradenia mad'arskou metódou pre maticu C^* (minimalizácia).**
4. **Po získaní optima sa určí hodnota účelovej funkcie pre pôvodnú maticu sadzieb, čím získame maximálne možné priradenie v danej úlohe.**

Ak si budeme tento postup demonštrovať na úlohe nájsť pre zadaný príklad maximálne priradenie, bude po zistení, že maximálna sadzba v úlohe je $m = c_{33} = 80$, bude nová matica sadzieb C^* podľa tab.6.16.

Tab.6.16. Úloha maximálneho priradenia – transformovaná matica sadzieb.

	M₁	M	M	M	M	a
O₁	60, 40, 30 -	40, 20 -	10 -	20, 0 1	55, 35 -	1
O₁	50, 15, 5 -	35, 0 1	45 -	60, 25 -	60, 25 -	1
O₁	40 -	45 -	0 1	40 -	35 -	1
O₁	20, 10, 0 1	60, 50 -	40 -	45, 35 -	10, 0 -	1
O₁	45, 25, 15 -	50, 30 -	15 -	30, 10 -	20, 0 1	1
b	1	1	1	1	1	$\Sigma = 5$

$$Z^{(0)} = 305 \text{ (MAX) - optimum}$$

V nej sa automaticky vytvorí nulová sadzba $c_{33}^* = 0$. Redukciou po riadkoch sa nevytvorí potom nulová sadzba iba v prvom stĺpci, v ktorom je preto potrebné urobiť ešte ďalšiu redukciu.

Tým sa vytvorila matica redukovaných sadzieb pre prvé priradenie, pri ktorom zistíme, že priradením postupne $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$ a $x_{55} = 1$ sa podarilo priradiť $p = n = 5$ nenulových hodnôt premenných, čo je znamením toho, že určené priradenie je optimálne. Jeho hodnota účelovej funkcie (s uvažovaním pôvodnej matice sadzieb) je $z = 60 + 45 + 80 + 60 + 60 = 305$ (MAX), čo odpovedá hľadanému maximu.

6.3. Záverečné poznámky k distribučným úlohám

Uvedené dve základné úlohy – úloha dopravná a úloha prirad'ovacia – so svojimi rôznymi modifikáciami ani zďaleka nevyčerpávajú problematiku distribučných úloh. Viaceré ďalšie úlohy môžu vzniknúť rôznymi kombináciami už riešených úloh napr. tzv. **alokačné problémy** (allocation problems), v ktorých sa rieši optimálne združovanie miest odberu tovaru do rajónov obsluhovaných z jednotlivých zdrojov, **úlohy optimálneho rozmiestnenia zdrojov**, v ktorých nebude kladená podmienka, že zdroje musia byť umiestnené priamo v miestach odberu apod.. Pri formulácii podobných úloh je vždy predovšetkým potrebné starostlivo sa venovať zostaveniu ich matematických modelov a v závislosti na nich potom voliť metódu riešenia.

Medzi distribučné úlohy je možné taktiež zaradiť aj tzv. **úlohy obchodného cestujúceho**, **úlohy okružných ciest** a niektoré ďalšie, o ktorých budeme hovoriť v nasledujúcej kapitole venovanej základom teórie grafov.

CVIČENIA

1. Je potrebné zabezpečiť distribúciu tovaru z 2 veľkoskladov V_1 a V_2 ku 3 odberateľom. Podmienky prepravy podľa požiadaviek s príslušnými sadzbami sú nasledovné :

	O_1	O_2	O_3	Kapacity
V_1	5	8	1	1000
V_2	10	4	7	2000
Požiadavky	1000	900	1300	MIN

Určte optimálny plán rozvozu tak, aby náklady na prepravu boli minimálne.

2. Podnik vyrába polovýrobok v troch pobočkách, ktorých denná produkcia je 300, 400 a 500 kusov. Týmito polovýrobkami sa zásobujú 4 montážne dielne, ktorých požiadavky sú 350, 280, 320 a 250 kusov polovýrobkov. Náklady na dopravu, kapacity pobočiek a požiadavky montážnych dielní sú uvedené v tabuľke.

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	Kapacity
P ₁	6	4	8	5	300
P ₂	5	10	3	7	400
P ₃	8	9	7	11	500
Požiadavky	350	280	320	250	Σ = 1200 (MIN)

Úlohou je určenie východzieho bázického riešenia

- metódou severozápadného rohu,
- indexovou metódou,
- Vogelovou metódou a

určenie plánu prepravy tak, aby dopravné náklady boli minimálne.

3. Riešte priradovací problém, pričom sa všetky kapacity a požiadavky rovnajú a matica $C = \{ c_{ij} \}$ má tvar

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 3 \\ 11 & 10 & 11 & 10 \\ 8 & 7 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

LITERATÚRA

- [1] Mejzlík, M. : Základní metody operačního výzkumu a jejich aplikace v železničním vojsku. Vojenská fakulta VŠDS, Žilina 1982.
- [2] Slamková, E. – Cajchanová, O. – Chromjaková, F. : Operačná a systémová analýza. Strojnícka fakulta ŽU, Žilina 1997.
- [3] Tanglmayer, R. : Riadiaca a organizátorská práca (viacrozmerná dopravná úloha). Vojenská fakulta, Žilina 1982.
- [4] Janáček, J. : Operačná analýza I. Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina 1997.

7. ZÁKLADY TEÓRIE GRAFOV

„Riešenie problému spočíva v tom, nájsť niekoho, kto problém vyrieši.“

VAN HERPENOV ZÁKON

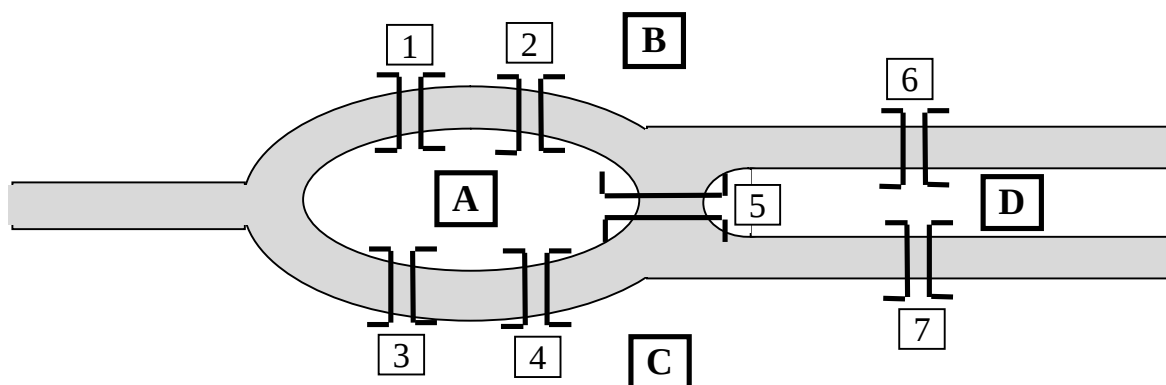
Grafické zobrazenie rôznych typov problémov býva väčšinou veľmi názorné, či už ide o problematiku zobrazenia terénu a komunikačnej siete v ňom, problematiku zobrazenia štruktúr zložitých chemických organických zlúčenín, alebo grafické zobrazenie elektrických obvodov. Pritom je možné, tieto principiálne rôznorodé problematiky znázorniť podľa jednotných zásad, jednotnou metodikou vyvinutou v oblasti dnes nazývanej **teóriou grafov**.

Prvé úlohy, ktoré dnes k uvedenej problematike radíme, sa začali objavovať už v 18.storočí. Za historicky prvú je považovaná Eulerova úloha „o siedmych kráľoveckých mostoch“ (1736). V oblasti elektrotechniky využíval grafy k zobrazeniu elektrických obvodov ako prvý Kirchhoff (1747). K znázorneniu organických chemických zlúčenín použil grafické štruktúry ako prvý Cayley v roku 1857 (v roku 1958 dostal za túto problematiku Lederberg Nobelovu cenu).

S úlohami, ktoré dnes nazývame „**cesty na grafoch**“ nadviazal na Eulera v roku 1859 Hamilton, ktorý definoval úlohy „obchodného cestujúceho“, okružných jázd a niektoré ďalšie.

Za historicky prvý algoritmus úlohy teórie grafov je dnes považovaný algoritmus určenie minimálnej kostry (minimálneho stromu) v grafe publikovaný v roku 1926 českým matematikom, neskorším akademikom Borůvkom.

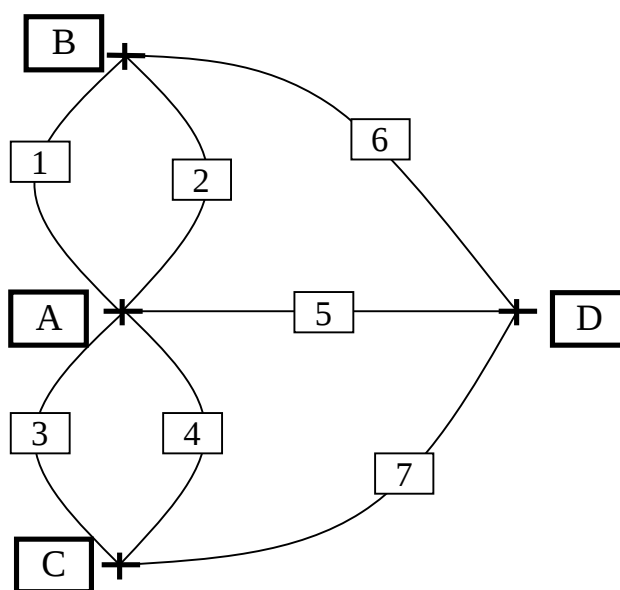
Pre zaujímavosť si pripomeňme zmienenú Eulerovu úlohu o siedmych kráľoveckých mostoch a využime ju k zavedeniu niektorých základných pojmov teórie grafov.



Obr.7.1 : Sedem královeckých mostov

Zadanie zmienenej úlohy spočívalo v tom, že rieka v meste Královec (Königsberg – dnes Kaliningrad) (obr.7.1), rozdelila pevnú zem na štyri časti (označené A, B, C, D), ktoré boli navzájom pospájané siedmymi mostami (označené 1, 2, 3 ... 7). Otázka pritom znela, či je možné prejsť všetky mosty tak, aby sa cez každý išlo iba raz. Išlo teda o úlohu, ktoré dnes radíme viacmenej medzi hlavolamy (tzv. „jednotážka,“). To ale nie je podstatné.

Podstatné je to, že Euler k jej znázorneniu ako prvý použil graf (obr.7.2), v ktorom definoval niektoré základné pojmy, ako sú vrcholy (uzly) grafu a hrany grafu. Ak sa na graf pozrieme, uvidíme, že jednotlivé časti pevnej zeme sú znázornené bodmi (vrcholmi grafu) a cesty cez jednotlivé mosty označené čiarami (hranami grafu).



Obr.7.2 : Graf úlohy „o siedmich královeckých mostoch“.

Poznámka : Pre úplnosť uvedme, že daná úloha nie je riešiteľná. Ak každému vrcholu priradíme stupeň rovný počtu z neho vychádzajúcich hrán, riešiteľné sú iba úlohy, ktoré majú všetky vrcholy stupňa párneho, alebo práve dva vrcholy stupňa nepárneho a všetky ostatné rádu párneho. Čo nie je prípad uvedenej úlohy, ktorá má všetky vrcholy stupňa nepárneho (B, C a D stupňa tretieho) a vrchol A stupňa piateho.

V grafe sa stretávame teda so základnými pojmi :

- **vrcholy (uzly) grafu** – všetky vrcholy grafu tvoria množinu vrcholov a
- **hrany grafu** – všetky hrany tvoria množinu hrán.

K úplnému popisu grafu nám však ešte chýba vyjadrenie (predpis), ktoré vrcholy sú navzájom spojené akými hranami. Tomuto vyjadreniu hovoríme **incidencia**. Vyjadrená môže byť alebo **incidenčnou tabuľkou** (*tab.7.1*), v ktorej sa pre jednotlivé hrany uvádza, ktoré vrcholy spájajú, alebo častejšie **incidenčnou maticou**.

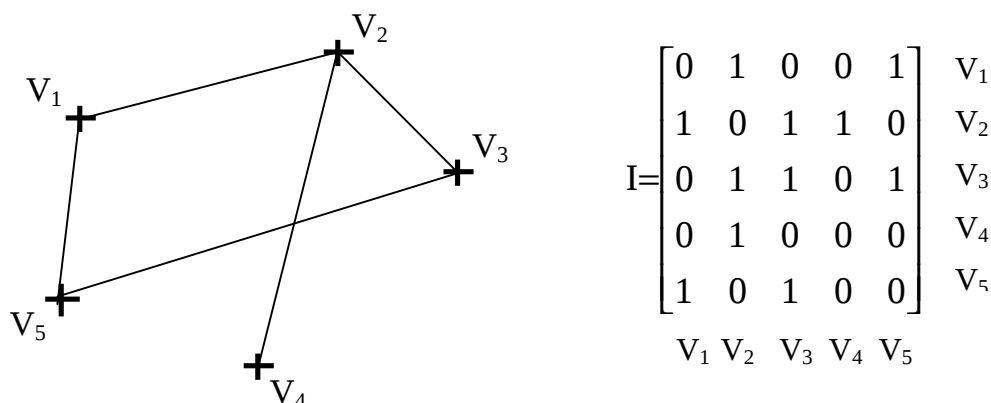
Tab.7.1 : Incidenčná tabuľka grafu z obr.7.2.

Hrana	1	2	3	4	5	6	7
Vrcholy	A	A	A	A	A	B	C
	B	B	C	C	D	D	D

Graf teda možno definovať ako usporiadanú trojicu $G \equiv (V, H, I)$, kde $V \equiv \{A, B, C, D\}$ je množina vrcholov, $H \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ je množina hrán a I je incidencia. Uvedené množiny stále platia pre zvolený príklad. V bežnej praxi značíme vrcholy symbolmi V_j (s jedným indexom $j = 1, 2, \dots$, počet vrcholov) a hrany symbolmi dvojindexovými h_{ij} (spája vrcholy V_i a V_j) a zapisujeme ich do tzv. **incidenčnej matice**.

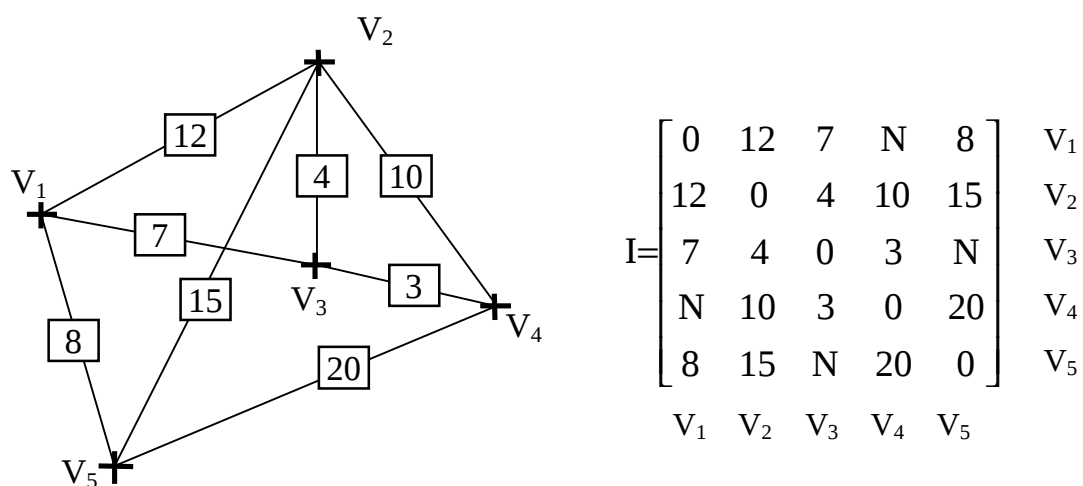
Najjednoduchšie je vyjadrenie incidencie tzv. neohodnoteného grafu, v ktorom pokiaľ hrana medzi vrcholmi existuje, priradíme jej hodnotu 1, pokiaľ neexistuje, priradí sa jej hodnota 0.

Príklad neohodnoteného grafu s jeho incidenčnou maticou je na obr.7.3. Je zrejmé, že neohodnotený graf bude mať využitie napr. v elektrotechnike, keď jednotka v incidenčnej matici znamená, že medzi dvoma bodmi grafu (obvodu) existuje hrana (spoj).



Obr.7.3 Neohodnotený graf a jeho incidenčná matica.

Častejším prípadom sú však grafy ohodnotené, v ktorých jednotlivým hranám priradzujeme hodnoty, ktoré majú niektorý konkrétny význam, ako napr. vzdialenosť, náklady, priepustnosť, spotreba, čas apod. Incidenčná matica ohodnoteného grafu (obr.7.4) potom svojimi prvkami vyjadruje priamo hodnoty priradené jednotlivým hranám.



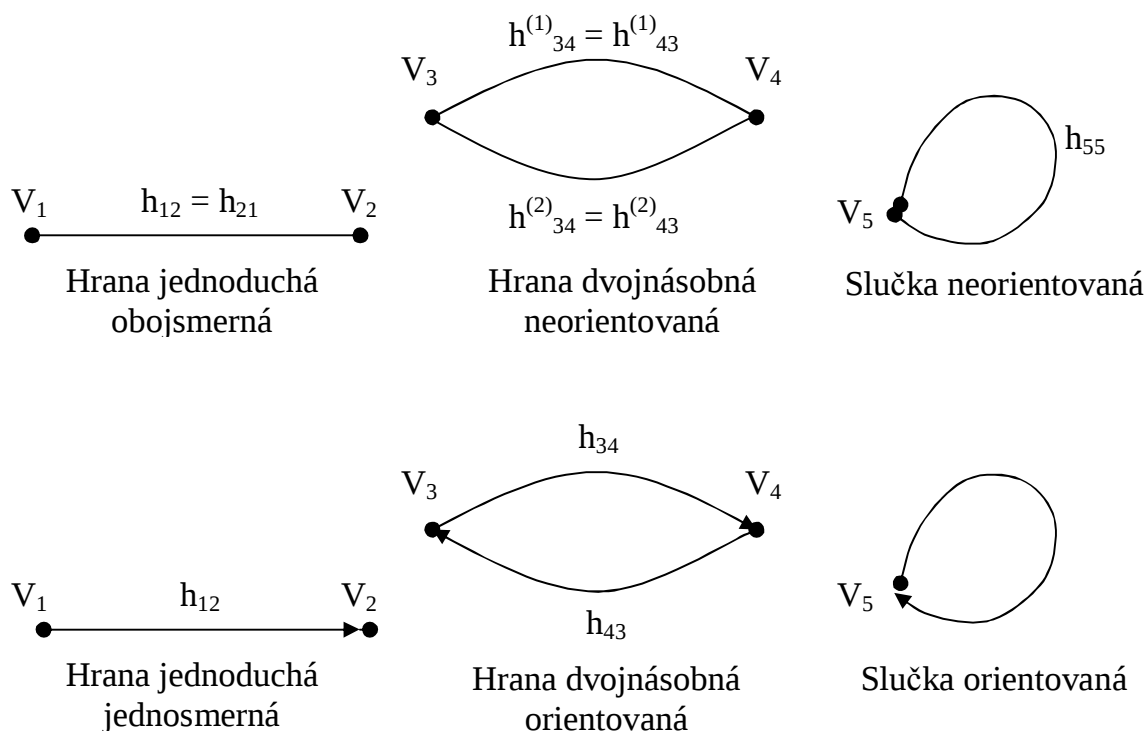
Obr.7.4. Ohodnotený graf a jeho incidenčná matica.

Pokiaľ hrana medzi vrcholmi neexistuje, do incidenčnej matice sa alebo nepíše nič, alebo (pre niektoré počítačové algoritmy) sa vloží hodnota veľmi veľká (symbol N).

Graf uvedený na obr.7.4 je tzv. **graf neorientovaný**. Vyznačuje sa tým, že hodnoty hrán $h_{ij} = h_{ji}$ pre všetky i, j tzn., jeho incidenčná matica je symetrická. Neorientovaný graf sa tiež niekedy volá **multigraf**.

Graf, v ktorom platí, že $h_{ij} \neq h_{ji}$ voláme grafom **orientovaným** (skrátene orgrafom). Jeho incidenčná matica je potom evidentne nesymetrická.

Hrany pritom môžu byť v súlade s obr.7.5 - **jednoduché** (jednosmerné alebo obojsmerné), **násobné** (obojsmerné i jednosmerné) alebo **slučky**. Slučka je pritom zvláštnym typom hrany, ktorý vychádza i končí v tom istom vrchole.



Obr.7.5. Typy hrán v grafoch.

Z ďalších dôležitých pojmov spomeňme hlavne tie, ktoré budeme v ďalšom využívať a to najmä :

- **sled** – je postupnosť hrán, v ktorej koncový bod jednej hrany je počiatočným bodom hrany druhej atď.,
- **cesta** – je sled, v ktorom sú všetky hrany navzájom rôzne,
- **súvislý (spojitý) graf** – je taký graf, v ktorom každé jeho dva vrcholy možno spojiť sledom,
- **okruh (kružnica)** – je uzatvorený sled,
- **sieť** – je ohodnotený jednosmerný graf,
- **podgraf** – je časť pôvodného grafu, ktorého vrcholy a hrany sú podmnožinami množín vrcholov a hrán grafu pôvodného,

- **faktorový podgraf** – je taký podgraf, v ktorom množina vrcholov zostane rovnaká a iba množina hrán je podmnožinou hrán grafu pôvodného,
- **úplný graf** – je graf, v ktorom existujú hrany medzi všetkými kombináciami dvojíc vrcholov, tzn. počet hrán u úplného neorientovaného grafu je

$$p = \binom{n}{2},$$

kde n je počet vrcholov.

7.1 Minimálna kostra grafu

Kostrou (stromom) súvislého grafu je taký jeho súvislý podgraf, ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy (faktorový podgraf) a neobsahuje uzatvorený okruh.

Pod pojmom **minimálna kostra grafu** budeme potom rozumieť kostru, v ktorej je súčet ohodnotení hrán minimálny. Vyjadrené inými slovami : úloha nájsť minimálnu kostru grafu spočíva v nájdení vzájomného prepojenia medzi všetkými vrcholmi tak, aby súčet ohodnotení hrán do tohoto prepojenia zaradených bol minimálny. Ako už bolo uvedené, túto úlohu ako prvý vyriešil český profesor Borůvka a jej prvou aplikáciou bola elektrifikácia niektorých oblastí vtedajšej Československej republiky, pri ktorej bolo úlohou zaviesť elektrickú energiu do všetkých obcí určitého regiónu tak, aby súčet dĺžky elektrického vedenia bol minimálny.

Algoritmus jej riešenia je relatívne jednoduchý. Zadaný je neorientovaný súvislý graf všeobecne s n vrcholmi a p hranami

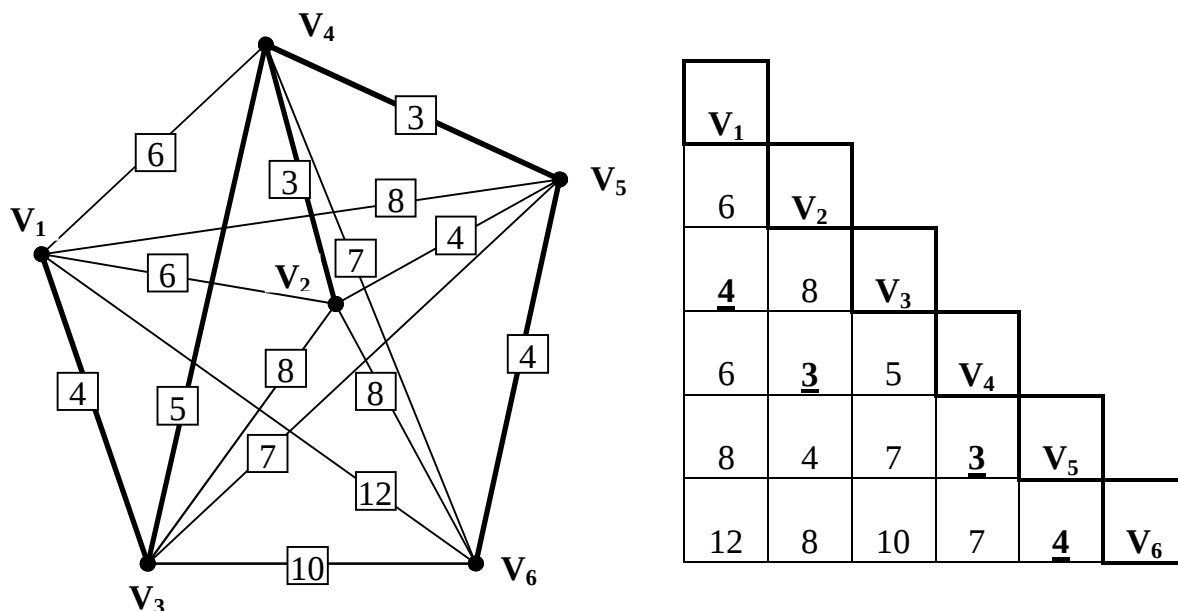
$$\left[(n-1) \leq p \leq \binom{n}{2} \right].$$

Kroky vlastného riešenia sú nasledovné :

1. Zoradiť hrany podľa veľkosti od najmenšej neklesajúco.
2. Zo zoznamu hrán vybrať prvé dve s najmenším ohodnotením a zaradiť ich do minimálnej kostry. Ak je hrán s najmenším ohodnotením viac, vybrať ľubovoľné dve z nich.
3. Vyberať ďalšie hrany v poradí podľa veľkosti a do minimálnej kostry ich zaradiť v prípade, že s hranami predchádzajúcimi tzn. už zaradenými, nevytvárajú uzatvorený okruh (kružnicu).

4. V postupe podľa bodu 3 pokračovať dovtedy, pokiaľ pre počet zaradených hrán neplatí $pz = n - 1$. Potom zaradené hrany tvoria minimálnu kostru a súčet ich ohodnotení je hodnotou minimálnej kostry zadaného grafu.

Príklad 7.1 : Vlastné riešenie si budeme demonštrovať na grafe z obr.7.6.



Obr.7.6. Minimálna kostra grafu a jej incidenčná matica.

Z hodnôt ocenenia hrán v grafe a incidenčnej matice je zrejmé, že dve hrany s minimálnym ohodnotením sú hrany $h_{24} = 3$ a $h_{45} = 3$. Automaticky sa teda stanú súčasťou minimálnej kostry. Ďalšie hrany v poradí sú : $h_{13} = 4$, $h_{25} = 4$ a $h_{56} = 4$. Z nich je potrebné vyradiť hranu h_{25} , pretože s hranami h_{24} a h_{45} vytvára okruh. Do minimálnej kostry je naopak možné zaradiť hrany h_{13} a h_{56} .

Doteraz boli do minimálnej kostry zaradené 4 hrany. Pretože $n - 1 = 5$, je potrebné vybrať ešte jednu hranu vyhovujúcu zadaným podmienkam. Tou je hrana $h_{23} = 5$, ktorá je oproti doteraz zaradeným najbližšia väčšia a pritom s už zaradenými hranami nevytvára okruh. V tomto momente je úloha vyriešená, tzn., že minimálnu kostru tvoria hrany (h_{13} , h_{24} , h_{34} , h_{45} a h_{56}) a jej hodnota je rovná súčtu hodnôt uvedených hrán tzn. $MK = 4 + 3 + 5 + 3 + 4 = 19$.

Základná aplikácia úlohy na najkratšie spojenie v grafe bola už spomenutá. Rovnako je možné ale určiť napr. spojenie v grafe s minimálnym prevýšením, ak hodnotám hrán priradíme hodnoty prevýšenia trás medzi jednotlivými vrcholmi. Podobne možno určovať aj maximálnu kostru grafu, ak postup pri vyberaní hrán k zaradeniu do kostry sa obráti a hrany sa zoradia od maximálnej nestúpajúco.

7.2 Minimálne cesty v grafoch

Hľadanie a určovanie minimálnych ciest v grafoch patrí medzi najčastejšie využívané úlohy teórie grafov. Minimálne cesty v grafoch je pritom možné určovať v grafoch orientovaných i neorientovaných, a to buď

- *z jedného definovaného vrcholu grafu do ďalšieho určeného vrcholu grafu, alebo*
- *z jedného určeného východiskového vrcholu do všetkých ostatných vrcholov grafu, alebo*
- *medzi všetkými vrcholmi grafu navzájom.*

V literatúre je uvádzaný celý rad algoritmov s rôznou efektívnosťou a s rôznymi obmedzeniami. Od základnej jednoduchej verzie **metódy Ford-Fulkersona** určenej pre orientované grafy a vyžadujúcej špeciálne číslovanie vrcholov, cez jej **Dantzigovu modifikáciu**, vhodnú i pre neorientované grafy, až po **metódu Floydovu**, určenú pre hľadanie minimálnych ciest medzi všetkými vrcholmi grafu navzájom. Zaujímavosťou si ich môžu vyhľadať v príslušnej literatúre uvedenej za kapitolou [2, 4, 5].

My sa ako so základnou metódou pre určovanie minimálnych ciest medzi jedným určeným východiskovým vrcholom a všetkými ostatnými vrcholmi grafu (príp. medzi dvoma definovanými vrcholmi), oboznámime s algoritmom **metódy Dijkstrovej** a ako metódu určenú pre hľadanie ciest medzi všetkými vrcholmi v grafe navzájom uvedieme jej modifikáciu tzv. **metódu sčítania v matici**.

Dijkstrova metóda je založená na vete : **Ak existuje minimálna cesta medzi vrcholmi V_p a V_k a vrchol V_j na nej leží, potom minimálna cesta medzi vrcholmi V_p a V_j je súčasťou minimálnej cesty medzi vrcholmi V_p a V_k .**

Princíp riešenia spočíva v tom, že každému vrcholu sa pri jednotlivých krokoch riešenia priradujú 2 hodnoty – MC – hodnota minimálnej cesty a S – stav vrcholu, ktorý môže byť trvalý alebo dočasný. Pritom v každom kroku riešenia sa určuje jeden vrchol za vrchol pracovný (riadiaci).

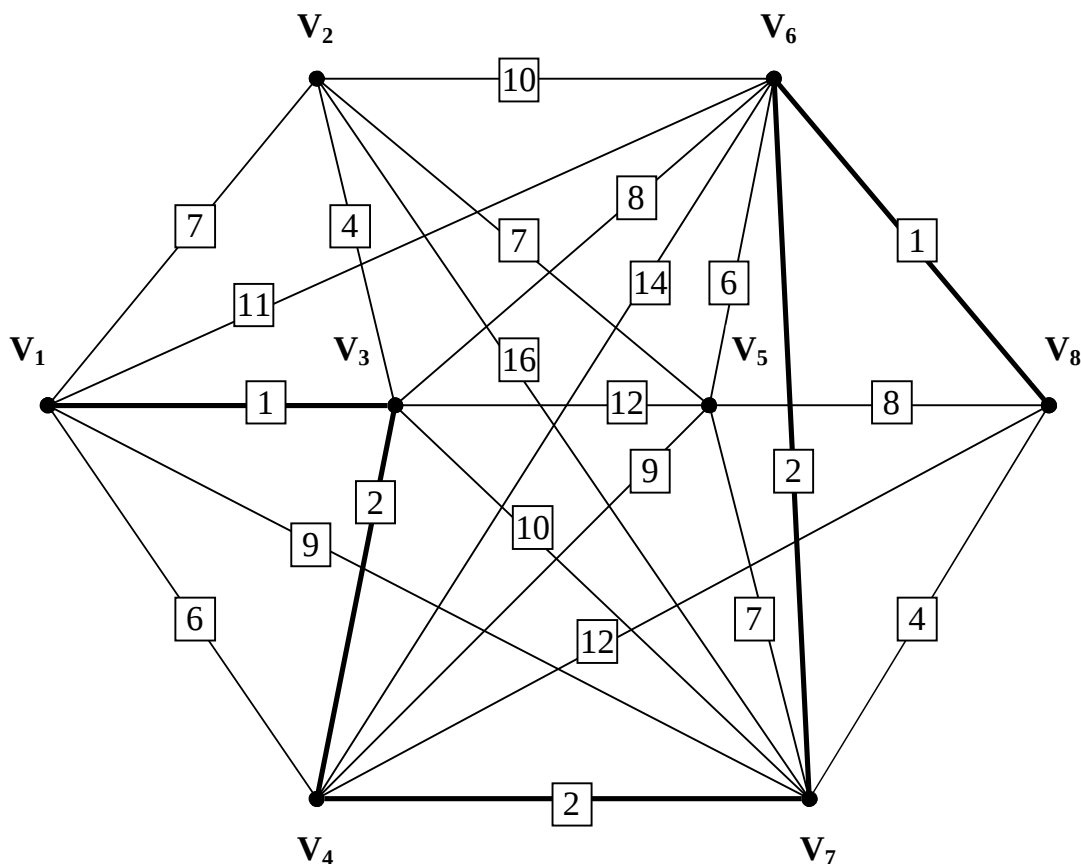
V prvom kroku riešenia – inicializácii premenných – sa určenému počiatočnému vrcholu cesty priradí hodnota minimálnej cesty $MC_p = 0$ a stav trvalý ($S_p = T$). Ostatným vrcholom sa priradí hodnota $MC_j \rightarrow \infty$ (N) a stav dočasný ($S_j = D$). Počiatočný vrchol sa zvolí za vrchol pracovný $V_p = V_{pr}$.

V ďalších krokoch riešenia sa vždy, ak je stará hodnota minimálnej cesty pre ľubovoľný vrchol MC_j väčšia ako súčet minimálnej cesty vrcholu pracovného MC_{pr} a hrany $h_{pr,j}$ z vrcholu pracovného V_{pr} do vrcholu V_j , potom hodnote MC_j priradíme hodnotu súčtu $MC_{pr} + h_{pr,j}$ (skrátene, ak MC_j je väčšie ako $MC_{pr} + h_{pr,j}$, potom $MC_j = MC_{pr} + h_{pr,j}$). V inom prípade sa ponecháva stará hodnota MC_j .

Toto priradenie sa vykoná pre všetky vrcholy a nájde sa vrchol V_j , pre ktorý je uvedený súčet minimálny ($MC_{pr} + h_{pr,j} \rightarrow \text{MIN}$). Tomuto vrcholu sa určí štatút trvalý a zvolí sa za nový pracovný vrchol. Určená hodnota MC_j je už pre tento vrchol minimálnou cestou z vrcholu počiatočného.

Takto sa postupuje dovtedy, pokiaľ určený koncový vrchol V_k (pri hľadaní minimálnej cesty medzi dvoma definovanými vrcholmi) alebo všetky vrcholy (pri hľadaní minimálnej cesty z určeného vrcholu počiatočného do všetkých ostatných vrcholov grafu) nenadobudnú stav trvalý. Potom sú vo vektore MC uložené minimálne cesty pre všetky (alebo definované) vrcholy.

Uvedený postup si demonštrujeme na úlohe zadanej neorientovaným grafom z obr.7.7 a jeho incidenčnou maticou (v skrátenej forme) uvedenou v tab.7.2.



Obr.7.7. Minimálna cesta v grafe.

Tab.7.2. Incidenčná matica grafu z obr.7.7.

V₁	7	1	6	N	11	9	N
	V₂	4	N	7	10	16	N
		V₃	2	12	8	10	N
			V₄	9	14	2	12
				V₅	6	7	8
					V₆	2	1
						V₇	4
							V₈

Za počiatočný vrchol si zvolíme napr. vrchol V_1 , za koncový vrchol V_8 . Podľa už uvedeného postupu bude inicializácia premenných podľa tab.7.3.a.

Tab.7.3.a. Minimálna cesta v grafe Dijkstrovou metódou – inicializácia.

Krok	Vrchol	1	2	3	4	5	6	7	8
0.	MC	0	N	N	N	N	N	N	N
	Stav	T	D	D	D	D	D	D	D

$$V_{pr} = V_1$$

Ak k hodnotám $MC_{pr} = MC_1 = 0$ pripočítame hodnoty existujúcich hrán z vrcholu V_1 dostaneme hodnoty uvedené v tab.7.3.b.

Tab.7.3.b. Minimálna cesta v grafe Dijkstrovou metódou – prvý krok riešenia.

Krok	Vrchol	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	MC	0	¹ 7	¹ 1	¹ 6	N	¹ 11	¹ 9	N
	Stav	T	D	T	D	D	D	D	D

$$V_{pr} = V_3$$

Minimálna hodnota súčtu $MC_j + h_{pr,j}$ je v treťom stĺpci, preto bude $MC_3 = 1$, vrchol V_3 dostane štatút trvalý a zvolíme ho za vrchol pracovný.

Poznámka: Hodnoty v pravom hornom rohu vo vektore MC znamenajú vrchol, z ktorého sa minimálne cesty určovali.

Rovnako sa postupuje ďalej, pričom výsledky po jednotlivých krokoch sú už v súhrne uvedené vo forme *tab.7.3.c*.

Tab.7.3.c. Dijkstrova metóda - ďalšie kroky riešenia.

Krok	Vrchol	1	2	3	4	5	6	7	8	V _{pr}
2.	MC	0	³ 5	¹ 1	³ <u>3</u>	³ 13	³ 9	¹ 9	N	V ₄
	Stav	T	D	T	<u>T</u>	D	D	D	D	
3.	MC	0	³ <u>5</u>	¹ 1	³ 3	⁴ 12	³ 9	⁴ 5	⁴ 15	V ₂
	Stav	T	<u>T</u>	T	T	D	D	D	D	
4.	MC	0	³ 5	¹ 1	³ 3	⁴ 12	³ 9	⁴ <u>5</u>	⁴ 15	V ₇
	Stav	T	T	T	T	D	D	<u>T</u>	D	
5.	MC	0	³ 5	¹ 1	³ 3	⁴ 12	⁷ <u>7</u>	⁴ 5	⁴ 9	V ₆
	Stav	T	T	T	T	D	<u>T</u>	T	D	
6.	MC	0	³ 5	¹ 1	³ 3	⁴ 12	⁷ 7	⁴ 5	⁶ <u>8</u>	V ₈
	Stav	T	T	T	T	D	T	T	<u>T</u>	
7.	MC	0	³ 5	¹ 1	³ 3	⁴ <u>12</u>	⁷ 7	⁴ 5	⁶ 8	
	Stav	T	T	T	T	<u>T</u>	T	T	T	

Z uvedenej tabuľky je zrejmé, že pre formulované zadanie (nájsť minimálnu cestu medzi vrcholmi V₁ a V₈) mohlo riešenie skončiť už po šiestom kroku, kedy vrchol V₈ dostal štatút trvalý a stal sa vrcholom pracovným.

Siedmy krok bol vykonaný iba preto, aby sa potvrdila i minimálna cesta do vrcholu V₅ a boli tak určené minimálne cesty z vrcholu V₁ do všetkých ostatných vrcholov grafu.

Ako už bolo uvedené, hodnoty minimálnych ciest do príslušných vrcholov sú po ukončení výpočtov uložené vo vektore MC. Väčšinou je však potrebné určiť aj vrcholy, cez ktoré minimálna cesta vedie. K tomu je vhodné pri každom kroku riešenia ukladať počiatočné vrcholy hrán, z ktorých príslušné minimálne súčty vznikali (malé čísla v pravom hornom rohu políčok MC).

Potom možno spätne určiť, že do vrcholu V_8 viedla cesta z vrcholu V_6 , do neho z vrcholu V_7 atď. cez vrcholy V_4 a V_3 až do počiatočného vrcholu V_1 . Riešením je teda minimálna cesta $V_1 - V_3 - V_4 - V_7 - V_6 - V_8$ o hodnote rovnjej súčtu príslušných hrán $MC_{\min} = h_{13} + h_{34} + h_{47} + h_{76} + h_{68} = 8$.

V princípe, rovnako sa postupuje aj pri určovaní minimálnych ciest v grafe medzi všetkými vrcholmi v grafe navzájom, metódou sčítania v matici (incidenčnej). Uvedená metóda je metóda iteračná.

Za východiskovú (nultú) iteráciu je považovaná úplná incidenčná matica úlohy. Pre každú ďalšiu iteráciu sa za každý ľubovoľný nový prvok matice $c_{ij}^{(n)}$ zapíše minimálna hodnota zo súčtov $(c_{ik} + c_{kj})$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$, pokiaľ je samozrejme **menšia** ako prvok c_{ij} pôvodný

$$c_{ij}^{(n)} = \min_k (c_{ik} + c_{kj})$$

tzn. ak $c_{ij}^{(n)}$ je menšie ako c_{ij} . Pritom pre počet hrán minimálnej cesty „ ph “ a potrebný počet iterácií „ pi “ platí nerovnica

$$ph \leq n - 1 \leq 2^{pi},$$

kde n je počet vrcholov grafu. V tabuľkách *tab.7.4.a–d* je riešený rovnaký príklad ako v predchádzajúcom.

Potrebný počet iterácií pre získanie optimálneho riešenia je 3, pretože platí $2^3 > 7$. Podobne ako v predchádzajúcej metóde sú v pravých horných rohoch políčok incidenčnej matice zaznamenávané vrcholy, cez ktoré príslušná minimálna cesta vedie. Pod tabuľkou nulte iterácie je detailne rozpísané, ako sa určili hodnoty c_{12} a c_{15} pre prvú iteráciu.

Rovnakým postupom (ktorý je podobný postupu pri násobení matíc) sa určili i ďalšie hodnoty pri všetkých iteráciách. Pritom napríklad, zatiaľ čo pri východiskovej matici 0.iterácie neexistovali cesty medzi 5 x 2 vrcholmi navzájom, už po 1. iterácii sa našli cesty medzi všetkými vrcholmi navzájom.

Pri porovnaní incidenčných matíc po 2. a 3.iterácii vidíme, že pri 3.iterácii sa zmenila hodnota minimálnej cesty iba medzi podľa indexov „najvzdialenejšími“ vrcholmi V_1 a V_8 .

Tab.7.4.a. Minimálna cesta v grafe metódou sčítania v matici – 0.iterácia.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	7	1	6	N	11	9	N
2	7	0	4	N	7	10	16	N
3	1	4	0	2	12	8	10	N
4	6	N	2	0	9	14	2	12
5	N	7	12	9	0	6	7	8
6	11	10	8	14	6	0	2	1
7	9	16	10	2	7	2	0	4
8	N	N	N	12	8	1	4	0

$$i = 1, j = 2, k = 1, \quad c_{11} + c_{12} = 7$$

$$k = 2, \quad c_{12} + c_{22} = 7$$

$$k = 3, \quad c_{13} + c_{32} = 5 \rightarrow \text{MIN}$$

$$k = 4, \quad c_{14} + c_{42} = N$$

$$k = 5, \quad c_{15} + c_{52} = N$$

$$k = 6, \quad c_{16} + c_{62} = 21$$

$$k = 7, \quad c_{17} + c_{72} = 25$$

$$k = 8, \quad c_{18} + c_{82} = N$$

$$i = 1, j = 5, k = 1, \quad c_{11} + c_{15} = N$$

$$k = 2, \quad c_{12} + c_{25} = 14$$

$$k = 3, \quad c_{13} + c_{35} = 13 \rightarrow \text{MIN}$$

$$k = 4, \quad c_{14} + c_{45} = 15$$

$$k = 5, \quad c_{15} + c_{55} = N$$

$$k = 6, \quad c_{16} + c_{65} = 17$$

$$k = 7, \quad c_{17} + c_{75} = 16$$

$$k = 8, \quad c_{18} + c_{85} = N$$

Tab.7.4.b Minimálna cesta v grafe metódou sčítania v matici – 1.iterácia.

Vrchol	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	5 ³	1	3 ³	13 ³	9 ³	8 ⁴	12 ⁶
2	5 ³	0	4	6 ³	7	10	12 ⁶	11 ⁶
3	1	4	0	2	11 ²	8	4 ⁴	9 ⁶
4	3 ³	6 ³	2	0	9	4 ⁷	2	6 ⁷
5	13 ³	7	11 ²	9	0	6	7	7 ⁶

6	9 ³	10	8	4 ⁷	6	0	2	1
7	8 ⁴	12 ⁶	4 ⁴	2	7	2	0	3 ⁶
8	12 ⁶	11 ⁶	9 ⁶	6 ⁷	7 ⁶	1	3 ⁶	0

Tab.7.4.c. Minimálna cesta v grafe metódou sčítania v matici – 2.iterácia.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	5 ³	1	3 ³	12 ^{2,3}	7 ^{3,4,7}	5 ^{3,4}	9 ^{3,4,7}
2	5 ³	0	4	6 ³	7	10	8 ^{4,3}	11 ⁶
3	1	4	0	2	11 ²	6 ^{4,7}	4 ⁴	7 ^{4,7,6}
4	3 ³	6 ³	2	0	9	4 ⁷	2	5 ^{7,6}
5	12 ^{2,3}	7	11 ²	9	0	6	7	7 ⁶
6	7 ^{3,4}	10	6 ^{4,7}	4 ⁷	6	0	2	1
7	5 ^{3,4}	8 ^{3,4}	4 ⁴	2	7	2	0	3 ⁶
8	9 ^{3,4,7}	11 ⁶	7 ^{4,7,6}	5 ^{7,6}	7 ⁶	1	3 ⁶	0

Tab.7.4.d. Minimálna cesta v grafe metódou sčítania v matici – 3.iterácia.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	5 ³	1	3 ³	12 ^{3,4}	7 ^{3,4,7}	5 ^{3,4}	8 ^{3,4,7,6}
2	5 ³	0	4	6 ³	7	10	8 ^{3,4}	11 ⁶
3	1	4	0	2	11 ²	6 ^{4,7}	4 ⁴	7 ^{4,7,6}

4	³ 3	³ 6	2	0	9	⁷ 4	2	^{7,6} 5
5	^{3,4} 12	7	² 11	9	0	6	7	⁶ 7
6	^{3,4,7} 7	10	^{4,7} 6	⁷ 4	6	0	2	1
7	^{3,4} 5	^{3,4} 8	⁴ 4	2	7	2	0	⁶ 3
8	^{3,4,7,6} 8	⁶ 11	^{4,7,6} 7	^{7,6} 5	⁶ 7	1	⁶ 3	0

7.2.1 Matematický model úlohy minimálnej cesty

Ak uvažujeme všeobecne sieť zadanú množinou vrcholov V , množinou hrán H a incidenciou zadanou incidenčnou maticou ohodnoteného grafu I , je možné úlohu nájsť minimálnu cestu z počiatočného vrcholu V_p do zvoleného koncového vrcholu V_k , popísať matematickým modelom odpovedajúcim úlohám celočíselného lineárneho programovania. Ku každej hrane h_{ij} priradíme bivalentnú premennú x_{ij} , ktorá nadobudne hodnotu „1“ ak je príslušná hrana súčasťou cesty a hodnotu „0“, ak hrana súčasťou cesty nie je. Ďalej označíme symbolom $V(i)$ množinu uzlov, ktoré sú s uzlom V_i spojené hranou (napr. pre náš príklad $V(1) = \{2, 3, 4, 6, 7\}$, $V(2) = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ atď.).

Potom možno pomocou premenných x_{ij} zapísať účelovú funkciu ako

$$z = 0,5 \times \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j \in V(i)} h_{ij} \cdot x_{ij} \right] \rightarrow \text{MIN},$$

kde koeficient 0,5 je preto, že každú hranu rátame v účelovej funkcii dvakrát.

Teraz je potrebné určiť, ako dosiahnuť, aby riešenie určené premennými x_{ij} odpovedalo ceste. Je zrejmé, že okrem uzla počiatočného V_p a uzla koncového V_k , každý uzol ležiaci na ceste susedí (je incidentný) s dvoma hranami a uzly počiatočný a koncový s jednou hranou.

Preto musí pre počiatočný a koncový vrchol platiť

$$\sum_{j \in V(i)} x_{pj} = 1, \quad \sum_{j \in V(k)} x_{kj} = 1,$$

a pre ostatné uzly

$$\sum_{j \in V(i)} x_{ij} = 2 \cdot y_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde y_i je tiež **bivalentná premenná** ($y_i \in (0,1)$) nadobúdajúca hodnotu „1“, ak uzol na ceste leží a hodnotu „0“ v opačnom prípade.

Pre vyššie riešený príklad možno teda matematický model napísať v tvare :

a) Účelová funkcia

$$z = h_{12} \cdot x_{12} + h_{13} \cdot x_{13} + h_{14} \cdot x_{14} + h_{15} \cdot x_{15} + \dots + h_{78} \cdot x_{78} \rightarrow (\text{MIN})$$

b) Obmedzujúce podmienky

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{17} &= 1 \\ x_{48} + x_{58} + x_{68} + x_{78} &= 1 \\ x_{21} + x_{23} + x_{25} + x_{26} + x_{27} &- 2 \cdot y_2 = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} &- 2 \cdot y_3 = 1 \\ \vdots & \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{78} &- 2 \cdot y_7 = 1 \end{aligned}$$

$$x_{ij}, y_i \in (0,1) \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, 8, j \in V(i)$$

Pri vložení problému do počítača, výsledok musí byť rovnaký, ako pri riešení vopred uvedenými špeciálnymi metódami. Je zrejmé, že „ručné“ riešenie tu prakticky neprichádza do úvahy, pretože potreba zaviesť 8 umelých premenných a k riešeniu využiť dvojfázový simplexový algoritmus s následným prechodom na celočíselné programovanie prakticky „ručné“ riešenie vylučuje.

7.3 Optimálne toky v sieťach

Úlohy nájsť **optimálne toky** v jednosmerných ohodnotených grafoch – sieťach, tvoria špecifickú skupinu metód analýzy ohodnotených grafov. Pojem **tok**, ktorý budeme v tejto kapitole používať je abstrakciou bežne zaužívaných fyzikálnych tokov (tok kvapaliny, elektrický prúd, tok vozidiel, materiálu atď.). Závažným podnetom pre riešenie úloh optimálnych tokov boli predovšetkým problémy vyplývajúce z dopravy produktov k spotrebiteľom, či už po cestnej resp. železničnej sieti alebo produktovodmi.

Z pohľadu zadania môže mať problém viac variantov, ako napr. :

- *maximálny príp. minimálny tok medzi dvoma vrcholmi,*
- *maximálny alebo minimálny tok medzi viacej vrcholmi,*
- *maximálny alebo minimálny najlacnejší medzi dvoma alebo viacerými vrcholmi,*
- *maximálny alebo minimálny viacproduktový tok atď'.*

Základným z uvedených problémov je úloha určenia **maximálneho toku v sieti** medzi dvoma určenými vrcholmi. Pre obmedzený rozsah publikácie sa oboznámime iba s jednou z metód jej riešenia.

Východiskovými predpokladmi pre riešenie tohto problému sú :

- rieši sa preprava jedného homogénneho produktu,
- v sieti je určený jeden vrchol počiatočný - **zdroj** a jeden vrchol koncový - **ústie**,
- hrany v grafe sú jednosmerné a ich ohodnotenie h_{ij} znamená kapacitu,
- hrany (v niektorých úlohách sa udáva horná kapacita hrany hk_{ij} a dolná kapacita hrany dk_{ij}),
- žiadny tok po hrane nemôže prekročiť jej kapacitu,
- ak prepravované množstvo po hrane x_{ij} je rovné kapacite hrany h_{ij} , hovoríme, že je na hrane **nasýtený tok**,
- platí tzv. podmienka zachovania toku alebo inými slovami, čo do vrcholu pritečie, musí z neho aj odtiecť,
- predpokladáme, že v grafe nedochádza k žiadnym stratám prepravovaného produktu.

S uvažovaním týchto predpokladov je možné sformulovať zjednodušený matematický model úlohy (detailný model by bol podobný ako model minimálnej cesty) :

$$z = \sum x_{ij} \Rightarrow \text{MAX} \\ 0 \leq x_{ij} \leq h_{ij} \quad .$$

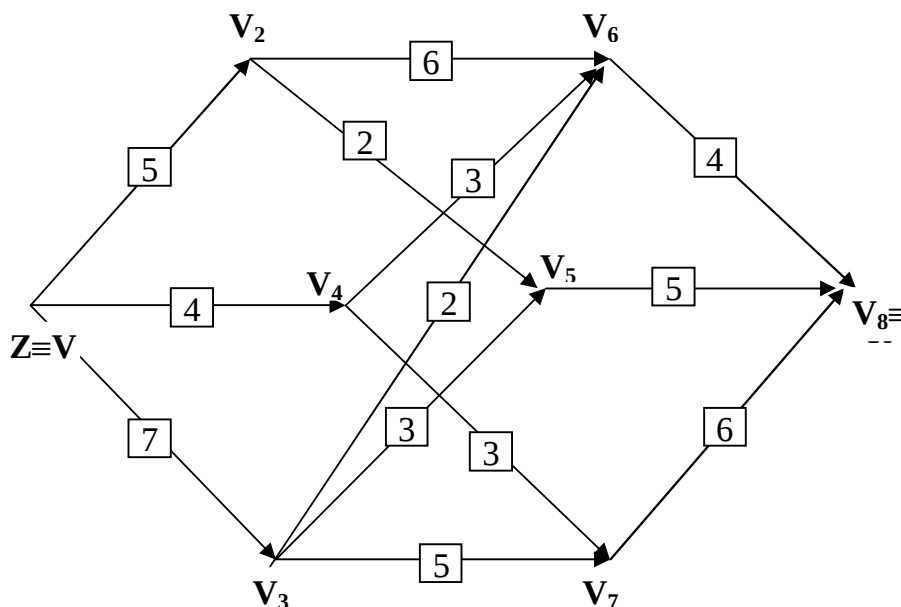
Vlastné riešenie a jeho podmienka optima je založená na skutočnosti, že z počiatočného vrcholu (zdroja) do vrcholu koncového (ústia) vedie spravidla viacej ciest. Ak z každej takejto cesty vyberieme jednu hranu dostaneme tzv. **rez grafom R** a súčet tokov na týchto hranách je tzv. **kapacita rezu R(x)**. Pritom pre maximálny tok v grafe platí veta, ktorú prví sformulovali Ford a Fulkerson : **Hodnota maximálneho toku na grafe sa rovná kapacite minimálneho rezu.**

Ford a Fulkerson taktiež navrhli metódu určovania maximálneho toku vo všeobecnom grafe a záujemcovia ju môžu nájsť v príslušnej literatúre [2, 3, 5]. Pre náš účel informatívneho zoznámenia sa s problematikou bude uvedená jednoduchšia metóda riešenia rovinných grafov, ktoré sa využívajú najčastejšie.

Algoritmus určenia maximálneho toku v rovinnej sieti :

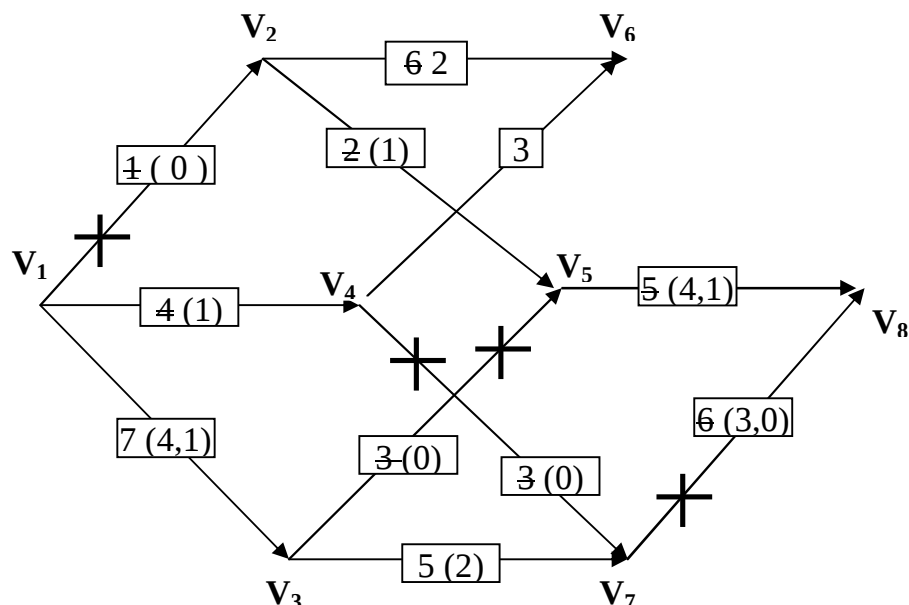
1. **Zostrojíme najvyššie položenú dráhu $D^{(0)}(z, n)$ zo zdroja do ústia.**
2. **Na dráhe $D^{(0)}(z, n)$ určíme hranu s minimálnou kapacitou $h_{\min}$, ktorú z grafu odstránime a kapacity ostatných hrán dráhy znížime o $h_{\min}$.**
3. **Ak naďalej existuje ďalšia dráha $D^{(1)}(z, n)$ pokračuje sa bodom 1.**
4. **Ak ďalšia dráha $D(z, n)$ už neexistuje (graf už nie je sieťou), riešenie končí a maximálny tok sa rovná súčtu kapacít odstránených hrán.**

Postup riešenia podľa uvedeného algoritmu si budeme demonštrovať na riešení maximálneho toku v grafe podľa obr.7.8.a, kde bude zdrojom vrchol V_1 , ústím vrchol V_8 a kapacity jednotlivých hrán sú definované hodnotami zapísanými pri jednotlivých hranách.



Obr.7.8.a. Maximálny tok v sieti - zadanie.

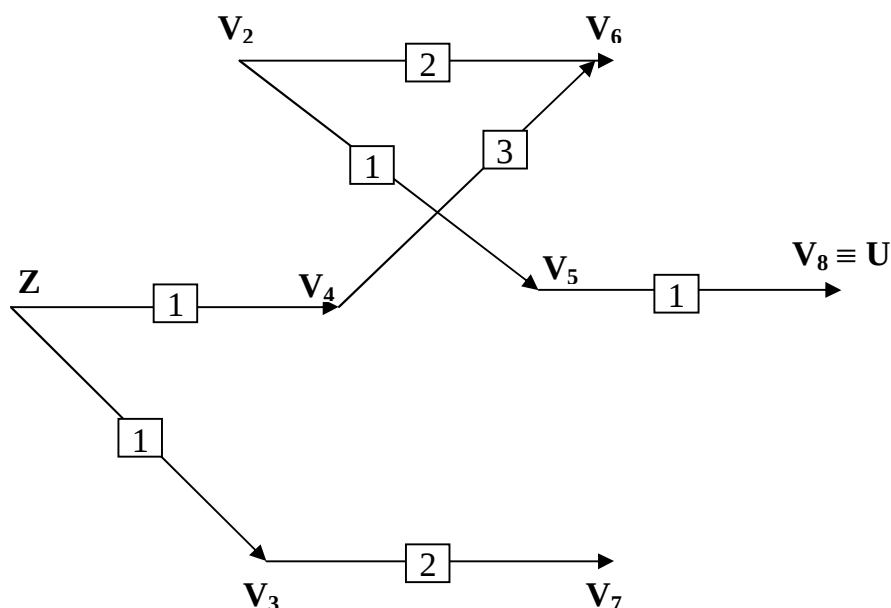
Prvou najvyššie položenou dráhou zo zdroja do ústia je zrejme dráha cez vrcholy V_1 , V_2 , V_6 a V_8 tvorená hranami h_{12} , h_{26} a h_{68} . Minimálnu kapacitu z nich má evidentne hrana $h_{68} = 4$. Túto teda z grafu vynecháme a kapacity hrán h_{12} a h_{26} znížime o 4 (teda $h_{12}=1$, $h_{26}=2$). Graf pre prvú iteráciu je na obr.7.8.b .



Obr.7.8.b. Maximálny tok v sieti - graf po 1. iterácii a ďalšie riešenie.

Tu je zrejmé, že ďalšia využiteľná najvyššie položená cesta je tvorená hranami h_{12} , h_{25} a h_{58} . Tu je minimálna kapacita hrany $h_{12} = 1$. Ďalšie riešenie pokračuje na obr.7.8.b. Hranu h_{12} teda odstránime (prečiarkneme) a kapacity hrán h_{25} a h_{58} zmenšíme o 1 (hodnoty uvedené v zátvorkách).

Rovnako v ďalšom odstránime hrany $h_{47} = 3$, $h_{35} = 3$ a $h_{78} = 6$. Po ukončení týchto krokov dostaneme graf v podobe uvedenej na obr.7.8.c, z ktorej je zrejmé, že žiadnu ďalšiu cestu zo zdroja do ústia už nie je možné nájsť



Obr.7.8.c. Maximálny tok v sieti – konečná podoba grafu.

Maximálny tok potom bude určený súčtom kapacít „odstránených“ hrán (v momente ich odstraňovania) a to pre náš prípad je

$$z = h_{12} + h_{68} + h_{47} + h_{35} + h_{78} = 4 + 1 + 3 + 3 + 3 = 14.$$

Uvedené hrany budú teda nasýtené, u ostatných zostáva voľná kapacita podľa obr.7.8.c.

7.4 Minimálna okružná cesta v grafe

Úloha **minimálnej okružnej cesty** v grafe alebo tiež úloha „obchodného cestujúceho“ je formulovaná ako úloha prejsť zo stanoveného počiatočného vrcholu úplného neorientovaného grafu cez všetky jeho vrcholy a vrátiť sa do vrcholu počiatočného tak, aby prejdená dráha (súčet ohodnotení využitých hrán) bola minimálna. Takejto ceste v grafe sa tiež niekedy hovorí **minimálna hamiltonovská kružnica**. Úlohu totiž ako prvý formuloval Sir William Hamilton, ako úlohu prejsť dvadsať európskych miest pospájaných cestami, v každom meste sa zastaviť iba raz a cestu uzatvoriť v meste, odkiaľ sa vyšlo.

Žiaľ, doteraz neexistuje metóda, ktorá by zaručene dala optimálne riešenie najmä u rozsiahlych úloh. Menšie úlohy je možné riešiť ako kombinatorické tzv. **metódou rozhodovacieho stromu**, pri ktorej sa preskúmajú všetky možnosti ciest a z nich sa vyberie cesta s minimálnou hodnotou.

Ako u väčšiny kombinatorických úloh je možné aplikovať tiež už uvedenú metódu „**Branch and Bound**“, ktorá zo všetkých možných kombinácií vyberá iba kombinácie perspektívne.

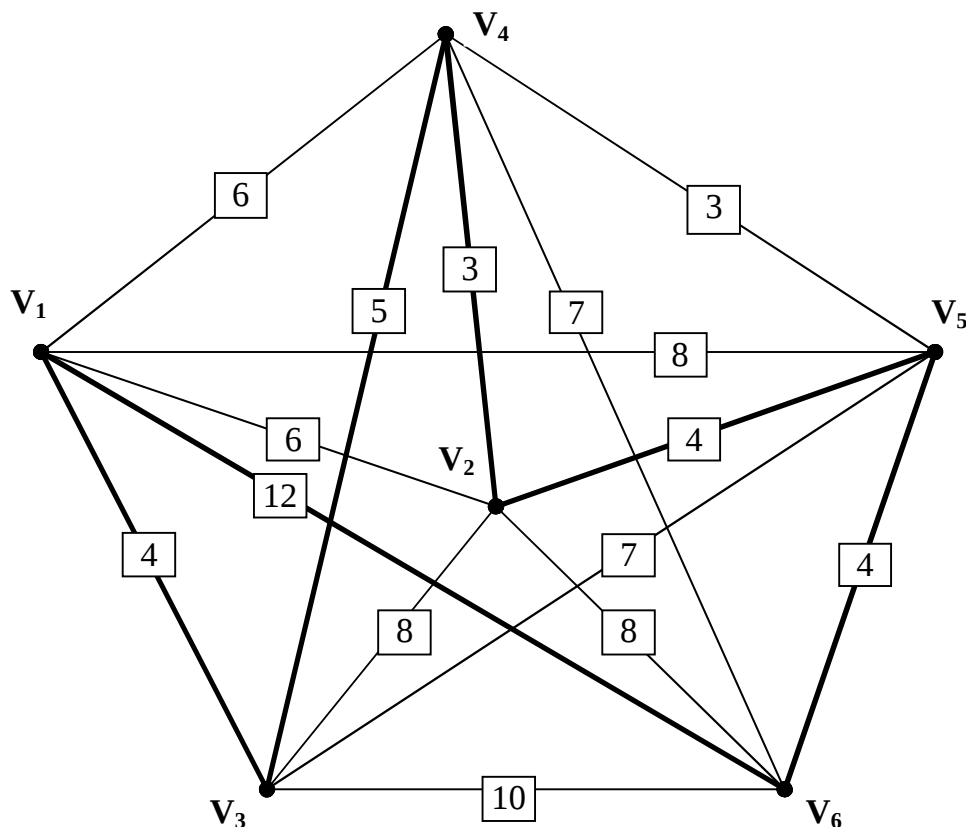
Jednoduchou metódou s exaktným algoritmom, ktorý ale nezabezpečuje získanie optimálneho riešenia (iba riešenia „dobrého prípustného“), je „**metóda najbližšieho suseda**“. Pre svoju jednoduchosť je vhodná najmä pre riešenie rozsiahlych úloh alebo ako metóda určenia východiskového riešenia pre metódu Branch and Bound.

Slovne vyjadrený algoritmus je nasledovný :

1. **Zostaviť úplnú incidenčnú maticu grafu.**
2. **V riadku východzieho vrcholu nájsť minimálnu hodnotu hrany (najbližšieho suseda) a poznačiť si stĺpec (vrchol), v ktorom sa nachádzala.**
3. **Prejsť do riadku odpovedajúcemu určenému najbližšiemu vrcholu.**
4. **Pokračovať bodom 2, pokiaľ sa neprejdú všetky vrcholy, pritom kontrolovať, aby sa do žiadneho vrcholu nešlo dvakrát.**

5. *Po prejdení všetkých vrcholov sa vrátiť do vrcholu počiatočného.*

Postup si ukážeme na riešení jednoduchého grafu z obr.7.9.



Obr.7.9. Okružná cesta v grafe – zadanie grafu.

Za počiatočný vrchol cesty zvolíme V_1 , minimálna hrana v prvom riadku je $h_{13} = 4$. Zaradíme ju do minimálnej cesty a prejdeme do 3. riadku odpovedajúcemu vrcholu V_3 . Tu je minimálna hodnota hrany $h_{31} = 4$, avšak túto hranu nie je možné využiť, pretože doteraz neboli prejdené všetky vrcholy.

Ďalšia najbližšia je teda $h_{34} = 5$ (cesta ide do vrcholu V_4). Vo štvrtom riadku si „zakážeme“ okrem hodnoty v prvom stĺpci i hodnotu v stĺpci treťom. Za minimálnu zvolíme $h_{24} = 3$ a takto pokračujeme ďalej. Postupne do okružnej cesty zaradíme hrany $h_{25} = 4$, $h_{56} = 4$ a $h_{61} = 12$.

Okružná cesta teda vedie cez vrcholy $V_1 - V_3 - V_4 - V_2 - V_5 - V_6 - V_1$ a jej hodnota tvorená súčtom odpovedajúcich hrán je $z = 4 + 3 + 5 + 4 + 4 + 12 = 32$.

Tab.7.5. Okružná cesta v grafe – incidenčná matica úlohy.

Vrchol	1	2	3	4	5	6
1	0	6	<u>4</u>	6	8	12
2	6	0	8	3	<u>4</u>	8
3	4	8	0	<u>5</u>	7	10
4	6	<u>3</u>	5	0	3	7
5	8	4	7	3	0	<u>4</u>
6	<u>12</u>	8	10	7	4	0

Z toho, že do okružnej cesty bola zaradená aj najdlhšia hrana $h_{61} = 12$ nepriamo vyplýva, že určená okružná cesta pravdepodobne nebude optimálna.

Pre úlohu takýchto relatívne malých rozmerov možno nájsť optimálne riešenie aplikáciou metódy **Branch and Bound**, pomocou ktorej preskúmame viaceré perspektívne kombinácie sledov hrán. Za optimálne riešenie vyberieme sled s najnižšou hodnotou účelovej funkcie. Úloha je formálne podobná priradovacej úlohe. I tu musíme v každom riadku i stĺpci vybrať jednu jedinú hodnotu (hranu), avšak navyše sú tu ešte podmienky určujúce okružnú cestu.

Výhodným východiskom k riešeniu môže byť matica „redukovaných sadziieb“ (hodnôt hrán), ktorú vytvoríme známym postupom je v tab.7.6.

Tab.7.6. Matica redukovaných sadziieb pre okružnú cestu.

Vrchol	1	2	3	4	5	6	
1	-	2	0	2	4	(8) 7	r = 2
2	3	-	5	0	1	(5) 4	r = 1
3	0	4	-	1	3	(6) 5	r = 1
4	3	0	2	-	0	(4) 3	r = 2
5	5	1	4	0	-	(1) 0	r = 1
6	8	4	6	3	0	-	r = 3
	r = 3	r = 1	r = 2	r = 1	r = 1	r = 3	

Pretože po riadkovej redukcii nebola nulová sadzba v šiestom stĺpci bolo potrebné vykonať redukcii ešte v ňom. V konečnej podobe tabuľky je už nulová sadzba v každom riadku i stĺpci. Ďalšou úlohou bude potom nájsť taký sled hrán, ktorý by vyhovoval podmienkam úlohy a obsahoval čo najviac hrán s nulovým redukovaným ohodnotením alebo ohodnotením najbližším vyšším.

Ak si podobne ako vo Vogelovej aproximačnej metóde určíme rozdiely v riadkoch a stĺpcoch (čísla vedľa tabuľky) vidíme, že prednostne by sa mali využiť hrany h_{65} a h_{31} (ich nevyužitie najviac zmení hodnotu účelovej funkcie nepriaznivým smerom). Sú teda pokryté cesty medzi vrcholmi $V_6 - V_5$ a $V_3 - V_1$. Do vrcholu V_6 je možné sa (ak vylúčime h_{56}) dostať z vrcholu V_2 alebo V_4 a do vrcholu V_3 z vrcholu V_4 .

To nám už dá možný sled vrcholov $V_1 - V_2 - V_6 - V_5 - V_4 - V_3 - V_1$, ktorý vyhovuje určeným podmienkam pre okružnú cestu a súčasne jeho hodnota účelovej funkcie (po dosadení hodnôt hrán z pôvodnej incidenčnej matice)

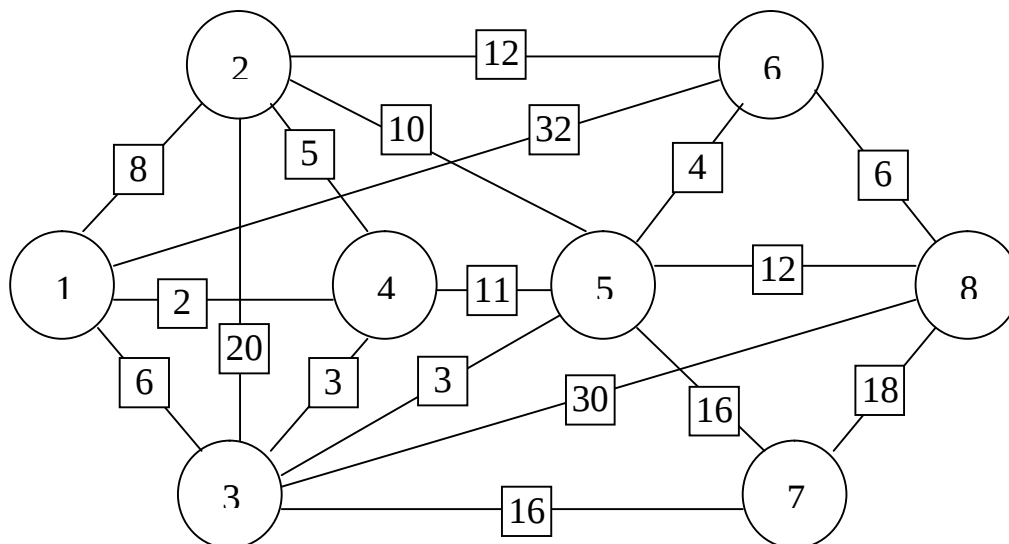
$$z = h_{12} + h_{26} + h_{65} + h_{54} + h_{43} + h_{31} = 6 + 8 + 4 + 3 + 5 + 4 = 30$$

je minimálna. Podobnými úvahami by sme dostali ešte ďalšie varianty okružnej cesty (napr. $V_1 - V_3 - V_4 - V_6 - V_5 - V_2 - V_1$) s rovnakou hodnotou ÚF.

Do oblasti teórie grafov patria aj ďalšie úlohy napr. tzv. **úloha okružných jázď**, riešiaci otázky optimálneho rozvozu tovaru, ktorú je však výhodnejšie riešiť výpočtovo ako úlohu lineárneho programovania. Ďalej sem patria aj tzv. **úlohy o farbení grafov** a ďalšie, ktoré možno nájsť v príslušnej literatúre.

CVIČENIA

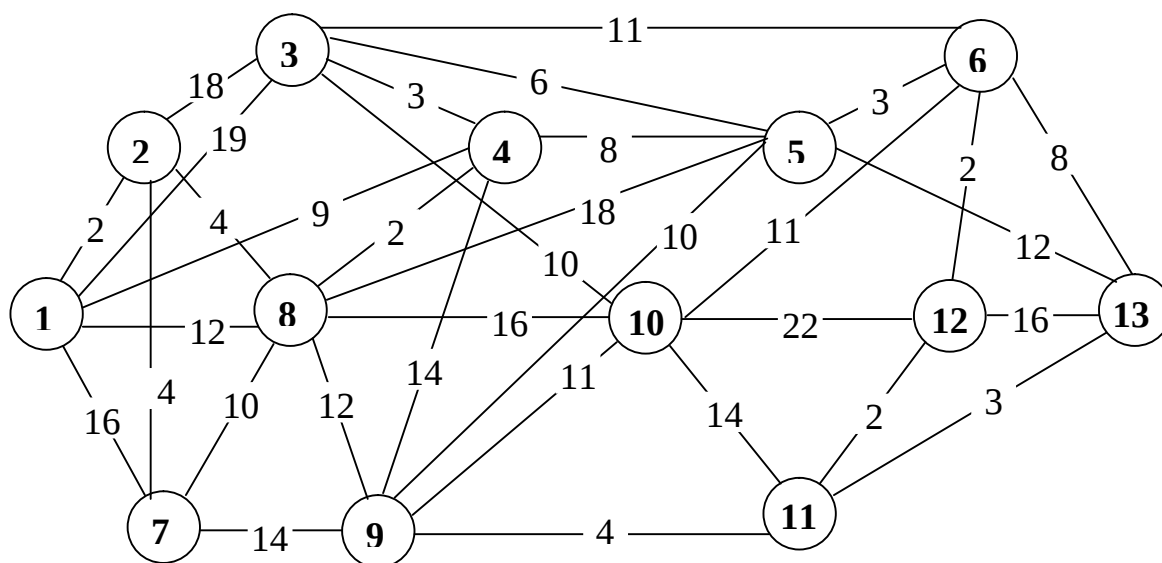
1. Pre graf zadany na obrázku :



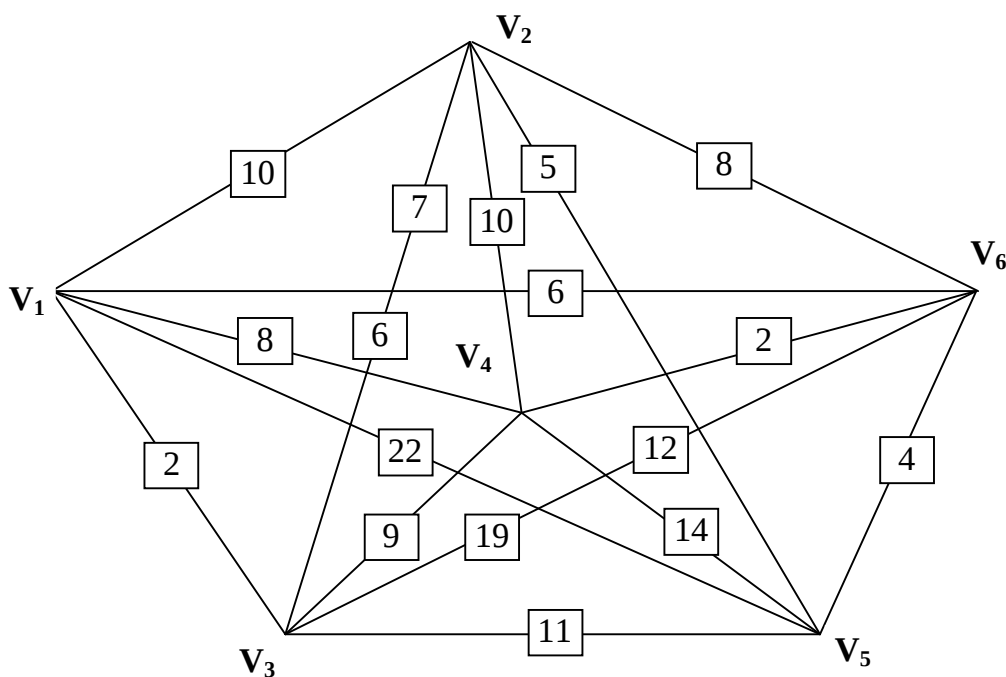
- napíšte incidenčnú maticu grafu,
- nájdite minimálnu kostru grafu,
- nájdite minimálnu cestu z vrcholu V_1 do V_8 metódou sčítania v matici,
- nájdite minimálnu cestu z vrcholu V_1 do všetkých ostatných pomocou Dijkstrovho algoritmu,

2. Pre zadaný graf určte :

- minimálnu kostru grafu,
- minimálnu cestu z vrcholu V_1 do vrcholu V_{13} ,
- minimálnu cestu z V_2 do všetkých ostatných vrcholov.



3. Pre graf zadaný na obrázku určte :



- minimálnu kostru grafu
- minimálnu cestu z vrcholu V_1 do vrcholu V_6 ,
- minimálnu cestu z V_1 do všetkých ostatných vrcholov,

LITERATÚRA

- [1] *Mejzlík, M. : Základní metody operačního výzkumu a jejich aplikace v železničním vojsku. Vojenská fakulta VŠDS, Žilina 1982.*
- [2] *Fronc, M. – Plašil, J. – Volek, J. : Operačná analýza II. ALFA, Bratislava 1980.*
- [3] *Froncová, H. – Linda, B. : Operačná analýza (návod na cvičenia). ALFA, Bratislava 1988.*
- [4] *Janáček, J. : Operačná analýza I. Fakulta riadenia a informatiky ŽU, Žilina 1997.*
- [5] *Kořínek, A. : Základní metody operační analýzy v silničním zabezpečení I. VF VŠDS, Žilina 1993.*

8. ZÁKLADY SIEŤOVEJ ANALÝZY

*„Časovú náročnosť úlohy je možné uviesť nasledovne :
Zober čas, ktorý podľa všetkého bude potrebný,
vynásob ho dvoma a zmeň časovú jednotku na jednotku
o stupeň vyššiu. Takto dostaneme, že na
hodinovú úlohu, treba počítať dva dni.“*

WESTHEIMEROVO PRAVIDLO

Sieťová analýza tvorí relatívne samostatnú oblasť aplikácie základných poznatkov teórie grafov do oblasti technicko-ekonomickej - plánovania zložitých akcií (projektov), ktorých realizácia vyžaduje splnenie celého radu na seba nadväzujúcich čiastkových činností. Tieto činnosti vzhľadom na svoj charakter môžu mať rôzny vzájomný vzťah - nezávislosť, časová následnosť, vzájomná podmienenosť apod. Z hľadiska zatriedenia by mali metódy sieťovej analýzy patriť skôr medzi metódy heuristické, pretože ich rozhodujúcu etapu - zostavenie sieťového grafu sa doteraz nepodarilo úspešne algoritmizovať.

Medzi základné metódy sieťovej analýzy radíme **metódu kritickej cesty (CPM)** s jej modifikáciou **CPM-GE**, metódy **MPM, PERT, GERT** a ďalšie.

Predtým, ako sa budeme detailne zaoberať vlastnými metódami riešenia je potrebné uviesť niekoľko definícií pojmov využívaných v problematike sieťovej analýzy. Sú to predovšetkým pojmy :

- **projekt** (akcia) je súbor činností a udalostí spojený s vynakladaním práce, materiálnych a finančných prostriedkov pre dosiahnutie definovaného cieľa,
- **činnosť** (úloha, aktivita) je technologicky a organizačne vymedzený súhrn prác. Činnosti sú v projekte usporiadané v čase podľa pevného poradia, ktoré vyplýva najmä z technologických závislostí (technologická precedencia),

- **udalosti** sú začiatky a konce jednotlivých činností a iné dôležité termíny,
- **sieťový graf** (sieť) je ohodnotená orientovaná grafická štruktúra predstavujúca model projektu. Základným prvkom stavby grafu sú **činnosti** a podľa toho, či sú modelované hranami alebo uzlami (vrcholmi) grafu hovoríme o grafoch **hranovo** alebo **uzlovo orientovaných**. Poznámka:. V ďalšom texte sa budeme zaoberať iba hranovo orientovanými grafmi, preto nasledujúce pojmy sú už definované z tohoto pohľadu.
- **uzol** predstavuje stav dosiahnutý určitou činnosťou. Predstavuje okamih začatia alebo ukončenia jednej alebo súboru činností. Vyjadruje takto logickú väzbu medzi činnosťami, ktorá znamená, že činnosti vystupujúce z uzla nemôžu začať skôr, ako skončia všetky činnosti do uzla vstupujúce,
- **hrana** vyjadruje v sieťovom grafe činnosť, pričom môže reprezentovať činnosť **reálnu** (skutočne sa vykonáva), ktorá sa zobrazuje plnou čiarou, alebo **fiktívnu** (zdanlivú), určenú pre zobrazovanie časových nadväzností v grafe (znázorňuje sa čiarkovanou čiarou),

Hrany sa v grafe ohodnocujú, pričom základné ohodnotenie je **časové** tzn. hrane sa priradí hodnota vyjadrujúca trvanie činnosti. Možné je aj ohodnotenie **zdrojové**, ktoré priradzuje hranám hodnoty vyjadrujúce množstvo vynaložených zdrojov (materiál, pomocné sily a pod.) a **nákladové** priradzuje hranám náklady potrebné k realizácii odpovedajúcich činností.

Z uvedených základných pojmov logicky vyplýva i rámcový postup zostavenia sieťového grafu, ktorý predstavuje tri základné fázy :

1.fáza - zostavenie zoznamu všetkých činností potrebných pre realizáciu zadaného projektu. Nasleduje vyhodnotenie typu väzieb medzi činnosťami - bezprostredná časová následnosť, súbežnosť prípadne vzájomná závislosť.

2.fáza - vytvorenie grafického modelu, rešpektujúceho vyššie uvedené vlastnosti jednotlivých činností a jeho ohodnotenie (výpočtom alebo odhadom),

3.fáza - vlastný výpočet všetkých potrebných charakteristík sieťového grafu, ich analýza a vyvodenie záverov pre jednotlivé činnosti projektu a pre projekt ako celok.

8.1 Metóda kritickej cesty (CPM)

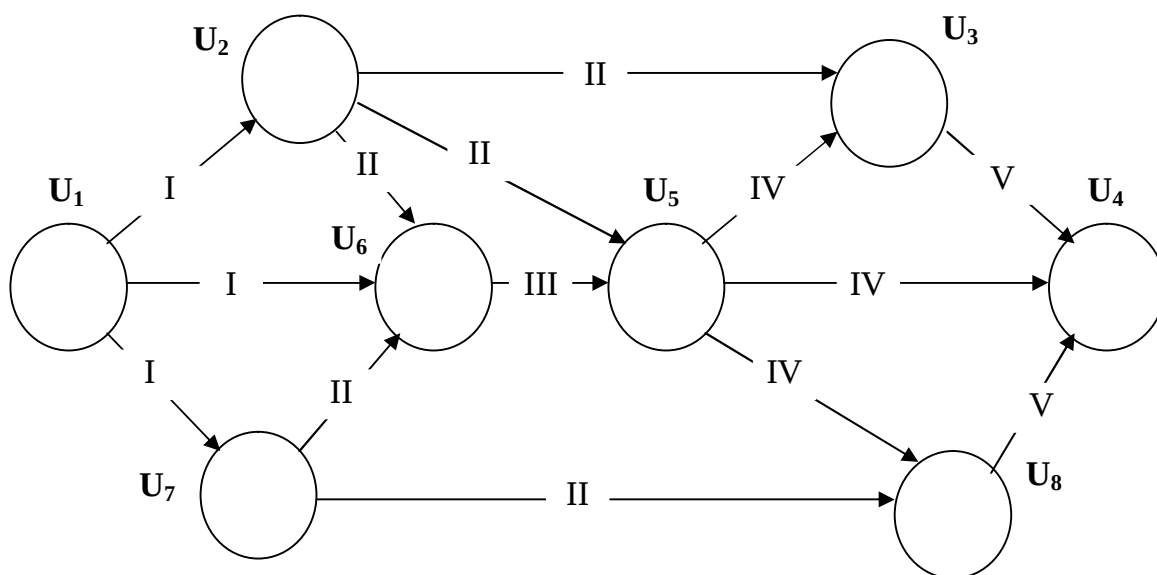
Základnou metódou sieťovej analýzy je tzv. **metóda kritickej cesty –CPM** (Critical Path Method). Bola publikovaná už v roku 1957 a doteraz sa využíva.

K vlastnému riešeniu sieťového grafu pristupujeme po uskutočnení vyššie uvedenej druhej fázy tzn. po vytvorení ohodnoteného sieťového grafu. K tomu aby mohol byť „nasadený“ algoritmus CPM, je potrebné navyše naplniť dva základné predpoklady :

1. **Sieťový graf musí mať vždy iba jeden uzol počiatkový (do ktorého nevstupuje žiadna činnosť) a jeden uzol koncový (z ktorého žiadna činnosť nevystupuje).**
2. **Pre každú ľubovoľnú hranu h_{ij} musí platiť $i < j$, t.j. poradové číslo počiatkového uzla každej hrany musí byť nižšie ako poradové číslo uzla koncového.**

V prípade, ak nie je splnená prvá podmienka, je možné zaradiť nový počiatkový alebo koncový uzol s využitím fiktívnych činností.

V prípade nesplnenia druhej podmienky dotýkajúcej sa číslovania uzlov, je výhodné využiť tzv. **Fordov algoritmus prečíslovania uzlov**, ktorý spočíva v kategorizácii uzlov (ich postupnom zatried'ovaní do zvyšujúcich sa rádov). Princíp algoritmu si vysvetlíme na príklade z obr.8.1.a.



Obr.8.1.a. Sieťový graf s nevyhovujúcim číslovaním vrcholov.

Slovne možno Fordov algoritmus vyjadriť nasledovne :

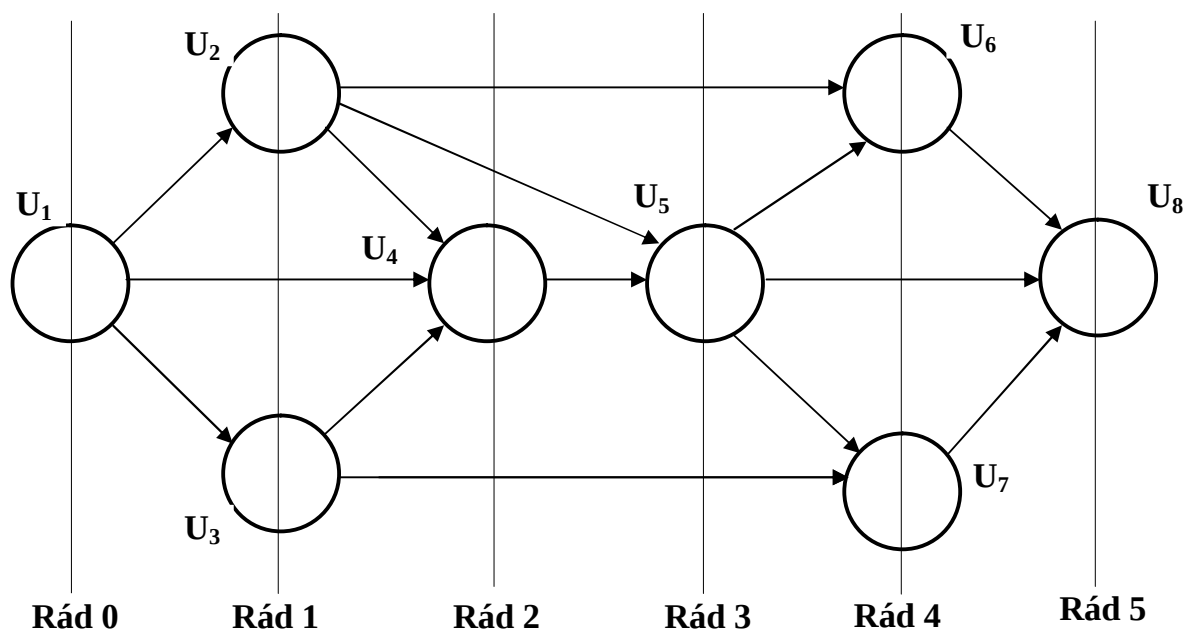
1. **Počiatkovému uzlu priradíme rád „0“. ($R=0$)**
2. **Hranám z neho vystupujúcim priradíme rád $R=R+1=1$, (v grafe označíme tak, že hrany raz prečiarkneme).**

3. Skúmame všetky uzly do ktorých vstupujú iba hrany už definovaného rádu (prečiarknuté) a priradíme im rád rovný najvyššiemu rádu vstupujúcich hrán. (Uzly U_2 a U_7 budú teda 1. rádu).

4. Pokračujeme bodom 2. až po koncový uzol.

Pri realizácii uvedeného postupu možno dospieť k záveru, že uzol U_6 - 2.rádu, uzol U_5 - 3.rádu, uzly U_3 , U_8 - 4.rádu a uzol U_4 - 5.rádu.

Po ukončení tohoto postupu je vhodné sieťový graf prekresliť s vyznačením určených rádo (Obr.8.1.b.). Nové číslovanie vrcholov sa potom vykoná tak, že vrcholy sa čísľujú postupne od najnižšieho rádu po najvyšší tzn. zľava doprava.

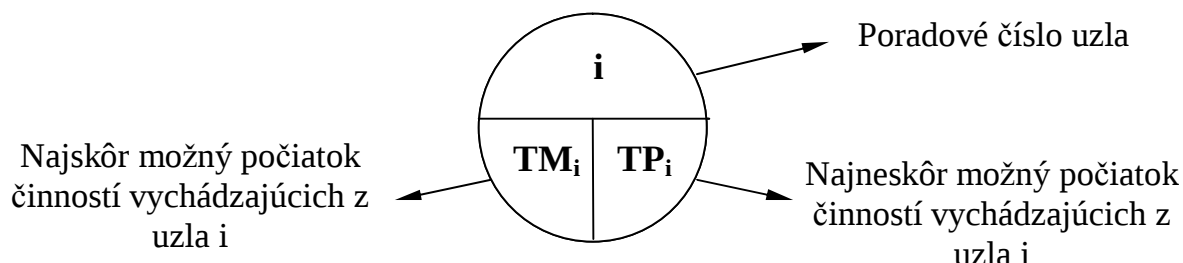


Obr.8.1.b. Sieťový graf s prečíslovanými vrcholmi.

Ak je zabezpečené splnenie podmienok riešiteľnosti sieťového grafu metódou CPM môžeme pristúpiť k vlastnému riešeniu (tretia fáza základného postupu), ktoré spočíva v plnení nasledovných krokov :

- určenie **najskôr možných počiatkov činností TM_i** vo všetkých uzloch a **minimálneho možného času trvania akcie T_n** , ktorý sa rovná najskôr možnému počiatku činností v koncovom uzle ($T_n = TM_k$),
- určenie **najneskôr možných počiatkov činností TP_i** vo všetkých uzloch a určenie **kritickej cesty**,
- analýza a prípadné **prerozdelenie rezerv** v grafe.

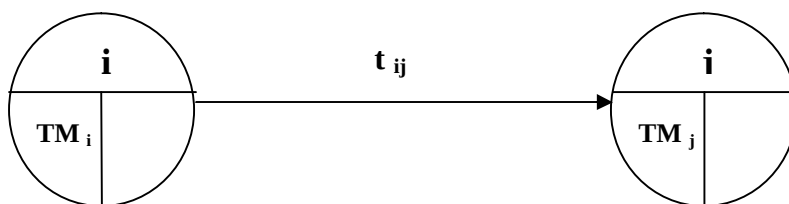
Predtým ako začneme tieto čiastkové kroky detailnejšie rozoberať, je vhodné uviesť zaužívané (aj normalizované) označenie uzlov používané v metóde CPM (obr.8.2), v ktorom sú aj uvedené významy jednotlivých použitých symbolov.



Obr.8.2 : Značenie uzlov v metóde kritickej cesty.

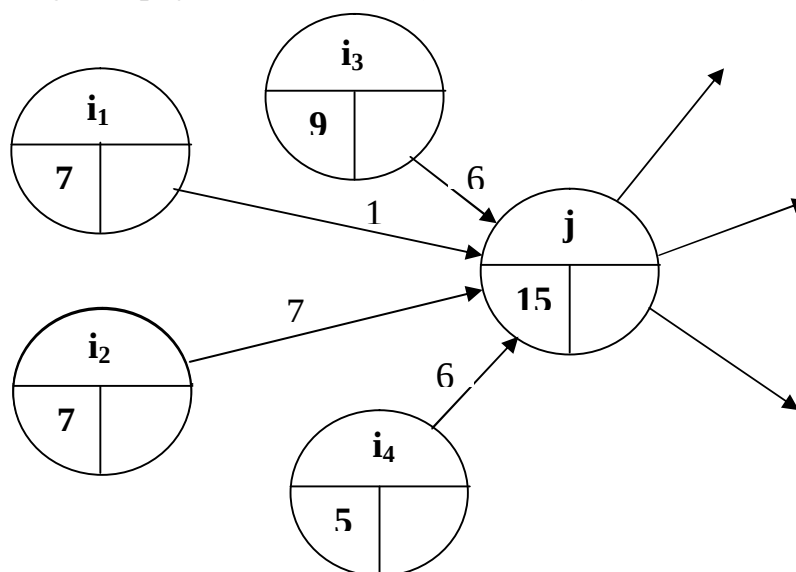
ad a) Určenie najskôr možných počiatkov činností.

Počiatočnému uzlu U_1 sa priradí hodnota najskôr možného počiatku $TM_1=0$. U nasledujúcich uzlov, pokiaľ do nich vstupuje iba jedna hrana, činnosť (obr.8.3.a.) určujeme hodnotu podľa vzťahu $TM_j = TM_i + t_{ij}$.



Obr.8.3.a Určenie najskôr možných počiatkov (do uzla j vstupuje jedna činnosť)

Ak do uzla j vstupuje viac činností (obr.8.3.b),



Obr.8.3.b. Určenie najskôr možných počiatkov - do uzla vstupuje viac činností.

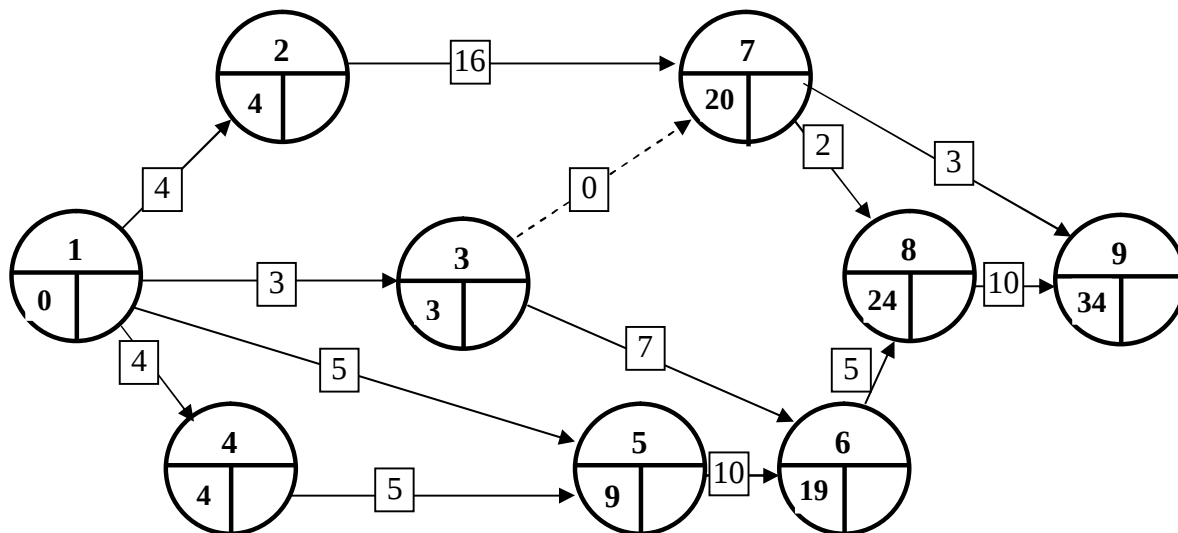
za hodnotu najneskôr možného počiatku činností v j-tom vrchole sa určí maximálna hodnota z naznačených súčtov

$$TM_j = \max_i (TM_i + t_{ij}). \quad (8.1)$$

Tento vzťah vychádza z jednoduchého pravidla ktoré znie, že všetky činnosti z uzla vystupujúce môžu začať až po skončení všetkých činností do uzla vstupujúcich. Takto sa pokračuje cez všetky vrcholy grafu až po vrchol koncový U_k , v ktorom (pretože v ňom už žiadna činnosť nezačína tj. žiadna hrana z neho nevychádza) určený najskôr možný počiatok znamená súčasne **minimálny možný čas trvania** projektu (akcie), pri ktorom je zabezpečené, že sa realizujú všetky určené činnosti (potiaľto je tento algoritmus metódou určenia najdlhšej cesty v orientovanom grafe).

Ukážme si celý naznačený postup na jednoduchom grafe z *obr.8.4*, v ktorom sú doby trvania jednotlivých činností t_{ij} uvedené priamo pri príslušných hranách (vo štvorčekoch).

Po aplikácii vyššie uvedených pravidiel dostaneme **časy najskôr možných počiatkov** vo všetkých vrcholoch až po vrchol koncový, v ktorom čas $TM_9 = 34$ znamená súčasne **minimálny čas ukončenia celého projektu** T_n .



Obr.8.4. Určenie doby trvania projektu.

ad b) Určenie najneskôr možných počiatkov a kritickej cesty.

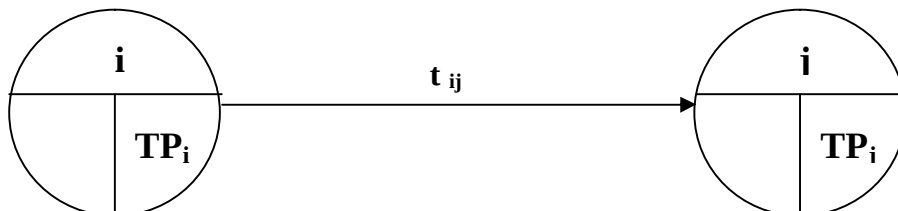
Pri určovaní najneskôr možných počiatkov činností v jednotlivých uzloch vychádzame z vrcholu koncového, v ktorom priradíme času najneskôr možného počiatku čas trvania akcie

$$TP_k = T_n .$$

Spätným chodom potom určujeme časy najneskôr možných počiatkov činností vo všetkých vrchoch nasledovne :

- ak z vrcholu i vychádza iba jediná činnosť (obr.8.5.a) určujeme časy najneskôr možných počiatkov podľa vzťahu

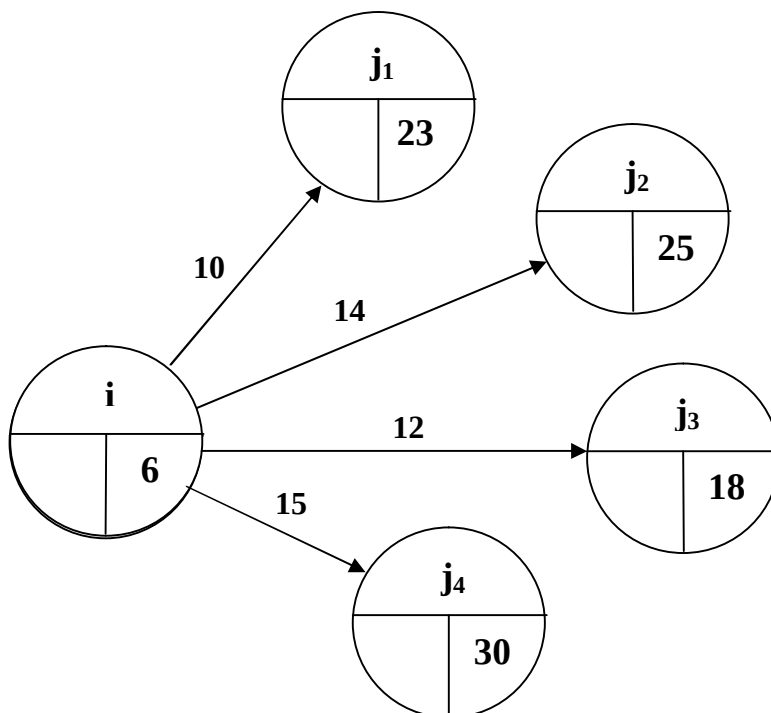
$$TP_i = TP_j - t_{ij} ,$$



Obr.8.5.a. Určenie časov najneskôr možných počiatkov – z vrcholu „i“ vychádza iba jediná činnosť.

- ak z vrcholu „i“ vychádza viac činností (obr.8.5.b) určujeme časy najneskôr možných počiatkov podľa vzťahu

$$TP_i = \min_j (TP_j - t_{ij}). \quad (8.2)$$



Obr.8.5.b Určenie časov najneskôr možných začiatkov – z vrcholu „i“ vychádza viac činností.

Výraz (8.2) pritom vyjadruje, že najneskôr možné počiatky musia byť určené tak, aby neohrozili určený termín ukončenia projektu.

Uvedeným spôsobom postupujeme až k vrcholu počiatočnému U_1 , v ktorom musí platiť (slúži súčasne ako kontrola správnosti riešenia)

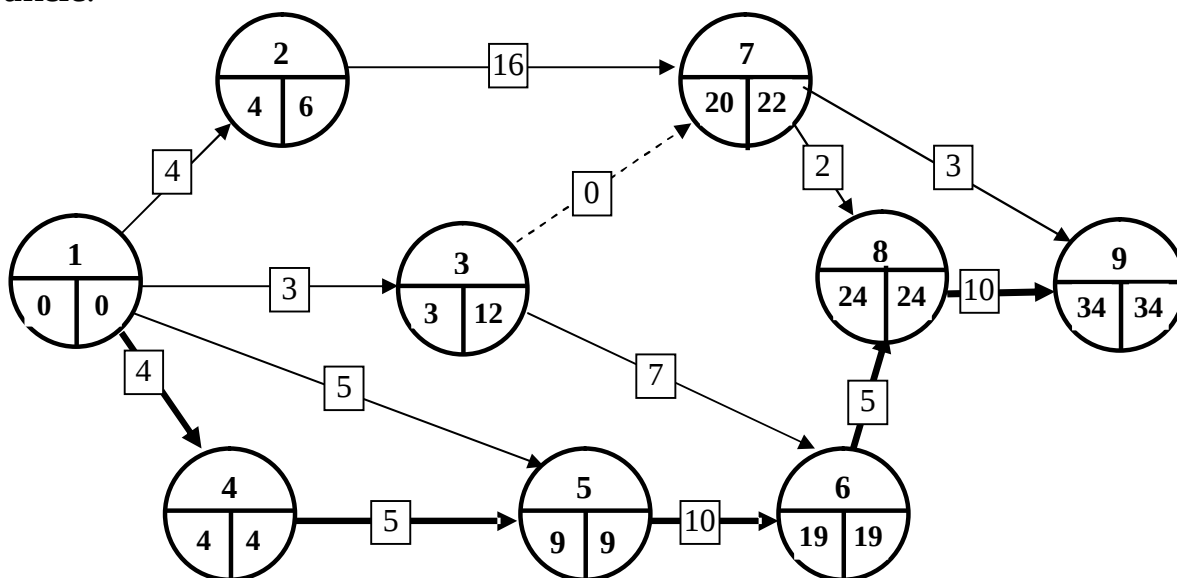
$$TP_1 = TM_1 = 0 .$$

Následne na to už je možné v grafe vyznačiť tzv. **kritickú cestu**, ktorá spája vrcholy, v ktorých platí

$$TP_i = TM_i$$

tzn., v ktorých nie je žiadna uzlová (kritická) rezerva. Platí preto, že akékoľvek predĺženie činností ležiacich na kritickej ceste, alebo posunutie ich počiatkov znamená súčasne predĺženie doby trvania celej akcie.

Ak aplikujeme tento postup na uvedený príklad dostaneme (obr.8.6) vo všetkých vrcholoch hodnoty najneskôr možných počiatkov a kritickú cestu, ktorá začína v počiatočnom vrchole U_1 , prechádza cez vrcholy U_4 , U_5 , U_6 a U_8 do koncového vrcholu U_9 a tvoria ju teda činnosti (1 – 4) , (4 – 5), (5 – 6), (6 – 8) a (8 – 9). Je zrejmé že súčet ich trvania musí byť rovný času trvania celej akcie.



Obr.8.6. Určenie časov najneskôr možných počiatkov a kritickej cesty.

Rozsiahlejšie problémy sa samozrejme neriešia priamo v grafe, ale k ich riešeniu sa s výhodou využíva výpočtová technika. Zadaním pre počítač pritom je počet uzlov v grafe a hodnoty hrán (činností) uložené v tzv. **incidenčnej matici**. Pribeh vlastného výpočtu možno znázorniť v tzv. incidenčnej tabuľke (tab.8.1) so zaznačenými hodnotami časov jednotlivých činností.

V nej najskôr určujeme hodnoty TM_j tak, že v prvom stĺpci určíme hodnotu $TM_1 = 0$ a v ďalších postupne zapisujeme ako hodnotu TM_j maximálny súčet $TM_i + t_{ij}$ (vzťah 8.1) vždy pre daný stĺpec.

Hodnoty TP_i sa určujú tak, že do riadku koncového vrcholu sa priradí hodnota $TM_k = T_n$ a spätne sa priradujú hodnotám TP_i vždy minimálne rozdiely v súlade so vzťahom 8.2 tzn. $\min(TP_j - t_{ij})$ v príslušnom riadku.

Po ukončení spätného chodu musí byť v počiatočnom vrchole hodnota $TP_1=0$ a porovnaním hodnôt TP_i a TM_j pre všetky vrcholy sa určia vrcholy a činnosti ležiace na kritickej ceste.

Uvedený postup implicitne ukazuje na nutnosť splnenia už uvedenej požiadavky na číslovanie vrcholov ($i < j$). Pri jej nedodržaní, by totiž nestačila k uloženiu hodnôt hrán iba horná trojuholníková matica a nebolo by možné viesť výpočet jednoznačne jedným smerom (dopredným pri určovaní TM_j a spätným pre TP_i).

Tab.8.1 : Riešenie sieťového grafu CPM v incidenčnej tabuľke

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TP_i
1	X	4	3	4	5					0
2		X					16			6
3			X			7	0			12
4				X	5					<u>4</u>
5					X	10				<u>9</u>
6						X		5		<u>19</u>
7							X	2	3	22
8								X	10	<u>24</u>
9									X	<u>34</u>
TM_j	0	4	3	<u>4</u>	<u>9</u>	<u>19</u>	20	<u>24</u>	<u>34</u>	X

ad c) Časová analýza grafu (rozbor rezerv)

V grafe rozlišujeme v zásade 2 druhy rezerv : **rezervy uzlov** a **rezervy** vzťahujúce sa k jednotlivým **činnostiam**. **Rezerva uzla R_i** je definovaná ako rozdiel hodnôt najneskôr a najskôr možného začiatku činnosti v príslušnom uzle

$$R_i = TP_i - TM_i \quad (8.3)$$

V niektorej literatúre sa pre rezervu uzla používa termín **kritická rezerva**. Je zrejmé, že na kritickej ceste sú rezervy všetkých uzlov nulové.

Rezervy dotýkajúce sa jednotlivých činností, delíme na 4 základné druhy :

- **rezervu celkovú (CR_{ij}),**
- **rezervu voľnú (VR_{ij}),**
- **rezervu nezávislú (NR_{ij}),**
- **rezervu závislú (ZR_{ij}).**

Reálny význam majú najmä prvé dve – **rezerva celková** a **rezerva voľná**.

- a) **Rezerva celková** určuje, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti, alebo posunúť jej najskôr možný počiatok bez toho, aby bol ohrozený termín ukončenia projektu a pre každú činnosť ju určíme zo vzťahu

$$CR_{ij} = TP_j - TM_i - t_{ij} \quad (8.4.a)$$

- b) **Rezerva voľná** udáva, o koľko je možné predĺžiť trvanie činnosti, alebo posunúť jej počiatok, aby neboli ohrozené najskôr možné počiatky všetkých nasledujúcich činností a určíme ju zo vzťahu

$$VR_{ij} = TM_j - TM_i - t_{ij} \quad (8.4.b)$$

Je zrejmé , že na kritickej ceste sú obidve uvedené rezervy nulové.

- c) **Rezerva nezávislá** a **rezerva závislá** sa určujú z výrazov

$$NR_{ij} = TM_j - TP_i - t_{ij} \quad (8.4.c)$$

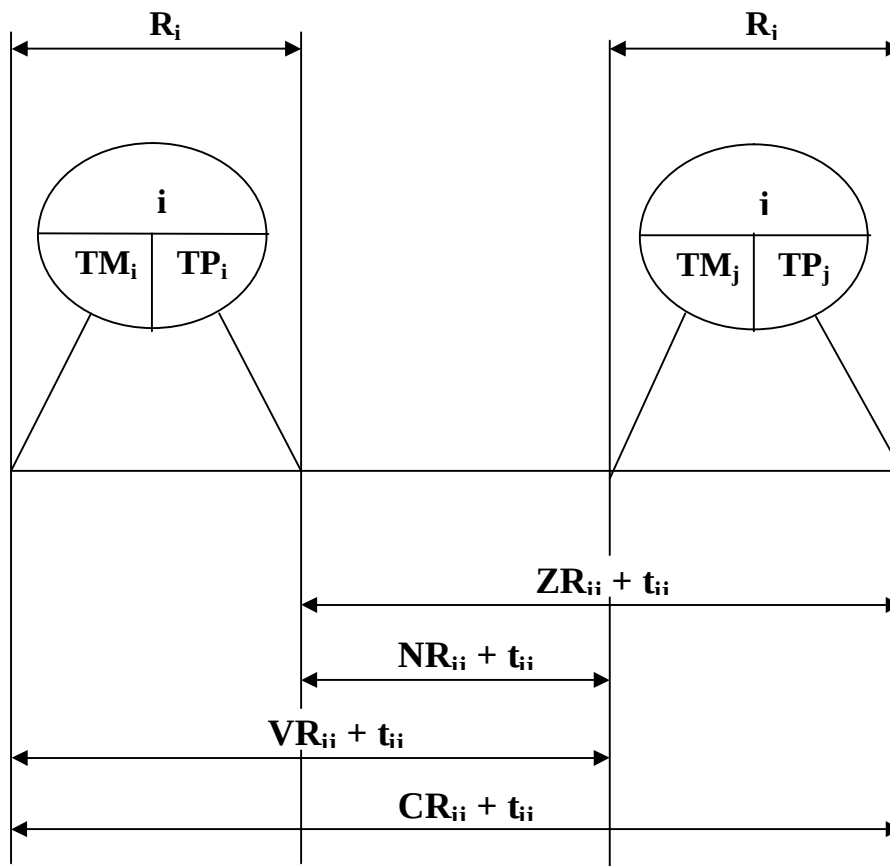
$$ZR_{ij} = TP_j - TP_i - t_{ij} \quad (8.4.d)$$

Po určení kritickej cesty v grafe a výpočte všetkých rezerv prichádza na rad opäť úsudok riešiteľa zadaného projektu, ktorý môže (samozrejme v závislosti na charaktere úlohy) napr. :

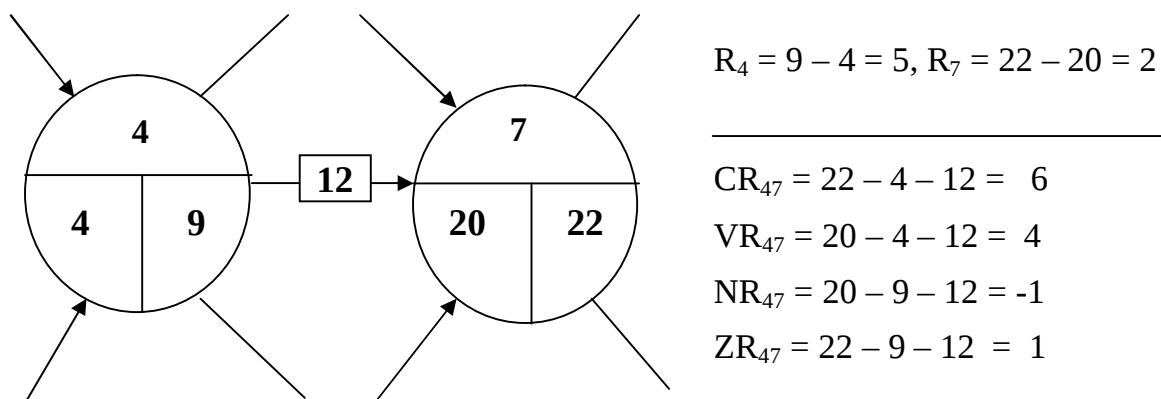
- vylúčiť niektoré z činností na kritickej ceste, ktoré nie sú k realizácii projektu nevyhnutne potrebné,
- niektoré z činností na kritickej ceste, ktoré boli prípadne plánované za sebou, naplánovať súbežne,

- skrátiť trvanie niektorých činností na kritickej ceste presunom pracovných síl, techniky apod. z činností, u ktorých sú najväčšie časové rezervy apod..

Schematicky možno výrazy pre analýzu rezerv znázorniť podľa obr.8.7 a príklad výpočtu na ich výseku zo sieťového grafu je uvedený na obr.8.8.



Obr.8.7. Rezervy v sieťovom grafe



Obr.8.8. Výpočet rezerv v sieťovom grafe

Celý postup riešenia projektu metódou kritickej cesty si demonštrujeme na jednoduchom príklade z bežného života.

Príklad 8.1: Firma dostala za úlohu zabezpečiť stavbu výrobnéj haly a montáž strojného zariadenia. Na základe analýzy projektu bol spracovaný hrubý zoznam činností a na základe technologického rozboru noriem boli určené doby trvania každej činnosti ako celku. Zoznam činností a ich doby trvania sú uvedené v tab.8.2.

Tab.8.2. Zoznam činností projektu a doby trvania jednotlivých činností.

Číslo činnosti	Názov činnosti	Doba trvania činnosti
1 – 2	Investičná úloha	5
2 – 3	Projektovanie strojovej časti	2
2 – 4	Projektovanie stavebnej časti	4
3 – 5	Montáž kotevných zariadení	7
3 – 6	Objednávka a dodanie strojového zariadenia	3
4 – 5	Základné bloky strojov	5
4 – 7	Dodanie strešných prefabrikátov	3
4 – 8	Steny priečne	8
5 - 6	Fiktívna činnosť	0
5 – 8	Ostatné stavebné práce	5
6 – 8	Montáž strojového zariadenia	4
6 – 9	Pripojenie energie	9
7 – 8	Dodávka materiálu	4
7 – 9	Steny pozdĺžne	14
8 – 9	Zastrešenie	6
8 - 10	Skúšobná prevádzka	4

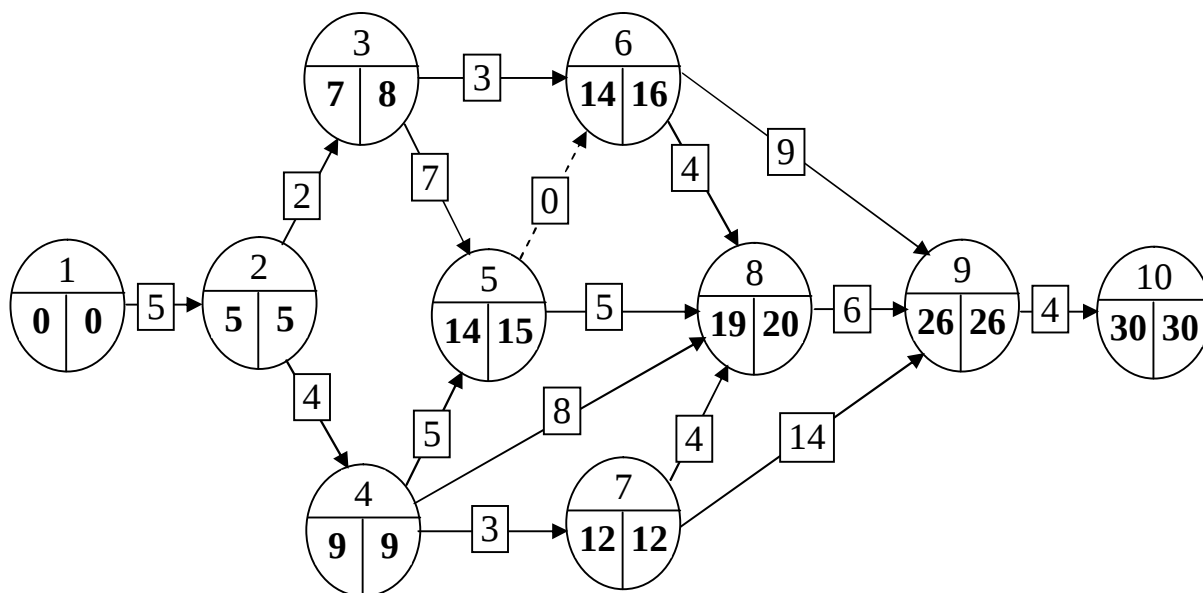
Úlohou je prostredníctvom metódy CPM :

1. zostaviť časovo orientovaný sieťový graf,
2. určiť najskôr možné počiatky činností TM a najneskôr možné počiatky jednotlivých činností TP, minimálny čas trvania projektu T_n a kritickú cestu
 - (a) výpočtom priamo v grafe,
 - (b) pomocou incidenčnej matice,
3. vykonať rozbor časových rezerv.

Riešenie :

1. Časovo orientovaný sieťový graf pre zadaný projekt je uvedený na obr.8.9.

2. Sieťový graf obsahuje už v príslušných políčkach vypočítané hodnoty najskôr možných počiatkov činností TM a najneskôr možných počiatkov činností TP podľa algoritmu uvedeného v kapitole 8.1.



Obr. 8.9. Určenie minimálneho možného času trvania projektu a kritickej cesty.

Výsledky použitia algoritmu výpočtu najskôr možných počiatkov činností TM a najneskôr možných počiatkov činností TP pomocou incidenčnej matice a určenie kritickej cesty sú uvedené v tab.8.3.

Tab.8.3. Výpočet sieťového grafu pomocou incidenčnej matice

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TP _i
1	X	5									<u>0</u>
2		X	2	4							<u>5</u>
3			X		7	3					8
4				X	5		3	8			<u>9</u>
5					X	0		5			15
6						X		4	9		16
7							X	4	14		<u>12</u>
8								X	6		20

9									X	4	<u>26</u>
10										X	<u>30</u>
TM _i	<u>0</u>	<u>5</u>	7	<u>9</u>	14	14	<u>12</u>	19	<u>26</u>	<u>30</u>	

Z hodnoty $TM_{10} = T_n$ zistíme predpokladaný minimálny čas trvania projektu $T_n = 30$ časových jednotiek. Kritická cesta vedie cez uzly, v ktorých sú hodnoty TM a TP rovnaké tzn. kritická rezerva v týchto uzloch je nulová. V našom prípade kritická cesta prechádza cez vrcholy $V_1 - V_2 - V_4 - V_7 - V_9 - V_{10}$.

- Na základe vzťahov (8.3. a 8.4.a – d) určíme jednotlivé druhy rezerv tzn. rezervy vzťahujúce sa na jednotlivé činnosti (CR_{ij} , VR_{ij} , NR_{ij} a ZR_{ij}) a rezervy v uzloch (R_i – kritickú rezervu). Získané hodnoty jednotlivých druhov rezerv sú uvedené v *tab.8.4.*

Tab.8.4. Výpočet časových rezerv

Činnosť		i		j						
i - j	t _{ij}	TM _i	TP _i	TM _j	TP _j	CR _{ij}	VR _{ij}	NR _{ij}	ZR _{ij}	R _i
1 – 2	5	0	0	5	5	0	0	0	0	0
2 – 3	2	5	5	7	8	1	0	0	1	0
2 – 4	4	5	5	9	9	0	0	0	0	0
3 – 5	7	7	8	14	15	1	0	-1	0	1
3 – 6	3	7	8	14	16	6	4	3	5	1
4 – 5	5	9	9	14	15	0	0	0	1	0
4 – 7	3	9	9	12	12	0	0	0	0	0
4 – 8	8	9	9	19	20	3	2	2	3	0
5 – 6	0	14	15	14	16	2	0	-1	1	1
5 – 8	5	14	15	19	20	1	0	-1	0	1

6 – 8	4	14	16	19	20	2	1	-1	0	2
6 – 9	9	14	16	26	26	3	3	1	1	2
7 – 8	4	12	12	19	20	4	3	3	4	0
7 – 9	14	12	12	26	26	0	0	0	0	0
8 – 9	6	19	20	26	26	1	1	0	0	1
9 - 10	4	26	26	30	30	0	0	0	0	0

8.2 Metóda CPM – GE

Aplikáciou metódy CPM na zostavovanie plánov zložitých akcií je možné určiť činnosti, ktoré sú z hľadiska časového pre uskutočnenie akcie kritické, pre ostatné činnosti vyčíslit rôzne typy rezerv apod.. Avšak základná verzia metódy CPM neumožňuje objektívne a účelne rozdeliť zistené rezervy na tie činnosti, ktoré sú pre dodržanie termínu ukončenia rozhodujúce.

Nevýhodou základnej metódy CPM je totiž práve to, že všetky činnosti kladie z hľadiska dôležitosti pre uskutočnenie projektu na rovnakú úroveň. To znamená, že rovnakú dôležitosť prikladá činnosti fiktívnej (ktorá reálne vôbec neexistuje), ako aj činnosti objektívne najdôležitejšej (napr. postaveniu hrádze údolnej priehrady).

Tieto nevýhody určitým spôsobom odstraňuje jej modifikácia - metóda **CPM–GE** (General Electric - firma, ktorá metódu vyvinula). Jej základný princíp spočíva v tom, že pri zadaní každej činnosti okrem odhadnutého resp. vypočítaného času jej trvania t_{ij} (prípadne ďalších údajov – nákladov, spotreby materiálu) jej priradzuje aj tzv. **preferenčné číslo** (preferenciu) w_{ij} .

Preferenčné čísla sa určujú z intervalu od 0 do 9 podľa pravidla, že napr. :

- $w_{ij} = 0$ – platí pre fiktívnu činnosť,
- $w_{ij} = 1$ – sa určuje pre činnosti najľahšie splniteľné, najmenej dôležité pre realizáciu celého projektu, postupne až po
- $w_{ij} = 9$ – pre rozhodujúce činnosti, u ktorých je najväčšie riziko nedodržania stanovených časov.

Práve preferenčné čísla umožnia prerozdeliť určené rezervy na tie činnosti, ktoré sú pre realizáciu projektu rozhodujúce a tak zabezpečiť čo najreálnejšie uskutočnenie projektu.

Základný postup riešenia projektu metódou CPM–GE je nasledovný :

1. Sieťový graf sa vyrieši základnou metódou CPM tzn., že sa určia všetky najskôr a najneskôr možné počiatky činností TM_j a TP_i , určí sa celkový čas trvania projektu T_n , kritická cesta a celkové rezervy CR_{ij} .
2. Každéj činnosti sa priradí preferenčné číslo $w_{ij} \in (0, 9)$.
3. Pomocou preferenčných čísel w_{ij} sa určia pomocné hodnoty G_j a H_j zo vzťahov :

$$\begin{aligned} G_k &= 1 \\ G_i &= \max_j (G_j + w_{ij}) \\ H_j &= \max_i w_{ij} \end{aligned} \quad (8.5)$$

4. S využitím hodnôt G_j a H_j sa určia časy TS_j – skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch podľa vzťahov :

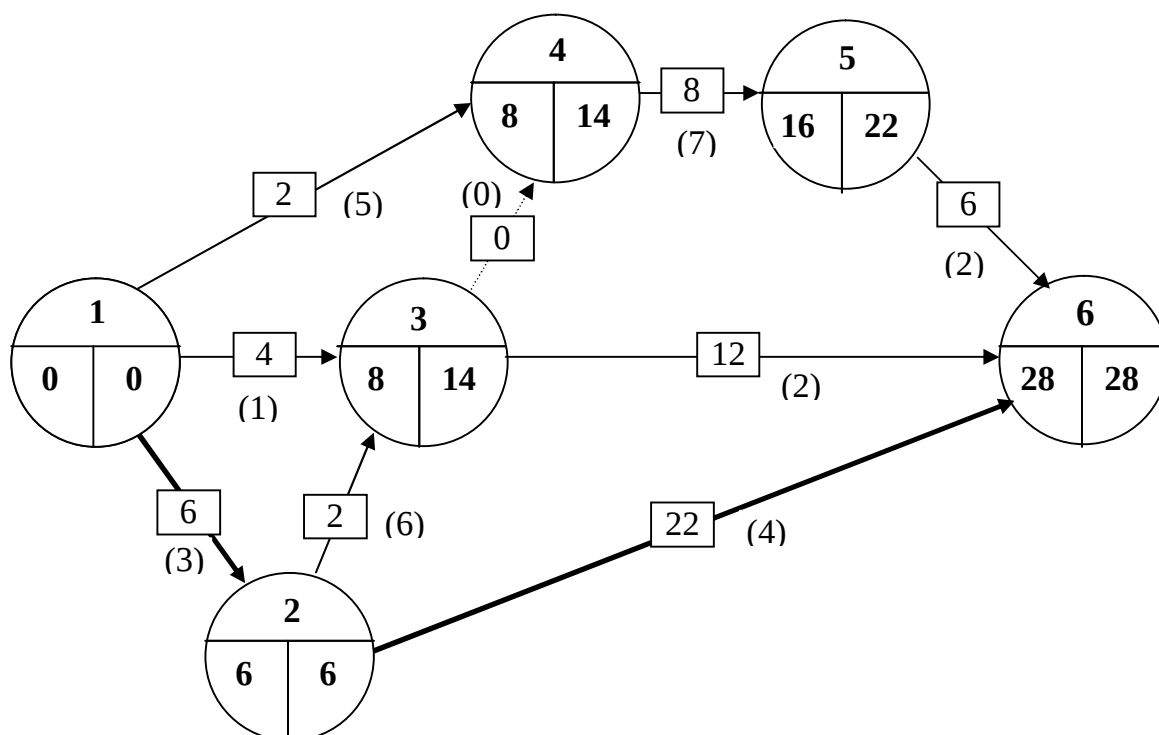
$$\begin{aligned} TS_1 &= 0 \\ TS_j &= \max_i \left[\frac{(TS_i + t_{ij}) \cdot G_j + TP_j \cdot H_j}{G_j + H_j} \right] \end{aligned} \quad (8.6)$$

5. Vypočítajú sa prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti odpovedajúce ich preferenciám

$$SR_{ij} = TS_j - TS_i - t_{ij} . \quad (8.7)$$

Realizáciu uvedeného postupu si demonštrujeme na jednoduchom prípade sieťového grafu podľa *obr.8.10*.

Poznámka : Čísla v štvorčekoch na jednotlivých hranách znamenajú časy trvania príslušných činností t_{ij} a hodnoty uvedené bez rámčeka v zátvorke pri hrane prezentujú určené preferenčné čísla w_{ij} .



Obr.8.10. Sieťový graf pre metódu CPM – GE.

Riešenie :

ad 1) Príslušné časy TM_j a TP_i , ako aj kritická cesta sú uvedené priamo v grafe. Vypočítané celkové rezervy CR_{ij} sú spolu s časmi uvedené v tabuľke (tab.8.5).

ad 3) Určenie hodnôt G_j a H_j pre jednotlivé vrcholy je výhodné vykonať v incidenčnej tabuľke (matici) preferenčných hodnôt w_{ij} (tab.8.6), pričom postup ich výpočtu je nasledovný :

- hodnoty H_j sa určujú jednoducho tak, že v každom stĺpci nájdeme maximálne preferenčné číslo w_{ij} a napíšeme ho priamo ako príslušnú hodnotu H_j .
- hodnoty G_i určíme spätným chodom tak, že koncovému uzlu (v našom prípade U_6) priradíme hodnotu $G_6 = 1$ a ostatné hodnoty G_i určíme, ako maximálny súčet hodnoty G_j a preferenčného čísla w_{ij} v každom riadku.

Konkrétne v našom prípade je v piatom riadku tento súčet jediný ($w_{56} + G_6 = 3 = G_5$) a takisto v 4.riadku ($w_{45} + G_5 = 10 = G_4$). V 3.riadku už existujú tieto súčty dva ($w_{34} + G_4 = 10$ a $w_{36} + G_6 = 3$).

Ako hodnotu G_3 berieme väčší z nich, tzn. $G_3=10$. Analogicky pre 2. riadok $G_2 = \max (16, 5) = 16$ a pre prvý riadok $G_1 = \max (19, 11, 15) = 19$.

Tab.8.5. Incidenčná tabuľka preferenčných čísel.

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	X	3	1	5		
2		X	6			4
3			X	0		2
4				X	7	
5					X	2
6						X
G_i	19	16	10	10	3	1
H_j	-	3	6	5	7	4

ad 4,5) Príslušné výpočty skutočných časov počiatkov činností začínajúcich v jednotlivých uzloch sa vykonávajú podľa podobných pravidiel ako časy najskôr možných počiatkov činností v základnej metóde CPM s tým rozdielom, že sa určujú podľa vzorca (8.6). Výsledné hodnoty riešeného príkladu sú uvedené v tab.8.6.

Tab.8.6. Riešenie siete metódou CPM – GE

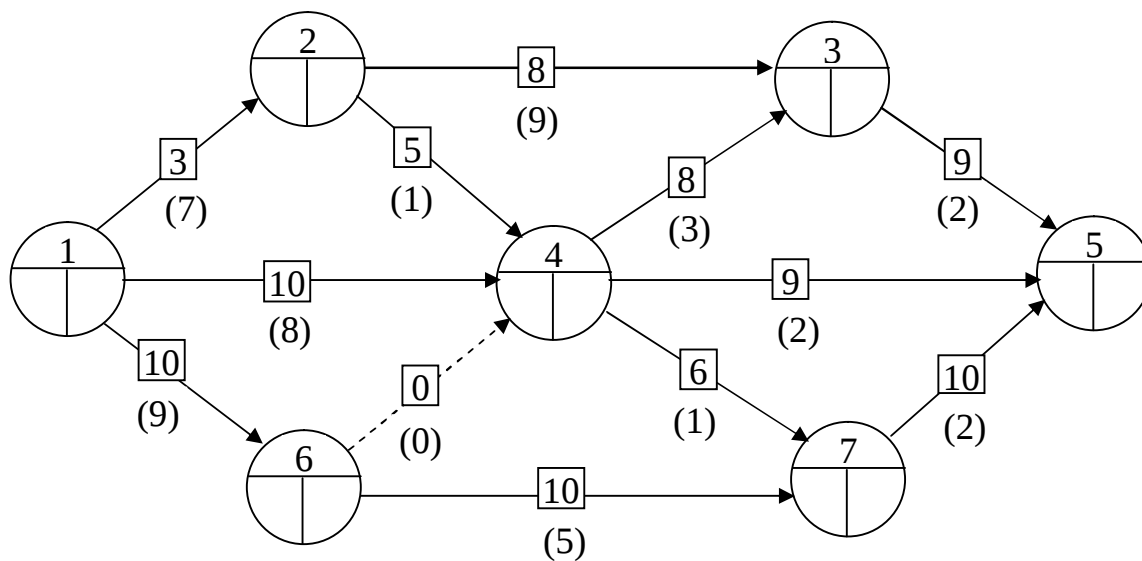
Činnosť		t_{ij}	w_{ij}	i		j		CR_{ij}	G_j	H_j	TS_j	SR_{ij}
i	j			TM_i	TP_i	TM_j	TP_j					
1	2	6	3	0	0	6	6	0	16	3	6	0
1	3	4	1	0	0	8	14	10	10	6	10,25	6,25
1	4	2	5	0	0	8	14	12	10	5	11,5	9,25
2	3	2	6	6	6	8	14	6	10	6	10,25	2,25
2	6	22	4	6	6	28	28	0	1	4	28	0

3	4	0	0	8	14	8	14	6	10	5	11,5	1,25
3	6	12	2	8	14	28	28	8	1	4	28	0
4	5	8	7	8	14	16	22	6	3	7	21,25	1,75
5	6	6	2	16	22	28	28	6	1	4	28	0

Postup riešenia nadväzného technologického procesu metódou CPM-GE si demonštrujeme ešte na ďalšom príklade zo stavebnej praxe (*príklad.8.2*).

Príklad 8.2

Projekt obnovy mostu poškodeného živelnou pohromou je rozdelený do 7 hlavných činností, ktorých logická nadväznosť, časové trvanie jednotlivých činností a preferenčné čísla každej činnosti sú uvedené na obr.8.11.



Obr.8.11. Sieťový graf úlohy.

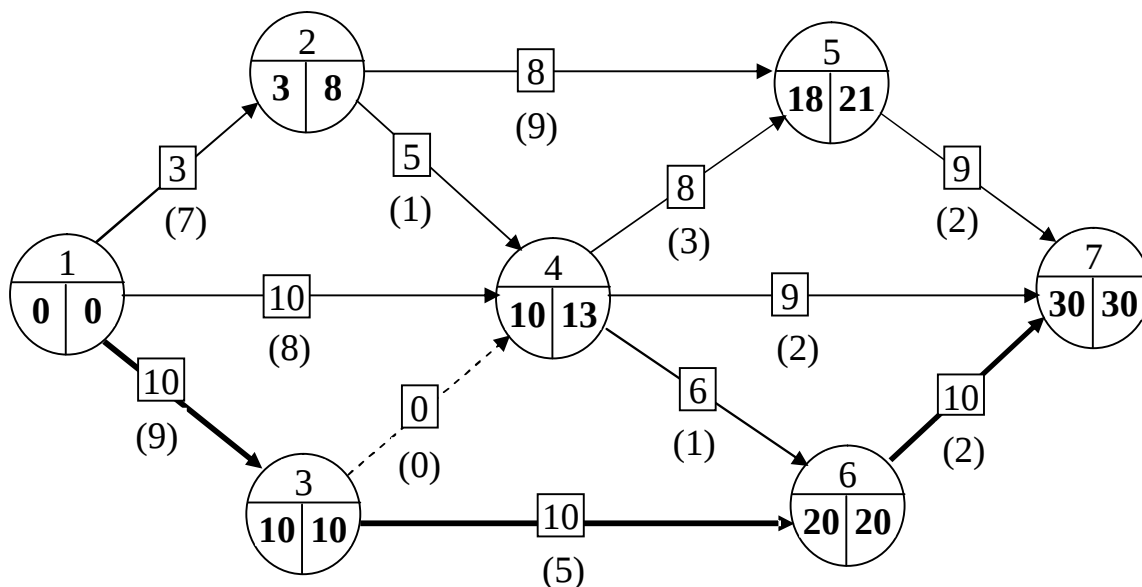
Úlohou je prostredníctvom metódy CPM – GE :

1. prečíslovať vrcholy,
2. určiť najskôr možné počiatky činností TM_j a najneskôr možné počiatky činností TP_i , minimálny možný čas trvania projektu T_n a kritickú cestu
 - (a) výpočtom priamo v grafe,
 - (b) pomocou incidenčnej matice,

3. určiť hodnoty G_j a H_j pomocou incidenčnej matice,
4. určiť celkovú časovú rezervu pre každú činnosť CR_{ij} , skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch TS_j a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti RS_{ij} .

Riešenie :

ad1,2) Prečíslovanie vrcholov, hodnoty vypočítaných najskôr možných počiatkov a najneskôr možných počiatkov jednotlivých činností a určenie kritickej cesty sú uvedené v grafe na obr.8.12.



Obr.8.12. Prečíslovanie vrcholov a určenie časov TM_{ij} a TP_{ij} .

Z uvedeného grafu vyplýva, že minimálny možný čas trvania projektu je $T_n = 30$ časových jednotiek a kritická cesta prechádza uzlami $U_1 - U_3 - U_6 - U_7$.

Výpočet pomocou incidenčnej matice je uvedený v tab.8.7.

Tab.8.7. Výpočet sieťového grafu pomocou incidenčnej matice

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	TP_i
1	X	3	10	10				<u>0</u>
2		X		5	8			<u>8</u>
3			X		0	10		<u>10</u>
4				X	8	6	9	<u>13</u>

5					X		9	21
6						X	10	<u>20</u>
7							X	<u>30</u>
TM _j	<u>0</u>	3	<u>10</u>	10	18	<u>20</u>	<u>30</u>	

ad 3) Výpočet pomocných hodnôt G_j a H_j pomocou incidenčnej tabuľky preferencií je uvedený v *tab.8.8*.

Tab.8.8. Incidenčná tabuľka preferenčných čísel.

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	X	7	9	8			
2		X		1	9		
3			X	0		5	
4				X	3	1	2
5					X		2
6						X	2
7							X
G_j	19	12	8	6	3	3	1
H_j	-	7	9	8	9	5	2

ad 4) Celkové časové rezervy pre každú činnosť CR_{ij} , skutočné časy počiatkov činností v jednotlivých uzloch TS_j a prerozdelené skutočné celkové rezervy pre jednotlivé činnosti RS_{ij} sú uvedené v *tab.8.9*.

Tab.8.8. Konečná tabuľka riešenia úlohy metódou CPM - GE.

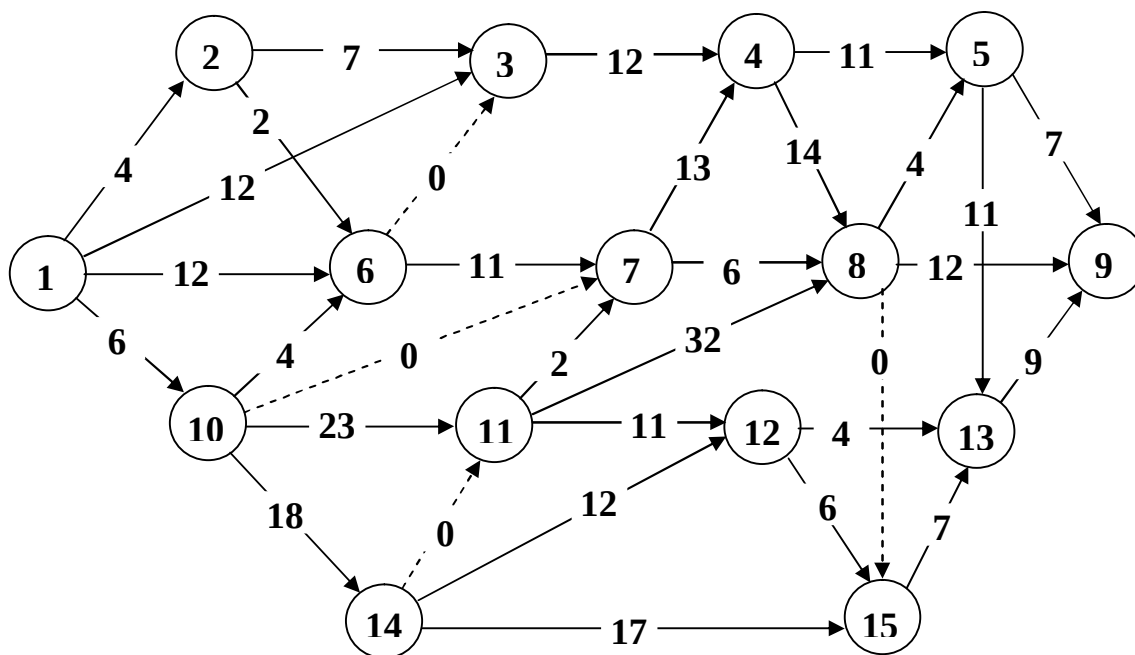
i - j	t_{ij}	w_{ij}	i		j		G_j	H_j	CR_{ij}	TS_j	SR_{ij}
			TM_i	TP_i	TM_j	TP_j					
1-2	3	7	0	0	3	8	12	7	5	4	1
1-3	10	9	0	0	10	10	8	9	0	10	0
1-4	10	8	0	0	10	13	6	8	3	11	1
2-4	5	1	3	8	10	13	6	8	5	11	2
2-5	8	9	3	8	18	21	3	9	10	18	8
3-4	0	0	10	10	10	13	6	8	3	11	1
3-6	10	5	10	10	20	20	3	5	0	20	0
4-5	8	3	10	13	18	21	3	9	3	20	1
4-6	6	1	10	13	20	20	3	5	4	18	3
4-7	9	2	10	13	30	30	1	2	11	26	10
5-7	9	2	18	21	30	30	1	2	3	29	1
6-7	10	2	20	20	30	30	1	2	0	30	0

Záverom považujeme za potrebné k metóde kritickej cesty uviesť, že pri jej reálnej aplikácii sa väčšinou nevystačí s jedným sieťovým grafom na jednej úrovni. Pri plánovaní zložitých rozsiahlych projektov charakteru napr. vodných diel, jadrových elektrární apod. sa v hlavnom grafe uvádzajú iba rámcové etapy (činnosti projektu) napr. montáž technologického zariadenia, stavba hlavnej hrádze apod., ktoré sa ďalej detailne rozplánujú v ďalších čiastkových grafoch.

CVIČENIA

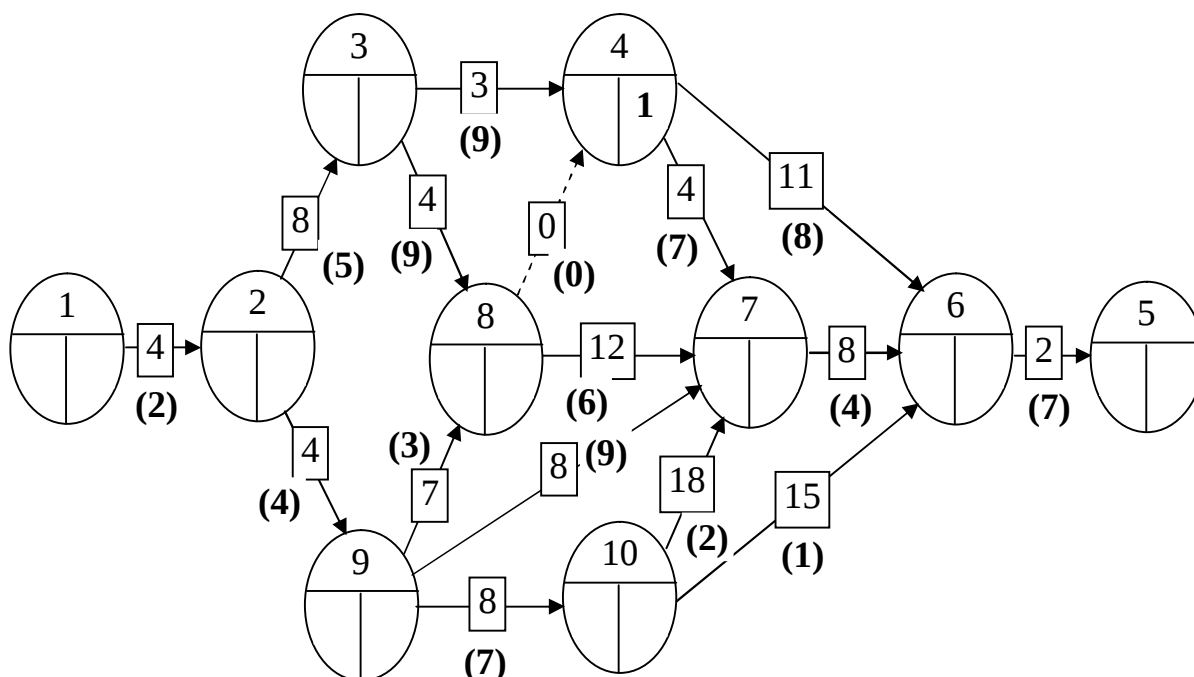
1. Pre zadaný graf je potrebné :

- prečíslovať vrcholy,
- určiť minimálny čas trvania projektu a nájsť kritickú cestu,
- vykonať analýzu rezerv



2. Metódou CPM – GE vyriešte daný graf a vykonajte :

- prečíslovanie vrcholov,
- zistenie minimálneho času trvania projektu,
- vyznačenie kritickej cesty,
- prerozdelenie časových rezerv.



LEGENDA : $\boxed{4}$ - očakávaný (predpokladaný) čas trvania činnosti
 (5) - preferenčné číslo pre konkrétnu činnosť

LITERATÚRA

- [1] *Mejzlík, M. : Základní metody operačního výzkumu a jejich aplikace v železničním vojsku. Vojenská fakulta VŠDS, Žilina 1982.*
- [2] *Slamková, E. – Cajchanová, O. – Chromjaková, F. : Operačná a systémová analýza. Strojnícka fakulta ŽU, Žilina 1997.*
- [3] *Kašpar, V. : Vybrané metódy operačnej analýzy vo vojenskej doprave. FŠI ŽU, Žilina 1998.*

ZÁVER

Operačná analýza v dnešnej dobe zahŕňa také množstvo matematických disciplín s ich ekonomicko–technickými aplikáciami, že nie je možné obsiahnuť všetky v jednej učebnici. Preto sa v predkladanej učebnici „Operačná analýza I“ uvádza iba jej určitá časť zameraná na základné deterministické metódy.

Pri riadení ide zväčša o výber „optimálneho“ variantu rozhodnutia z množiny prípustných rozhodnutí, pričom optimálny variant býva obyčajne určený extrémom cieľovej funkcie. Môže sa preto zdať, že náplň operačnej analýzy je vcelku triviálna - určenie extrému cieľovej funkcie – avšak táto úloha nie je jednoduchá ani pre funkcie definované na konečných množinách, pretože riešenie konkrétneho problému vyžaduje zostavenie adekvátneho matematického modelu a určenie kritéria optimality.

Pri zostavovaní učebnice sme mali na zreteli hlavne aplikačný charakter základných metód a preto boli vynechané zložité matematické odvodzovania a dôkazy ich platnosti a za každou kapitolou je uvedených niekoľko príkladov na precvičenie danej problematiky.

Predpokladáme, že forma učebnice umožní čitateľovi po jej preštudovaní získať základný prehľad o najpoužívanejších deterministických metódach, pochopiť ich princíp a algoritmus a aplikovať uvedený algoritmus pri riešení problémov každodennej praxe.

K dokonalejšiemu zvládnutiu aplikácie uvedených deterministických metód operačnej analýzy pripravujeme učebný text „Návody na cvičenia z operačnej analýzy I“, ktoré budú obsahovať príklady možných aplikácií uvedených algoritmov pri optimalizácii rozhodovania a riadenia.

Všeobecnou tendenciou, ktorú badať hlavne v technických a ekonomických vedách je rozvoj stochastických metód operačnej analýzy, ktoré sú založené na aplikácii teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky. Preto by sme v budúcnosti chceli nadviazať na túto publikáciu ďalšou učebnicou „Operačná analýza II“, ktorej obsah budú tvoriť stochastické metódy operačnej analýzy dotýkajúce sa hlavne oblasti náhodných procesov a ich simulácie, modelov hromadnej obsluhy, modelov zásob, modelov obnovy, modelov spoľahlivosti apod.