



APLIKACE METODY MONTE CARLO K SIMULACI KRITICKÉ CESTY

(APPLICATION OF THE MONTE CARLO METHOD FOR THE SIMULATION OF A CRITICAL PATH)

Bedřich Šesták, Jozef Sabol¹

ABSTRAKT

V práci je ukázáno, že při modelování kritické cesty v síťovém grafu projektu je možné, že každá cesta v síťovém grafu může být kritická, ale pouze s určitou pravděpodobností. Tato pravděpodobnost pak také modifikuje výslednou pravděpodobnost trvání jednotlivých kritických cest. Je naznačeno, že k ocenění vlivu jednotlivých dílčích cest na kritickou cestu je vhodné použít analýzu citlivosti. Celá úloha je zpracovaná za pomoci programu EXCEL.

Klíčová slova:

Řízení projektů, kritická cesta, metoda PERT, metoda Monte Carlo, síťový graf, rovnoměrné rozdělení, pravděpodobnost kritické cesty, analýza citlivosti

ABSTRACT

The authors demonstrated that, in the modeling of the critical path in a network graph any path in the network graph can be critical, but only with a certain probability. This probability then also modifies the resulting likelihood of the duration of individual critical paths. It is suggested that for the assessment of the impact of the individual partial paths on the critical path is appropriate to use a sensitivity analysis. The entire task is processed with the aid of Excel.

Key words:

Project management, critical path, PERT method, Monte Carlo method, network graph, regular distribution, probability of the critical path, sensitivity analysis

¹Bedřich Šesták, prof. Ing. DrSc., Jozef Sabol, doc. Ing. DrSc., Policejní akademie České republiky v Praze, Lhotecká 559/7, 143 01 Praha 4, ČR; +420 974 828 036, sestakb@polac.cz, sabol@polac.cz

1 ÚVOD

Metoda Monte Carlo je způsob simulace, který je založený na opakování řešení určité úlohy, při náhodné změně některých parametrů, které tuto úlohu charakterizují a následném využití metod matematické statistiky pro zpracování konečných výsledků. Je to způsob modelování chování určité reality, kdy neznáme zcela přesně hodnoty parametrů, které ji popisují. Obecně je to tedy numerická metoda, která pomáhá při vytváření a analyzování matematických modelů různých procesů, jejichž průběh je ovlivněn náhodnými faktory, anebo nemožností charakterizovat parametry dané úlohy jedním číslem ale pouze určitým intervalem. Kromě matematických problémů se metoda Monte Carlo hojně využívá v ekonomii zejména při analýze rizik procesů a v neposlední řadě i při analýze rizik projektů. Řadu úloh je tak možné transformovat do problematiky krizového řízení a obecně pak i bezpečnostního managementu.

V deterministických úlohách, které popisují nějaký matematický model, máme jasnou vazbu mezi vstupními parametry modelu a parametry výstupními. Tato vazba je dána samotným modelem. Při daných vstupních parametrech dostaneme odpovídající jednoznačně dané hodnoty parametrů výstupních.

Realistické modely mají vstupní parametry závislé na různých vnějších faktorech, a proto je mnohdy obtížné zadat tyto parametry jednoznačně. Částečně se s touto obtíží vypořádávají tzv. případové studie, které ze všech možných hodnot vstupních parametrů modelu vybírají parametry na základě pravděpodobnosti jejich realizace a vytváří tak scénáře. Nejčastěji jsou vstupní parametry a odpovídající výstupy rozdělené na scénáře pesimistické (nejhorší možné vstupní parametry), optimistické (nejlepší možné vstupní parametry) a scénáře nejpravděpodobnější (vstupní parametry se vyvíjí podle nejpravděpodobnějších hodnot).

Přestože případové studie představují značný pokrok oproti předchozímu případu, je to stále ještě značné zjednodušení reálné úlohy. Základní zjednodušení spočívá někdy v obtížnost rozdělit samotné vstupní parametry na pesimistické, optimistické a nejpravděpodobnější, a to zejména proto, že nemusíme znát minulost těchto vstupních parametrů, které v obecném případě mohou být výstupními parametry jiné úlohy. Dalším problematickým místem je to, že při několika vstupních parametrech nemusí mít tyto současně pesimistické, optimistické anebo nejpravděpodobnější hodnoty. Samostatným problémem scénářů je i to, že vstupní parametry zdaleka nemusí být konstantní a změna jejich hodnot může z parametru jednoho scénáře udělat scénář jiný, aniž by se třeba ostatní parametry takto změnily. Členění na scénáře může být proto obecně velmi složité a snaha postihnout všechny možné kombinace vstupních parametrů vede obvykle ke značnému navýšení počtu scénářů.

2 ANALÝZA A ŘÍZENÍ PROJEKTŮ

Pro další úvahy jsme vybrali problematiku analýzy a řízení procesů, jako jednu ze základních úloh jakéhokoliv plánování. Speciálně se budeme věnovat základní úloze, a to hledání kritické cesty projektu. Projekt bude pro nás představovat soubor relativně jednoduchých činností, které mají ohraničený počátek a konec trvání, logicky na sebe navazují, začátek následné činnosti může začít teprve potom, až skončí činnost předcházející. Samotné analýze předchází sestavení síťového grafu, pomocí kterého se celá úloha analyzuje. Hledání kritické cesty je pak převedeno na úlohu hledání nejdelší cesty v síťovém grafu.

Pokud jsou doby trvání jednotlivých dílčích činností pevně daná čísla, síťová analýza vede celkem snadno ke stanovení nejdelší dráhy v síťovém grafu, a tedy k najetí kritické cesty projektu (metoda CPM). Značnou nevýhodou metody CPM jsou pevně dané doby trvání jednotlivých dílčích procesů, což v praxi je téměř nemožné splnit. Tuto nevýhodu částečně odstraňuje metoda PERT (Program Evaluation and Review Technique), která modeluje neurčitost v době trvání jednotlivých dílčích procesů zavedením optimistické (nejkratší), pesimistické (nejdelší) a nejpravděpodobnější doby trvání jednotlivých dílčích procesů a výsledná doba trvání kritické cesty a její směrodatná odchylka jsou stanoveny na základě podobnosti pravděpodobnostního rozdělení vstupních parametrů s normálním rozdělením (toto je ale pouze přibližné, normální rozdělení je definováno na nekonečném intervalu).

Z tohoto pohledu se při modelování chování projektů chová metoda PERT jako případová studie.

2.1 METODA MONTE CARLO

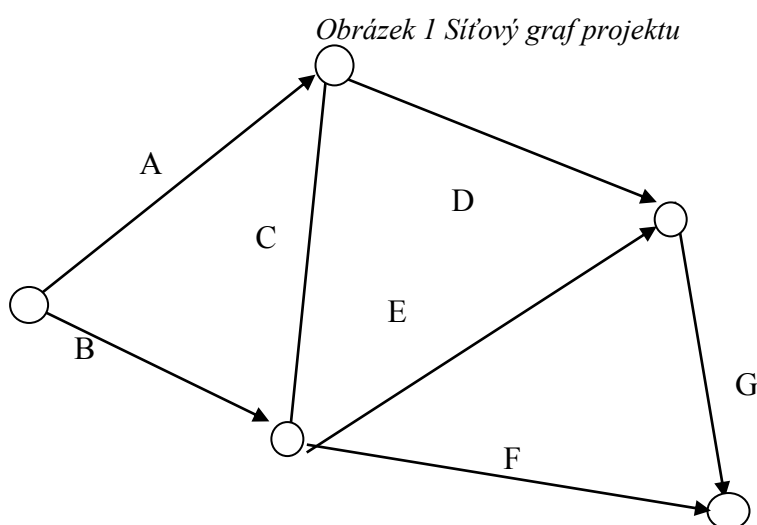
Metoda Monte Carlo představuje oproti metodě scénářů určitý pokrok, a to zejména proto, že nerozlišuje vstupní parametry na optimistické, pesimistické nebo nejpravděpodobnější, ale bere vstupní parametry úloh tak, jak jsou skutečně realizované. Cenou za tento přístup je ale to, že pro danou úlohu je nutné vytvořit matematický model.

Samotná metoda výpočtu by spočívala v tom, že vybereme nějak zvolenou hodnotu jednoho vstupního parametru, nějak hodnotu druhého vstupního parametru a podobně bychom postupovali u všech vstupních parametrů. Po dokončení výběru hodnot všech vstupních parametrů provedeme úkony v souladu s příslušným matematickým modelem a dostaneme výsledek modelu pro takto zvolené vstupní parametry. V dalším kroku zvolíme vstupní parametry jiným způsobem a opět po aplikaci všech úkonů matematického modelu dostaneme opět výsledek. Takto můžeme postupovat mnohokrát, vždy zvolíme *ad hoc* hodnoty vstupních parametrů a vždy dostaneme jiný výsledek tohoto modelování. Abychom dostali nějaké podstatné informace, které by odrážely výsledky celého souboru hodnot modelování je zřejmé, že další zpracování celé úlohy bude v režii matematické statistiky. Zbývá tedy ještě

zvolit určitou metodu výběru vstupních parametrů. Metoda Monte Carlo zde s výhodou využívá generátorů náhodných čísel, které spojí s pravděpodobností, s jakou se realizují jednotlivé hodnoty vstupních parametrů.

3 MODELOVÁNÍ MONTE CARLO

Na obr. 1 je síťový graf projektu, složeného z dílčích činností A, B, C, D, E, F, G. Počáteční a konečné doby trvání jednotlivých dílčích činností jsou uvedeny v tab. 1.



Tabulka 1 Počáteční a konečné doby trvání jednotlivých činností

| Činnost | A | B | C | D | E | F | G |
|-----------|---|---|---|---|---|---|---|
| Minimální | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Maximální | 2 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 |

Pro jednoduchost budeme dále předpokládat, že pravděpodobnostní rozdělení doby trvání je rovnoměrné (je možné i jiné rozdělení definované na konečném intervalu).

Algoritmus modelování Monte Carlo je následující:

- 1) Metodou horní (dolní) cesty najdeme všechny možné cesty od vstupu na výstup (v našem případě jsou to cesty ADG, ACEG, BEG, BF);
- 2) Z intervalu každé činnosti vybereme náhodně číslo a vytvoříme jednotlivé existující cesty;
- 3) Úlohu zopakujeme nejméně 5 000-krát (v našem případě 20 000-krát);
- 4) Z každé čtveřice hodnot, které představují délku jednotlivých cest při jednom daném pokusu, vybereme tu, která je nejdelší a zapíšeme, ostatní označíme nulou. Výsledek je uveden v Tabulce 2.

- 5) Vypočteme pravděpodobnost toho, že daná dráha je kritická tak, že v každém sloupci spočteme počet nenulových hodnot a podělíme celkovým počtem hodnot. Výsledek uvádí Tabulka 3.

Tabulka 2 Délky kritických cest v síťovém grafu

| Délka kritické cesty celkem 20000 hodnot | | | | | |
|--|-----|----------|----------|----|---|
| ACEG | ADG | ACF | BEG | BF | |
| 8,635258 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 9,970675 | 0 | 0 |
| 9,632264 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8,04234 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8,26585 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 5,993773 | 0 | 0 | 0 |
| 7,726202 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7,968509 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 7,559146 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 6,528934 | 0 | 0 |
| 9,656583 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7,425114 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8,409897 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6,36867 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 8,344211 | 0 | 0 |
| 6,422663 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 7,578685 | 0 | 0 |

Tabulka 3 Pravděpodobnost kritické cesty

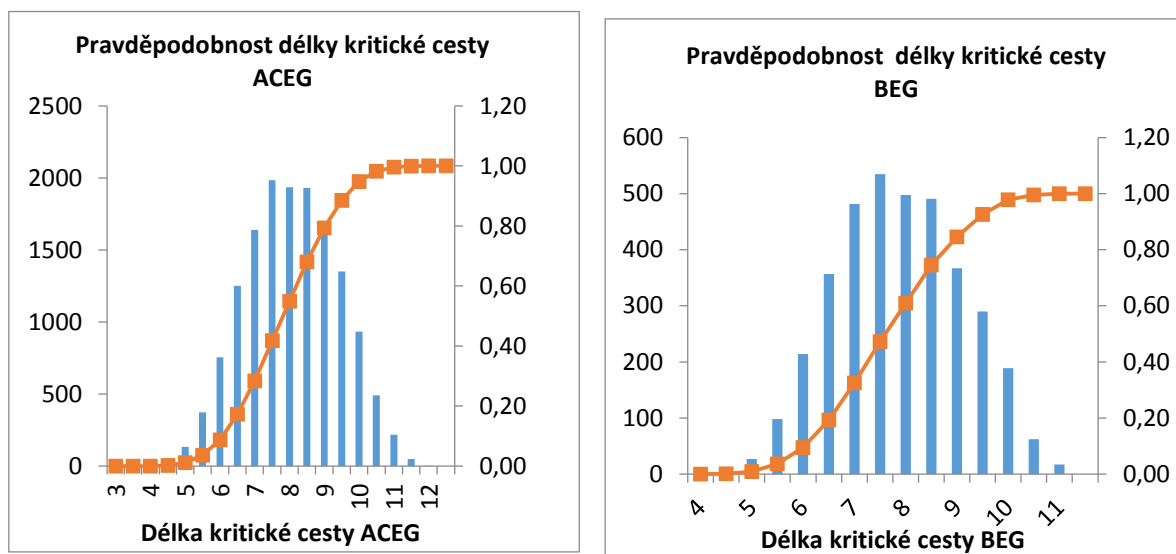
| Pravděpodobnost kritické cesty | | | | | |
|--------------------------------|-----|----------|---------|---------|-----------------------|
| ACEG | ADG | ACF | BEG | BF | Součet pravděpodobno: |
| 0,750202 | 0 | 0,062349 | 0,17272 | 0,01473 | 1 |

Z tab. 3 je zřejmé, že v obecném případě každá cesta v síťovém grafu může být kritická, ale pouze s určitou pravděpodobností. Tato pravděpodobnost je závislá na velikosti a možném překrývání jednotlivých dílčích cest a na charakteru samotného síťového grafu, tedy na projektu, který tento síťový graf zobrazuje.

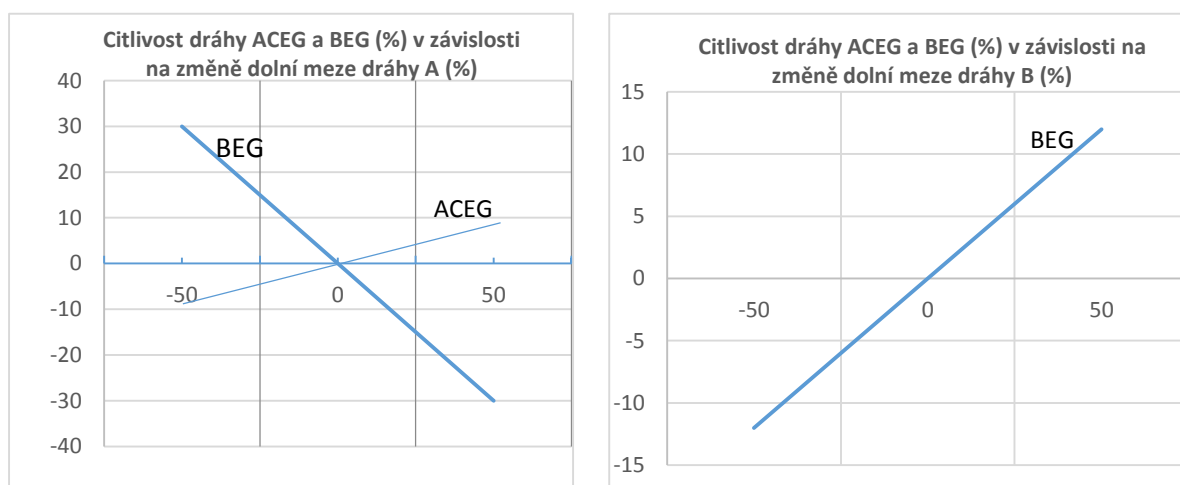
Vynecháme-li v Tabulce 2 nulové hodnoty, můžeme zobrazit délku jednotlivých kritických cest pomocí histogramu. Pro kritické cesty ACEG a BEG je toto zobrazení na následujících obrázcích.

Z tabulky je zřejmé, že při modelování analýzy projektů metodou Monte Carlo můžeme pouze říci, s jakou pravděpodobností bude ta která kritická cesta v rozmezí určitých hodnot (to ale umí také metoda PERT). S přihlédnutím ale k tomu, že každá kritická cesta se realizuje pouze s určitou pravděpodobností (viz Tabulka 3), je nutné hodnoty pravděpodobností délky kritické cesty na Obrázku 2 podstatně snížit.

Na Obrázku 3 je znázorněna citlivost kritických cest ACEG a BEG v závislosti na změně dolní meze dráhy A a B. Obecně je nutné provést tuto citlivostní analýzu u všech dílčích cest, aby bylo možné zjistit, která cesta a speciálně přesnost určení jejich mezí, podstatně ovlivňuje pravděpodobnost výskytu kritické cesty



Obrázek 2 Pravděpodobnost a délka kritické cesty ACEG a BEG



Obrázek 3 Citlivost kritických cest

4 ZÁVĚR

V práci [1] bylo ukázáno, že modelováním metodou PERT je možné, že nemusí být kritická cesta pouze jedna, ale s ohledem na nepřesnou definici vstupních parametrů, je pravděpodobné, že i některá další cesta může být kritická. Cílem této práce bylo ukázat, že při modelování kritické cesty metodou Monte Carlo je principiálně možné, že každá cesta v síťovém grafu může být kritická, ale pouze s určitou pravděpodobností. S určitostí je pak alespoň jedna cesta kritická.

LITERATURA

[1] Mohamadian, Goulias, Cicek, Wang and Maraves (Eds), A Critical comparison between CPM and PERT with Monte Carlo simul. Civil Engineering and UrbanPlanning III, Taylor and Francis Group 1, p.1, London 2014, ISBN 978-1-138-00125-1